Mensa Wien Vortragsreihe – WisSIG Vortragsreihe

04.05.2009

Die Entdeckung des Zählens und die Erfindung der Zahl

Samuel Ferraz-Leite

Vienna University of Technology
Institute for Analysis and Scientific Computing

Warum dieser Vortrag?

Motivation

- Zahlen sind Grundobjekte der Mathematik
- Jeder Mensch weiß was Zahlen sind!
- Wissen wir wirklich was Zahlen sind?

Ziele

- Historischer Überblick
- Mathematische Formalismen verstehen
- Verständnis oder Unverständnis für reelle Zahlen

Inhalt

1. Die Entdeckung des Zählens
2. Formale Definition von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$
3. Arithmetik in der Antike
4. Die Wurzel der Irrationalität
5. Konstruktion von $\mathbb{R}$

Entdeckung des Zählens

Urform des Zählens

- Eins, zwei, viele
- Zählweise noch zu Beginn des 20. Jhdt. beobachtet
- Urindogermanisch & Griechisch: Einzahl, Zweizahl, Mehrzahl
- Deutsch: Zweizahl $\widehat{=}$ Paar

Kerben als Zahlen (30.000-20.000 v. Chr.)

- Mehrere Knochenfunde aus verschiedenen Regionen
- Beispiel: Wolfsknochen mit 55 Kerben in 5er Gruppen

Entdeckung des Zählens

Seßhaftigkeit

- Vor ca. 10.000 Jahren $\rightarrow$ Ackerbau und Viehzucht
- Lager- und Viehbestände müssen gezählt werden
- Handel und Krieg waren Entwicklungsmotoren

Zahlenwörter

- Große Zahlen $\rightarrow$ viele Zahlenwörter
- Verschiedene Schriftzeichen und Zahlensysteme entstanden

Die Russelsche Antinomie

Naive (intuitive) Mengenlehre

- Georg Cantor (1845–1918): “Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.”
- Beispiele:
  - Menge der Schüler einer Schulklasse
  - Menge aller Mengen von Schülern einer Schulklasse
  - Menge aller ganzen Zahlen von 0 bis 10: $\{0, \ldots, 10\}$

Probleme mit Intuitiven Definitionen

- Mengen, die sich nicht selbst enthalten sind erlaubt
- Bilde M – Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten
  - Ann.: M ist nicht Element von $M \Rightarrow M$ Element von M sein
  - Ann.: M ist Element von $M \Rightarrow M$ nicht Element von M sein

Mathematik als Formale Wissenschaft

Logik des tertium non datur

- Aussage entweder wahr oder falsch, nicht beides
- Russelsche Antinomie $\longrightarrow$ Problem für naive Mengenlehre

Axiomensysteme

- Axiom: unmittelbar einleuchtender Grundsatz
- Lege Axiomensystem fest
  - Nicht willkürlich
  - Intuitiven Begriff sinnvoll erfassen
  - Widerspruchsfrei

Die Peanoschen Axiome

Peano Axiome für $\mathbb{N}$ (um 1890)

- Axiome:
  1. 1 ist eine natürliche Zahl
  2. Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $S(n)$
  3. n natürliche Zahl, dann $S(n) \neq 1$
  4. Aus $S(n) = S(m)$ folgt stets $n = m$
  5. Induktionsprinzip: Hat 1 Eigenschaft E und folgt aus n hat Eigenschaft E, dass auch $S(n)$ Eigenschaft E hat, so haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft E
- Widerspruchsfrei
- Stimmt (bis auf Bezeichnungen) mit intuitiver Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$ überein

Der Induktionsbeweis

Theorem (Der kleine Gauss)

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt die Summenformel

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis:

- $n = 1 : \quad 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
- $n \mapsto (n+1)$: Summe bis $(n+1)$ und Formen für n:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n \qquad + \qquad (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Addition und Subtraktion

- Addition auf $\mathbb{N}$ $\checkmark$
- Subtraktion auf $\mathbb{N}$ $\times$
- $5-7$ ergibt keine natürliche Zahl
- 1. Schritt: 1 ist Nachfolger von 0
- 2. Schritt: Für n natürliche Zahl definiere

$$(-n) \text{ erfüllt } n+(-n)=0$$

Ganze Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen. Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen führen stets zu ganzen Zahlen.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Multiplikation und Division

- Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ $\checkmark$
- Division auf $\mathbb{Z}$ $\times$
- $1 \div 2$ ergibt keine ganze Zahl
- Definiere $\frac{1}{2}$ als Ergebnis von $1 \div 2$
- Bruchzahlen mit Bruchrechnung (Nenner darf nicht 0 sein)
- Brüche $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ stellen gleiche Zahl dar

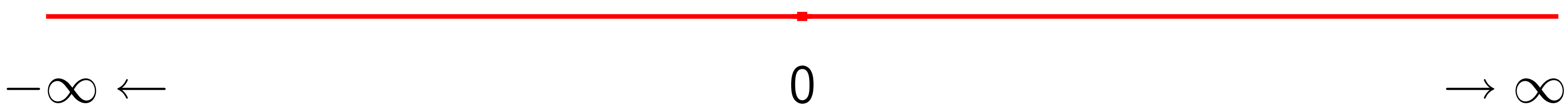
Rationale Zahlen

Die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ heißt Menge der rationalen Zahlen. Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von rationalen Zahlen führen stets zu rationalen Zahlen.

Mehr über $\mathbb{Q}$

- Rational weil Bruchzahl Verhältnis ausdrückt (nicht weil vernünftig)
- Bezüglich vier Grundrechenarten abgeschlossen $\rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist Körper
- Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Stellen ist rationale Zahl
- Jede Dezimalzahl mit Periode ist rationale Zahl
- Beispiele: $0.75 = \frac{3}{4}$ $\qquad 0.333\overline{3} = \frac{1}{3}$
- Zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele weitere

Zahlengerade



Das antike Ägypten

Motor der Entwicklung

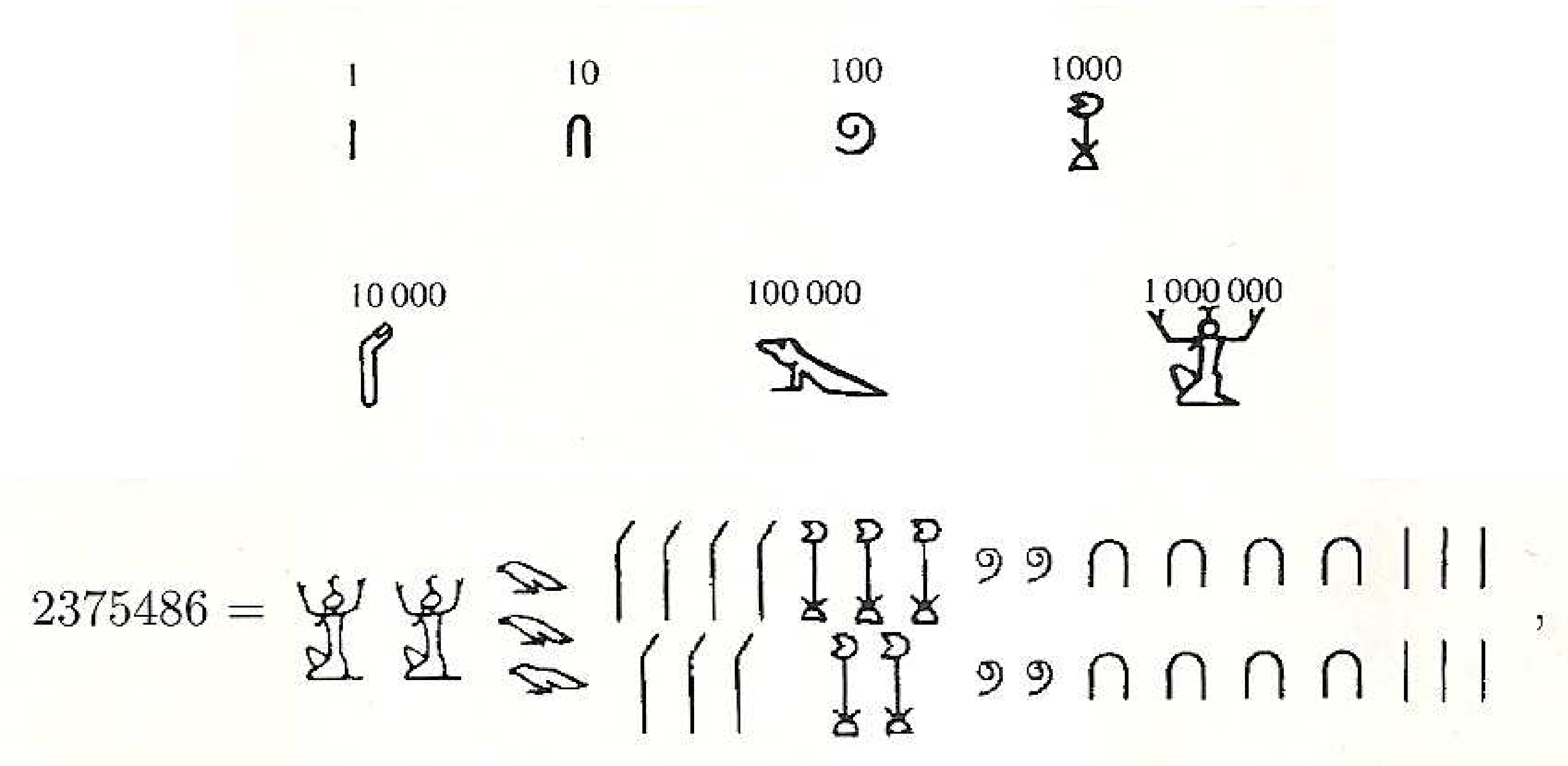
- Verwaltung
- Ingenieurwesen (Bewässerung, Feldabmessung nach Flut,. . .)
- Religion (Pyramidenbau,. . .)

Quellen

- Zahlreiche mathematische Texte
- “Lehrbücher” mit Aufgabensammlungen

Darstellung natürlicher Zahlen

- Zeugnisse von um 3000 v. Chr. erhalten
- Hieroglyphen additiv aneinandergereiht
- Es gab keine 0 und keine negativen Zahlen



Darstellung rationaler Zahlen

- Nur “Stammbrüche” $\frac{1}{n}$ dargestellt
- Querstrich über Zahl
- Jede Bruchzahl darstellbar als Summe von Stammbrüchen
- Beispiel: $\frac{2}{97} = \frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$

Arithmetik

- Zu erst Zerlegung in Stammbrüche (nach Tabelle)
- Addition/Subtraktion von rationalen Zahlen
- Multiplikation/Division mit Einschränkungen
- $\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{\ell}$ ✓ aber $\frac{m}{n} \div \frac{k}{\ell}$ $\times$

Heute: Extrem clevere Arithmetik (Dezimalzahlen, Bruchrechnung)

Griechische Antike

- Griechen übernahmen Arithmetik von Ägyptern
- Mathematik = Geometrie
- Zahlen sind Längen $\rightarrow$ keine 0 oder negative Zahlen
- Rationale Zahlen sind Verhältnis von Längen

Philosophische Mathematik

- Philosophen fragen “Warum?” statt “Wie?” (600 v. Chr.)
- Bewusste Auseinandersetzung mit Zahlenbegriff (550 v.Chr.)
- Euklids Elemente: Erstes Axiomensystem (330 v. Chr.)
- Abstrakte (echte) Beweise statt Beispiele (330 v. Chr.)
- Ingineurwissenschaft $\rightarrow$ Naturwissenschaft/Geisteswissenschaft
- Buchstabenrechnung (Diophant 250 n. Chr.)
  $\rightarrow$ abstrakter Zahlenbegriff

Das Indische Zahlensystem

- Zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$
- Über Islam an Europa weitergereicht $\rightarrow$ Arabische Ziffern
- Positionssystem, d.h. Stelle in der Zahl gibt Ziffer den Wert
- Beispiel:
  $$123.316 = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 6 \cdot \frac{1}{1000}$$
- Nur 10 Symbole $\rightarrow$ alle Zahlen!
- Null wird zunächst als Platzhalter, dann als Zahl eingeführt
- Alle Grundrechenarten (auch Division von rationalen Zahlen)

Ein letzter Schritt

Mit Aufblühen des Bankwesens werden negative Zahlen als Abbildung von Schuld in Europa anerkannt (16. Jhdt.)

1. Die Entdeckung des Zählens
2. Formale Definition von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$
3. Arithmetik in der Antike
4. Die Wurzel der Irrationalität
5. Konstruktion von $\mathbb{R}$

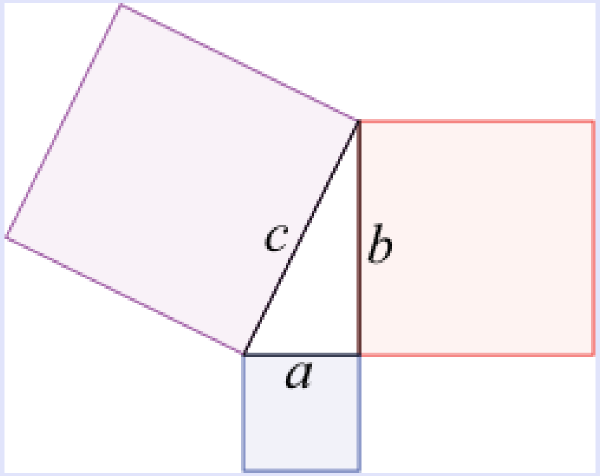
Sind alle Zahlen rational?

Zusammenfassung

- Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Stellen ist rational
- Rationale Zahlen liegen dicht auf Zahlengerade
- Kann es also irrationale Zahlen geben? Ja!

Satz von Pythagoras

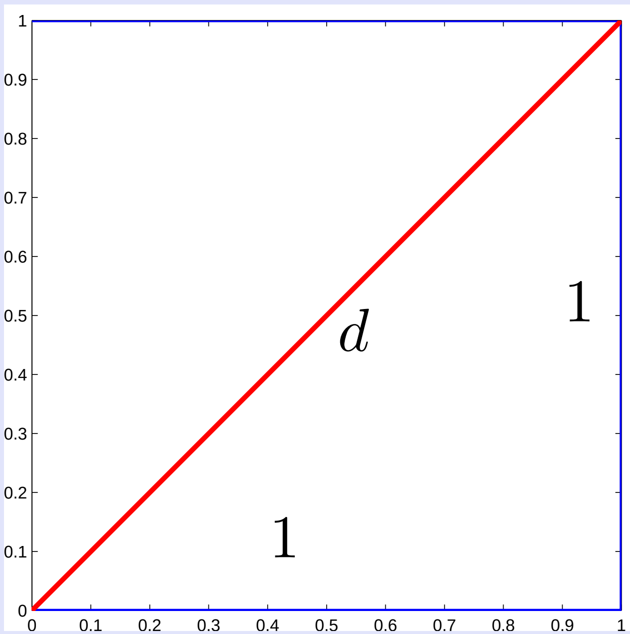
$$a^2 + b^2 = c^2$$



Die Wurzel aus 2

Definition

- Aus Satz des Pythagoras folgt: $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
- Definiere $\sqrt{2}$ durch $(\sqrt{2})^2 = 2$



$\sqrt{2}$ ist irrational

Theorem

Die Wurzel aus Zwei $\sqrt{2}$ ist keine Bruchzahl, also irrational.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an es gibt natürliche Zahlen m, n mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ und zeigen, dass das nicht sein kann.

- Jede natürliche Zahl hat eindeutige Primfaktorzerlegung $n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot \ldots$
- Beispiel: $20 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1$
- Annahme: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$
- $2 = \frac{m^2}{n^2}$
- $2 \cdot n^2 = m^2$
- $2 \cdot 2^{2k_1} \cdot \ldots = 2^{2j_1} \cdot \ldots \quad \longleftarrow$ unmöglich!

Bemerkungen

- Irrationale Zahlen sind Dezimalzahlen mit “unendlich” vielen Nachkommastellen
- Es gibt unendlich viele irrationale Zahlen
- Man kann sie nur als Symbol aufschreiben
- Aber ihren Wert beliebig gut durch Dezimalzahlen annähern
- Rationale & irrationale Zahlen füllen Zahlengerade lückenlos
- Diese Zahlenmenge heißt Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
- Aber: Das ist nur eine intuitive Definition!

Intervallschachtelung

- Intervall $[a, b]$ Menge aller rationalen Zahlen z mit $a \leq z \leq b$
- Beispiel: $[1, \frac{3}{2}]$

Intervallschachtelung

- Unendliche Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $n = 1, 2, \ldots$
- $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
- $|\bigcap_{n=1,2,\ldots}[a_n, b_n]| \leq 1$

  Höchstens eine rationale Zahl c in allen Intervallen

  Intervallschachtelung konvergiert gegen c

Beispiel: $[0, 2], [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \ldots [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ konvergiert gegen 1
Beispiel: $[1, 1], [1, 1], [1, 1], \ldots, [a_n = 1, b_n = 1]!$

Intervallschachtelungen als Zahlen

Gleichheit von Intervallschachtelungen

- Zwei Intervallschachtelungen $[a_n, b_n], [x_n, y_n]$
- $a_n \leq y_n$ und $x_y \leq b_n$ für alle n
- $[a_n, b_n] = [x_n, y_n]$
- $[a_n, b_n]$ konvergiert gegen c genau dann wenn $[x_n, y_n]$

Arithmetik

- $[a_n, b_n] + [x_n, y_n] = [a_n + x_n, b_n + y_n]$
- $-[a_n, b_n] = [-b_n, -a_n]$
- $[a_n, b_n] \cdot [x_n, y_n] = [a_n \cdot x_n, b_n \cdot y_n]$
- $[a_n, b_n] \div [x_n, y_n] = [\frac{a_n}{x_n}, \frac{b_n}{y_n}]$
- Zahlenbereich der Intervallschachtelungen bildet Körper

Erweiterung von $\mathbb{Q}$ bildet $\mathbb{R}$

Reelle Zahlen

Menge aller Intervallschachtelungen (bis auf Gleichheit) $\mathbb{R}$.
Ist z rational, so wird $[a_n = z, b_n = z]$ mit z identifiziert.

$\sqrt{2}$ ist Element von $\mathbb{R}$

- Setze $[a_1, b_1] = [1, 2]$, es gilt $1^2 \leq 2 \leq 2^2$
- Setze $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{3}{2}$
- Falls $2 \leq c_1^2$ setze $b_2 = c_1$, sonst $a_2 = c_1$
- Wiederholen dieses Vorgangs liefert $[1, 2], [1, 1.5], [1.25, 1.5], \ldots$
- Es gilt $[a_n, b_n] \cdot [a_n, b_n] = [2, 2]$

Bemerkungen zu $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ auf Zahlengerade dicht gepackt
- $\mathbb{R}$ auf Zahlengerade lückenlos
- Zwischen zwei rationalen unendlich viele irrationale Zahlen
- Alle Dezimalzahlen mit "unendlich" vielen Nachkommastellen
- $\mathbb{R}$ kann nicht erweitert werden, ohne übliches "$\leq$" zu verlieren

Zusammenfassung

- Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$
- Natürliche Zahlen sind Abbild der beobachteten Wirklichkeit
- Ganze Zahlen bereits sehr abstrakt (negative Zahlen)
- Reelle Zahlen sind Wunder, nur in unseren Köpfen
- Sind reelle Zahlen also real?

Theorem (Banach-Tarski-Paradoxon)

Eine Kugel kann in endlich viele Teile zerlegt werden, aus denen sich zwei Kugeln jeweils von der Größe des Originals zusammensetzen lassen

Beweisgrundlage: Kontinuum der reellen Zahlen
Schlussfolgerung: Modelle hat eingeschränkte Gültigkeit

Sind reelle Zahlen real?

Michael Stifel (1544): Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert,ob sie wahre Zahlen sind oder nur fingierte... Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten, jedenfalls mit den Beweismitteln, die sie uns bieten. Wir werden also veranlaßt, ja gezwungen, zuzugeben, daß sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen, die wir als gewiß und feststehend empfinden.

Noch Fragen?

- H.-W. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wußing: *4000 Jahre Algebra,*
  Springer Verlag, 2003
- H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1,*
  Teubner Verlag, 1980
- S. Ferraz-Leite: *Die Entdeckung des Zählens– Die Erfindung der Zahl,*
  DISKUSSION, Mensa Österreich, in Vorbereitung 2009

samuel.ferraz-leite@tuwien.ac.at