TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DISSERTATION

Fraktalähnliche Architektur – Einteilung und Messbarkeit

Ein Programm in VBA für AutoCAD

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften
unter der Leitung von

O.Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr.phil. Georg Franck-Oberaspach

E259.1 Institut für Architekturwissenschaften
Digitale Architektur und Raumplanung

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Architektur und Raumplanung
von

Dipl.Ing. Wolfgang E. Lorenz

Matr.Nr. 9025694
1120 Wien, Tivoligasse 7-9

Wien, Dezember 2013, _____

Die vorliegende Dissertation
widme ich meiner Familie,

Claudia und Patrick.

Kurzfassung der Dissertation

In der vorliegenden Dissertation wird untersucht, in welchem Ausmaß sich fraktale Geometrie dafür eignet, Architektur zu charakterisieren und welche Vorteile eine solche Herangehensweise gegenüber einer Beschreibung durch die uns seit über zwei Jahrtausenden vertrauten euklidischen Geometrie hat. Es werden Gebäude unterschiedlicher Epochen – mit dem Schwerpunkt des zumeist als ‚*glatt*' bezeichneten Teils der *klassischen Moderne* (im speziellen jene des *International Style*) und einer fraktal-ähnlichen *organischen Architektur* – dahingehend untersucht, ob die charakteristischen Eigenschaften eines Fraktals auftreten, beziehungsweise unter welchen Einschränkungen eine solche Betrachtung überhaupt möglich ist. Die abschließenden Analysen von Fassaden mittels der Box-Counting-Methode, die vom Autor in einem CAD Programm implementiert wurde, geben Aufschluss über eine mögliche Kategorisierung von Architektur mit Hilfe der fraktalen Geometrie. Diese Analysen umfassen neben der Box-Counting-Dimension einen definitiven Maßstabsbereich und das Bestimmtheitsmaß.

Abstract

This thesis investigates to what extent the fractal geometry is suitable for characterizing architecture. It describes the benefits of such an approach as opposed to a description by means of Euclidean geometry (which we have been familiar with for more than two thousand years). In this context, buildings of different epochs are examined to determine whether the characteristics of fractals occur and subject to which restrictions such a point of view is possible at all. The focus lies on the International Modern (International Style) that is in most cases called ‚smooth' and a fractal-like organic architecture. The final analysis of facades is carried out by means of the so-called box-counting method. This method has been implemented by the author in a CAD program. The studies indicate a possible categorization of architecture on the basis of fractal geometry. In addition to the box-counting dimension this comprises a definite range of scales and the coefficient of determination.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsangabe

A. Fraktale, Architektur und Ästhetik **13**

A.1. Vorbemerkungen 13
A.1.1. Euklidisch oder Fraktal 13
A.1.2. Visuelle Wahrnehmung 13
A.1.3. Neue Begrifflichkeit 14

A.2. Charakterisierung und Analyse 15
A.2.1. Beschreibung der Architektur 15
A.2.2. Grundlagen für eine Charakterisierung 17
A.2.3. Fragen 18

B. Mathematische Fraktale – Grundlagen **20**

B.1. Einführung 20
B.1.1. How long is the coastline of Britain? 20
B.1.2. Monsterkurven 21
B.1.3. Cantor'sche Punktmenge (Cantor-Menge) 28

C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition **31**

C.1. Eigenschaften Teil 1 31
C.1.1. Selbstähnlichkeit 31
C.1.2. Skaleninvarianz 34
C.1.3. Fraktale Dimension 35

C.2. Eigenschaften Teil 2 35
C.2.1. Entstehung durch Iterationen 35
C.2.2. Zerklüftet und unendlich komplex 38
C.2.3. Gemeinsamkeiten mit der Natur 38

C.3. Fraktale und Euklidische Geometrie 39
C.3.1. Euklidische Geometrie 39
C.3.2. Fraktale Geometrie 39

D. Einteilung – Fraktale Methoden **42**

D.1. Determinismus oder Zufall 42
D.1.1. Deterministische Fraktale 42
D.1.2. Faktor Zufall 43

D.2. Erzeugung von Fraktalen 43
D.2.1. IFS – Iteration-Function-System 44
D.2.2. L-Systeme – Lindenmayer 50
D.2.3. Mittelpunktverlagerung 52
D.2.4. Curdling und Staubwolken 56
D.2.5. Diffusionsbegrenztes Wachstum 57

D.3. Conclusio 59

E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal **61**

E.1. Grundlagen 61
E.1.1. Die Betrachtung einer Fassade 62
E.1.2. Nähe zur euklidischen/fraktalen Geometrie 63
E.1.3. Architektur und Monsterkurven 65

E.2. Euklidisch-nahe Architektur 65
E.2.1. Adolf Loos und die beginnende Moderne 65
E.2.2. Deutscher Werkbund 67
E.2.3. Bauhaus 68
E.2.4. Le Corbusier und eine neue Architektur 69
E.2.5. International Style 69
E.2.6. Conclusio 70

E.3. Fraktal-nahe Architektur 71
E.3.1. Einleitung 71
E.3.2. Beispiele 74

E.4. Conclusio 87

F. Computer-Programme **90**

F.1. Computer-Programme 90
F.1.1. Visual Basic for Applications (VBA) 90

F.2. Initiator/Generator mit VBA 91
F.2.1. Die Koch-Kurve als Computer-Programm 91
F.2.2. Weitere Monsterkurven 94
F.2.3. Mandelbrot-Menge 94

F.3. Initiator/Generator und Architektur 95
F.3.1. Castel del Monte Fraktal 96
F.3.2. Shikhara Fraktal 97
F.3.3. Gotisches Fenster Fraktal 99
F.3.4. Varianten 101
F.3.5. Aushöhlung und Cluster 102
F.3.6. Goldenes Rechteck 104

F.4. Weitere Methoden 105

F.5. Conclusio 106

G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität **109**

G.1. Dimensionsbegriff 109
G.1.1. Topologische Dimension D_T 110
G.1.2. Hausdorff-Besicovitch-Dimension D_H 110

G.2. Fraktale Dimension: Mess-Methoden 110
G.2.1. Selbstähnlichkeits- oder Ähnlichkeitsdimension D_s 111
G.2.2. Zirkel-Dimension D_Z 111
G.2.3. Box-Counting- oder Gitterbox-Dimension D_B 114
G.2.4. Rescaled-Range-Analysis & Range-Analysis 116
G.2.5. Fraktale Dimension Zusammenfassung 118

G.3. Box-Counting in der Architektur 118
G.3.1. Die Fassade 118
G.3.2. Wechselwirkung mit der Umgebung 119

G.4. Entfernung und Sehfeld 120
G.4.1. Boxgrössen und das menschliche Auge 120

G.5. Einflüsse auf die Messergebnisse 122

G.6. VBA Box-Counting 124
G.6.1. Datenauswertung 127
G.6.2. Messergebnisse 131
G.6.3. Zusammenhang Boxgrösse und Sehfeld 139
G.7. Variante des VBA Programmes 141
G.7.1. Standorte 142
G.8. Conclusio 143
G.8.1. Die Analyse von Fassaden 143
G.8.2. Die Auswertung der Daten 143
Anhang 145
H. Conclusio / Outlook 154
H.1. Conclusio 154
H.1.1. Besitzt Architektur fraktale Eigenschaften? 154
H.1.2. Kann fraktal-ähnliche Architektur gemessen werden? 154
H.1.3. Welche Schlussfolgerung kann aus den Ergebnissen gezogen werden? 154
H.2. Weitere Computer-Programme 155
Literatur 161
Begriffe 165
Nomenklatur 167

© Wolfgang E. Lorenz

Alle Bilder, sofern nicht anders beschrieben, unterliegen dem Copyright des Autors. Es dürfen keine Kopien ohne Berechtigung durch den Autor erstellt werden. Auch auszugsweise Zitate dürfen nicht ohne Genehmigung erstellt werden.

Danksagung

Die fraktale Geometrie unter dem Aspekt der Architektur und des Städtebaus begleitet mich schon mehr als ein Jahrzehnt. Begonnen hat es mit einer noch naiven Herangehensweise als Entwurfsidee. Erst durch die Förderung durch Prof. G. Franck wurde diese oberflächliche Herangehensweise in eine weniger entwurfsbetonte sondern vielmehr theoretische und analytische Richtung geleitet, der ich seitdem treu geblieben bin. Für die langjährige Motivation, an diesem Thema weiterzuarbeiten, und die Unterstützung durch Gespräche gilt mein besonderer Dank meinem Doktorvater Prof. G. Franck. Auch die Diskussionen mit meinen Kollegen, im Speziellen mit Dr. G. Wurzer waren stets Inspirationsquelle.

Meiner Familie möchte ich für die Geduld und den nötigen Rückhalt danken, im Besonderen meiner Gattin, die mich durch den Prozess des Schreibens mit wertvollen Anmerkungen aus der Sicht eines Nicht-Architekten versorgt hat. Für das Verständnis dieses interdisziplinären Forschungsthemas war auch ihr mathematisches Wissen eine wertvolle Bereicherung.

Außerdem möchte ich Frau Renate Sohr, die meine Arbeit über die fraktale Geometrie im Zusammenhang mit der Architektur seit langer Zeit begleitet, für die Diskussionen über Formulierungen danken, die mir oftmals Anregung für weitere Forschungen waren.

Wolfgang E. Lorenz
Wien, Dezember 2013

Abstract

ZENTRALES THEMA

Bereits bevor der polnische Mathematiker Benoît Mandelbrot im Jahr 1975 den Begriff *Fraktal*[01] für natürliche und künstliche Gebilde mit bestimmten charakteristischen Eigenschaften prägte, wurden derartige Strukturen von Mathematikern untersucht, die sie aber zunächst als außergewöhnlich und selten einstuften. B. Mandelbrot fasste schließlich die Ergebnisse unter anderen von Georg Cantor (Cantor-Menge 1870), Giuseppe Peano (Peano-Kurve 1890), Helge von Koch (Koch-Kurve 1904), Waclaw Sierpinski (Sierpinski-Dreieck 1915) und Gaston Maurice Julia (Julia-Menge 1918) zusammen und formulierte die *Fraktale Theorie*, die auch als Theorie der Selbstähnlichkeit bezeichnet wird. Einen entscheidenden Schritt zu ihrer Popularität stellte die Veröffentlichung des Buches ***Form, Chance and Dimension***[02] von B. Mandelbrot aus dem Jahre 1977 dar, aber auch die zahlreichen grafischen Darstellungen, die erst durch den Einsatz von Computern ermöglicht wurden. Infolgedessen konnte die Sonderstellung der charakteristischen Eigenschaften in sehr unterschiedlichen Gebieten widerlegt und vielmehr deren weite Verbreitung nachgewiesen werden. Eine zentrale Eigenschaft von Fraktalen ist jene der Selbstähnlichkeit. Sie besagt, dass die Teile eines Objektes exakte oder annähernd verkleinerte Kopien des zerklüfteten Ganzen sind[03]. Fraktale bestehen folglich aus einzelnen Teilen, die miteinander in enger Verbindung stehen. Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit bildet keine Ausnahme sondern existiert in zahlreichen Formen der natürlichen Umgebung des Menschen vom Blumenkohl bis zur Küstenlinie, von den Wolken bis zur Verteilung der Sterne, von Sträuchern bis zu Bergen, aber auch in Kursverläufen an Börsen, der Verästelung von Blutgefäßen oder in der Musik. Aus den oben genannten Beispielen lässt sich ableiten, warum die fraktale Geometrie auch oft als die Geometrie der Natur bezeichnet wird.

Fraktal – Eine Einführung

Es waren aber letztendlich insbesondere die Verwendung des Computers und die dadurch zur Verfügung stehenden visuellen Darstellungen[04], die den Siegeszug der fraktale Geometrie und ihren raschen Einzug in zahlreiche Forschungsfelder ermöglichten. Folglich wurden auch Architekten auf diese Form der Geometrie aufmerksam, die ihnen nun neue Denkanstöße für die künstlerische Auseinandersetzung mit ihren eigenen Entwürfen gab. In der Architektur liegt der Fokus in der Beschäftigung mit der fraktalen Geometrie vor allem darauf, einerseits die Eigenschaften der gebauten Umwelt über Fraktale zu beschreiben und andererseits diese in Entwürfen umzusetzen. Bei der Analyse von Gebäuden eröffnet sich die Erkenntnis, dass zahlreiche Baumeister und Architekten aus der Antike bis zur Gegenwart die für Fraktale essenzielle Eigenschaft der Selbstähnlichkeit zum Teil bewusst, aber auch unbewusst in ihre Gebäude aufgenommen haben. Dabei steht oftmals eine Grundidee im Vordergrund, die sich in allen Bauteilen vom großen Maßstab, dem Ganzen, bis zum kleinsten Maßstab eines Details widerspiegelt.

Zentrales Thema der Dissertation ist die Frage nach der Bedeutung der fraktalen Geometrie in der Architektur.

Bereits Benoît Mandelbrot, oft als Vater der fraktalen Geometrie bezeichnet, gibt einen Anstoß zur Unterscheidung zwischen einer Architektur, die Verwandtschaft mit der fraktalen Geometrie aufweist, wie jene der *Beaux-Arts*, und der Architektur eines Mies van der Rohe, die er als Rückgriff auf das skalenbeschränkte (*scalebound*) Euklidische bezeichnet.[05] In der Architektur ist demnach die Charakterisierung und die sich dadurch ergebende Einteilung nach der Nähe von Gebäuden zur fraktalen oder zur euklidischen Geometrie möglich. Sowohl der Begriff der Nähe als auch die Schlussfolgerung aus einer solchen Einteilung wird in dieser Dissertation behandelt. Voraussetzung für eine Einteilung ist eine verifizierbare Analyse, deren Grundlagen in dieser Arbeit erörtert werden.

01 Der Begriff *Fraktal* wurde von Benoît Mandelbrot eingeführt, um Objekte mit bestimmten Eigenschaften zu beschreiben. Das Wort wird vom lateinischen *fractus* (*in Stücke zerbrochen; irregulär*), beziehungsweise vom lateinischen Verb *frangere* (*zerbrechen, unregelmäßige Bruchstücke erzeugen*) abgeleitet.

Mandelbrot B. B. (1975); siehe auch *Mandelbrot B. B. (1977)*

02 *Mandelbrot B. B. (1977)*

03 Sind die Teile exakte, verkleinerte Kopien des Ganzen, so wird das als strikte Selbstähnlichkeit bezeichnet.

04 Die erste Darstellung der Mandelbrot-Menge bestand noch aus einer Abfolge des Buchstaben *X*, während später die bunten hoch auflösenden Bilder zahlreiche Veröffentlichungen zierten.

05 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 35f

In dem Kapitel *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition* werden zunächst die für ein Fraktal als Definition geltenden Eigenschaften anhand von mathematischen Beispielen erklärt, da diese die Grundvoraussetzung des analytischen Teils bilden. Nachdem die fraktale Geometrie eng mit der Natur verbunden ist und es hier bereits zahlreiche Untersuchungen gibt, werden Parallelen zu natürlichen Objekten gezogen, auch um die Unterschiede zu mathematischen Fraktalen und die sich somit ergebende Einschränkungen zu erläutern. In weiterer Folge werden die Eigenschaften aus dem Blickwinkel der Architektur betrachtet, wobei besonderes Augenmerk auf die Grenzen einer solchen Darstellung gelegt wird. Bei den Vergleichen und den Abbildungen wird die jeweils zugrunde liegende Struktur herausgearbeitet, um Adaptierungen durch äußere Einflüsse auszublenden und nur den für die Analyse wesentlichen Kern freizulegen. Die angeführten Visualisierungen sind Outputs selbstgeschriebener Programme in Visual Basic for Application (VBA) für AutoCAD. Teile des Codes werden dort wiedergegeben, wo sie den Text oder die Abbildung in seiner Lesbarkeit unterstützen.

Fraktale Eigenschaften

Beispiele mit Selbstähnlichkeit finden sich an gotischen Kathedralen genauso wie beim Shikhara – dem gekrümmten Turm über dem Allerheiligsten hinduistischer Tempel – oder bei Robie House von Frank Lloyd Wright. Ob fraktale Eigenschaften bewusst gewählt wurden, wird nur in einzelnen Fällen behandelt. Aus den untersuchten Beispielen entwickelt sich nun die Frage, ob fraktal-ähnliche Architektur und hierbei im Speziellen die jeweilige Fassade unter der Prämisse der fraktalen Geometrie gemessen werden kann, um unterschiedliche Designs oder Entwürfe unter dem Gesichtspunkt der fraktalen Eigenschaften miteinander vergleichen zu können.

Eine Möglichkeit, komplexe räumliche Strukturen zu beschreiben, bietet die fraktale Dimension.

Die fraktale Dimension ist ein für das Fraktal charakteristisches Maß, das unabhängig von dem betrachteten Ausschnitt besteht und nun nicht mehr nur ganzzahlig sein muss, sondern auch gebrochene Werte zulässt. Dabei existieren verschiedene Ansätze die fraktale Dimension zu definieren, worunter die Hausdorff-Besicovitch-Dimension, die Ähnlichkeitsdimension, die Box-Counting-Dimension und die Yardstick- oder Zirkel-Dimension fallen.

Die fraktale Dimension als Bewertung.

Zur Berechnung der fraktalen Dimension dienen verschiedene Methoden, wobei nicht alle für die Messung von Gebäuden geeignet sind. Einige Methoden und deren Einsatzmöglichkeiten werden im Kapitel über die fraktale Dimension vorgestellt. Basis des analytischen Teiles der Dissertation bildet vor allem die Einführung der Box-Counting Methode als Analysetool für Fassaden in Carl Bovills Buch *Fractal Geometry in Architecture and Design*.[06] Daraus entwickelte der Autor der Dissertation ein VBA Programm, das Vektorgrafiken von Fassaden in AutoCAD misst. Verschiedene Variationen des Algorithmus des Programmes und einige folgende Berechnungen dokumentieren die Praxistauglichkeit dieser einfach zu handhabenden Methode. Abschließend werden einige Ergebnisse der Messungen von Fassaden, die zuvor der fraktalen Geometrie zugeordnet wurden, und sich daraus ableitende Schlussfolgerungen präsentiert.

Einen weiteren Aspekt bei der Untersuchung der Architektur nach fraktalen Gesichtspunkten betrifft die Frage nach dem Zusammenhang zwischen architektonischer Qualität[07] und fraktalen Eigenschaften. Die Beantwortung dieser Frage ist aber nicht zentrales Thema der vorliegenden Arbeit und ihr wird daher nur vereinzelt nachgegangen.

06 *Bovill C. (1996)*

07 *Franck, G. et al. (2008)*

Problemstellung

A. Fraktale, Architektur und Ästhetik
Eine Einführung

Das Hauptaugenmerk bei der Untersuchung von natürlichen Objekten unter dem Gesichtspunkt der fraktalen Geometrie liegt zunächst auf der Erfassung der Komplexität in der Natur, um diese in weiterer Folge beschreibbar zu machen. Die fraktale Geometrie kann folglich als der Versuch gedeutet werden, natürliche Strukturen und Phänomene, zu denen beispielsweise die Wettervorhersage zählt, mathematisch zu beschreiben. Es ist aber auch der Versuch, hinter das Geheimnis der – von Wertvorstellungen zunächst unabhängigen – „*Schönheit*" der Natur zu kommen.[01] Diese „*Schönheit*" der Natur kann darin begründet sein, dass wir sie gewohnt sind, oder aber, dass die Struktur natürlicher Objekte aus einem Wachstum entsteht, das logischen Gesetzen folgt. Diese Logik hat ihre Grundlage im Zugang zu Nährstoffen, dem Nutzen als Verteidigung oder zur Paarung. Die fraktale Geometrie beschreibt nun diese Strukturen durch Algorithmen oder simuliert das Wachstum, um dadurch künstliche Formen generieren zu können, die der Natur ähnlich sind.

Während Architekten im Laufe der Jahrhunderte auf der Suche nach der Ästhetik – der wahrnehmbaren Schönheit und Harmonie – in der Architektur verschiedene Proportionssysteme entwickelten, kommt nun eine Geometrie mit Anleihen aus der Natur hinzu. Die fraktale Geometrie kann aus einfachen Formeln und mit wenigen Grundelementen große Komplexität erzeugen. Es besteht also in fraktal-ähnlichen Objekten gleichzeitig Ordnung und Vielfalt, ohne dass Monotonie oder Verwirrung entsteht – eine Grundvoraussetzung für Ästhetik.

01 Obwohl „*Schönheit*" ein abstrakter Begriff ist, kulturell und gesellschaftlich beeinflusst, wird die Natur nur selten als nicht schön bezeichnet; der Begriff ist naturwissenschaftlich nicht definiert, an dieser Stelle soll er als Beschreibung eines harmonischen, wohlproportionierten und gefälligen Objekts dienen.

A.1. Vorbemerkungen

A.1.1. Euklidisch oder Fraktal

Zur Charakterisierung der natürlichen wie auch der vom Menschen gestalteten Umwelt reicht die uns seit über zwei Jahrtausenden vertraute euklidischer Geometrie oftmals nicht mehr aus. Ihre glatten, einfachen Körper stoßen bei komplexeren Strukturen an ihre Grenzen. Benoît Mandelbrot hat diesen Umstand damit beschrieben, dass Wolken eben keine Kugeln sind, Berge keine Kegel und Küstenlinien keine Kreise.[02] Die fraktale Geometrie hingegen bietet eine genauere und einfachere Möglichkeit, solche zunächst schwer handhabbare Strukturen, wie sie auch in der Architektur zu finden sind, durch Algorithmen zu beschreiben. Daraus lässt sich noch nicht direkt ableiten, dass sich die fraktale Geometrie als entwurfsunterstützendes Hilfsmittel eignet. Es besteht aber die Aussicht über den Weg der fraktalen Geometrie zunächst hinter die Geheimnisse der „*Schönheit*" der Natur und letztlich auch der Architektur zu kommen.

A.1.2. Visuelle Wahrnehmung

Die Darstellung und Klassifizierung unserer Umwelt nach wertenden Kriterien, wie *schön* oder *unschön* etwas ist, hängt mit der visuellen Wahrnehmung zusammen. Diese beinhaltet die Aufnahme und die Verarbeitung von visuellen Reizen. Dabei werden Informationen selektiert, die zum Erkennen von Gegenständen und der Interpretation durch die Wechselwirkung mit bereits gespeicherten Daten führen. Die von einem Objekt reflektierten Lichtstrahlen werden zunächst durch den optischen Apparat[03], bestehend aus der Hornhaut, dem Kammerwasser, der Linse und dem Glaskörper, weitergeleitet, um schließlich auf der Netzhaut, der Retina, ein verkleinertes, auf dem Kopf stehendes Abbild des Objektes zu erzeugen.

02 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 13

03 *Schott D. (2004)*, Seiten 300ff

Die Umwandlung des registrierten Lichtreizes, das heißt der elektromagnetischen Strahlung, in einen elektrischen Impuls, vollzieht sich in einer Schicht der Netzhaut, die aus ca. 126 Millionen Photorezeptorzellen besteht.[04] Die beiden Arten von Rezeptoren für Licht sind die Zapfen für das *farbige* Sehen bei heller Beleuchtung und die Stäbchen für das *schwarz-weiße* Sehen (Helligkeit) bei schlechter Beleuchtung. Zusammen geben sie Informationen zu Farbe, Form und Größe des Objektes. Der elektrische Impuls wird im Anschluss über den Sehnerv zum Gehirn weitergeleitet, um im visuellen Cortex zur optischen Wahrnehmung verarbeitet zu werden. Im Gehirn werden die eingehenden Informationen mit vorhandenen Erinnerungen verglichen und interpretiert.

Für die im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* mittels der Box-Counting Methode durchgeführten Analysen verschiedener Fassaden ist zunächst das Erkennen beziehungsweise die daraus abgeleitete Auswahl der zu messenden Bestandteile essenziell, nachdem nicht die realen Gebäude selbst untersucht werden, sondern lediglich deren Darstellung etwa in Form von CAD-Zeichnungen. Die verwendete Methode selbst basiert auf der Abdeckung des zu messenden Objektes – bei Plänen sind das die charakteristischen Linien und Kurven – mit einer minimalen Anzahl von Quadraten (Boxen) $N_{(\varepsilon)}$ einer bestimmten Seitenlänge ε. Die Box-Counting-Dimension D_B der Darstellung des Objektes ist dann gegeben durch

$$D_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{log N_{(\varepsilon)}}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

für den Fall, dass ein Grenzwert mit $\varepsilon \to 0$ existiert.[05] Wenn sich die Funktion dem Grenzwert langsam annähert, kann dieser im doppellogarithmischen Graphen mit $\log N_{(\varepsilon)}$ versus $\log 1/\varepsilon$ durch die Steigung jener Geraden, auf der sich die Datenpunkte im Wesentlichen befinden, abgeschätzt werden. Dabei zeigt sich, dass zweidimensionale Darstellungen von Fassaden einen beschränkten Skalenbereich (mit $\varepsilon_i > 0$ und $i = 1$ bis n) aufweisen, in dem eine Tendenz erkennbar wird, für die $D_B > 1$ gilt, obwohl der Grenzwert mit $\varepsilon \to 0$ aufgrund der Zusammensetzung aus einer begrenzten Anzahl eindimensionaler Linien und Kurven gleich $D_B = 1$ ist. Der für den eingeschränkten Bereich ε_1 bis ε_n errechnete Wert dient dann als Charakteristikum der jeweiligen Fassade. Das Ein- und Ausblenden einzelner Details und die Wahl der Boxgröße hängt vom Abstand des Betrachters zum Objekt und vom Sehfeld beziehungsweise der Sehschärfe ab. Dieser Zusammenhang wird im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* näher erläutert.

Eine Frage, die sich im Zusammenhang mit der Aufnahme und Verarbeitung visueller Reize stellt, ist, ob der Prozess des Erkennens selbst fraktal ist. Auch wenn deren Beantwortung nicht Gegenstand der vorliegenden Betrachtung ist, verdient dieser Ansatz dennoch eine kurze Erläuterung. Wenn der menschliche Verstand bei komplexen Objekten dazu tendiert, diese zunächst in einfachere dreidimensionale geometrische Formen zu gliedern, die dann wiederum zu Komponenten des Ganzen zusammengefügt werden, um das Objekt besser zu verstehen, respektive um es wahrnehmen und vergleichen zu können, dann scheint die fraktale Geometrie die passende Sprache zu liefern. Die Begründung liegt in dem Umstand, dass die fraktale Geometrie nach Ähnlichkeiten zwischen dem ganzen Objekt und seinen Teilen – und dessen Teilen und so fort – sucht, wobei hier die Komplexität des Teiles im Verhältnis zum gesamten Objekt erhalten bleibt. Die komplexe Struktur des Ganzen wird auf eine Grundform reduziert, die durch einen Algorithmus wieder zum Ganzen zusammengesetzt werden kann. Für die Verarbeitung im Gehirn müssen demnach nur Teilbereiche analysiert werden, da die Information des Ganzen dem Teil inhärent ist.

Ist der Prozess des Erkennens selbst fraktal?

In diesem Kontext ist auch die Selbstorganisation zu sehen, bei der aus dem Chaos spontan und ohne äußere Steuerung eine innere Ordnung entstehen kann.[06] Die menschliche Wahrnehmung sucht möglicherweise nach solchen selbstorganisierenden Strukturen, indem beim Vergleich mit vorhandenen Einträgen im Gehirn viele zusammenhängende und nicht zusammenhängende Erinnerungen in einem chaotischen Prozess wachgerufen werden, um aus diesen Erinnerungen schließlich das Wesentliche zu filtern.

Selbstorganisation

A.1.3. Neue Begrifflichkeit

Fraktal-ähnliche Architektur

Fraktale erscheinen zunächst als ausgesprochene mathematische Konstrukte, die erst durch eine Abschwächung ihrer Definition, und damit einer generelleren Auslegung ihrer Eigenschaften, eine Entsprechung in der Natur und Architektur finden. Auf Grund natürlich gegebener Einschränkungen können die fraktalen Eigenschaften bei *realen* Objekten nur

Grenzen bei *realen* Objekten

04 *Ditzinger T. (2006)*, Seiten 8f

05 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*

06 *Briggs J.et al. (1999)*, Seiten 202-207

zwischen zwei begrenzten Maßstäben existieren. Die Begrenzung entsteht durch physische Schranken, die im Kleinen nicht erst durch die Größe des Atoms gegeben ist, sondern sowohl durch funktionale Optimierungen als auch durch sich überlagernde Einflüsse entsteht. So ist die Anzahl der immer feiner werdenden Verästelung der Luftröhre[07] in der Lunge mit 20-25 Teilungsschritten für die Funktion des Gasaustauschs durch die Lungenbläschen (*Alveolen*) am Ende der Verästelung optimiert und nicht ins Unendliche fortgesetzt (vergleiche ***Abb.1***). Nachdem eine effiziente Wirkung, das heißt ein schneller Gasaustausch, nur über eine möglichst große Summe der Oberflächen aller Lungenbläschen erfolgen kann und gleichzeitig der Raum dafür durch die Ausdehnung der Lunge selbst begrenzt ist, bietet die immer feiner werdende Verästelung eine perfekte Möglichkeit den Raum optimal für diesen Zweck zu nutzen.[08] Die Anzahl der Lungenbläschen wird auf die beträchtliche Zahl von 300 Millionen geschätzt und die Summe ihrer Oberflächen auf 100 m².[09] Die Größe der Lungenbläschen wiederum ist auf das Netz der sie umschließenden feinen Blutgefäße – auf die Kapillaren und auf die dünnen Grenzflächen, die sie von diesen trennen – abgestimmt.[10] Die Blutgefäße müssen den Sauerstoff und das Kohlendioxid über die roten Blutkörperchen transportieren können und die Grenzfläche den Sauerstoff und Kohlendioxid ungehindert durchlassen. Dieses Beispiel zeigt die Bedeutung physikalischer Wechselwirkungen auf die Größe einzelner Komponenten eines komplexen Ganzen und somit die maßstäblichen Schranken bei natürlichen Objekten.

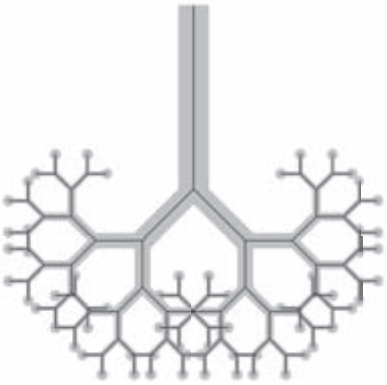


Abb.1.: Vereinfachtes Modell einer Lunge nach *Peak D. et al. (1995)*, Seite 107

In der Architektur stoßen wir an Maßstabsgrenzen die durch Baustoffabmessungen, abgestimmt auf die Verarbeitbarkeit und Ökonomie, und die Erfüllung der für die Bauaufgabe vorgegebenen Funktionen beeinflusst werden. Wenn ein Architekt einer Grundidee auf verschiedenen Maßstabsebenen Gestalt verleihen möchte, so bleibt deren Umsetzung konstruktiv, dem Material inhärent oder funktional bedingten Adaptionen geschuldet. Es ist aber gerade diese Variation, die Parallelen zu natürlichen fraktal-ähnlichen Strukturen zulässt. Auch dort werden einzelne Komponenten verändert, beispielsweise durch Witterungseinflüsse oder bei Pflanzen zusätzlich durch Veränderungen der Verfügbarkeit von Nährstoffen. Dadurch wird es schwieriger, die fraktalen Eigenschaften zu erkennen und in einen Algorithmus zu fassen, ist er aber erkannt, können mannigfaltige Variationen erstellt werden. Aus diesem Grund sind sämtliche Abbildungen dieser Dissertation computergeneriert und geben nur die zugrunde liegende, wesentliche Charakteristik wieder, wodurch die Eigenschaften besser lesbar werden. Es ist bei den natürlichen wie von Menschenhand errichteten Objekten also von dem Begriff *fraktal-ähnlich* beziehungsweise von einem eingeschränkten Maßstabsbereich, in dem die bezeichnenden Eigenschaften auftreten, auszugehen.

A.2. Charakterisierung und Analyse

A.2.1. Beschreibung der Architektur

Beaux-Arts und Internationale Moderne[11]

Für die Beschreibung der Architektur durch die fraktale Geometrie beziehungsweise zur Untersuchung ihrer Analogien muss zunächst der erste Anstoß durch Benoît Mandelbrot, wonach eine Verwandtschaft zwischen der fraktalen Geometrie und den Gemälden großer Meister beziehungsweise der Architektur des *Beaux-Arts-Stils* besteht, genauer untersucht werden.[12] Die Beaux-Arts-Architektur versteht sich als Historismus der Absolventen und Lehrenden an der École des Beaux-Arts in Paris und hatte vor allem in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts großen Einfluss auf die Architektur in Frankreich. Zentraler Ansatz ist die Erhaltung der Einheit zwischen Architektur und bildender Kunst, die sich bereits im Barock entwickelte.[13] Ein Beispiel für die neobarocke Ausrichtung dieses Architektur-Stils mit Elementen der italienischen Hochrenaissance bildet die

07 Die immer feiner werdenden luftführenden Verästelungen werden Bronchien genannt.

08 *Peak D. et al. (1995)*, Seiten 106f

09 Der Austausch der Atemgase erfolgt durch Diffusion. *Silbernagl S. (1991)*, Seiten 78 und 90.

10 Der Durchmesser eines Bläschens beträgt etwa 0,3 mm. *Silbernagl S. (1991)*, Seite 78

11 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 7

12 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 35f

13 *Giedion S. (1996)*, Seite 157

Pariser Oper von J.-L.-C. Garnier.[14] Dieses Gebäude zitiert B. Mandelbrot als Repräsentant eines skaleninvarianten (*scaling*) Gebäudes, während er Gebäude von Mies van der Rohe als skalenbeschränkt (*scalebound*) bezeichnet.[15]

Der Begriff skalenbeschränkt benennt in einer ersten Annäherung, natürliche oder von Menschenhand gestaltete Objekte, die durch wenige dominante Elemente einer Größenordnung, wie die Länge und die Breite, charakterisiert werden, wobei jedes einzelne Element eine klar unterscheidbare Größe besitzt (vergleiche *Abb.2*):

> *... for which characteristic elements of scale, such as width and length, are few in number and each with a clearly distinct size ...*[16]

Abb.2.: *skalenbeschränkt*
Mies van der Rohe: Farnsworth House 1945-1951; *Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Zur Illustration führt B. Mandelbrot ein im Bauhaus-Stil errichtetes kubisches Haus mit Glasflächen an. Unter der Voraussetzung, dass die Fenster identischen Rechtecken entsprechen, abgegrenzt nur durch Metallrahmen, sind die einzigen charakteristischen Längen des Gebäudes die Höhe und Breite des Ganzen und die der Fenster, wobei sich das Kleinere harmonisch aus dem größeren maßgeblicheren Ganzen entwickelt. Skalenbeschränkte Objekte besitzen in jedem Fall eine, nämlich ihre eigene, bestimmte Größenordnung.[17]

Ein skaleninvariantes Objekt hingegen besteht aus vielen verschiedenen Elementen, deren Größenordnungen wiederum jedes erdenkliche Ausmaß annehmen (vergleiche *Abb.3*). In einem Gebäude dieser Gruppe existieren nun so viele verschiedene Größenordnungen mit so durchflochtenen Harmonien, dass diese kaum voneinander getrennt betrachtet werden können, sondern eine Einheit bilden. Im Gegensatz zu skalenbeschränkten Objekten, variieren die Größenordnungen eines skaleninvarianten Gebäudes je nach Standort des Betrachters, es besitzt demnach keine eigene bestimmte Größenordnung, die es charakterisiert.[18] Egal von welcher Position aus die Pariser Oper betrachtet wird, von einem Standort am Ende der Avenue de l'Opéra aus oder unmittelbar davor, es gibt immer etwas zu sehen, das in die Größenordnung des Betrachters passt. Jeder Ausschnitt zeigt denselben Grad an Irregularität, was bedeutet, dass auch bei Veränderung der Betrachtungsgröße die Charakteristik nahezu gleich bleibt. Daraus lässt sich die Gesetzmäßigkeit bei fraktalen Mustern erkennen, nach der diese ohne Größenordnung sind und Selbstähnlichkeit aufweisen. Selbstähnlichkeit bezeichnet die Eigenschaft von Objekten, dass ein Ausschnitt dieselbe oder zumindest eine ähnliche Struktur wie das gesamte Objekt aufweist.

Skaleninvariant und selbstähnlich

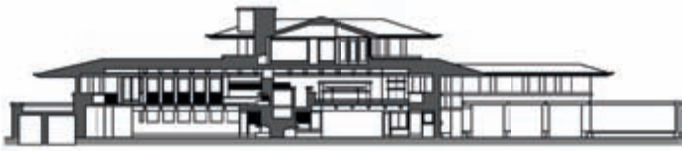


Abb.3.: *skaleninvariant*
F.L. Wright: *Robie House*, nahe Chicago 1906-1909; *Schnitt entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Das Fraktale an der Pariser Oper von J.-L.-C. Garnier besteht nun darin, dass die Charakteristik, die aus einiger Entfernung wahrgenommen wird, Entsprechungen an Elementen findet, die bei geringerem Abstand zum Gebäude – bei kleinerer Größenordnung – im Fokus stehen. Die Komplexität der Teile ist dabei jener des Ganzen ähnlich. Wird ein Gebäudeausschnitt betrachtet, das heißt vergrößert und der Rest abgedeckt, findet sich die gleiche Anzahl von Details wie es bei der Betrachtung des gesamten Gebäudes der Fall war, so als ob das Ganze lokal verborgene Details verschiedenster Größen beinhaltet, die erst bei genauerer Betrachtung „*ins Auge fallen*". Die einzelnen Komponenten sind keine strikten verkleinerten Kopien des gesamten Gebäudes, aber es existieren Elemente verschiedenster Größe vom Ganzen bis zum kleinsten Detail. Es liegt demnach Selbstähnlichkeit vor, wenn auch keine strikte. Garnier konzipierte nicht nur die Großform, sondern auch Details des Dekors, wodurch das architektonische Konzept durchgehend verwirklicht werden konnte, was sich in einer Kohärenz des Ganzen und seiner Komponenten widerspiegelt. Kohärenz bezeichnet jenen Zustand, in dem sich alle Komponenten in einer Ausgewogenheit befinden und sich gegenseitig unterstützen.[19] Die Beaux-Arts-Architektur steht nun lediglich als Synonym für eine skaleninvariante, selbstähnliche Architektur, die durch diese Eigenschaften ihre Kohärenz bezieht.

Dem gegenüber stellt Benoît Mandelbrot allgemein die Bauwerke von Mies van der Rohe, die für ihn Eigenschaften mit einer stärkeren Verwandtschaft zur euklidischen Geometrie aufweisen.[20] Gebäude dieser Gruppe lassen

14 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seiten 195ff
15 *Mandelbrot B. B. (1981)*, Seiten 45-47
16 *Mandelbrot B. B. (1981)*, Seite 45:
17 *Mandelbrot B. B. (1981)*, Seite 45
18 *Mandelbrot B. B. (1981)*, Seite 45
19 *Salingaros N. (2006)*, Seite 265
20 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 36

bereits aus größerer Entfernung ihre einfache und glatte Geometrie erkennen. Generell existieren nur wenige Längenskalen, wie beispielsweise die einer Fensterfront. Dadurch ergeben sich auch Größensprünge zwischen den Elementen, die eine Kontinuität vom Ganzen zum Kleinen verhindern. Die Charakteristik der Komponenten entspricht aber auch hier dem gesamten Objekt, die Tiefe ist allerdings eine andere und die Komponenten sind klar voneinander getrennt. Unterschiedliche Standorte des Betrachters entsprechen nicht unterschiedlichen Größenordnungen. Die Fensterfront wird schon aus der Entfernung wahrgenommen, ein Standort des Betrachters unmittelbar davor gibt keine zusätzlichen Elemente preis.

Gebäude, die als fraktal-ähnlich bezeichnet werden, besitzen folglich ein ausgewogenes Verhältnis zwischen leeren Flächen und solchen, die Details enthalten. Das Rokoko, das jede freie Fläche gestaltet und mit Dekoration füllt, ist schon zu viel des Guten, während das Barock, die Beaux-Arts-Architektur oder Bauten von Frank Lloyd Wright ein solches ausgewogenes Verhältnis aufweisen. Gebäude der *Internationalen Moderne* (insbesondere des *International Style*) wiederum, die der geometrischen Ordnung folgt und sich in einer rationalistischen Architektur äußert, besitzen im allgemeinen viele glatte Flächen.[21]

International Style

A.2.2. Grundlagen für eine Charakterisierung

Aus den zuvor genannten Beispielen einer Strömung der *Modernen*, die als glatt bezeichnet werden kann, und der Beaux-Arts-Architektur lässt sich schließen, dass zwischen skalenbeschränkten, der euklidischen Geometrie nahestehenden Gebäuden und skaleninvarianten, der fraktalen Geometrie verwandten Gebäuden unterschieden werden kann. Durch den Facettenreichtum in der Architektur kann davon ausgegangen werden, dass sich dieser Übergang gleitend und nicht abrupt darstellt. Findet sich kein Zusammenhang zwischen den einzelnen Längenskalen, liegt also keine ähnliche Charakteristik zwischen den Größenordnungen vor, kann von chaotischer, nicht kohärenter Architektur gesprochen werden. Die Skala reicht demnach von euklid-ähnlicher über fraktal-ähnliche zur chaotischen Architektur. Die Begriffe *euklidisch*, *fraktal*, *fraktal-ähnlich* werden in den folgenden Kapiteln an geeigneter Stelle beschrieben.

21 Zum International Style zählen Architekten wie Le Corbusier, Mies van der Rohe, Walter Gropius, J. J. P. Oud und Alvar Aalto zwischen 1920 und 1940. *Khan, H.-U. (1998)*, Seiten 7, 87

Für die Klassifizierung liefert die fraktale Geometrie die Grundlage, jenes Teilgebiet der Mathematik also, das Fraktale beschreibt und deren Gesetzmäßigkeiten untersucht. Sie beschäftigt sich mit geometrischen Eigenschaften von Objekten, die eine hohe Selbstähnlichkeit aufweisen. Neben der Selbstähnlichkeit ist für ein Fraktal noch eine weitere Eigenschaft charakteristisch: Nach seiner Definition ist ein Fraktal eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension[22], das ist die maßtheoretische Definition der fraktalen Dimension, echt die topologische Dimension übersteigt.[23]

Grundlage und Mess-Methoden

Fraktale Analyse-Methoden

Seitdem Carl Bovill[24] die Box-Counting-Methode zur Analyse von Fassaden eingeführt hat, wurden einige Messungen, denen diese Methode zugrunde liegt, publiziert.[25] Nachdem hier bereits Daten als Vergleich vorliegen und auf Grund der einfachen Umsetzung als Computer-Programm, wird für den analytischen Teil die Box-Counting-Methode zur Bestimmung der fraktalen Dimension genauer betrachtet und hinsichtlich ihrer Tauglichkeit für die Messung von Architektur untersucht. Dabei steht vor allem die Gewährleistung einer objektiven Auswertung und die Möglichkeit zur Feinabstufung – damit die fließenden Übergänge von einer Klasse zur nächsten nachvollziehbar bleiben – im Vordergrund. Die Box-Counting-Methode bestimmt die fraktale Dimension durch ein immer feiner werdendes Gitter. Bei der Messung etwa einer Ansicht wird dann die Anzahl von jenen Boxen, die relevante Kanten abdecken, in ein Verhältnis zu den unterschiedlichen Gittergrößen gesetzt. Gibt es einen kontinuierlichen Zusammenhang, lässt sich das anhand eines geraden Verlaufes in einem doppellogarithmischen Graphen nachweisen. Gleiche Ansichten haben aber in der Literatur mitunter zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt. Aus diesem Grund werden Einflüsse von Parametern und verschiedene Algorithmen zur Berechnung an Hand von Beispielen erörtert. Es werden aber auch die Nachteile und die Grenzen dieser Mess-Methode aufgezeigt.

Fassaden können nicht durch einen einzelnen Wert beschrieben werden, sondern nur durch die Angabe einer Summe von Parametern.

22 Die Hausdorff-Besicovitch-Dimension, die von Felix Hausdorff formuliert – Hausdorff, F. (1919) – und von Abram Samoilovitch Besicovitch in die endgültige Form gebracht wurde, wird von Benoît Mandelbrot als fraktale Dimension bezeichnet. *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 28

23 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 27

24 *Bovill C. (1996)*

25 *Bovill C. (1996)*, *Bovill C. (1997)*, *Lorenz W. E. (2002)*, *Lorenz, W. E. (2009)*, *Ostwald M. J. et al. (2008a)*, *Ostwald M. J. et al. (2008b)*, *Vaughan J. (2009)*

A.2.3. Fragen

Aus dem Ansatz, die fraktale Geometrie als Ausgang für eine Einteilung der Architektur heranzuziehen, leiten sich folgende Fragen, die im Zuge dieser Arbeit behandelt werden, ab:

(1) Weist Architektur fraktale Eigenschaften auf?

Wie aus den beiden Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen* und *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition* hervorgeht, sind Fraktale zunächst theoretische Konstrukte. Dennoch kann das Wachstum verschiedener natürlicher Strukturen durch fraktale Methoden nachvollzogen werden. Daraus erklärt sich der Versuch, mit Hilfe der fraktalen Geometrie Erklärungen der zugrunde liegenden Kräfte und Gesetze zu erörtern. Für die Architektur bedeutet das in einem ersten Schritt zunächst Analogien zu finden. Dieser Schritt wird durch Skripte unterstützt, die vom Autor zum Zweck der Visualisierung der fraktalen Eigenschaften geschriebenen wurden. Nach einer Einführung der fraktalen Methoden zeichnet der Autor die spezifischen Merkmale einiger architektonischer Beispiele auf diese Weise nach.

(2) Kann fraktal-ähnliche Architektur gemessen werden?

Die fraktale Dimension ist ein Maß für die Zerklüftung eines Objektes. Nachdem unterschiedliche Mess-Methoden zur Bestimmung der fraktalen Dimension existieren, erläutert der Autor deren Anwendbarkeit in der Architektur. Durch die Box-Counting Methode etwa können schließlich auch solche Strukturen gemessen werden, die keine Fraktale sind. Dadurch eignet sich diese Mess-Methode für die Analyse von Fassaden, die zwar generell keine Fraktale nach der mathematischen Definition darstellen, aber mitunter fraktale Eigenschaften aufweisen. Durch verschiedene Messungen wird schließlich der Frage nachgegangen, ob die Kohärenz eines Gebäudes über mehrere Maßstabsebenen messbar ist und somit als qualitatives Instrument dienen kann.

(3) Welche Schlussfolgerung kann aus den Ergebnissen gezogen werden?

Als abschließende Frage stellt sich jene nach der Aussage derartiger Messungen. Der Autor zeigt eine Visualisierung der Ergebnisse mit dem Bereich kontinuierlicher Rauheit, dem Grad, gegeben durch die Box-Counting-Dimension und Varianz, das heißt, den Anteil, der Variabilität beinhaltet. Benoît Mandelbrot sieht in diesem Zusammenhang den Grund, warum die *Moderne* zumeist als steril und unnatürlich angesehen wird, in einem Rückgriff auf das skalenbeschränkte Euklidische und nennt als Beispiel explizit Mies van der Rohe.[26][27] In Konsequenz dessen soll nun unter Einbeziehung der Box-Counting Methode festgestellt werden, ob die Moderne generell eine solche Charakteristik aufweist oder ob diese Eigenschaft lediglich bestimmten Gebäuden anhaftet.

26 *Mandelbrot B. B. (1981)*, Seite 45 und *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 36

27 Carl Bovill sieht im Fehlen der strukturellen Tiefe und der daraus resultierenden Glätte den Grund dafür, warum einige Beispiele der modernen Architektur vom allgemeinen Publikum seit jeher weniger akzeptiert wurden. *Bovill C. (1996)*, Seiten 5f

Peano Kurve
Cantor Menge
Gerinnung/ Curdling
Selbstähn-lichkeits-Dimension
Staubmenge
Saturn Ringe
Minkowski Kurve
Grad der Zerklüftung
Mathematik
Längenmessung
Monsterkurven
Küstenlinien
Koch Kurve
Koch Insel

B. Mathematische Fraktale – Grundlagen

Monsterkurven und Punktmengen

Fraktale werden über ihre Eigenschaften definiert. Dazu zählen Selbstähnlichkeit, fraktale Dimension und Irregularität. Diese Eigenschaften können gut an Hand der so genannten Monsterkurven demonstriert werden, jenen eindimensionalen geometrischen Strukturen, die nach ihrer Entdeckung auf Grund der seltsamen ihnen anhaftenden Eigenschaften Monster genannt wurden.[01] Sie weisen zwischen zwei Punkten durch eine unendlich Anzahl von Richtungsänderungen eine unendliche Länge auf, ohne einen definierten Raum zu sprengen und sind überall stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar.

Mathematisch exakt definiert bleiben Fraktale ein Konstrukt der Theorie, weil bei diesen Strukturen jeder noch so kleine Teil wieder dem Ganzen ähnlich sein muss. Das impliziert aber, dass das auch für einen unendlich kleinen Teil des betrachteten Objekts zutrifft. In der Natur wie auch in der Architektur gibt es allerdings immer Limits, ein größtes, entsprechend der maximalen Ausdehnung des Ganzen selbst, aber auch ein kleinstes, gegeben durch die kleinste Komponente, die noch Ähnlichkeiten mit dem Ganzen aufweist – innere und äußere Einflüsse für diese Limits sind die Eigenschaften des Materials, die Konstruktion oder die Funktion. Diese Spanne ist von Interesse, denn sie bestimmt die Größe jenes Bereiches, in dem fraktale Eigenschaften vorliegen. Bei der Charakterisierung von Objekten mit den Begriffen der fraktalen Geometrie müssen diese Limits immer angegeben werden. Sie gehören zur Definition des fraktal-ähnlichen Objektes.

Da der Begriff Fraktal Eigenschaften ausdrückt, die wir auch in der Natur und manchen Gebäuden finden, bietet die fraktale Geometrie weitere Werkzeuge, mit denen Architektur beschrieben werden kann. Um die Grenzen des Bereiches, in dem fraktale Eigenschaften zu erkennen sind, und die Abgrenzung zur mathematischen Definition zu verdeutlichen, wird allerdings in diesem Zusammenhang in der Regel von fraktal-ähnlichen Strukturen gesprochen.

01 Monsterkurve oder Teragon (v. griech.: teras = Drache, Monster).

B.1. Einführung

B.1.1. How long is the coastline of Britain?

Wenn die topologische Dimension D_T (siehe G.*1.1. Topologische Dimension*) durch die Anzahl der Koordinaten definiert ist, die man benötigt, um einen Punkt des Objektes eindeutig zu beschreiben, was passiert dann mit Linien, auf denen der Abstand nicht eindeutig bestimmbar ist, wie zum Beispiel auf Küstenlinien? Mit der Frage *How long is the coastline of Britain*[02] hat Benoît Mandelbrot die fraktale Geometrie eingeführt. Dabei ist das Problem evident, dass die Länge von der Genauigkeit der benutzten Karte, dem Maßstab, abhängig ist, der als Grundlage für die Messung dient. Es besteht demnach ein Unterschied, ob es sich um eine Landkarte mit größerem Maßstab aus einem Atlas handelt, oder die Küste zu Fuß abgeschritten wird. In beiden Fällen werden unterschiedliche Längeneinheiten zur Messung herangezogen. Diese Längeneinheiten können als Zirkelöffnung gedacht werden, die entlang der abgebildeten Küstenlinie abgeschlagen wird, und deren Summe die Länge ergibt. Eine Längeneinheit von einem Kilometer, wie sie etwa einer Messung aus einem Atlas entspricht, berücksichtigt folglich nur größere Buchten, während eine Zirkelöffnung von einem Meter jede Bucht auf menschlichem Maßstab mit einschließt. Je kleiner nun der Maßstab ist, desto länger wird die Küstenlinie, weil immer mehr Details in die Längenmessung mit einbezogen werden können.

Das Problem der Längen-Messung

02 *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* ist der Titel eines Papers von B. Mandelbrot, das 1967 erstmals im *Science Journal* Vol. 156 Seiten 636-638 publiziert wurde. *Mandelbrot B. B. (1967)*

Grenzlinien

Aber nicht nur Küstenlinien weisen Einbuchtungen, die wiederum Einbuchtungen enthalten, auf – was letztendlich zu verschiedenen Längen in Abhängigkeit vom Maßstab führt –, sondern auch Stadtpläne von Bevölkerungsdichten, Grenzen zwischen Ländern und Flussverläufe.[03] Dabei ist eine ähnliche Zerklüftung von einem Maßstabsbereich zum nächst kleineren auffällig. So weist ein Verlauf eines Flussbetts denselben Grad der Zerklüftung auf, unabhängig davon, ob er von einem Flugzeug aus betrachtet oder zu Fuß abgeschritten wird. Die vom Maßstab abhängige Längenmessung ist aber in der Praxis zumeist weniger problematisch. So wird die Länge der Grenzlinie zwischen Portugal und Spanien von beiden Ländern – ohne weitere Folgen – unterschiedlich angegeben. Das kleinere Land, Portugal, verwendet offizielle Landkarten mit einem kleineren Maßstab als sein Nachbarland, wodurch in die Messung der Länge der Grenze mehr Details eingeschlossen werden und sich eine größere Ausdehnung ergibt.[04]

Daraus folgt, dass die Länge selbst keine charakteristische Größe für eine Küstenlinie sein kann. Die fraktale Dimension hingegen gibt die Komplexität von Kurven beziehungsweise den Grad der Zerklüftung wieder und eignet sich gut zur Beschreibung von derart gebrochenen Linien. Folglich ist die Längenmessung für Fraktale unerheblich, da sie vielmehr durch ihre fraktale Dimension charakterisiert werden. Diese ist in den meisten Fällen, aber nicht immer, eine gebrochene (*fraktale*) Zahl. Verschiedene Methoden zur Messung, die unterschiedlichen fraktalen Dimensionen und der Begriff selbst, werden im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* näher beschrieben.

Grad der Zerklüftung

Ein Problem bei Messungen von Längen ergibt sich auch durch die Definition der Grenzen: bei Küstenlinien entspricht sie dem Wechsel von Wasser und Land, bei der Stadt dem Wechsel zwischen Bevölkerungsdichten. Während bei einer Landkarte mit größerem Maßstab die Definition der Küstenlinie, der Übergang zwischen Land und Wasser, noch kein größeres Problem darstellt, beeinflusst sie beim kleineren Maßstab des Abschreitens der Küstenlinie das Ergebnis der Messung stärker. So wechselt beispielsweise die Grenzlinie zwischen Ebbe und Flut, was in einem kleineren Maßstab bereits einen größeren Unterschied bedeuten kann. Die genaue Festlegung des Verlaufs der Grenze ist aber auch bei einem Flussdelta schwierig.

Einflüsse auf die Längenmessung

B.1.2. Monsterkurven

Monsterkurven wie die Peano-Kurve, oder die Koch-Kurve, die am Ende des 19. beziehungsweise am Anfang des 20. Jahrhunderts als Exoten mit außergewöhnlichen Eigenschaften galten, zählen in der Regel zur Rubrik der mathematischen Fraktale[05] und konnten mit der euklidischen Geometrie nicht eindeutig beschrieben werden. Sie können durch die Initiator-Generator-Methode erstellt werden, das bedeutet durch wiederholtes Ersetzen eines Startobjektes, dem Initiator[06], durch eine grafische Anweisung, dem Generator, der zumeist aus verkleinerten Kopien des Initiators besteht. Bei diesem Konstruktionsprinzip wird also jede Teilstrecke iterativ durch einen Streckenzug, bestehend aus n neuen verkleinerten Strecken, ersetzt. Die einzelnen Schritte, das sind die Ebenen der Wiederholungen dieser Anweisung, werden Iterationsschritte oder kurz Iteration[07] genannt (eine ausführlichere Erklärung folgt in *C.2.1. Entstehung durch Iterationen*). Wird die Anweisung unendlich oft ausgeführt, entspricht jeder noch so kleine Teil einer exakten Kopie des Ganzen und besitzt genauso viele Details wie die gesamte Kurve. In Folge dessen kann der jeweilige Maßstab nicht festgestellt werden. Durch die unendliche Anzahl von Richtungswechseln ist es auch nicht möglich, einen Punkt auf der Kurve exakt zu treffen, da bei noch genauerer Betrachtung, einem Zoom auf das Objekt, immer neue Richtungswechsel auftauchen. Obwohl sie zwischen einem Anfangs- und einem Endpunkt fixiert sind, besitzen die *Monsterkurven*, die durch einen iterativen Prozess entstehen, nach unendlichen Wiederholungen eine unendliche Länge, womit sie offenbar zwischen einer eindimensionalen Linie und der zweidimensionalen Fläche, in der sie liegen, anzuordnen sind. Besaßen sie lange Zeit eine Sonderstellung, bietet nun die fraktale Geometrie ein akkurates Mittel zu deren Beschreibung.

Koch-Kurve

Die Koch-Kurve wurde von dem schwedischen Mathematiker Helge Koch im Jahr 1904 publiziert, um ein weiteres Beispiel für eine Kurve anzuführen, die überall stetig – durchgehende Funktionskurve ohne Lücken und Sprünge – aber in keinem Punkt differenzierbar ist (siehe *Abb.4*, *Seite 22*).[08] Sie ist

03 Der Zusammenhang zwischen Kartenmaßstab und Länge konnte bereits durch Lewis Fry Richardson nachgewiesen werden. *Richardson L.F. (1961)*

04 *Voß H. (1994)*, Seite 13 und *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 45

05 Ein mathematisches Fraktal entsteht durch wiederholte Anwendung einer mathematischen Abbildung.

06 Der Initiator von mathematischen Fraktalen ist zumeist die Einheitsstrecke.

07 Iteration: lat. iterare *wiederholen*.
Unter Iteration wird die wiederholte Anwendung desselben Rechenverfahrens verstanden.

08 Erste Veröffentlichung in: *Koch H. (1904)*, Seiten 681-704

stetig, weil sie in einem Zug durchgezeichnet werden kann, gleichzeitig ist sie an keiner Stelle glatt, sondern besteht aus Zacken. Eine Kurve ist an einer Stelle nur dann differenzierbar, wenn es an dieser Stelle genau eine Kurventangente gibt. Eine Tangente an einem Punkt einer Kurve ist diejenige Gerade, die in diesem Punkt die Kurve berührt. Wenn dieser Punkt sehr stark vergrößert wird, kann kein Unterschied mehr zwischen der Kurve und der Tangente festgestellt werden. Das kann an Hand eines Bereiches eines Kreises demonstriert werden: Wenn dieser hinreichend stark vergrößert wird, erscheint dieser Bereich als Gerade, genauso wie die Tangente an diesem Punkt. An einer Knickstelle besteht nun die Möglichkeit sich von zwei Seiten zu nähern, da die Kurve an dieser Stelle die Richtung sprunghaft ändert, wobei je nach Richtung zwei Tangenten unterschiedlicher Steigung entstehen.[09] Die Koch-Kurve besteht auf Grund der unendlichen Anwendung der Ersatzregel ausschließlich aus Ecken (Knickstellen der Kurve).[10] In Knickstellen kann aber, wie demonstriert, keine eindeutige Tangente angelegt werden, womit die Koch-Kurve in keinem Punkt eine eindeutige Tangente besitzt.[11]

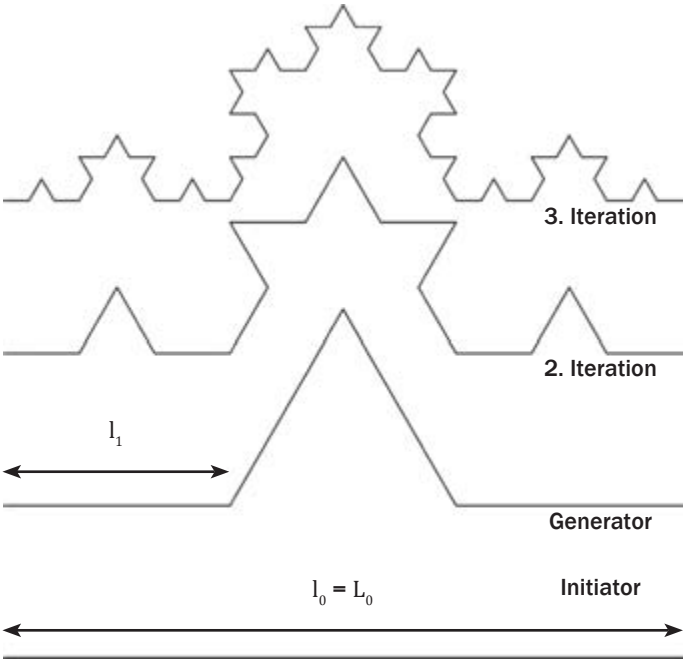


Abb.4.: Koch-Kurve

Wird das Beispiel der Küstenlinie herangezogen, so wird ein weiteres Wesen der Tangentenlegung evident. Wenn nämlich ein bestimmter Küstenabschnitt betrachtet wird, können bei einer genaueren Betrachtung weitere Details des Verlaufes auftauchen, womit sich ein Punkt auf der Kurve nicht exakt greifen lässt. Somit ist auch eine Tangentenlegung unmöglich. Die seit der ersten Publikation der Koch-Kurve veröffentlichten Darstellungen (siehe *Abb.4*) sind immer nur Näherungen, da sie die Abbildung einer endlichen Wiederholung des iterativen Prozesses zeigen. Dennoch lässt sich der Grenzwert der Folge von Kurven, die schrittweise konstruiert werden, bereits nach wenigen Schritten erahnen.

Der Initiator der Koch-Kurve besteht aus einer Einheitsstrecke mit der Länge L_0. Diese Strecke wird durch den Generator, bestehend aus $N_1 = 4$ Teile, die mittels Ähnlichkeits-Abbildung mit dem Quotienten $s_1 = 1/3$ aus dem Ganzen hervorgehen, ersetzt. Anders ausgedrückt entstehen sämtliche neue Teilstrecken durch Verkleinerung des Initiators auf ein Drittel der Länge der Teilstrecke des Initiators, wobei der Startpunkt des Initiators den Fixpunkt definiert:

$$l_1 = s_1 \cdot L_0 = \frac{1}{3} \cdot L_0$$

Die vier neuen Teilstrecken sind so arrangiert, dass die erste unverrückt an ihrem Platz verharrt, woran die zweite um die Länge l_1 in Richtung Endpunkt der ersten Teilstrecke verschoben (Translation) und um den Winkel +60° gedreht (Rotation), anschließt. Der Anfang der dritten Teilstrecke wird an das Ende der zweiten verschoben und um den Winkel -60° gedreht, woran sich schließlich die letzte Teilstrecke fügt, deren Endpunkt mit jenem des Initiators übereinstimmt. Anfangs- und Endpunkt des Initiators bleiben folglich als Fixpunkte auf der Koch-Kurve bestehen.

Die Gesamtlänge des Generators (erste Iteration) ergibt sich nun aus der Anzahl der Teilstrecken $N_1 = 4$ multipliziert mit deren Längenverhältnis in Bezug auf die Teilstreckenlänge des Initiators, $s_1 = 1/3$:

mit

$$l_0 = L_0$$

beträgt die Gesamtlänge des Generators

$$L_1 = N_1 \cdot l_1 = N_1 \cdot s_1 \cdot L_0 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot L_0 = \frac{4}{3} \cdot L_0$$

In der zweiten Iteration wird jede der vier neuen Teilstrecken wieder durch den Generator ersetzt, womit sich $N_2 = 4 \times 4$ neue Teilstrecken mit dem Skalierungsfaktor $s_2 = 1/3 \times 1/3$ ergeben. Die Anfangs- und Endpunkte der vorhergehenden Teilstrecken bleiben wieder als Fixpunkte auf der Koch-Kurve erhalten.

Für die Länge der Teilstrecke der zweiten Iteration gilt:

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot l_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot L_0\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot L_0$$

09 *Bronstein I. N. et al. (2005)*, Seite 255

10 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seite 91

11 *Peak D. et al. (1995)*, Seite 84

Die Länge einer Teilstrecke entspricht somit allgemein dem Quotienten des Generators hoch der Zahl der aktuellen Iteration i multipliziert mit der Länge der Teilstrecke des Initiators:

$$l_i = {s_1}^i \cdot L_0$$

Die Gesamtlänge L_i entspricht dann der Anzahl der Teilstrecken N_i einer bestimmten Iteration i multipliziert mit der Länge einer Teilstrecke l_i dieser Iteration:

$$L_i = N_i \cdot l_i$$

Um eine generell gültige Formel für die Längenmessung nach einer bestimmten Iteration der Koch-Kurve zu entwickeln, können sowohl die Anzahl der Teilstrecken einer Iteration als auch der Quotient in Abhängigkeit der Werte des Generators gesetzt werden:

$$N_i = {N_1}^i \mid s_i = {s_1}^i$$

Daraus kann die Abhängigkeit der Gesamtlänge einer bestimmten Iteration von der Anzahl der Teilstrecken und deren Größe im Verhältnis zur Länge der Teilstrecke des Initiators abgeleitet werden:

$$L_2 = N_2 \cdot l_2 = {N_1}^2 \cdot {s_1}^2 \cdot L_0 = 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot L_0$$

Einige Iterationen und deren Gesamtlängen:

$$L_1 = 4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot L_0 = \frac{4}{3} \cdot L_0 = 1{,}334 \cdot L_0$$

$$L_2 = 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot L_0 = \frac{16}{9} \cdot L_0 = 1{,}778 \cdot L_0$$

$$L_3 = 4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot L_0 = \frac{64}{27} \cdot L_0 = 2{,}370 \cdot L_0$$

$$L_8 = 4^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot L_0 = \frac{65536}{6561} \cdot L_0 = 9{,}989 \cdot L_0$$

Wodurch wird die Koch-Kurve nun charakterisiert?

Charakteristika der Koch-Kurve

(1) Die Koch-Kurve ist überall stetig und nicht differenzierbar.

(2) Die Gesamtlänge der Kurve nimmt, wie zuvor demonstriert, von einer Iteration zur nächsten um ein Drittel zu und strebt somit gegen unendlich. Sie wächst exponentiell an, nachdem i im Exponenten steht und die Bedingung, dass die Basis > 1 ist, erfüllt wird:

$$L_\infty = L_0 \cdot \lim_{i \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i = \infty$$

(3) Sobald der Grenzwert des Prozesses zur Erstellung der Kurve erreicht ist, gibt es keine geraden Abschnitte mehr. Der Verlauf ist stark zerklüftet und es kann allgemein von einer rauen Oberfläche gesprochen werden.

(4) Bei genauer Betrachtung bestimmter Abschnitte der Koch-Kurve[12] lässt sich immer wieder die Form des Ganzen erkennen. Jeder dieser Teile kann soweit vergrößert werden, dass er mit dem Ganzen zur Deckung gebracht werden kann. In diesem Fall wird von einer strikten Selbstähnlichkeit oder Selbstgleichheit gesprochen. Diese Form der Selbstähnlichkeit kommt weder in der Natur noch in der Architektur vor. Darüber hinaus ist nicht jede selbstähnliche Struktur definitiv auch ein Fraktal. So kann beispielsweise selbst eine Strecke (Geradenabschnitt), eine Fläche oder ein Volumen durch Ähnlichkeits-Abbildungen in kleinere Kopien zerlegt werden. Eine Strecke ist aber deshalb noch kein Fraktal, nachdem etwa die Charakteristik des Längenwachstums von einer Iteration zur nächsten nicht gegeben ist.

Die Länge der Koch-Kurve

(5) Durch geeignete Wahl des Skalierungsfaktors s kann jeder beliebige Ausschnitt einer Strecke aus dem gesamten Objekt hervorgegangen sein. Dabei kann dieser Wert 1/3, 1/5, 1/123 etc. betragen. Und genau darin liegt der Unterschied zu Fraktalen, bei denen der Skalierungsfaktor nicht beliebig sondern vielmehr charakteristisch ist. Die Koch-Kurve beispielsweise lässt nur Werte wie 1/3, 1/9, 1/27, etc. zu, der Skalierungsfaktor muss also sorgfältig gewählt werden. Das Entscheidende ist, dass bei sämtlichen strikt selbstähnlichen Strukturen, und das schließt auch solche mit ein, die keine Fraktale sind, ein Zusammenhang besteht zwischen dem Skalierungsfaktor s und der Anzahl N der verkleinerten Komponenten, in die eine Struktur zerlegt wird.[13] Der Zusammenhang stellt sich wie folgt in einem Potenzgesetz dar:

Selbst-ähnlichkeits-Dimension

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{D_s} = N$$

$$D_s = \frac{log(N)}{log\left(\frac{1}{s}\right)}$$

Der Index D_s entspricht der sogenannten Selbstähnlichkeitsdimension und beträgt für die Koch-Kurve demnach:

$$D_s = \frac{log(4)}{log(3)} = 1{,}2619$$

12 Nur das Produkt nach unendlichen Wiederholungen des iterativen Prozesses wird als Koch-Kurve bezeichnet.

13 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seite 203

Diese ist wie vermutet höher als die topologische Dimension (D_T=1), die für eine Kurve eins beträgt. Für den Moment soll diese Einführung in die Dimension reichen, genauere Ausführung folgen in einem gesonderten Kapitel.

Nachdem die aufgezählten Eigenschaften erst nach unendlichen Wiederholungen auftreten, existieren Fraktale genau genommen nur in der Theorie. Dem ungeachtet lassen sich bei mathematischen Fraktalen oder jenen aus der Natur aber bereits nach wenigen Schritten fraktale Charakteristika erkennen. Als Abgrenzung zur Theorie kann demnach eine neue Terminologie hilfreich sein: Objekte, die fraktale Eigenschaften in einer beschränkten Skala aufweisen, sollen fraktal-ähnlich genannt werden oder Objekte mit fraktalen Eigenschaften.

Fraktale existieren nur in der Theorie

Koch-Insel (Schneeflocke)

Ausgangspunkt, der Initiator, für die Erzeugung der sogenannten Koch-Insel, die auf Grund ihrer Form auch manchmal als Schneeflocke bezeichnet wird, ist nun nicht mehr eine einzelne Strecke, sondern ein gleichseitiges Dreieck. Die Anweisung zum Ersetzen, der Generator, ist identisch mit jener der Koch-Kurve, wobei sie diesmal auf alle drei Seiten angewendet wird. Dieser Algorithmus, der immer wieder auf die Einzelteile angewendet wird, beginnt mit dem Dritteln einer Seite, über dessen mittlerem Teil ein gleichseitiges Dreieck errichtet wird, das nach außen zeigt und dessen Basis entfernt wird. Nachdem alle drei Seiten identisch sind, kann zunächst eine einzelne Koch-Kurve einer bestimmten Iteration konstruiert werden. Kopiert und an das Original als fortlaufende Kurve angefügt, entsteht nach einer Rotation um 120 Grad die zweite Seite. Nach einer Translation und einer Rotation von 240 Grad komplettiert – anschließend an die zweite Koch-Kurve – eine weitere Kopie der ersten die Koch-Insel. Die Zacken zeigen nun alle nach außen (siehe *Abb.5*).

Abb.5.: Koch-Insel: Ausgangsobjekt, 1. und 4. Iteration

Was passiert aber mit den für die Koch-Kurve beschriebenen charakteristischen Eigenschaften?

(1) Die Koch-Insel ist wie die Koch-Kurve überall stetig und nicht differenzierbar.

(2) Der Umfang oder vielmehr dessen Länge wächst, wie bei der Koch-Kurve demonstriert, wieder von einer Iteration zur nächsten und strebt gegen unendlich.

(3) Durch die raue zerklüftete Oberfläche wird die Koch-Insel manchmal als Modell für reale Inseln herangezogen, wenn auch der Verlauf der künstlichen Küstenlinie zu *regelmäßig* und *symmetrisch* erscheint.

(4) Die Koch-Insel ist – im Gegensatz zur Koch-Kurve – nicht mehr selbstähnlich, nachdem bei Vergrößerung eines bestimmten Abschnittes dieser nicht mehr mit dem gesamten Objekt in Deckung gebracht werden kann, sondern lediglich mit einer der drei Seiten. Die Koch-Insel besteht demnach vielmehr aus 3 selbstähnlichen Teilbereichen, die sich zu einer geschlossenen Kurve ergänzen.

(5) Die Selbstähnlichkeitsdimension beträgt ebenfalls 1.2619, da die Vereinigung zählbarer Mengen der Dimension D_S wieder die Dimension D_S besitzt.[14]

(6) An Hand der Koch-Insel soll nun die Entwicklung des umschriebenen Flächeninhalts von einer Iteration zur nächsten untersucht werden. Der erste Wert – jener für den Initiator mit der Seitenlänge L_0 – kann mit der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines gleichseitigen Dreiecks ermittelt werden:

$$F_0 = \frac{{L_0}^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Bei jeder weiteren Iteration müssen die Flächen der zusätzlichen Zacken, das sind die gleichseitigen Dreiecke, die nach außen zeigen, addiert werden. Die Seitenlänge einer Zacke des Generators (i = 1) beträgt ein Drittel der Einheitsstrecke des Initiators L_0. Daraus lässt sich die Fläche eines einzelnen Dreiecks berechnen, mit drei multipliziert ergibt sich der zusätzliche Flächeninhalt des Generators, beziehungsweise der ersten Iteration. Die Seitenlänge einer Zacke verkleinert sich im nächsten Schritt und beträgt ein Drittel der vorhergehenden, das ist ein Neuntel von L_0, und die Anzahl der Zacken ist für jede Seite vier. Das Ergebnis für die Berechnung des Flächeninhalts wird mit drei, der Anzahl der Seiten, multipliziert, um die zusätzliche Fläche des zweiten Iterationsschrittes zu erhalten.

Die Fläche der Koch-Insel

$$F_1 = 3 \cdot 4^0 \cdot \frac{\left(\frac{L_0}{3^1}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{(L_0)^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

$$F_2 = 3 \cdot 4^1 \cdot \frac{\left(\frac{L_0}{3^2}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \frac{4^1}{9^1} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{(L_0)^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

14 Dimensionstheorie. *Zeitler H. et al. (2000)*, Seite 30

Die Anzahl der Zacken nimmt folglich von einer Iteration zur nächsten um den Faktor vier zu, während die Skalierung jeweils um ein Drittel abnimmt. Das Verhältnis der Seitenlänge eines Zackens des Generators (i = 1) zur Seitenlänge des Initiators L_0 beträgt ein Drittel und kann in jenen Faktor mit aufgenommen werden, der im Verhältnis zum jeweiligen Schritt steht und die Skalierung beziehungsweise Anzahl beinhaltet. Dieser Faktor beträgt demzufolge vier Neuntel hoch der jeweiligen Iteration i abzüglich eins. Daraus lässt sich die allgemein gültige Formel für die Berechnung des zusätzlichen Flächeninhalts für den i-ten Schritt ableiten:

$$F_i = 3 \cdot 4^{i-1} \cdot \frac{\left(\frac{L_0}{3^i}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{(L_0)^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

Allgemein ausgedrückt, bedeutet das für den gesamten Flächeninhalt nach einem beliebigen Iterationsschritt die Addition der Fläche des Initiators mit der Summe der Flächen aller zusätzlichen Ausstülpungen für jeden einzelnen Schritt:

$$F_i = F_0 + \sum_{k=1}^{i} 3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{(L_0)^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

Werden die zusätzlichen Flächen für jeden Iterationsschritt in ein Verhältnis zur zusätzlichen Fläche der ersten Iteration gesetzt, ergibt sich der gesamte Flächeninhalt durch die Addition der Größe der Fläche des Initiators F_0 mit der Fläche der ersten Iteration F_1 multipliziert mit der Summe dieser Verhältnisse:

$$F_\infty = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \ ...$$

$$F_\infty = F_0 + \left(F_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 \cdot F_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot F_1 + \ ...\right)$$

$$F_\infty = F_0 + F_1 \cdot \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ ...\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt eine unendliche geometrische Reihe dar, deren Ergebnis entsprechend der Formel

$$s_n = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

gegen neun Fünftel strebt. Daraus lässt sich der Grenzwert der gesamten Fläche der Koch-Insel wie folgt berechnen:

$$F_\infty = F_0 + \frac{9}{5}F_1 = \frac{{L_0}^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{9}{5} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{(L_0)^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right)\right.$$

Die Koch-Insel besitzt demnach einen unendlich langen Umfang mit einem begrenzten Flächeninhalt:

$$\lim_{i \to \infty} F_i = \frac{8}{20} \cdot {L_0}^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{5} \cdot {L_0}^2 \cdot \sqrt{3}$$

Koch-Kurve und Küstenlinien

Die Koch-Kurve, oder auch die Koch-Insel, können als erste, idealisierte Annäherungen an eine Küstenlinie dienen. Sie bestehen aus vorgelagerten Halbinseln unterschiedlicher Größe, die aus den Zacken sämtlicher Iterationen hervorgehen, präziser wird der Grenzwert aus all jenen Punkten gebildet, die nach einem Iterationsschritt in allen weiteren Schritten erhalten bleiben. Die Grenzfigur, die nach unendlicher Anwendung des Algorithmus entsteht, besitzt nun einen bestimmten Grad an Zerklüftung. Im Vergleich dazu weisen natürliche Küstenlinien Unterschiede auf. Die Beispiele dort reichen von Varianten mit starken Aus- und Einbuchtungen bis zu glatteren mit wenigen Sprüngen. Sie wirken auch weniger konstruiert und streng in ihrer Form als ihre Verwandten aus der Mathematik. Eine erste Verbesserung wird erzielt, wenn die Zacken nicht nur nach außen zeigen können, sondern auch nach innen. Die Entscheidung, ob ein Zacken der Koch-Kurve zur einen oder anderen Seite erfolgen soll, was bedeutet, ob es sich um eine Aus- oder Einbuchtung handelt, wird dem Zufall überlassen (siehe *Abb.6*). Und genau dieser Punkt ist für die Erstellung von realitätsnahen fraktalen Modellen entscheidend: der Faktor Zufall. Das Ergebnis erinnert dann stärker an das Vorbild aus Fels, Erde oder Sand. Diese Zufälligkeit kann auch im weiteren Sinne als Nachahmung der natürlichen Kräfte, wie Wind und Wellen, verstanden werden.

Abb.6.: Koch-Insel mit dem Faktor Zufall

Jedenfalls bleibt eine Analogie augenscheinlich, nämlich jene, dass sich sowohl bei der mathematischen Variante als auch bei deren natürlichen Verwandten eine ähnliche Ausprägung der Zerklüftung im Großen wie im Kleinen erkennen lässt. Eine Küstenlinie vom Flugzeug aus betrachtet offenbart eine gewisse, ihr eigentümliche Art der Zerklüftung, die auch bei einem kleineren Abschnitt – oder einer geringeren Entfernung zum Objekt – erhalten bleibt. Nähert sich das Flugzeug der Erde, so erschließen sich dem menschlichen Auge in den zunächst nur grob wahrgenommenen großen Buchten wiederum kleinere Buchten, die bei weiterer Annäherung wieder Einbuchtungen erkennen lassen. Das Entscheidende ist nun, dass, sofern kein äußerer Anhaltspunkt gegeben ist, es nicht mehr klar ist, aus welcher Entfernung der Küstenabschnitt betrachtet wird. Die Zerklüftung der Küstenlinie ist daher unabhängig vom Maßstab und erfüllt somit eine Eigenschaft der Fraktale.

Charakteristika einer Küstenlinie

Minkowski-Kurve

Der Algorithmus der Koch-Kurve kann so angepasst werden, dass eine Vielzahl von gekräuselten Kurven entsteht, die ihrerseits einen unterschiedlichen Grad der Zerklüftung aufweisen können. Die Adaptierung betrifft dann den Initiator, der nicht nur aus einer Strecke bestehen muss, und den Generator, wobei der Skalierungsfaktor, die Anzahl und die Anordnung der Teilstrecken (Kopien) variabel sind. Der Initiator der Minkowski-Kurve beispielsweise besteht wieder aus einer Strecke der Länge L_0 – der Generator hingegen wird aus acht, auf ein Viertel verkleinerte Kopien des Initiators zusammengesetzt (siehe *Abb.7*). Der Generator beginnt mit der ersten Teilstrecke, dessen Startpunkt und Orientierung identisch mit dem Initiator sind. Nun folgen aneinander anschließend die zweite Teilstrecke nach einer Rotation um +90 Grad, die dritte nach einer Rotation um -90 Grad, die vierte nach einer weiteren Rotation um -90 Grad, die fünfte ohne Rotation in derselben Ausrichtung wie die vierte Teilstrecke, die sechste nach einer Rotation um +90 Grad und die siebente Teilstrecke nach einer weiteren Rotation um +90 Grad. Den Abschluss bildet die achte Teilstrecke nach einer Rotation um -90 Grad, womit deren Endpunkt auf jenem des Initiators zum Liegen kommt.

Aus der Anzahl N_i und dem Skalierungsfaktor s^i lassen sich analog zur Koch-Kurve wieder die Länge einer jeden Iteration – die Länge verdoppelt sich von einer Iteration zur nächsten – und die Selbstähnlichkeitsdimension berechnen:

$$L_i = \frac{8^i}{4^i} \cdot L_0 = 2^i \cdot L_0$$

$$D_s = \frac{log(8)}{log(4)} = 1{,}5$$

Auch für die Minkowski-Kurve gibt es wieder zwei mögliche Varianten für die Orientierung des Generators. Die Entscheidung wird diesmal nach der ersten horizontalen Strecke getroffen, indem die 90 Grad Rotation des zweiten Abschnitts sowohl im als auch gegen den Uhrzeigersinn erfolgen kann, wodurch dieser entweder nach oben oder nach unten weist. Konsequenterweise variieren dann auch die Vorzeichen der Winkel des dritten, vierten, sechsten, siebenten und achten Abschnitts. Wenn nun der Generator zwischen der Abfolge von Ausbuchtung mit anschließender Einbuchtung auf eine nach unten zeigenden Einbuchtung mit anschließender Ausbuchtung per Zufall wechselt, so nähert sich das Ergebnis erneut einer natürlichen Küstenlinie an.

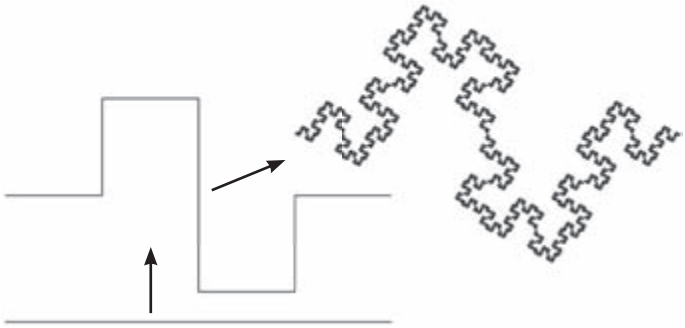


Abb.7.: Minkowski-Kurve; Initiator (links unten), Generator (links oben), 4. Iteration (rechts)

Peano-Kurve

Zur Rubrik der *Monsterkurven* zählt auch jene Kurve, die von Giuseppe Peano im Jahr 1890 analytisch konstruiert wurde[15], um zu demonstrieren, dass eine Strecke so in eine Fläche abgebildet werden kann, dass die Fläche vollständig abgedeckt wird. Bei der sogenannten Peano-Kurve handelt es sich demnach um eine unendlich lange, selbstähnliche, eindimensionale Kurve, die in einem Zug, das heißt ohne Unterbrechung, gezeichnet werden kann, sich selbst nicht schneidet (aber berührt) und dabei ein *Gebiet* der zweidimensionalen Ebene[16] komplett abdeckt. Kurven mit diesen Eigenschaften werden unter dem Begriff *raumfüllende Kurven* zusammengefasst, da auch Kurven existieren, die einen dreidimensionalen Raum komplett ausfüllen.[17] Unter dem Namen *Peano-Kurve* wurden verschiedene Varianten publiziert, von denen nachfolgend die im Original beschriebene näher betrachtet werden soll.[18]

15 Von G. Peano ist keine Visualisierung der Peano-Kurve überliefert.

16 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 70

17 Solche Kurven werden auch FASS Kurven bezeichnet. Die Abkürzung steht für *space-Filling*, ***self-Avoiding***, ***Simple*** und *self-Similar* (raumfüllend, selbst-ausweichend, einfach und selbstähnlich).

18 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seiten 94f

Der Initiator wird, wie bei der Koch-Kurve, auch in diesem Fall wieder durch eine Strecke mit der Länge L_0 definiert, die, wie in der Abbildung ersichtlich, der Diagonalen eines Quadrates entspricht. Der Generator hingegen besteht nun nicht aus vier Teilstrecken wie bei der Koch-Kurve, sondern aus neun, wobei der Skalierungsfaktor s wieder einem Drittel entspricht, was bedeutet, dass sämtliche Teilstrecken die Länge von einem Drittel des Initiators L_0 betragen. Der Generator beginnt mit der ersten Teilstrecke am Startpunkt des Initiators, wobei dieser erste Abschnitt dieselbe Orientierung wie der Initiator aufweist (siehe *Abb.8*). Nach einem Knick von +90 Grad folgt die zweite Teilstrecke. Daran schließt mit +90 Grad ein drittes Teilstück an, ehe sich nach einer Rotation von -90 Grad das vierte anfügt. Nun folgt das fünfte nach einer weitere Rotation um -90 Grad, das somit an das Ende des ersten anschließt und dieses berührt.[19] Nach einer Rotation um +90 Grad fügt sich das sechste Teilstück an, nach einer weiteren Rotation um +90 Grad das siebente und nach einer Rotation um +90 Grad schließlich das achte, das wiederum an das Ende des vierten anschließt und dieses berührt. Der Generator wird nach einer Rotation um -90 Grad durch das neunte und letzte Teilstück abgeschlossen.

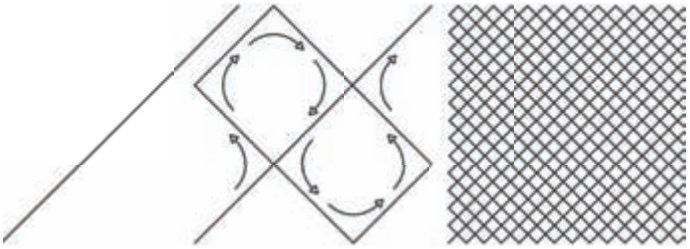


Abb.8.: Peano-Kurve; Initiator, Generator, 3. Iteration

Nach der unendlichen Wiederholung der Konstruktionsanweisung wird das Paradoxon klar: Bei der Peano-Kurve handelt es sich um eine Kurve unendlicher Länge – die Länge wächst um den Faktor 3 von einem Iterationsschritt zum nächsten – die von einem Quadrat umschrieben werden kann und dieses vollständig ausfüllt. Nach Euklid besitzt die Kurve eine Dimension von eins, während ihre Selbstähnlichkeitsdimension zwei beträgt, woraus sich schließen lässt, dass die fraktale Dimension eines Objekts, wie zuvor vermutet, durchaus auch ganzzahlig sein kann. Das kann mittels der Selbstähnlichkeitsdimension, die sich aus dem Skalierungsfaktor s=1/3 und der Anzahl der neuen Teilstrecken N=9 errechnet, demonstriert werden:

flächenfüllende, unendlich lange Kurve

$$D_s = \frac{log(9)}{log(3)} = 2$$

Angewendet auf die (gerasterte) Stadt, kann das Prinzip der vollständigen Erreichbarkeit der Punkte innerhalb eines *Gebietes* der zweidimensionalen Ebene bereits nach wenigen Wiederholungen des Algorithmus veranschaulicht werden. Der Verlauf der Straßen soll als Zwischenschritt – oder genauer, nach einem bestimmten Iterationsschritt der Peano-Kurve – interpretiert und die Flächen dazwischen den Gebäuden zugewiesen werden. Nachdem die Kurve in ihrem zeitlichen Verlauf keine Kreuzungen zulässt (die Berührungen erfolgen zu einer unterschiedlichen Zeit während der Konstruktion), wird jedes Gebäude durch einen einzigen kontinuierlichen Weg erreicht. Die Straße wird demnach als Kurve betrachtet, die in einem Zug, ohne Unterbrechung, begehbar ist. Das bedeutet auch, dass nach einer großen Anzahl von Wiederholungen auch eine große Länge der Kurve vorliegt und für die Verbindungen zwischen zwei Gebäuden mitunter enorme Umwege entstehen – vor allem, wenn diese am Anfang beziehungsweise am Ende der Straße liegen. Dieses Ergebnis ist in der Realität natürlich nicht wünschenswert. Es soll aber verdeutlichen, dass fraktale Kurven möglicherweise Anregungen für die Planung oder Beschreibung von Straßenverläufen mit Haupt- und Neben-Ästen geben können.

fraktale Kurven in der Stadt

Einen Ansatz bietet die fraktale Dimension, die den Grad, um wie viel die Kurve ihre *Basisdimension*[20] – die topologische Dimension D_T – überschreitet, angibt. Während etwa die topologische Dimension D_T der flächenfüllenden Peano Kurve gleich eins ist, ergibt ihre Selbstähnlichkeitsdimension D_s den Wert zwei, was wiederum der topologischen Dimension D_T der Fläche, in der sie liegt, entspricht. Die Koch Kurve füllt diese Fläche wesentlich weniger aus und weist auch eine geringere Selbstähnlichkeitsdimension D_s von 1,26 auf. Daraus lässt sich ableiten, dass die fraktale Dimension die Dichte oder den Grad der Abdeckung der zweidimensionalen Fläche, in der sich die Kurve befindet, ausdrückt. Dieser Grad der Zerklüftung kann somit insofern für die Planung eines Straßenverlaufs innerhalb eines bestimmten Planungsgebietes hilfreich sein, als dadurch angegeben wird, welcher Anteil des definierten Gebietes entlang der Straße abgedeckt und somit von dieser erschlossen wird.

19 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 74

20 *Bovill C. (1996)*, Seite 14

Das Konzept von *raumfüllenden Kurven* findet in der Natur seine Äquivalenz, dort nämlich, wo es um die Erfüllung der Funktion geht, ein Gebiet der zweidimensionalen Ebene oder des dreidimensionalen Raumes möglichst gut auszufüllen, beziehungsweise zu versorgen. Die Geometrie der Arterien und Venen stellt sich beispielsweise so dar, dass nahezu jeder Punkt in geringem Abstand zu diesem Ver- und Entsorgungssystem liegt. Die Verzweigung ist sehr feingliedrig, damit gleichzeitig ein geringes Volumen sichergestellt werden kann.[21]

B.1.3. Cantor'sche Punktmenge (Cantor-Menge)

Die Cantor-Menge, benannt nach dem deutschen Mathematiker Georg Cantor[22], gilt als ältestes mathematisches Fraktal und entsteht, wie die zuvor gezeigten Beispiele auch, durch unendliche Wiederholung einer bestimmten Ersatzregel. Ausgangspunkt für die Erzeugung der Cantor-Menge ist das abgeschlossene Intervall [0, 1], der Initiator, aus dem das offene mittlere Intervall]1/3, 2/3[entfernt wird (siehe *Abb.9*). Während ein abgeschlossenes Intervall – dargestellt durch eckige Klammern – die Endpunkte mit einschließt, werden bei einem offenen Intervall die Endpunkte ausgeschlossen – dargestellt durch umgedrehte eckige Klammern. Der Generator besteht demnach aus den beiden Intervallen [0, 1/3] und [2/3, 1]. In der zweiten Iteration wird der mittlere Teil jedes der beiden verbliebenen Intervalle wieder entfernt, oder weggewischt, wodurch vier neue Intervalle entstehen: [0, 1/9], [2/9, 3/9], [6/9, 7/9] und [8/9, 1]. Die Anzahl der Intervalle nach der i-ten Iteration beträgt demnach 2^i, wobei $(2/3)^i$ des Intervalls des Initiators abgedeckt werden, was wiederum bedeutet, dass die Länge gegen Null tendiert. Nach unendlichen Wiederholungen der Anweisung bleiben schließlich unendlich viele Punkte über, die sogenannte Cantor-Menge. Die Punkte entsprechen den Endpunkten jedes Intervalls, aus denen die Menge besteht. Aus dem Skalierungsfaktor und der Anzahl der verbleibenden Intervalle lässt sich die Selbstähnlichkeitsdimension für die Cantor-Menge berechnen, die 0,6309 beträgt und somit ihre topologische Dimension $D_T = 0$ übersteigt. Die topologische Dimension beträgt Null, weil keine zwei Punkte durch die Cantor-Menge stetig verbunden sind, das heißt es muss nichts entfernt werden um sie zu trennen.

$$D_s = \frac{log(2)}{log(3)} = 0{,}6309$$

Der eigentliche Cantor-Staub, der aus unendlichen Wiederholungen der Anweisung zum Ersetzen einer Strecke hervorgeht, besteht schließlich aus unendlich vielen Punkten und weist die Charakteristik der Selbstähnlichkeit auf, wonach etwa eine Skalierung der Teilmengen des Intervalls [0, 1/3] oder des Intervalls [2/3, 1] mit dem Faktor 3 wieder den Cantor-Staub ergibt. Die Teilmenge eines kleineren Intervalls, das einer Strecke der Iteration i entspricht, kann ebenfalls in das Ganze übergeführt werden, indem der Faktor 3^i gewählt wird (siehe *Abb.9*).

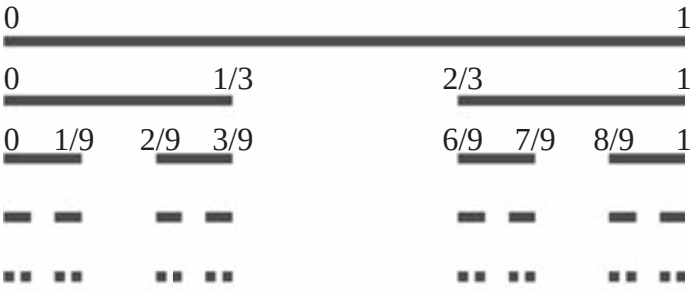


Abb.9.: Triadischer Cantor-Stab; Initiator, Generator, 2., 3. und 4. Iteration

Curdling[23](Gerinnung)

Die *Abb.9* zeigt den Cantor-Stab, der aus dem Cantor-Staub[24] durch hinzufügen einer bestimmten Dicke t entsteht, wodurch die Illustration verbessert wird. Der Prozess, aus dem der Cantor-Stab entsteht, wird von Benoît Mandelbrot nun Gerinnung genannt.[25] Dabei gerinnt die Masse aus dem mittleren Drittel des ersten Stabes, dem Initiator, in die äußeren beiden Drittel (Stäbe) des Generators. Dann wiederholt sich dieser Prozess für die beiden verbleibenden äußeren Drittel, wobei die Masse von deren mittleren Dritteln wieder in die jeweils äußeren gerinnt. Nach unendlichen Wiederholungen enthalten die unendlich dünnen Einzelteile eine unendlich große Dichte.

Saturn Ringe

Ähnlich wie die Koch-Kurve als grobes Bild von Küstenlinien dient, so kann der Cantor-Staub als erste grobe Annäherung an die feine Struktur des Systems der Ringe des Saturns interpretiert werden, die aus Eis- und Gesteinsbrocken unterschiedlicher Größe bestehen, die den Planeten umkreisen. Durch den Flug der *Voyager I* konnten zahlreiche Risse (Unterbrechungen) im Ring des Saturns entdeckt werden, von denen die meisten sehr schmal sind. Sie lassen Sonnenstrahlen auf den Planeten durch, was

21 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 161

22 Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) war der Begründer der Mengenlehre.

23 Curdling ist ein von Benoît Mandelbrot geprägter Begriff. *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 88

24 Es wird von Cantor-Staub gesprochen wegen $D_T = 0$.

25 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 92

wiederum bedeutet, dass die Struktur einer mageren Masse wie jener des Cantor-Staubs ähnlich ist. Die Analogie besteht nun darin, dass die Ringe des Saturns, die von der Erde aus als homogene Bänder erscheinen, wieder aus kleineren, klar voneinander getrennten Ringen bestehen und die Struktur somit einige Eigenschaften des Cantor-Staubes besitzt.[26] Die Ringe des Saturns können demnach auch als Rotation des Cantor-Staubs interpretiert werden.[27]

Varianten des Punktestaubs

Das Konstruktionsprinzip, das den Cantor-Staub entstehen lässt, der als erste Annäherung an die Struktur der Ringe des Saturns dient, kann so erweitert werden, dass sich auch Modelle für die Verteilung in der Natur in der zweidimensionalen Ebene oder im dreidimensionalen Raum ergeben. Für eines dieser Modelle bildet ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck den Initiator, das durch den Generator in drei kleinere Kopien zerlegt wird, wobei die Größe eines jeden ein Drittel des Initiators beträgt (siehe *Abb.10*). Diese drei Kopien werden so arrangiert, dass der rechte Winkel des ersten mit jenem des Ausgangsdreiecks übereinstimmt, jener des zweiten bis zur Seitenhalbierenden des ersten Schenkels verschoben wird und jener des dritten zur Seitenhalbierenden des zweiten Schenkels.[28] Jedes der drei neuen Dreiecke, die sich an keiner Stelle berühren, wird nach derselben Regel wieder ersetzt. Nach unendlichen Wiederholungen bleiben nur mehr Punkte übrig, ein dreieckiger Staub als Variante des Cantor-Staubs.[29]

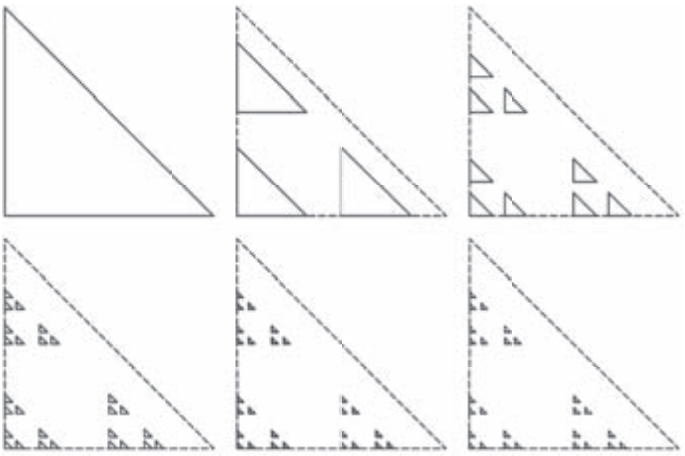


Abb.10.: Dreieckiger Staub

Die fraktale Verteilung natürlicher Rohstoffquellen wie Edelsteine, Edelmetalle oder Erze bilden nun Beispiele aus der Natur, die durch ein solches Konstruktionsprinzip modelliert werden können.[30] Die Verteilung ähnelt dabei der Variante des Cantor-Staubs in der Ebene, wobei diese nicht so regelmäßig erscheint wie bei den mathematischen Verwandten. Den Strukturen gemeinsam ist, dass leere Räume neben stärker besetzten zu finden sind, die bei genauer Betrachtung wiederum eine ähnliche Verteilung beinhalten. Bereits Benoît Mandelbrot weist darauf hin, dass die Verteilung von Rohdiamanten beziehungsweise ehemaliger und aktueller Diamantenminen auf einer Weltkarte solche Charakteristika aufweist.[31] Einige liegen isoliert, aber die meisten sind in wenigen Regionen konzentriert. An diesen Orten ist die Verteilung wiederum unregelmäßig und bei genauerer Betrachtung fallen dort wieder isolierte Konzentrationen neben ärmeren Regionen auf. Diese Beschreibung erinnert an jene des Gerinnens und weist einige fraktale Eigenschaften auf. So besitzt die Struktur einen gewissen Grad an Selbstähnlichkeit, die über mehrere Maßstabsebenen reicht, und infolgedessen es nicht eindeutig erkennbar ist, aus welcher Entfernung die Karte mit den Markierungen für Rohdiamanten betrachtet wird (letztere Eigenschaft wird im nächsten Kapitel *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition* genauer untersucht).

Verteilung von Rohstoffen

Ein weiteres Beispiel für eine fraktale Verteilung bietet das Abbild von menschlichen Ansiedlungen als Abfolge von Regionen, Städten, Stadtquartieren und einzelnen Gebäuden. So existieren Gegenden, die stärker besiedelt sind, mit großen Flächen spärlicher Besiedelung dazwischen. Erstere geben bei genauerer Betrachtung unbebaute leere Flächen zwischen stärker bebauten preis. Auch hier liegen wieder mehrere Maßstabsebenen vor. Die Verteilung als solche ist dabei nicht so strikt wie beim eigentlichen Cantor-Staub, sondern kann vielmehr durch die Ergänzung um den Faktor Zufall beschrieben beziehungsweise modelliert werden.

Verteilung in einer Stadt

26 *Takayasu H. (1990)*, Seite 36

27 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 93

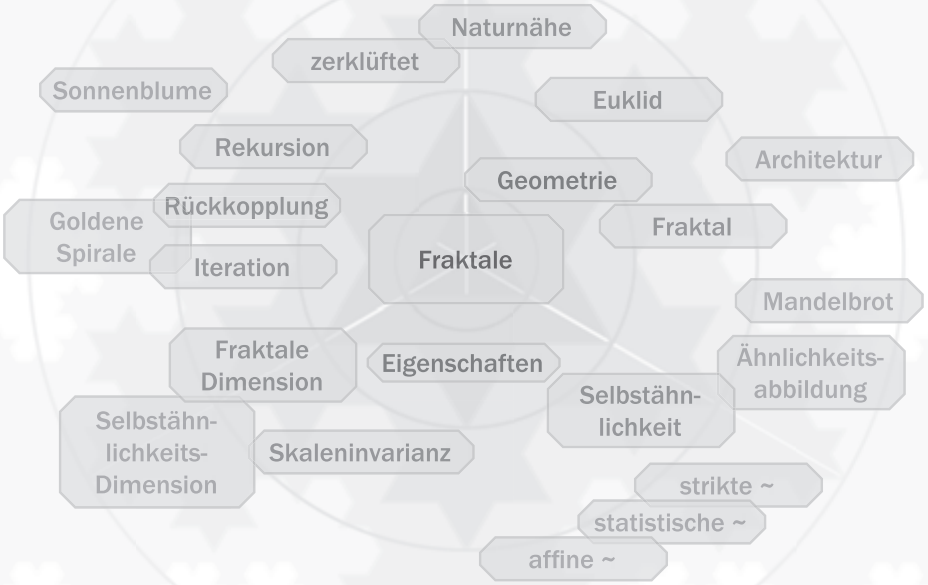
28 In einem gleichschenkeligen Dreieck werden die gleich langen Seiten als Schenkel bezeichnet und der Punkt, an dem beide Schenkel zusammentreffen, wird Spitze genannt.

29 *Peak D. et al. (1995)*, Seite 59

30 *Peak D. et al. (1995)*, Seite 106

31 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 106

Einführung Fraktale



C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition

SELBSTÄHNLICH UND ZERKLÜFTET

Benoît Mandelbrot führt – wie in der Einführung bereits erwähnt – eine erste Definition eines Fraktals an, indem er erklärt, dass die Hausdorff-Besicovitch-Dimension einer Menge echt die topologische Dimension übersteigen muss, um Fraktal genannt zu werden.[01] Im wesentlichen erfüllt ein Fraktal bestimmte Kriterien – hier wird auch von den Eigenschaften eines Fraktals gesprochen – wobei das Vorhandensein eines dieser Kriterien noch nicht zwangsweise bedeutet, dass es sich tatsächlich um ein Fraktal handelt (vergleiche Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen)*. Im folgenden Kapitel werden die Eigenschaften, die zuvor nur angedeutet wurden, näher erläutert.

Aus diesen Eigenschaften geht hervor, dass Fraktale, sofern sie visualisiert werden, irreguläre selbstähnliche geometrische Formen sind, die sich dadurch von glatten Figuren unterscheiden. Die seit über 2000 Jahren vertraute euklidische Geometrie mit ihren einfacheren Geometrien wie Linie, Kreis, Rechteck, Kugel, Kegel oder Würfel, reicht zur Beschreibung dieser komplexen Strukturen nun nicht mehr aus. Sie wurde daher um den Begriff der fraktalen Geometrie erweitert, die sich mit Fraktalen und deren Gesetzmäßigkeiten befasst.

01 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 27

C.1. Eigenschaften Teil 1

Ein Kriterium für Fraktale ist die Selbstähnlichkeit, die, wie bei den mathematischen Fraktalen, strikt, beziehungsweise exakt oder aber, wie bei der Küstenlinie, rein statistischer Natur sein kann. Dadurch ergeben sich in jedem Fall mehrere Maßstabsebenen (vom Großen zum Kleinen), die ähnliche Strukturen mit einer ähnlichen Irregularität aufweisen, was wiederum dazu führt, dass der Abstand des Betrachters zum Objekt, beziehungsweise die physische Größe des betrachteten Teils, nicht eindeutig festgestellt werden kann. Folglich weisen Fraktale einen hohen Grad an Skaleninvarianz auf. Eine weiteres Kriterium ergibt sich aus der Tatsache, dass, wie in der Einführung bereits demonstriert wurde, Längen- und Flächenmaße für Fraktale keine charakteristische Größen sein können, sondern zur Beschreibung solcher Strukturen vielmehr ihre fraktale Dimension dient.

C.1.1. Selbstähnlichkeit

Ähnlichkeit

Bevor die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit genauer betrachtet wird, soll an dieser Stelle der Begriff Ähnlichkeit veranschaulicht werden. In der Mathematik bedeutet Ähnlichkeit, dass zwei Figuren sowohl in allen entsprechenden Winkeln als auch in den Verhältnissen einander entsprechender Streckenlängen übereinstimmen.[02] Aus letzterem folgt, dass bei ähnlichen Figuren die Proportionen erhalten bleiben. Das Verhältnis der Längen kann wiederum als Zahlenwert ausgedrückt werden, dem Ähnlichkeits-, Vergrößerungs-/Verkleinerungs- oder Skalierungsfaktor. Wenn zwei ähnliche Figuren durch Rotation und Reflexion so angeordnet werden, dass ihre entsprechenden Linien parallel sind und analoge Punkte durch Geraden miteinander verbunden werden, so schneiden sich diese Geraden genau in einem Punkt, dem Ähnlichkeitszentrum Z (siehe *Abb.11*).[03]

Ähnlichkeits-abbildung

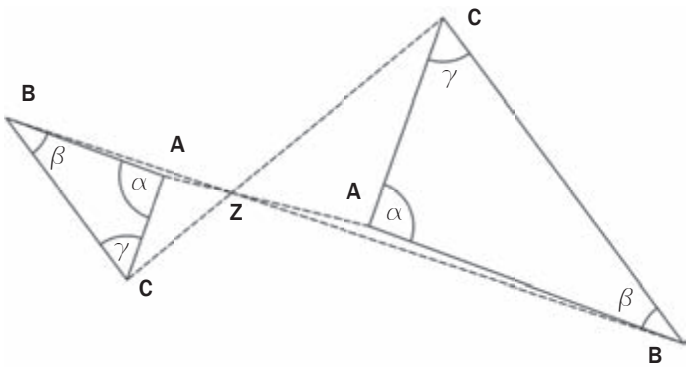


Abb.11.: Ähnliche Dreiecke

02 *Müller-Fonfara R. et al. (2004)*, Seite 283

03 *Knerr R. (1977)*, Seite 15

Jene Transformationen, bei denen die inneren Winkelmaßzahlen unverändert und das Teilverhältnis von Strecken gleich bleiben, heißen Ähnlichkeitsabbildungen. Dazu zählen die Skalierung (Streckung beziehungsweise Stauchung), die Rotation (Drehung), die Translation (Verschiebung), und die Reflexion (Spiegelung). Diese Operationen können mathematisch jeweils auch in Abbildungsgleichungen ausgedrückt werden, wobei im folgenden die Reflexion nicht weiter betrachtet wird.

(1) Zunächst soll in der zweidimensionalen Ebene eine Skalierung um den Faktor s auf einen Punkt P(x,y) angewendet werden, wodurch dieser in den Punkt P‘(x‘,y‘) übergeht. Die entsprechenden Abbildungsgleichungen lauten:

$$x' = s \cdot x$$
$$y' = s \cdot y$$

(2) Erfolgt eine Rotation des Punktes P(x,y) um den Ursprung des Koordinatensystems und gegen den Uhrzeigersinn, so ergibt sich der Punkt P‘(x‘,y‘) aus:

$$x' = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y$$
$$y' = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y$$

(3) Bei einer Translation um die Werte T(v,w) geht der Punkt P(x,y) in den Punkt P‘(x‘,y‘) über, mit:

$$x' = x + v$$
$$y' = y + w$$

Alle drei *einfachen* Ähnlichkeitsabbildungen lassen sich schließlich kombinieren und in zwei Abbildungsgleichungen zusammenfassen:[04]

$$x' = s\cos\theta \cdot x - s\sin\theta \cdot y + v$$
$$y' = s\sin\theta \cdot x + s\cos\theta \cdot y + w$$

Zwei Objekte werden nun als ähnlich bezeichnet, wenn sie die gleiche Form unabhängig von ihrer Größe besitzen beziehungsweise, wenn sie durch Ähnlichkeitsabbildungen zur Deckung gebracht werden können.[05] Zu den Ähnlichkeitsabbildungen zählen:[06]

- die Gruppe der Kongruenzabbildungen, bei denen sowohl Längen als auch Winkel unverändert bleiben,
- die Skalierung (Streckung) und
- jede mögliche Kombination daraus.

Selbstähnlichkeit

Der Begriff Ähnlichkeit kann nun um den Begriff Selbstähnlichkeit erweitert werden. Selbstähnlichkeit liegt dann vor, wenn alle Teilmengen verkleinerten Kopien des Ganzen entsprechen. Neben der Verkleinerung sind auch weitere Ähnlichkeitstransformationen möglich, wobei jede Kopie so verändert wird, dass die Proportionen mit demselben Faktor modifiziert werden. Die so entstandenen verkleinerten neuen Objekte können also gedreht und/ oder verschoben sein, wobei die Gestalt ähnlich bleibt. Ist das der Fall, können umgekehrt Teile eines geometrischen Objekts so vergrößert und transformiert werden, dass sie dieselbe (exakt gleiche) oder ähnliche Struktur des Ganzen aufweisen. Daraus folgt, dass offensichtlich mehrere Grade von Selbstähnlichkeit existieren, von denen einige nachfolgend erklärt werden.[07]

Selbstähnlichkeit alleine macht aber noch kein Fraktal aus. Eine Linie, die in einzelne Teile zerlegt wird, besteht somit wieder aus Linien, die durch eine Vergrößerung in das Ganze überführt werden können. Dennoch ist eine Linie kein Fraktal, weil ihr von einer Längenskala zur nächsten kein Längenzuwachs wiederfährt und keine zusätzlichen Details hervortreten.

Strikte Selbstähnlichkeit

Bei den sogenannten mathematischen Fraktalen kann jeder Ausschnitt – der aus dem Vielfachen des Skalierungsfaktors hervorgeht – durch die korrekte Wahl der Ähnlichkeitstransformation mit dem gesamten Objekt in Deckung gebracht werden. Dabei stimmt dieser entsprechend vergrößerte Teil dann exakt, und das ist das Entscheidende, mit dem Ganzen überein. Der Grund liegt in der streng deterministischen Iteration und der unendlichen Wiederholung, was sich anhand eines weiteren mathematischen Fraktals, des Sierpinski-Dreiecks, demonstrieren lässt. Der Algorithmus zur Erstellung lautet wie folgt: Der Initiator ist ein gleichseitiges Dreieck, aus dem im Generator das mittlere Dreieck, dessen Punkte durch die Seitenhalbierenden des Initiators gebildet werden, entfernt wird. Aus den verbleibenden drei Dreiecken werden wieder die mittleren Dreiecke entfernt, aus denen wieder die mittleren entfernt werden und so fort. Der Grenzwert dieser Anweisung ist dann das eigentliche Sierpinski-Dreieck.

Wird nun der linke untere Abschnitt, begrenzt durch ein gleichseitiges Dreieck bestehend aus einem Eckpunkt des Initiators und den beiden nächst gelegenen

04 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 164

05 Bei einer strengen Selbstähnlichkeit kommt nur eine Ähnlichkeitsabbildung zur Anwendung, bei der eine kompakte Punktmenge G in $\mathbb{R}^2$in paarweise disjunkte, kongruente Teilmengen Gi zerlegt wird. Eine allgemeine Selbstähnlichkeit schließt hingegen mehrere Ähnlichkeitsabbildungen ein, einschließlich verschiedener Skalierungsfaktoren. Die Teilmengen Gi sind dann nicht mehr kongruent. *Zeitler H. et al. (2000)*, Seiten 13f, 95

06 *Müller-Fonfara R. et al. (2004)*, Seite 286 und *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 164

07 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seiten 172 ff.

Seitenmittelpunkten, mit dem Faktor zwei vergrößert, wobei der Eckpunkt das Skalierungszentrum (Streckungszentrum) bildet, ergibt sich wieder exakt das ursprüngliche Sierpinski-Dreieck. Das gilt allerdings nur für das tatsächliche Sierpinski-Dreieck, da nur dieses nach der unendlichen Iteration auch unendlich viele Details beinhaltet, womit auch die Vergrößerung wieder aus unendlich vielen Details besteht. Ein Abschnitt der nächsten Iteration kann dann durch den Faktor vier vergrößert werden. Handelt es sich dabei um einen Abschnitt innerhalb des Sierpinski-Dreiecks und wird wieder der Eckpunkt des Initiators als Zentrum gewählt, muss noch eine Translation erfolgen, um den Abschnitt mit dem Ganzen in Deckung zu bringen (siehe *Abb.12*). Diese Beschreibung gilt bei mathematischen Fraktalen auch für den unendlich kleinen Teil. Umgekehrt kann schließlich auch das Ganze so verkleinert werden, dass es in einen seiner Teile übergeht. Somit lässt bei mathematischen Fraktalen das Ganze genaue Rückschlüsse auf jeden Ausschnitt zu.

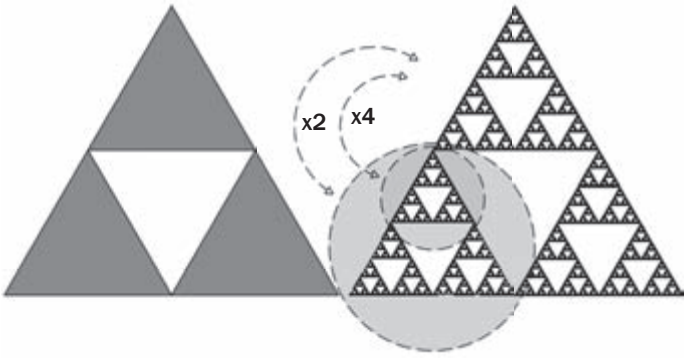


Abb.12.: Sierpinski-Dreieck: Generator und 8. Iteration

Ein Objekt wird dann strikt selbstähnlich genannt, wenn es in n-Teilobjekte zerlegt werden kann, die sämtlich durch eine Ähnlichkeitsabbildung wieder in das Ganze übergehen. Bei einer allgemeinen Selbstähnlichkeit hingegen existieren verschiedene Ähnlichkeitsabbildungen und somit auch verschiedene Skalierungsfaktoren.[08]

Statistische Selbstähnlichkeit

Strikte Selbstähnlichkeit, bei der (alle) Teile exakt in das Ganze übergeführt werden können, ist keine angemessene Methode die Natur zu beschreiben. Der Wuchs einer Pflanze und damit dessen Form, im Ganzen wie im Detail, wird beispielsweise durch Sonne, Wind und Wetter beeinflusst. Auch die einzelnen Abschnitte einer Küstenlinie entsprechen nicht exakt den größeren Abschnitten, sondern sie variieren. Trotzdem sind sie einander ähnlich. Ausgehend vom Ganzen können die Strukturen von Ausschnitten nur erahnt aber nicht genau vorhergesagt werden, wie es etwa bei der Koch-Kurve der Fall ist. Die Art und Weise wie ein Ausschnitt bei Änderung der Längenskala im Detail variiert, wird wieder durch die fraktale Dimension beschrieben.[09]

Strukturen von natürlichen fraktal-ähnlichen Objekten werden statistisch selbstähnlich genannt, weil Einzelheiten trotzdem im Durchschnitt dem Ganzen ähnlich sind, Vergrößerungen von Teilen der Menge weisen dieselbe Zufallsverteilung wie das Ganze auf. Der typische Charakter, die Irregularität, die natürliche Form bleibt trotz wiederholter Verkleinerung des Ausschnitts erhalten.[10] Diese begriffliche Erweiterung der Selbstähnlichkeit ist für die Beschreibung von natürlichen Objekten aber auch für jene von Gebäuden entscheidend.

Die *Gotik* und ihre Elemente

Als Beispiele seien an dieser Stelle gotische Kathedralen wie jene in Reims oder Chartres erwähnt, in der sich Architektur, Plastik, Glasmalerei und Malerei zu einem Gesamtkunstwerk vereinen. Vor allem die Schöpfungen aus der *Hochgotik* weisen im Allgemeinen über mehrere Maßstabsebenen einen gewissen Grad an Selbstähnlichkeit auf, im Vergleich zu mathematischen Fraktalen allerdings in einer bedeutend weniger strikten Form. Eine solche Selbstähnlichkeit ist bei gotischen Kathedralen zunächst von einer Idee geprägt, der sich die einzelnen Elemente unterordnen. Diese Idee entspringt wiederum der Vorstellung, dass sich in dem vom Licht Geformten das Gute oder im theologischen Sinne das „*Göttliche*“ offenbart.[11] In dieser Sehnsucht nach dem „*Göttlichen*“ wurzelt das Bestreben, die Fenster, die auch als Bildträger von Geschichten fungierten, immer weiter zu vergrößern, was in seiner Konsequenz zu einer Auflösung der Wand führte. Dem kam wiederum der Skelettbau entgegen, bei dem das Gewicht nicht über eine massive Wand abgeleitet werden musste, sondern über ein Skelett, bestehend aus Spitzbögen, Gewölberippen, Strebebogen und Strebepfeilern. Damit hängt auch ein weiteres Merkmal der Gotik zusammen, nämlich jenes der Betonung der Vertikalen im Innenraum und am Äußeren des Bauwerks, im Sinne eines Aufwärtsstrebens zum Himmel.[12] Das äußert sich in verschiedenen Elementen, wie beispielsweise den hohen Fenstern, den Türmen, dem hochaufragenden Strebesystem oder dem hohen Kirchenschiff mit den Kreuzrippengewölben im Inneren. Die Vertikale wird auch durch Formen wie der Fiale, dem Tabernakel oder dem Spitzbogen betont, die sich in verschiedenen Größen am gesamten Bauwerk wiederfinden. Die Form des Spitzbogens ist mitunter bei den Portalen, den Fenstern, den Baldachinen

08 *Zeitler H. et al. (2000)*, Seiten 13, 95

09 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 30

10 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 71

11 *Binding G. (2006)*, Seite 52

12 *Koch W. (1991)*, Seite 148

über Figuren, den Galerien, den Öffnungen in den Türmen, den Fialen und schließlich im Inneren bei den Bögen und den Kreuzrippengewölben anzutreffen. Aus wenigen Grundelementen entsteht so, in verschiedenen Größen zur Anwendung gebracht, ein kohärentes Ganzes, dessen größere Teile wie auch die kleinsten Teile der Dekoration auf das Gesamte schließen lassen, wobei das Ganze das Ergebnis des Strebens nach einem hohen Maß an Licht und des Strebens in die Höhe ist.

Affine Selbstähnlichkeit

Zur Darstellung eines naturnahen Fraktals wird die Liste an erlaubten Transformationen, die zunächst die zuvor vorgestellten Ähnlichkeitsabbildungen, wie Skalierung, Rotation, Translation, Reflexion und deren Kombinationen umfasst, noch um die Transvektion (Scherung) erweitert.[13][14] Bei einer Transvektion verändert sich in der zweidimensionalen Ebene die Koordinate der einen Dimension (x oder y) proportional zur Koordinatengröße der anderen Dimension (y beziehungsweise x). Das ursprüngliche Objekt wird als Original bezeichnet und jenes, in das es durch Transvektion übergeführt wird, als Bild. Das Bild erscheint nun in Bezug auf das Original verzerrt, wobei Parallelität von Geraden und das Teilverhältnis von Strecken, das ist die Zahl, die durch die Position eines Punktes auf einer bestimmten Strecke gegeben ist, erhalten bleiben. Es ändern sich aber sowohl die inneren Winkel als auch das Teilverhältnis von Strecken und somit die Proportionen der Seiten.[15] Die zugehörigen Formeln um einen Punkt P(x,y) durch Transvektion in den Punkt P'(x',y') überzuführen, lauten wie folgt:

$$x' = x + a \cdot y$$
$$y' = y + b \cdot x$$

Eine Methode, die sich affine Transformationen zu Nutze macht, ist das sogenannte *Iteration Function System*, die im Kapitel ***D. Einteilung – Fraktale Methoden/D.2.1. IFS – Iteration-Function-System*** näher beschrieben wird. Um die richtigen Transformationen in einer Visualisierung nutzen zu können, müssen diese allerdings zuerst am realen Objekt erkannt werden. Das ist bei den selbstaffinen Strukturen naturgemäß schwieriger als bei den strikten selbstähnlichen mathematischen Fraktalen.

Ein Objekt wird selbstaffin genannt, wenn es in n-Teilobjekte zerlegt werden kann, die durch affine Abbildungen wieder in das Ganze übergehen. Die Skalierungsfaktoren zur Reskalierung werden dabei im Allgemeinen für verschiedene Richtungen unterschiedlich gewählt. Werden nun Ähnlichkeitsabbildungen ausgeschlossen, so wird das Ergebnis als echt-affin bezeichnet.

C.1.2. Skaleninvarianz

Die Eigenschaft der Skaleninvarianz oder *Skalenunabhängigkeit* liegt dann vor, wenn die signifikanten Werte, beziehungsweise die Charakteristik eines Objektes oder eines Zustandes unabhängig vom betrachteten Ausschnitt im Wesentlichen gleich bleiben. In weiterer Konsequenz kann bei der Betrachtung eines Ausschnittes auch keine Aussage über die Skalierung getroffen werden, da es sich auf Grund der gleichen Charakteristik sowohl um einen sehr kleinen als auch einen größeren Teil handeln kann. Damit wird der Zusammenhang mit der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit offensichtlich. Bei mathematischen Fraktalen wie der Koch-Kurve liegt dann auch eine sehr hohe Skaleninvarianz vor, da ein deterministischer Algorithmus[16] unendlich oft angewendet wird, der in diesem Fall zu einer exakten Selbstähnlichkeit bis ins unendlich Kleine führt. Ein unendlich kleiner Teil entspricht dann wiederum exakt einem größeren Teil, womit der Maßstab des Ausschnitts ohne zusätzliche Angaben nicht klar erkennbar ist. Die Struktur darf aber nicht nur im Kleinen, sondern muss konsequenterweise auch im Großen fortgesetzt werden. Wäre das nicht der Fall, gäbe es eine maximale obere Schranke (Begrenzung), was wiederum zu einem maximal zulässigen, das heißt beschränkten Intervall führt.

Ein natürliches fraktal-ähnliches Objekt, wie ein schwarzstieliger Streifenfarn ist nur schwach skaleninvariant, da bei immer genauerer Betrachtung die Struktur des Blattes immer ungenauer wird. Es besteht eine kleinste, aber auch eine größte Schranke, innerhalb der ein gewisser Grad an Selbstähnlichkeit vorliegt. Auch eine Küstenlinie, die statistisch selbstähnlich ist, kann nur als *statistisch* skaleninvariant bezeichnet werden. Ein Ausschnitt der Küstenlinie gibt keinen Hinweis auf die Größe, solange kein Referenzobjekt mit erkennbaren Ausmaßen, wie zum Beispiel ein Wanderer, sich daneben befindet und einen Hinweis auf den Maßstab gibt.

13 lat. affinitas, Verwandtschaft. Skalierung an einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene, Rotation, Translation, Reflexion an einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene und Transvektion gehören zu den affinen Transformationen.

14 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 164

15 *Peitgen H.-O. et al. (1989)*, Seite 54 und *Zeitler H. et al. (2000)*, Seite 108

16 Unter gleichen Voraussetzungen führt der Algorithmus immer zum selben Ergebnis, da der Ablauf eindeutig ist.

C.1.3. Fraktale Dimension

Im Zusammenhang mit den mathematischen *Kurven-Fraktalen* wird die fraktale Dimension zum Einen als Grad für die Geschwindigkeit, mit der die Länge einer fraktalen Kurve von einer Iteration zur nächsten wächst[17], bezeichnet. Zum Anderen beschreibt sie den Grad, wie viel die Grenzfigur den zwei- beziehungsweise den dreidimensionalen Raum, auf den die Kurve abgebildet wird, ausfüllt. Beides ist wiederum von der Stärke der Windung, also dem Faktor, wie stark die Kurve gekrümmt ist, und der Häufigkeit der Richtungswechsel abhängig. Somit scheint dem Grad der Zerklüftung und der Irregularität einer Kurve ein Wert gegeben. Sinngemäß bedeutet das im Fall einer Oberfläche, dass der Grad an Textur durch die fraktale Dimension ausgedrückt wird. Nachdem es unterschiedliche Ansätze gibt, die fraktale Dimension zu definieren, bedarf es einer ausführlicheren Betrachtung, der im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* nachgekommen wird. An dieser Stelle soll aber noch der Vollständigkeit halber die Selbstähnlichkeitsdimension des Sierpinski-Dreiecks angeführt werden. Der Skalierungsfaktor der Ersatzregel im Generator entspricht 1/2 und die Anzahl der neuen Teile ist drei, woraus sich D_s wie folgt berechnen lässt:

$$D_s = \frac{log(3)}{log(2)} = 1{,}585$$

Das Sierpinski-Dreieck zeigt also offenbar mehr Zerklüftung und Irregularität als die Koch-Kurve (1,26) und weniger als die Peano-Kurve (2,0), die sogar ein Quadrat vollständig ausfüllt. Der Wert ist jenem der Minkowski-Kurve (1,5) am nächsten.

C.2. Eigenschaften Teil 2

Seine Entstehung verdanken mathematische Fraktale und die Natur nachbildende Modelle Einsatzregeln, die wiederholt werden. Die Wiederholung wird Iteration und der Prozess Rückkoppelung genannt. Aus diesem Konstruktionsprozess ergibt sich eine Struktur aus vielen extrem (unendlich) feinen Bestandteilen, die somit stark zerklüftet oder zerbrochen ist. Zu den Eigenschaften kann manchmal auch die Analogie zur Natur gezählt werden, nachdem viele Beispiele für fraktalähnliche Strukturen aus der Natur stammen.

C.2.1. Entstehung durch Iterationen

Iteration

Iterativ werden Prozesse oder Verfahren genannt, die bestimmte Rechenschritte, (affine) Transformationen oder ganz allgemein Vorschriften nacheinander wiederholen, wobei eine (einzelne) Iteration den vollständigen Durchlauf eines solchen Prozesses bezeichnet.[18] Bei jeder dieser Wiederholungen wird die Vorschrift, die aus Formeln oder aus geometrischen Anweisungen besteht, auf die jeweils vorangehende Berechnung oder das letzte geometrische Bild angewendet. Durch diese wiederholte Anwendung nähern sich schließlich die Zwischenergebnisse, die sich aus den jeweiligen Iterationen ergeben, an die exakte Lösung an. Im Fall der Initiator-Generator-Methode zur Erzeugung sogenannter Monsterkurven bezeichnet diese exakte Lösung das eigentliche Fraktal, das nach unendlichen Schritten entsteht. Der Initiator entspricht dabei nur einer Anfangsnäherung und erst die wiederholte Anwendung der geometrischen Anweisungen des Generators führt schrittweise zu einer Verbesserung dieser Näherung, womit auch die Genauigkeit immer weiter zunimmt.[19]

Bei der Koch-Kurve, die im Kapitel *B.1.2. Monsterkurven/ Koch-Kurve* vorgestellt wurde, besteht die Grundform, der Initiator, wie bereits erwähnt, aus einer Strecke, die zunächst durch eine andere Form, den Generator, bestehend aus vier verkleinerten Strecken, ersetzt wird. Das Ergebnis – das sind die vier Strecken – wird in weiterer Folge wieder als Ausgangsbild benutzt und nach denselben Kriterien, wie es für die Grundform der Fall war, umgewandelt. Das bedeutet, dass jede einzelne der vier Strecken wiederum durch den Generator, das sind die vier neuen verkleinerten Kopien, ersetzt wird. Von einer Iteration zur nächsten nähert sich nun die Folge der Iterationen immer mehr dem Endergebnis, das ist der Grenzwert oder die Grenzfigur des Prozesses, an.

goldene Rechtecke

Ein weiteres Beispiel für ein geometrisches Ergebnis aus einem iterativen Prozess ist die Folge ineinander verschachtelter, sogenannter *goldener Rechtecke*. Als *golden* wird ein Rechteck dann bezeichnet, wenn die Proportion der Seiten dem *goldenen Schnitt* (*sectio aurea*) folgt, das heißt, wenn dessen kürzere Seitenlänge sich zur längeren so verhält wie die längere zur Summe von beiden ($a : b = b : c$, wobei folgendes gilt: $a = b + c$). Konstruieren lässt sich ein goldenes Rechteck über ein Basisquadrat mit den Eckpunkten ABCD. Vom Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ (siehe ***Abb.13***: M_{AB}) wird zunächst die Strecke zu einem der beiden gegenüberliegenden

17 Die fraktale Dimension ist ein Maß dafür, wie schnell die Länge einer Kurve Unendlichkeit erreicht. *Bovill C. (1996)*, Seite 27

18 *Knerr R. (1977)*, Seite 148

19 *Duden (2003)*, Seite 174

Eckpunkte (siehe *Abb.13*: C) auf die Verlängerung der Geraden $\overline{AB}$ abgeschlagen. Dieser neu konstruierte Punkt E bildet neben den Punkten A und D einen weiteren Eckpunkt des goldenen Rechtecks. Der gegenüberliegende Eckpunkt F wird analog dazu auf der Verlängerung $\overline{DC}$ konstruiert, mit dem Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$ als Zentrum und der Strecke $\overline{M_{CD}B}$ als abgeschlagenem Radius. Das Ergebnis ist ein Quadrat ABCD mit dem angeführten Rechteck BEFC, in einem größeren Rechteck AEFD. Dabei entspricht die Proportion der Seiten des kleineren Rechtecks BEFC wieder dem goldenen Schnitt.

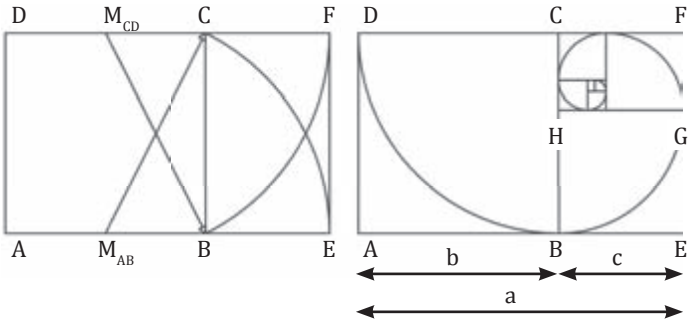


Abb.13.: Goldene Spirale

In dieses kleinere Rechteck wird nun ein weiteres Quadrat eingeschrieben, indem die Strecke $\overline{EB}$ vom Punkt E auf die Seite $\overline{EF}$ beziehungsweise die Strecke $\overline{BE}$ vom Punkt B auf die Seite $\overline{BC}$ abgeschlagen wird. Durch die Verbindung der auf diese Weise neu konstruierten Punkte G und H entsteht schließlich das Quadrat BEGH, aber auch ein kleineres goldenes Rechteck HGFC, diesmal mit der Strecke $\overline{FC}$ als längerer Seite (siehe *Abb.13* rechts). In das zuletzt erstellte Rechteck wird dann wieder ein Quadrat eingeschrieben, und so fort. Für die Erstellung einer *goldenen Spirale* werden die Quadrate alle gleichsinnig, entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn angeordnet. Diese Anweisung, das Einschreiben eines Quadrates, bezeichnet den iterativen Prozess.

Rekursion[20] und Iteration

Rekursion bezeichnet zunächst genauso wie der iterative Prozess die Wiederholung von Algorithmen. Der Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die Wiederholung abgearbeitet wird, so erfolgt sie bei der Iteration durch Aneinanderreihung und bei der Rekursion durch Ineinanderschachteln. In der Computer-Programmierung werden bei der Iteration Schleifen eingesetzt, die n-Mal (hintereinander) durchlaufen werden, während die Rekursion sich immer wieder selbst aufruft (verschachtelt), bis ein etwaiges Abbruchkriterium erreicht ist. Bei Rekursionen wird folglich das Ergebnis eines Durchlaufes in den darauf folgenden Aufruf des Programmes eingesetzt, das bedeutet, dass ein Ergebnis das nächste bedingt.

Die Fibonacci-Folge ist ein Beispiel für die Erzeugung durch einen solchen rekursiven Algorithmus. In seinem Buch *Liber abaci*[21] aus dem Jahr 1202 beschrieb Leonardo von Pisa, auch bekannt als Fibonacci[22], das Problem des Wachstums einer Population von Kaninchen. Bei dieser Problemstellung wird davon ausgegangen, dass ein Kaninchenpaar seine Gebärfähigkeit im Alter von 2 Monaten erreicht, dann jedes Monat ein neues Paar auf die Welt bringt und ewig lebt. Im ersten Monat wird nun das erste Paar geboren, das im zweiten gebärfähig wird und im dritten Monat seine ersten beiden Nachkommen, das zweite Paar, auf die Welt bringt. Im nächsten, dem vierten, Monat bekommt das erste Paar zum zweiten Mal Nachwuchs, das dritte Paar wird geboren, während das zweite erst gebärfähig wird. Im darauf folgenden, fünften, Monat kommen je ein Paar des ersten und diesmal auch des zweiten dazu, wodurch sich die Population auf fünf Paare erhöht. Im sechsten Monat kommt ein Paar vom ersten, ein weiteres vom zweiten und ein drittes vom dritten Paar dazu und so fort. Die Folge startet also zum Zeitpunkt Null mit null Paaren. Im ersten Monat ist ein Paar vorhanden, alle weiteren ergeben sich aus der Addition der jeweils beiden vorangehenden.[23]

$$a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 1;$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_3 = 2;\ a_4 = 3;\ a_5 = 5;$$

$$a_6 = 8;\ a_7 = 13;\ a_8 = 21;$$

Zwischen der Fibonacci-Folge und dem zuvor beschriebenen goldenen Schnitt kann nun ein Zusammenhang hergestellt werden. Jene Werte nämlich, die sich aus der Division der Zahlen aus der Folge durch die jeweils vorhergehende ergeben, nähern sich an das Maßverhältnis des goldenen Schnittes, das ist 1 : 1,618, immer mehr an.

Phyllotaxis

Die regelmäßige Anordnung von Blätter, Blüten oder Samen wird Phyllotaxis bezeichnet.[24] Interessant ist dabei, dass deren Anordnung (etwa in Spiralen) häufig auf den Zahlenwerten der Fibonacci-Folge aufbaut. Dazu zählt das Muster des Fruchtstandes einer Sonnenblume, das durch viele

20 Latr. recursare, bedeutet *zurückkehren*. ***Knerr R. (1977)***, Seite 343

21 *Das Buch des Abakus*, in dem die indisch-arabischen Ziffer in Europa bekannt gemacht wurde.

22 Fibonacci, bedeutet *der Sohn des Bonacci*. ***Peitgen H.-O. et al. (1998a)***, Seite 38

23 ***Duden (2003)***, Seite 31

24 ***Deussen O. (2003)***, Seite 36f

kleine Kerne gebildet wird. Diese sind spiralförmig angeordnet, wobei jeder Kern einer linksdrehenden und einer rechtsdrehenden Spirallinie angehört.[25] Die Anzahl der Blüten-Reihen einer Spirale gegen den Uhrzeigersinn und die Anzahl der Reihen im Uhrzeigersinn entsprechen dabei jeweils benachbarten Zahlenwerten aus der Fibonacci-Folge. Entsprechend finden sich Blütenstände mit 21/34, 34/55 oder 89/144 Spiralen, aber auch 144/233 bei sehr großen Exemplaren.[26] Um ein solches Muster durch ein Computer-Programm zu simulieren, wird zunächst eine Mitte, die Pflanzenachse, gewählt und dann durch Wiederholung der jeweilige Abstand und der Winkel für die Blüten ermittelt. Der Abstand der kleinen Blüten ergibt sich nun aus einer Konstante multipliziert mit der Wurzel aus dem Zähler der Wiederholung, der Winkel wiederum wird um jeweils 137,5° erhöht. Der Grund für die Entsprechung der Anzahl der Spiralen und der Zahlenwerte aus der Fibonacci-Folge liegt in diesem Winkel zwischen zwei Samen in Bezug auf die Pflanzenachse, der auch in der Natur in jedem Fall sehr genau mit dem goldenen Winkel von 137,5° übereinstimmt (siehe *Abb.14*).[27][28]

Abb.14.: Spiralen nach 300 Wiederholungen mit unterschiedlichen Winkeln: 137,5°, 45° und 136°

Weitere Beispiele für die Analogie zwischen der Fibonacci-Folge und der Anzahl von Spiralen findet sich in der spiralförmigen Verteilung der Schuppen eines Tannenzapfens oder einer Ananas. So können bei einer Rottanne 8 gegen den Uhrzeigersinn drehende Spiralen und 13 im Uhrzeigersinn, gezählt werden.[29]

Rückkopplung

Rückkopplung (engl. *feedback*) bezeichnet einen Vorgang, bei dem ein Teil eines Ausgangssignals unverändert oder modifiziert wieder dem Eingang des Systems zurückgeführt wird. Dabei kann das Signal auch verstärkt oder abgeschwächt werden. An Hand der akustische Rückkopplung kann ein solches System verdeutlicht werden. In einem in sich geschlossenen akustischen System, empfängt nun beispielsweise das Mikrophon zunächst Luftschwingungen, um sie in ein elektrisches Signal umzuwandeln. Ein in sich geschlossenes System liegt dann vor, wenn sich das Empfangsgerät, das Mikrophon und das Ausgabegerät, der Lautsprecher, in demselben Raum befinden. Das vom Mikrophon umgewandelte Signal wird dann über einen Verstärker verstärkt an einen Lautsprecher weitergeleitet, in dem das Signal wieder in Luftschwingungen (Schall) umgewandelt wird.[30] Im nächsten Durchlauf gelangen auch jene Signale, die vom Lautsprechern ausgesendet werden, über die Luft oder durch Körperschall, zum Mikrophon, das sie wieder an den Verstärker weiterleitet. Trifft nun das Signal, das durch den Raum reflektiert wird, phasengleich (mit gleicher Frequenz) auf das Mikrophon und übersteigt dessen Pegel jenen der Quelle, kann es zu einer Selbsterregung kommen, was als unangenehmes Pfeifen wahrgenommen wird. Die akustische Rückkopplung ist also eine elektroakustische Schleife, in der ein Signal durch wiederholten Durchlauf durch das System verstärkt wird. Das Auftreten der Selbsterregung ist dabei vom Übertragungsverhalten des Mikrophons und dem Lautsprecher, aber auch von der Eigenresonanz des Raumes abhängig.

Ein weiteres anschauliches Beispiel stellt die Video-Rückkopplung dar, bei der ein Ausgabeapparat, der Bildschirm, von einem Eingabegerät, der Videokamera, so aufgenommen wird, dass auf dem Bildschirm ein Bild von sich selbst ausgegeben wird. Handelt es sich um ein verkleinertes Bild, so filmt nun die Videokamera den Bildschirm mit einem kleineren Abbild von sich selbst und leitet dieses wieder an ihn weiter. Im nächsten Durchlauf erscheint in diesem Abbild wieder ein verkleinerter Bildschirm und so fort.[31]

Rückkoppel-lungsmaschine

Der Prozess, mit dem Fraktale, wie es die bisher beschriebenen darstellen, erstellt werden, kann nun gleichfalls durch das Prinzip der Rückkoppelung erklärt werden. Von außen werden zunächst die Grund-einstellungen für die Verarbeitungsbox, die dem Verstärker bei der akustischen Rückkopplung entspricht, definiert und ein Starter, das Ausgangsobjekt für eine geometrische Vorschrift oder die erste Zahl für eine Rechenvorschrift, dem Eingabegerät, analog zum Mikrophon, zugeführt (siehe *Abb.15*, *Seite 38*). In der Verarbeitungsbox wird dann das Objekt oder die Zahl durch die grafische Anweisung oder die Rechenvorschrift umgewandelt, um schließlich bei einem Ausgabe-Apparat

25 *Beutelspacher A. et al. (1996)*, Seite 127

26 *Smith P. F. (2003)*, Seite 78 und *Beutelspacher A. et al. (1996)*, Seite 128

27 *Smith P. F. (2003)*, Seite 78 und *Barnes J. (2010)*, Seiten 15ff

28 Der goldene Winkel ergibt sich aus dem folgenden Verhältnis: 137,5° : 222,5° = 222,5° : 360° = 0,618

29 *Beutelspacher A. et al. (1996)*, Seite 132

30 *Peak D. et al. (1995)*, Seite 22

31 *Peak D. et al. (1995)*, Seiten 22f

als erstes Bild oder Zwischenergebnis zu erscheinen. Dieses erste Ergebnis wird wieder dem Eingabegerät zugeführt und die Schleife erneut durchlaufen. Das Prinzip der Rückkopplung entspricht nun in der Mathematik dem zuvor beschriebenen iterativen Prozess. Diese Verfahrensanordnung wird durch Peitgen, Jürgens und Saupe als *Rückkopplungsmaschine* bezeichnet, mit einer Kontrolleinheit, die den Iterator in einen bestimmten Zustand versetzt und den Prozess startet, einer Eingabeeinheit, einer Prozesseinheit und einer Ausgabeeinheit.[32] Der erste Zyklus mit der Übergabe der Kontrolleinheit in die Prozesseinheit wird von ihnen der Vorbereitungszyklus und die Schleife aus Eingabe-, Prozessor- und Ausgabeeinheit Arbeitszyklus genannt.

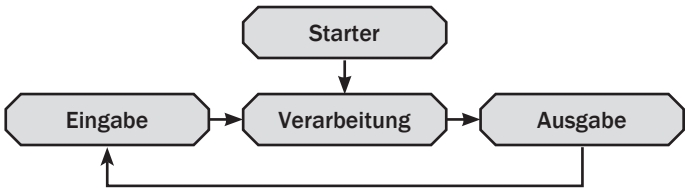


Abb.15.: Prinzip der Rückkoppelung

C.2.2. Zerklüftet und unendlich komplex

Bereits der Ursprung des Wortes Fraktal im lateinischen Wort *fractus* weist auf die Charakteristik hin, dass es sich bei derart bezeichneten Strukturen um etwas Gebrochenes oder Zerklüftetes handelt. Es ist vor allem diese Eigenschaft, die Fraktale verbindet, da sie den entscheidenden Unterschied zur glatten euklidischen Geometrie des Kegels oder Würfels ausdrückt. Fraktale sind zerklüftet, rau, schroff und dennoch lassen sie sich durch einfache Regeln, der Wiederholung einer geometrischen Transformation, beschreiben. Ihre unendliche Komplexität, die sich dadurch veranschaulichen lässt, dass immer weitere Details auftauchen, je genauer die Betrachtung erfolgt, erreichen sie durch die unendliche Anwendung dieser Transformationen. Daraus lässt sich die entscheidende Charakteristik für ein natürliches Fraktal ableiten, nach der die Oberfläche ähnlich zerklüftet erscheint, unabhängig von dem zur Betrachtung gewählten Maßstab. Allerdings existieren dafür bestimmte Schranken, ähnlich wie es bei der Darstellung von Monsterkurven der Fall ist. War es dort vor allem auf die Bildschirmauflösung und die Rechner- beziehungsweise Zeitkapazitäten zurückzuführen, so schränken in der Natur und Architektur vor allem Einflüsse des menschlichen Maßstabs, der Materialeigenschaften oder der Funktion die Anzahl der Iterationen ein.

C.2.3. Gemeinsamkeiten mit der Natur

Durch die Einleitung von Benoît Mandelbrot zum Thema *fraktale Geometrie der Natur* im gleichnamigen Buch wird der Bezug der Fraktale zur Natur evident:

> *... Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt – und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade. ... Als Antwort darauf werden wir eine neue Geometrie der Natur entwickeln und ihren Nutzen auf verschiedenen Gebieten nachweisen. Diese neue Geometrie beschreibt viele der unregelmäßigen und zersplitterten Formen ...*[33]

Bereits in diesem Buch zieht Benoît Mandelbrot viele Verbindungen von der Natur zur fraktalen Geometrie. Die Ausbildung der fraktalen Charakteristika in natürlichen Strukturen ist aber sehr unterschiedlich. Während beispielsweise die ähnliche Zerklüftung von Küstenlinien oft über viele Maßstabsebenen erkennbar bleibt, sind die fraktalen Charakteristika in der Regel bei den meisten natürlichen Strukturen auf drei bis fünf Iterationen beschränkt. Das ist sowohl beim Romanesco, einer Zuchtform des Blumenkohls (Karfiol) der Fall, als auch bei einem schwarzstieligen Streifenfarn. Beim Romanesco lässt sich neben der Ähnlichkeit eines Teiles zum Ganzen noch eine spiralförmige Anordnung der Teile ausmachen, mit 13 links- und 8 rechts-drehenden Spiralen, dessen Anzahl wieder den Zahlenwerten der Fibonacci-Folge entspricht.

Ordnung im Chaos

Die Natur erscheint auf den ersten Blick chaotisch ohne jede Ordnung, werden aber die natürlichen Strukturen in Computer-Programmen nachgebildet, die sich die iterativen Prozesse zur Erstellung von Fraktalen zu Nutze machen, wird klar, dass in diesen Strukturen sehr wohl eine Ordnung zu bestehen scheint. Diese Ordnung lässt sich durch im Grunde recht einfache Algorithmen ausdrücken.

32 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 24

33 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 13

C.3. Fraktale und Euklidische Geometrie

Die fraktale Geometrie ist zunächst die formale Untersuchung von selbstähnlichen Strukturen, das sind jene, die eine Entwicklung von selbstähnlichen Details vom Großen zum Kleinen aufweisen. Sie hilft dadurch, aber auch durch ihre Anwendung in Visualisierungen mithilfe von Computer-Programmen, die Komplexität der Natur zu verstehen.

C.3.1. Euklidische Geometrie

Die euklidische Geometrie ist die Geometrie der einfachen Formen, wie sie die Kugel oder der Würfel darstellen. Diese Objekte sind durch wenige Parameter beschreibbar, wie beispielsweise durch den Radius bei einer Kugel. Außerdem wird keine Wiederholung einer Anweisung benötigt, um das Ergebnis zu erhalten, bei dem sie sich überdies durch glatte Oberflächen auszeichnen. Wird daher ein Ausschnitt eines solchen Objekts näher betrachtet, tauchen auch keine weiteren Details auf. Während die euklidische Geometrie nun zur Beschreibung einer komplexen Struktur diese in einzelne geometrisch einfachere Teile zerlegt, bedient sich die fraktale Geometrie verschiedener Algorithmen.

Gebäude mit wenigen Maßstabsebenen, in denen das Leitmotiv erkennbar wird, und großen Abständen dazwischen, zeigen eine Affinität zur euklidischen Geometrie. Der Grund liegt in der Betrachtung bestimmter Abschnitte des Gebäudes. Dabei gilt: je größer der Abstand zwischen den verschiedenen architektonischen Elementen ist, desto glatter ist auch das Erscheinungsbild des Gebäudes. Beispiele für diese Gruppe finden sich etwa bei Gebäuden von Mies van der Rohe oder Le Corbusier, die diese unterschiedlichen Längenskalen vermissen lassen.

C.3.2. Fraktale Geometrie

Der Begriff Fraktale bezeichnet selbstähnliche komplexe künstliche oder natürliche Strukturen und versteht sich als Abgrenzung zu sogenannten einfachen und glatten Objekten. Ein großer Unterschied zwischen fraktaler und euklidischer Geometrie liegt in der Darstellung. Während ein Würfel ein sehr einfach zu beschreibendes Objekt darstellt, das aus wenigen Strichen zu Papier gebracht werden kann, sind natürliche Strukturen schwerer nachzuzeichnen. Eine Eiche kann nicht durch Striche mit dem Lineal wiedergegeben werden, ohne dass sie dabei ihre Charakteristik verliert. Der Baum besteht aus einer immer feiner werdenden Verästelung, deren Teile sich zusätzlich winden. Damit ist jener Teil in der Rückkopplungsmaschine beschrieben, der die Information über die geometrische Transformation beinhaltet: Das Eingabe-Objekt soll sich n-Mal verästeln und sich dabei in einer bestimmten Bandbreite zufällig winden. Durch wenige mathematische Formeln oder geometrische Transformationen entstehen so, aus einfachen Regeln, zerklüftete komplexe Objekte, wodurch auch die Natur besser beschrieben werden kann.

Die Faszination der fraktalen Geometrie geht auch von der Visualisierung rekursiv angewendeter mathematischer Funktionen (siehe *Abb.16*) aus, die zum Teil zu sehr eindrucksvollen Bildern führen. Diese Bilder scheinen bei jenen Personen, die keinen Zugang zur Mathematik haben, weil ihnen diese steril und trocken erscheint, den Nebeneffekt zu erzielen, ihr Interesse für die Mathematik zu wecken. Die Mandelbrot-Menge[34], benannt nach Benoît Mandelbrot, zeigt beispielsweise auf eindrucksvolle Art und Weise das Abbild der komplexen Zahlenmenge. Zu ihrer Erstellung wird zunächst jedem Bildpunkt der komplexen Zahlenebene eine komplexe Zahl c zugeordnet, mit dem realen Anteil auf der x-Achse und dem imaginären Anteil auf der y-Achse. Für jeden dieser Punkte wird nun das Verhalten in einer rekursiven Folge untersucht und entsprechend visualisiert. Die Folge kann nun gegen unendlich streben, also divergieren, oder beschränkt bleiben. Im letzteren Fall gehört der Ausgangspunkt der Folge der eigentlichen Mandelbrot-Menge an und wird zumeist schwarz dargestellt. Je nach Grad der Divergenz, kann der Bildpunkt unterschiedlich gefärbt oder ihm, wie es in *Abb.16* der Fall ist, eine unterschiedliche Höhe gegeben werden.

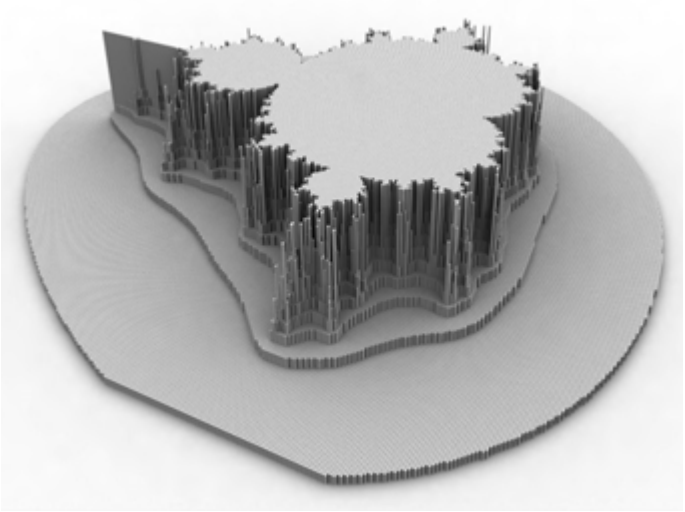


Abb.16.: Mandelbrot-Menge mit ca. 120.000 Bildpunkten und dem Grad an Divergenz als Zylinderhöhe

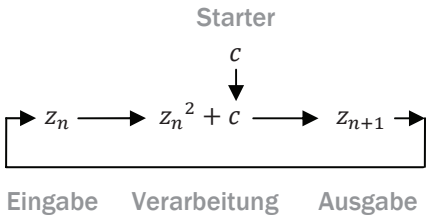
Wird diese Versuchsanordnung als Rückkopplung beschrieben, fungiert zunächst ein bestimmter Wert c der komplexen Zahlenebene als Starter. Gleichzeitig befindet sich zu Beginn, das ist vor dem ersten Durchlauf, im Eingabegerät immer der Wert $z_0 = 0 + 0i$. Beides zusammen gelangt in die Verarbeitungsbox mit der Anweisung, dass die

34 *Peak D. et al. (1995)*, Seiten 171ff

jeweils folgende komplexe Zahl z_{n+1} sich aus der Summe von c und dem Quadrat der vorhergehenden komplexen Zahl z_n ergibt.

$$z_{n+1} = {z_n}^2 + c$$

Für den zweiten Durchlauf dient dieses erste Ergebnis als nächste Eingabe und wird nach der Verarbeitungsbox als neuer Wert ausgegeben, der wieder in das Eingabegerät gelangt um den dritten Durchlauf zu starten und so fort.



Die Mandelbrot-Menge, dessen Rand eine statistische Selbstähnlichkeit aufweist, wird im Kapitel *F. Computer-Programme/F.2.3. Mandelbrot-Menge* als Umsetzung in einem VBA-Programm für AutoCAD noch einmal näher betrachtet.

Fraktale Methoden

D. Einteilung – Fraktale Methoden

Von IFS bis Mittelpunktverlagerung

Fraktale können zunächst nach der Existenz des Faktors Zufall in deterministische und solche die Zufall mit einschließen (stochastische) eingeteilt werden. Eine andere Möglichkeit bietet die Methode, mit der sie erzeugt werden. Jene etwa im Zusammenhang mit den sogenannten Monsterkurven (Kapitel *B.1.2. Monsterkurven*) vorgestellte Initiator-Generator-Methode, bei der eine Strecke oder ein Streckenzug durch einen anderen ersetzt wird, stellt die Anwendung eines iterativen Prozesses dar (siehe Kapitel *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition*). Dieses Prinzip dient als Grundlage verschiedener weiterer Methoden zur Erzeugung unterschiedlicher Fraktale, von denen einige in diesem Kapitel, vor allem an Hand natürlicher Fraktale, behandelt und im Kapitel *F. Computer-Programme*, das die Implementierung in AutoCAD, unter Verwendung der Skripting-Sprache VBA, zum Thema hat, wieder aufgegriffen werden. Diese Liste hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern wurde in Hinblick auf ihre Anwendbarkeit in der Architektur oder hinsichtlich ihrer allgemeinen Bedeutung gewählt.

D.1. Determinismus oder Zufall

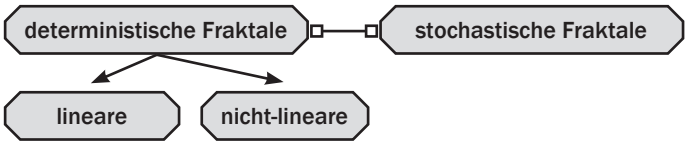
D.1.1. Deterministische Fraktale

Fraktale, die durch die Initiator-Generator-Methode erzeugt werden, das heißt durch die wiederholte Anwendung einer geometrischen Anweisung, wie es bei der bereits ausführlich beschriebenen Gruppe der Monsterkurven oder beim Sierpinski Dreieck der Fall ist, gehören zur Gruppe der deterministischen Fraktale, sofern diese Basis-Konfiguration nicht durch einen vom Zufall bestimmten Faktor erweitert wird. In der Basis-Konfiguration jedenfalls führt der zur Erzeugung angewendete iterative Prozess bei jedem Neustart, genauer bei jedem neuerlichen n-fachen Durchlauf, zum exakt gleichen Ergebnis, weil jedes Mal derselbe Initiator und derselbe Generator vorliegt und daher die wiederholte Anwendung derselben geometrischen Anweisung erfolgt. Das beschreibt die bestimmende Charakteristik dieser Gruppe, wonach das Ergebnis bereits vorbestimmt ist und eine Abweichung von den vorgegebenen Werten des Initiators und des Generators ausgeschlossen wird.

Eine weitere Unterteilung der Gruppe der deterministischen Fraktale lässt sich von der im Kapitel *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition/C.3.2. Fraktale Geometrie* eingeführten Mandelbrot-Menge, die durch Wiederholung einer mathematischen Formel erzeugt wird, ableiten. Diese Menge wird deshalb zur Gruppe der deterministischen Fraktale gezählt, weil das Verhalten der Folge der jeweils untersuchten komplexen Zahl c immer gleich ist, das heißt das Ergebnis ist einmal mehr vorbestimmt und ändert sich auch nach neuerlichem Durchlauf nicht. Die Transformation wird diesmal aber durch eine nicht-linearen Gleichung beschrieben, woraus sich die Möglichkeit der Unterteilung in lineare Fraktale (Koch-Kurve) und nicht-lineare (Mandelbrot-Menge) ergibt. Zur ersten Gruppe zählen dann etwa (deterministische beziehungsweise stochastische) Lindenmayer-Systeme und das Iteration-Function-System.

Unterteilung

Den deterministischen Fraktalen stehen die sogenannten stochastischen Fraktale gegenüber. Diese werden im anschließenden Kapitel *D.1.2. Faktor Zufall* näher behandelt.



Alternativ zur Einteilung in deterministische und stochastische Fraktale ist eine Unterteilung der Fraktale in solche mit strikter beziehungsweise affiner oder statistischer Selbstähnlichkeit möglich. Die Unterscheidung erfolgt dann in Hinblick auf die Anwendung entweder von Ähnlichkeitsabbildungen, infolge derer die internen Winkel und die Längenmaßzahlen und somit die Proportionen der Seiten von einer Iteration zur nächsten gleich bleiben, oder von affinen Abbildungen, wo das nicht mehr der Fall sein muss. Diese Aussage über die Abbildungsvorschriften der Transformation selbst kann für alle Fraktale getroffen

werden und stellt somit eine prinzipielle Information über Fraktale dar. Sie soll in den folgenden Kapiteln als zusätzliches Charakteristikum dienen.

D.1.2. Faktor Zufall

Das Prinzip zur Erzeugung der Fraktale aus der Gruppe, die den Faktor Zufall mit einschließt, ist zunächst dasselbe wie für jene aus der Gruppe der deterministischen Fraktale. Diesmal führt der Einfluss des Zufalls allerdings zu keinem vorhersehbaren Ergebnis. Das lässt sich an Hand der Initiator-Generator-Methode und der Koch-Kurve demonstrieren, wo die Einführung einer Münze im iterativen Prozess, als Entscheidungsträger, ob der mittlere Teil der Ersetzungsregel zu der einen oder der anderen Seite zeigen soll, bereits nach wenigen Iterationen eine große Anzahl von Varianten produziert (siehe *Abb.17*). Während in der ersten Iteration die fünfzig zu fünfzig Chance aus dem Münzenwurf noch zu lediglich zwei Varianten führt, ergeben sich in der zweiten bereits, für jeden der Fälle aus der ersten Iteration, zwei mal acht Kombinationsmöglichkeiten, das sind in Summe 16. Wird die Entscheidung, ob die mittlere Zacke nach oben oder nach unten zeigt, als Binärzahl (0,1) ausgedrückt, so ergeben sich für eine 4-stellige Binärzahl 2^4 Möglichkeiten (bei einer 1-stelligen sind es 2^1, bei einer 2-stelligen 2^2 und so fort). Bei der dritten Iteration der Koch Kurve liegen dann bereits 2^{16} unterschiedliche Varianten vor.

Allgemein ausgedrückt, hängt dann die Anzahl der Varianten V_i einer Iteration i von der Anzahl der Teilstrecken N_i, und davon, wie viele Möglichkeiten k die Ersatzregel zulässt, ab.

$$V_i = k^{N_i};\ N_i = {N_1}^{(i-1)};\ V_i = {k^{N_1}}^{(i-1)}$$

$$V_1 = 2^{4^{(0)}} = 2$$

$$V_2 = 2^{4^{(1)}} = 16$$

$$V_3 = 2^{4^{(2)}} = 65.536$$

Abb.17.: Koch-Kurve nach 6 Iterationen und mit Zufall

Bei der Betrachtung von Darstellungen verschiedener Münzen-Koch-Kurven lassen sich schließlich stärkere Ähnlichkeiten zu einer Küstenlinie oder einem Riss in einer Oberfläche erkennen, als es ohne den Münzenwurf der Fall war. Daraus könnte die Schlussfolgerung abgeleitet werden, dass ein zunächst einfaches Modell mit simplen Ersetzungsregeln, das im Original noch zu einer sehr regelmäßigen Lösung führt, nur durch den Einschluss des Faktors Zufall so erweitert werden kann, dass es stärkere Analogien mit natürlichen Strukturen aufweist. Und tatsächlich bildet dieser Faktor, wie die folgenden Seiten zeigen werden, ein wichtiges Kriterium für die Erzeugung naturnaher Modelle, die als (manchmal sehr grobe) Beschreibung der Natur dienen. Der Grund dafür dürfte in dem Umstand liegen, dass durch die Einbindung des Faktors Zufall den Veränderungen in realen Strukturen durch verschiedene Umwelteinflüsse entsprochen scheint. Durch den Münzenwurf liegt dann allerdings keine strikte Selbstähnlichkeit mehr vor, sondern wie bei den natürlichen Strukturen auch, eine statistische. Neben der erweiterten Initiator-Generator-Methode nutzt auch die Diffusion-Limited-Aggregation-Methode (siehe *D.2.5. Diffusions-begrenztes Wachstum*) den Faktor Zufall, diesmal allerdings in Form eines Random Walk.

Der Faktor Zufall

D.2. Erzeugung von Fraktalen

Wie bereits an anderer Stelle erwähnt, bietet die euklidische Geometrie keine besonders gute Möglichkeit natürliche Formen zu beschreiben. Bäume, Sträucher, Küstenlinien und Gebirgszüge, die zunächst auch als Strukturen ohne offensichtliche Ordnung erscheinen, entsprechen mathematisch eben nicht der Geometrie einer Kugel, eines Würfels oder eines Kegels. Nach B. Mandelbrot liegt ein natürliches Fraktal dann vor, wenn es adäquat mathematisch durch eine fraktale Menge dargestellt werden kann.[01]

Die fraktale Geometrie sucht nun nach der jeweils zugrunde liegenden Ordnung in Form von endlich vielen Ersetzungsregeln, die durch wiederholte Anwendung zur Lösung führen. Mit den geeigneten Methoden können dann auch tatsächlich mit Hilfe des Computers eine Vielzahl von Darstellungen generiert werden, die unter anderem Bäumen, Sträuchern, Küstenlinien und Gebirgszügen ähnlich sind, wodurch sich die fraktale Geometrie als präzisere Möglichkeit präsentiert, natürliche Formen mathematisch zu beschreiben.

01 *Gausa M. (2003)*, Seite 239

Verschiedene Methoden

Eine adäquate mathematische Darstellung einer natürlichen Struktur erfolgt nun unter anderem durch den, nach seinem Urheber Michael F. Barnsley bezeichneten, Barnsley Farn, der durch das sogenannte Iteration-Function-System (IFS, Iteriertes Funktionensystem) erzeugt wird. Aus dem Namen geht bereits hervor, dass diese Methode auf der Iteration von (mehreren) Funktionen – die Kontraktionen mit einschließen – basiert. Eine andere Methode, die vor allem der Simulation des Wachstums von Bäumen, Sträuchern, Blättern und Algen dient, umfassen die nach dem ungarischen Biologen Aristid Lindenmayer (1925-1989) benannten Lindenmayer Systeme (L-Systeme). Bei diesem Verfahren handelt es sich bei den Ersetzungsregeln zumeist um Zeichen-Ketten, die erst nach der letzten durchgeführten Iteration eine grafische Bedeutung erfahren. Eine solche Methode kann nun als Grundlage zur Entwicklung von architektonischen Formen dienen. Eine weitere Betrachtung dieser Möglichkeit ist allerdings nicht Teil der vorliegenden Arbeit. Zur Simulation von dendritischem zufälligem Wachstum wird wiederum die sogenannte Diffusion-Limited-Aggregation-Method (DLA-Methode oder diffusionsbegrenztes Wachstum) herangezogen, die auf Whitten und Sander zurückgeht (1981).[02] Die Anwendung dieser Methode im Bezug auf das Wachstum von Städten haben etwa Batty and Longley[03] untersucht. Eine weitere Methode zur Erzeugung von Fraktalen stellt noch die Midpoint-Displacement-Method (Mittelpunkt-Verlagerung) dar, die bei der Visualisierung von künstlichen Gebirgszügen Verwendung findet. Sie kann auf die Annäherung an den Flächeninhalt unter einer Parabel zurück geführt werden, wie sie bereits von Archimedes (287-212 vor Chr.) beschrieben wurde.[04] Auch die, im Kapitel *B.1.3. Cantor'sche Punktmenge (Cantor-Menge)/ Curdling (Gerinnung)* erwähnte Gerinnung wird im Folgenden als eigenständige Methode präsentiert, weil sie als Modell für die Verteilung von bebauter und unbebauter Fläche in einem Planungsgebiet dienen kann.

Methoden

Gemeinsam ist diesen Methoden, dass ein iterativer Prozess durchlaufen wird, die Versuchsanordnung kann sich allerdings unterscheiden. Zur Gruppe der Iterierten Funktionensysteme, die auf der Iteration von Funktionen basiert, gehört auch die Initiator-Generator-Methode, bei der Streckenzüge geometrisch ersetzt werden. Gleiches gilt für die Gerinnung, bei der ebenfalls geometrische Ersetzungsregeln zum Einsatz kommen. Bei der Midpoint-Displacement-Method wiederum werden Seitenhalbierende verschoben um Dreiecke zu bilden. Dem L-System liegen Ersetzungsregeln zumeist aus Zeichen-Ketten zu Grunde und die DLA-Methode basiert auf einem Random Walk.

Anwendung

Durch die fraktale Geometrie lässt sich in verschiedenen wissenschaftlichen Domänen unter anderem das Wachstum von Strukturen simulieren, um daraus Rückschlüsse auf künftige Entwicklungen zu erhalten, aber auch auf anderem Weg nicht oder nur unzureichend erklärbare Phänomene zu beschreiben. Ihr Einsatzgebiet reicht von der Medizin (Tumor-Forschung), über die Biologie (Erforschung von Pflanzenwachstum) bis hin zu Anwendungen in der Musik, in der Computergrafik, in der Drucktechnik oder als Bildkompression (das Fractal Image Format schaffte allerdings trotz vielversprechender Resultate nie den Durchbruch). Darüber hinaus dient sie zur Simulation von Stadtwachstum, als Formengenerierung in der Architektur, zur Erklärung von Aktienkursen und zur Darstellung künstlicher Landschaften, vor allem nicht existenter Planeten (etwa der *Genesis Effekt* im Film *Star Trek II – The Wrath of Khan*, ein Mond und der *Todes-Stern* im Film *Star Wars – Return of the Jedi*).

Bei genauerer Betrachtung werden die Schwierigkeiten bei der Beschreibung der Natur durch die Anwendung der fraktalen Geometrie evident. So finden sich in der Natur eben ausschließlich statistisch selbstähnliche Strukturen, die durch unterschiedliche Parameter auf verschiedenen Maßstabsebenen beeinflusst werden und deren zugrunde liegende Algorithmen daher zumeist nur schwer erfassbar sind. Dasselbe gilt auch für die Architektur, wobei diese sich, aus technischen Gründen, stärker von der euklidischen Geometrie beeinflusst zeigt. Auf dem Gebiet der Architektur ist aber nicht nur die Beschreibung durch die fraktale Geometrie von Interesse, sondern auch die Unterstützung bei der Entwurfsplanung. In diesem Zusammenhang bieten einige der im Folgenden beschriebenen Methoden, wie das L-System, die Möglichkeit, die Komplexität der Natur in ein Design zu übertragen.

D.2.1. IFS – Iteration-Function-System

Die Grundlage des iterierten Funktionensystems geht auf den Artikel *Fractals and Self Similarity* von John E. Hutchinson aus dem Jahr 1981[05] zurück, in dem bewiesen werden konnte, dass eine kompakte Menge $K \in \mathbb{R}^d$ in einem metrischen Raum invariant ist, wenn eine endliche Anzahl von kontrahierenden Abbildungen $S = \{S_1, S_2, \ldots S_n\}$

02 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 441

03 *Batty et al. (1994)*

04 *Bovill C. (1996)*, Seiten 73ff

05 *Hurst Harold Edwin, Black R.P., Simaika Y.M., Long-term storage: an experimental study (Constable, London, 1965)*

für diese Menge existiert und die kompakte Menge K gleich der Summe aller Anwendungen der Abbildungen S auf K ist. Demnach gilt:

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} S_i\,(K)$$

In diesem Fall wird K, die bei der Anwendung von Ähnlichkeitsabbildungen durch ein iteratives Verfahren erzeugt werden kann, mit einem Initiator (dort *initial*) und einem Polygonzug als Generator (dort *standard*), als invariant gegenüber der Menge an kontrahierenden (Ähnlichkeits-)Abbildungen S bezeichnet. Hutchinson konnte außerdem nachweisen, dass für eine bestimmte Menge an kontrahierenden Abbildungen S nur genau eine kompakte Menge K existiert.[06] Unter der Bezeichnung iteriertes Funktionensystem (IFS) wurden diese Grundlagen als Verfahren zur Erzeugung von Fraktalen vor allem durch die Beschreibung in Michael F. Barnsley's Buch ***Fractals Everywhere***[07] bekannt. Als IFS wird nun eine Menge aus endlich affinen Transformationen $F = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$ in einem metrischen Raum bezeichnet, die Kontraktion, durch die eine Punktmenge auf eine dichtere Punktmenge abgebildet wird, mit einschließen. Iterativ auf eine beliebige Ausgangsmenge angewendet, führt ein bestimmtes IFS dann zu genau einer Attraktormenge (Attraktor), einer kompakten nichtleeren Menge im metrischen Raum. Der Attraktor ist dabei die Summe aller Fixpunkte, das sind jene Punkte, die wieder auf sich abgebildet werden, wodurch eine neuerliche Anwendung des IFS auf diese Grenzmenge auch keine Veränderung bewirkt. Wird allerdings ein anderes IFS als jenes, das zu dieser Grenzmenge geführt hat, auf die erhaltene Punktmenge angewendet, bedeutet das, dass auch ein neuer Attraktor existiert, nämlich derjenige für die neue Menge aus affinen Transformationen, und folglich verändert sich die Punktmenge zu einem neuen Bild.

Hutchinson und Barnsley

Versuchsanordnung

Voraussetzung für die Erzeugung eines Fraktals ist eine Menge von mindestens zwei unterschiedlichen affinen Transformationen mit Verkleinerung. Liegt dagegen nämlich der Fall $F = \{g_1\}$ vor, so wird bei jeder Iteration lediglich eine (verkleinerte) Kopie von sich selbst erzeugt, ähnlich der im Kapitel ***C.2.1. Entstehung durch Iterationen/ Rückkopplung*** beschriebenen Video-Rückkopplung, bei der eine verkleinerte Abbildung des Bildschirmes im Bildschirm im Bildschirm entsteht. Diese Anordnung ist zwar selbst-ähnlich, aber es liegt kein Fraktal vor, weil bei jeder Iteration nur ein Abbild von sich selbst erzeugt wird und die Folge auf nur einen einzelnen Punkt konvergiert, das heißt nur ein Fixpunkt besteht.[08] Werden indessen n > 1 affine Transformationen auf ein Ausgangsobjekt angewendet, so entstehen nach dem ersten Durchlauf auch n Kopien von sich selbst, die entsprechend der jeweils angewendeten affinen Transformationen verkleinert, gedreht und/oder verzerrt erscheinen und sich auch gegenseitig überlappen können. Jede dieser n Kopien wird auf dieselbe Weise wieder n-Mal kopiert und entsprechend transformiert, wodurch die Anzahl der Kopien auf n^2 steigt. Allgemein wächst die Anzahl der Kopien in Abhängigkeit der Iteration i auf n^i. Das Ergebnis eines IFS, der Attraktor, wird nun nach unendlichen Wiederholungen erreicht und besteht dann aus unendlichen Kopien von sich selbst, die alle wiederum Kopien von sich selbst enthalten, was bedeutet, dass die Grenzfigur selbst-ähnlich ist. Diese Eigenschaft hat für ein IFS immer Gültigkeit.

Das Sierpinski-Dreieck, als prominentes Beispiel eines mathematischen Fraktals, besteht, wie im Kapitel ***C.1.1. Selbstähnlichkeit/Strikte Selbstähnlichkeit*** bereits beschrieben, aus drei affinen Transformationen, mit jeweils einer Verkleinerung um die Hälfte und entsprechender Translation. Das Ergebnis der wiederholten Anwendung ist eine Punktmenge, bei der ein gewissenhaft gewählter Ausschnitt einer exakten verkleinerten Kopie des Ganzen entspricht. Der Unterschied zwischen $F = \{g_1\}$ und $F = \{g_1, g_2, \ldots g_n\}$ wird nun an Hand der ***Abb.18***, der Gegenüberstellung einer Erweiterung des Sierpinski-Dreiecks um eine vierte affine Transformation und der Grenzfigur dieser einen vierten affinen Transformation (mit $F = \{g_4\}$), bei der die vorhergehenden Iterationen zur besseren Demonstration strichliert eingetragen sind, verdeutlicht (siehe ***Abb.18***). Während die Variante des Sierpinski Dreiecks eine Fülle von selbstähnlichen Teilen zeigt, konvergiert die zweite Versuchsanordnung auf nur einen Punkt.

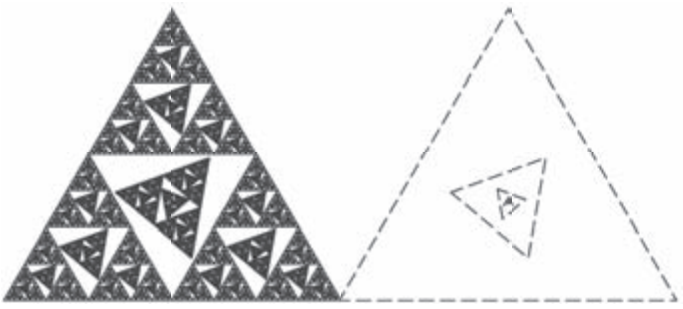


Abb.18.: Erweitertes Sierpinski Dreieck und IFS mit nur einer affinen Transformation

06 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seiten 201f

07 *Barnsley M. (1993)*

08 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seiten 172f

Rückkopplung

Iterierte Funktionensysteme können durch die Wahl geeigneter Mengen affiner Transformationen Punktmengen generieren, die der Darstellung natürlicher Strukturen sehr nahe kommen. Ein berühmtes Beispiel aus der Pflanzenwelt bildet dabei der Barnsley Farn, der einem schwarzstieligen Streifenfarn (*Asplenium adiantum-nigrum*) ähnlich sieht, mit dem Unterschied, dass der natürliche „*Bruder*" weniger regelmäßig erscheint. Für die Erzeugung dieser Punktmenge werden nur vier affine Transformationen benötigt, wovon drei – durch unterschiedliche Werte für die Rotation, Translation und Kontraktion – die Fächerform des Blattes bestimmen, und die vierte den Stiel formt, der immer eine Abbildung auf sich selbst darstellt. Die mathematische Menge, das ist die Abbildung des eigentlichen Barnsley Farns, entsteht durch einen iterativen Prozess (in diesem Fall durch Rückkoppelung), woraus Peitgen, Jürgens und Saupe ihre Mehrfach-Verkleinerungs-Kopier-Maschine (MVKM) abgeleitet haben.[09] Eine solche Maschine besitzt n voneinander unabhängige Linsen-Systeme, eines für jede affine Transformation, woraus folgt, dass entgegen einem herkömmlichen Kopierer nicht nur Kontraktion zugelassen wird, sondern dass gleichzeitig mehrere, nämlich n-Kopien auf demselben Blatt Papier ausgegeben werden. Nach Betätigen des Startknopfes, wird zunächst ein beliebiges, sich in dem für den Kopiervorgang vorgesehenen Teil der Maschine befindliches Ausgangsbild durch die n-Linsen-Systeme und entsprechend ihren Einstellungen, auf dasselbe Ausgabemedium abgebildet. Somit setzt sich das erste Ergebnis der MVKM aus n-Verkleinerungen des Ausgangsbildes zusammen, deren unterschiedliche Positionen auf dem Blatt Papier sich aus der jeweiligen Translation der Linsen-Systeme ergeben. Im nächsten Schritt wird nun dieses erste Ergebnis zum Ausgangsbild, das wieder in die Maschine eingelegt wird, um den speziellen Kopiervorgang von Neuem zu starten. Nach mehreren derartigen Durchläufen nähern sich die auf diese Weise erhaltenen Abbildungen dem Attraktor der Menge der affinen Transformationen an. An Hand eines Kreises als Eingabe für das Sierpinski-Dreieck in ***Abb.19*** lässt sich erkennen, dass die Grenzfigur einer spezifischen Einstellung nicht vom Ausgangsbild sondern eben nur von den gewählten Linsen-Systemen abhängig ist.

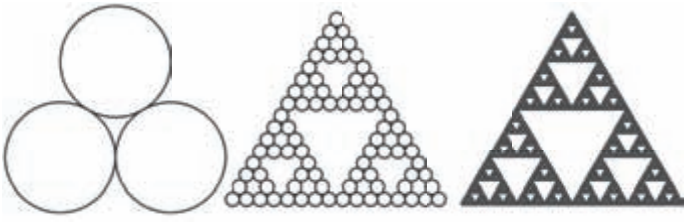


Abb.19.: Sierpinski-Dreieck: 1., 4. und 6. Iteration mit einem Kreis als Ausgangsobjekt

09 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 277

Abbildungsmatrix

In einem iterierten Funktionensystem sind grundsätzlich alle Transformationen mit Skalierung, Rotation, Translation, Reflexion und Transvektion erlaubt, allerdings unter der Voraussetzung, dass es sich dabei um eine Kontraktion handelt.[10] Dementsprechend darf auch eine einzelne Linse eines MVKM das Ausgangsbild drehen und/oder verschieben und/oder spiegeln und/oder scheren, solange das Original gleichzeitig mit einem Skalierungsfaktor $0 < s < 1$ verkleinert wird. Während es sich bei Skalierung, Rotation, Translation und Reflexion, wie bereits im Kapitel *C.1.1. Selbstähnlichkeit/Ähnlichkeit* erwähnt, im speziellen um Ähnlichkeitsabbildungen handelt, zählen diese zusammen mit der Transvektion, aber auch deren Kombinationen zu den affinen Abbildungen. Erfolgt nun eine affine Transformation[11] in der Ebene, so wird jedem Punkt $P(x,y)$ des Originals, das ist das ursprüngliche Objekt, genau ein Punkt $P'(x',y')$ im Bild zugeordnet. Sei P durch den Ortsvektor $\vec{p}$ und P' durch den Ortsvektor $\vec{p'}$ definiert, so lässt sich die Zuordnung allgemein durch eine Abbildungsmatrix A einer linearen Abbildung und einem Translationsvektor (Verschiebevektor) v darstellen:

MVKM
Peitgen et al.

$$\vec{p'} = A\vec{p} + \vec{v}$$

Lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung F erfolgt zwischen zwei Vektorräumen und liegt genau dann vor, wenn sie additiv und homogen ist. Additiv bedeutet, dass es für das Ergebnis keinen Unterschied macht, ob die Abbildung auf die Summe der Vektoren von zwei Punkten (P, Q) erfolgt, oder zuerst einzeln auf die Vektoren und danach erst die Summe gebildet wird.

lineare
Abbildung

$$F(\vec{p} + \vec{q}) = F(\vec{p}) + F(\vec{q})$$

Homogen hingegen bezeichnet die Eigenschaft, dass sowohl die Abbildung des Produktes aus dem Vektor $\vec{p}$ eines Punktes P multipliziert mit einem Skalar λ, als auch die Abbildung des Vektors $\vec{p}$ eines Punktes P multipliziert mit dem Skalar λ, zu dem selben Ergebnis führt.[12]

$$F(\lambda \cdot \vec{p}) = \lambda \cdot F(\vec{p})$$

10 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 281

11 Als Transformation wird eine Abbildung eines Vektorraumes in sich bezeichnet.
Schott D. (2004), Seite 154

12 *Duden (2001)*, Seite 346

Wird eine lineare Abbildung F vom reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^m$ durch eine Abbildungsmatrix A beschrieben, so setzt sich diese aus m Zeilen und n Spalten zusammen. Das entspricht m Zeilenvektoren der Länge n, womit die Matrix aus m x n Komponenten besteht, die auch als Elemente der Matrix bezeichnet werden. Bei der linearen Abbildung $F(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ folgt dann aus m = n = 2 eine Abbildungsmatrix A mit m x n = 4 Komponenten, deren Positionen in der Matrix durch a_{ik} mit i = 1 bis m und k = 1 bis n eindeutig bestimmt sind:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Somit lassen sich einfache lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$, wie Rotation, Skalierung, Transvektion und Reflexion, durch die entsprechenden Werte darstellen:[13]

$$\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste dieser vier Abbildungsmatrizen beschreibt eine Rotation um den Koordinaten-Ursprung mit dem Dreh-Winkel α, die zweite eine Skalierung mit dem Faktor s_x in x-Richtung und dem Faktor s_y in y-Richtung, die dritte eine Transvektion um a = tan(γ) in x-Richtung[14], bei der die x-Achse auf sich selbst abgebildet wird und somit eine Fixgerade darstellt, und die vierte eine Reflexion an der y-Achse. Aus der zweiten und vierten Abbildungsmatrix geht hervor, dass die Reflexion im Grunde auf der Skalierung beruht. Ein negativer Wert für s_x beschreibt dann eine Reflexion an der y-Achse und ein negativer Wert für s_y eine Reflexion an der x-Achse. Wenn im Speziellen $s_x = s_y$ gilt, dann handelt es sich ferner um den Fall einer gleichförmigen Skalierung. Für alle vier der zuvor durch Abbildungsmatrizen dargestellten linearen Abbildungen gilt, dass der Ursprung (0,0), wie in der *Abb.20* ersichtlich, auf sich selbst abgebildet wird und somit einem Fixpunkt entspricht.

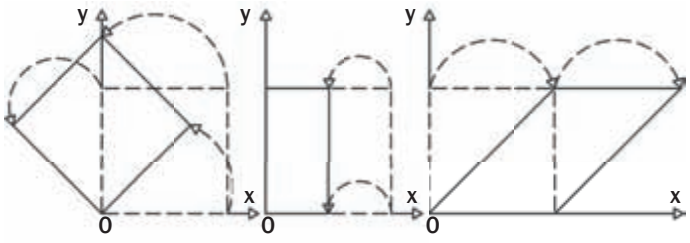


Abb.20.: Rotation (α=45°), Skalierung (s_x=0,5), Transvektion

Verkettung von Matrizen

Werden zwei oder mehrere lineare Abbildungen hintereinander ausgeführt, so bedeutet das eine Verkettung der Abbildungsmatrizen, die rechnerisch durch Multiplikation gelöst wird und folglich in einem Matrix-Produkt resultiert. Das Ergebnis entspricht dann wieder einer linearen Abbildung, dargestellt durch eine Abbildungsmatrix, und ist von der Reihenfolge der Anwendung der linearen Abbildungen abhängig. Das wird an Hand der *Abb.21* deutlich, in der auf zwei identische Ausgangsquadrate, mit jeweils einem Eckpunkt im Ursprung (0,0), nacheinander drei lineare Abbildungen K, S und R in unterschiedlicher Reihenfolge angewendet werden. Für beide Fälle sind die Werte der jeweiligen Abbildungsmatrizen durch eine Kontraktion in x-Richtung um ein Viertel, einer Transvektion um a = 0,5 in x-Richtung und einer Rotation α um 30 Grad gegeben.

$$K = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} cos30 & -sin30 \\ sin30 & cos30 \end{pmatrix}$$

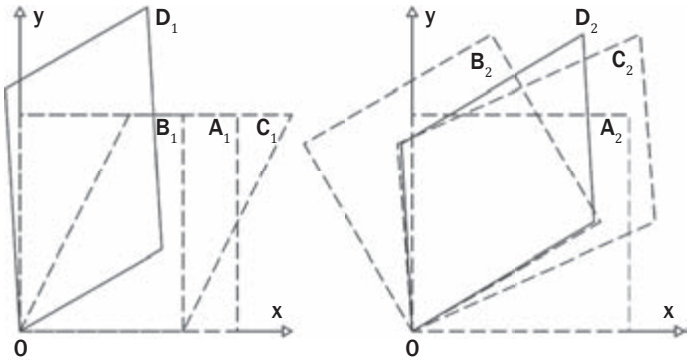


Abb.21.: Zwei Ergebnisse unterschiedlicher Reihenfolge linearer Abbildungen

Bei der Multiplikation von zwei Abbildungsmatrizen bildet nun diejenige der zuerst angewendeten linearen Abbildung die rechte Matrix, während jene der zweiten linearen Abbildung vorangestellt wird. Soll also zunächst die Kontraktion K (über y) erfolgen und dann die Transvektion S, so wird entsprechend der Reihenfolge der Matrizen in der Multiplikation L = SK geschrieben. Das Resultat der Verkettung ist wieder eine lineare Abbildung L.

Matrix-Produkt

$$L = K \circ S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das linke Beispiel der *Abb.21* zeigt die Folge linearer Abbildungen ausgehend vom Quadrat A_1. Dieses wird zunächst durch die Kontraktion K auf das Bild B_1 abgebildet, das Bild B_1 dann durch die Transvektion S auf das Bild C_1 und schließlich das Bild C_1 durch die Rotation R auf das Bild D_1, dem Ergebnis der ersten Folge. Für das rechte Beispiel derselben Abbildung wurde eine andere Reihenfolge gewählt, bei der auf eine Rotation R, zunächst eine Transvektion S und erst zum Schluss die Kontraktion K folgt. Während sich also die Reihenfolge der linearen Abbildungen

13 *Hachenberger Dirk (2008)*, Seiten 361ff

14 Bei einer reinen Transvektion, das heißt ohne Kontraktion, bleibt der Flächeninhalt erhalten.

ändert, bleiben die einzelnen Werte unverändert. Aus der Gegenüberstellung in der *Abb.21* wird deutlich, dass sich, ausgehend von den beiden Quadraten A_1/A_2, bereits die Zwischenschritte B_1/B_2 und C_1/C_2, die strichliert dargestellt sind, unterscheiden und in weiterer Folge auch die beiden, durch eine ununterbrochene Linie hervorgehobenen Ergebnisse D_1/D_2.

Der Unterschied wird auch durch die rechnerischen Ergebnisse der beiden Verkettungen, einmal mit $M_1 = K \circ S \circ R$ und einmal mit $M_2 = R \circ S \circ K$, deutlich. M_1 und M_2 entsprechen dann zwei unterschiedlichen Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen, die vom gleichen Ausgangsquadrat zu zwei unterschiedlichen Resultaten führen.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}65 & -0{,}067 \\ 0{,}375 & 1{,}116 \end{pmatrix}; M_2 = \begin{pmatrix} 0{,}837 & -0{,}05 \\ 0.5 & 0{,}866 \end{pmatrix}$$

Affin-lineare Abbildung (Transformation)

Eine affin-lineare Transformation eines IFS wird, wie zuvor unter *D.2.1. IFS – Iteration-Function-System/ Abbildungsmatrix* erwähnt, aus zwei Komponenten zusammengesetzt, einerseits aus der jeweiligen Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung und andererseits aus dem dazu addierten Spaltenvektor (Verschiebevektor) v der Translation. Daraus ergibt sich die allgemeine Schreibweise als Funktion $g_{i(x,y)}$ mit den Elementen a_i, b_i, c_i und d_i aus A, beziehungsweise e_i und f_i aus v:

$$g_{i(x,y)} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}$$

Die beiden Iterationen des Sierpinski-Dreiecks in *Abb.19* lassen erkennen, dass die Menge der Funktionen $F = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$ für die Grenzfigur verantwortlich zeichnet und nicht die Form des Ausgangsobjekts. Der Input besteht diesmal nicht mehr wie im Kapitel *C.1.1. Selbstähnlichkeit/Strikte Selbstähnlichkeit* beschrieben, aus einem gleichseitigen Dreieck, sondern aus einem Kreis. Dieser wird durch die n=drei Linsen – um bei der Sprache einer MVKM zu bleiben – auf drei verkleinerte und verschobene Kreise abgebildet. Das IFS umfasst folglich drei Transformationen mit jeweils einer Kontraktion auf ein Halb, das entspricht der linearen Abbildung, und bei der zweiten und dritten zusätzlich mit je einer Translation. In der Annahme, dass es sich bei dem Ausgangsobjekt um einen Kreis mit dem Durchmesser Eins handelt und daher auch Lambda, der Multiplikator des Verschiebevektors, gleich Eins ist, versetzt die zweite Linse die verkleinerte Kopie der Eingabe um ein Halb in positiver x-Richtung. Die dritte dagegen, die den oberen Teil der ersten Iteration des Sierpinski-Dreiecks definiert, verschiebt die verkleinerte Kopie um ein Viertel in positiver x-Richtung und um die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit ein Halb als Basis in positiver y-Richtung. Diese dritte Transformation, die in weiterer Folge den jeweils oberen Mittelpunkt definiert, lautet dann in der Matrix-Vektor-Schreibweise dementsprechend:

Vom MVKM zu den Funktionen

$$g_{3(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot cos0 & \frac{1}{2} \cdot -sin0 \\ \frac{1}{2} \cdot sin0 & \frac{1}{2} \cdot cos0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Wird diese Schreibweise in Abbildungsgleichungen nach x und y umgeformt, so ergibt sich für den allgemeinen Fall einer Funktion g:

$$g_{i(x,y)} = (a_i x + b_i y + e_i,\ \ c_i x + d_i y + f_i)$$

Für das Beispiel des Sierpinski-Dreiecks folgt schließlich aus $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ für die 3. Transformation:

$$g_{3(x,y)} = \left(\frac{1}{2}x + 0y + \frac{1}{4},\ \ 0x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Die *Abb.22* zeigt drei Zwischenergebnisse desselben IFS, das einmal mit einem Kreis, einmal mit einem gleichseitigen Dreieck und einmal mit einem Rechteck startet. Bereits nach der 6. Iteration lässt sich das jeweilige Ausgangsobjekt kaum mehr in einem der Elemente ausmachen oder ein Unterschied zwischen den drei Versionen erkennen.

Abb.22.: Sierpinski-Dreieck nach 6 Iterationen; Ausgangsobjekte: Kreis, gleichseitiges Dreieck und Rechteck

Hutchinson Operator

Das Wesen eines iterierten Funktionensystems besteht nun darin, die Menge der Funktionen für ein gegebenes Objekt zu finden, unter denen dieses bei Iteration invariant bleibt. Das ist immer dann der Fall, wenn sich das Ausgangsobjekt bei einem Durchlauf des IFS nicht ändert und es sich folglich um die Grenzfigur K selbst handelt. Die Menge K wird dann die Attraktormenge des Hutchinson Operators W, das ist die Menge der Funktionen, genannt:

$$W(K) = \bigcup_{i=1}^{n} g_i\,(K) = g_1 \cup g_2 \cup g_3 \dots g_n$$

Koch-Kurve

Die geometrischen Ersetzungsregeln, der in Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen/B.1.2. Monsterkurven* vorgestellten Initiator-Generator-Methode, können ebenfalls durch Funktionen, angewendet auf Punktmengen, beschrieben werden, entsprechend der affinen Transformationen eines iterierten Funktionensystems. Die erzeugte Punktmenge liegt dann auf dem Attraktor der Initiator-Generator-Methode, d.h. auf dem Ergebnis nach unendlichen Iterationen. Das wird an Hand der Versuchsanordnung zur Erzeugung der Koch-Kurve deutlich, bei der eine Strecke L in vier verkleinerte Kopien zerlegt und neu angeordnet wird (siehe *Abb.23*). Das IFS besteht folglich aus vier Funktionen:

(1) Die erste mit einer Kontraktion auf ein Drittel.

(2) Die zweite mit einer Kontraktion auf ein Drittel, einer Rotation um 60 Grad gegen den Uhrzeigersinn und einer Translation um ein Drittel der Einheitslänge L in positiver x-Richtung

(3) Die dritte mit einer Kontraktion auf ein Drittel, einer Rotation um 60 Grad im Uhrzeigersinn, einer Translation um ein Halb der Einheitslänge L in positiver x-Richtung und einer um die Wurzel aus drei durch sechs in positiver y-Richtung.

(4) Die vierte mit einer Kontraktion auf ein Drittel und einer Translation um plus zwei Drittel der Einheitslänge L in positiver x-Richtung.

Abb.23.: Deterministisches IFS: Punktmenge der Koch-Kurve nach 4 Iterationen

Die Menge der Funktionen $F = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$ lautet dann wie folgt:

$$g_{1(x,y)} = \left(\frac{1}{3}x,\ \frac{1}{3}y\right)$$

$$g_{2(x,y)} = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right)$$

$$g_{3(x,y)} = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2},\ \frac{-\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$g_{4(x,y)} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}y\right)$$

Die Idee, Bilder auf wenige Funktionen zu reduzieren, wurde von Michael F. Barnsley als Grundlage für ein Komprimierungsverfahren herangezogen.[15] Dabei gilt – vereinfacht ausgedrückt – je weniger Funktionen zur Darstellung eines Bildes benötigt werden, desto geringer ist die zu speichernde Datengröße. Kommerziell hat sich dieses Verfahren jedoch nicht durchgesetzt.

Chaos Game[16]

Aus dem zuvor beschriebenen IFS, dem hintereinander gereihten Einsetzen der jeweils resultierenden Koordinaten in die gegebenen Funktionen, geht das sogenannte Chaos-Game (vergleiche *Abb.24*) hervor, mit dessen Hilfe ein Computerprogramm effizienter gegenüber dem herkömmlichen IFS zu einer Visualisierung des Attraktors kommt, das zu dem Zeitpunkt erreicht ist, an dem eine neuerliche Anwendung einer der Funktionen zu keiner sichtbaren Veränderung der gezeichneten Punktmenge mehr führt. Die letzte Ausgabe des Verfahrens entspricht dann einem (Zwischen-)Ergebnis, das die Form des Attraktors bereits deutlich erkennen lässt, und dessen Anzahl an Iterationen von der absoluten Größe in Pixel beziehungsweise der (Bildschirm-)Auflösung abhängig ist.

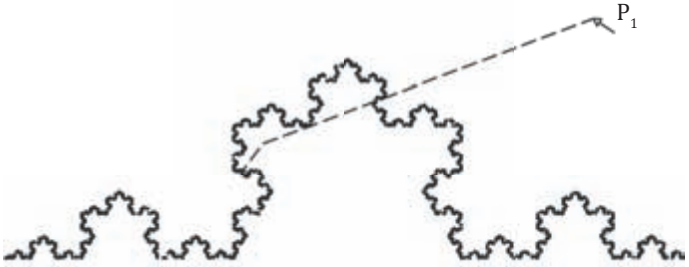


Abb.24.: Chaos-Game: Punktmenge der Koch-Kurve [0,1], 6 Iterationen, Startpunkt P_1(14,2|0,6), n=100, i=3.000

Bei dem Chaos-Game wird nun zunächst ein beliebiger Startpunkt $P_{(x,y)}$ ausgewählt und dessen Koordinaten in eine einzelne (zufällig) ermittelte Funktion aus der Menge F des IFS eingesetzt. Das Ergebnis bildet dann erneut die Eingabe in dieselbe Abbildungsgleichung. Nach n-Wiederholungen dieses Prozesses entsteht die Folge von n-Punkten $\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$, die in *Abb.24* als strichlierte Linie eingezeichnet ist. Diese Folge nähert sich immer stärker der Attraktormenge K an, bis letztendlich Koordinaten erreicht werden, die einen Punkt P_n beschreiben, der als Element von K gilt. Nachdem dieser einem Fixpunkt des Hutchinson Operators W entspricht, definiert er den ersten sichtbaren Punkt Q_1=P_n des Spieles und wird gezeichnet. Die Koordinaten $Q_{(x,y)}$

15 vgl.*Barnsley M. (1993)*
Peitgen H.-O. et al. (1998a), Seiten 473 ff

16 *Peitgen H.-O. et al. (1998a), Seiten 353 ff*

führen dann, diesmal in eine per Zufall aus der Menge F des IFS ausgewählten Funktion eingesetzt, zum nächsten Ergebnis, einem zweiten Punkt Q_2 der Punktmenge K. Jede Wiederholung der Anwendung einer beliebig gewählten Funktion aus F auf ein vorangegangenes Resultat Q_{i-1} ergibt wieder einen Punkt Q_i von K, was bedeutet, dass die Folge $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}$, Punkte der Attraktormenge beschreibt. Werden die einzelnen Funktionen darüber hinaus mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, mit der sie gewählt werden sollen, versehen, so kann das wie beim Barnsley Farn die Effizienz des Spieles steigern und die Folge der Punkte $\{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n\}$ lässt die Grenzfigur die Punktmenge des Attraktors schneller erkennen.[17]

IFS in der Architektur

Das IFS kann als mögliche Entwurfsunterstützung bei der Zergliederung von Großformen dienen. Soll ein Baukörper aus Teilen mit ähnlichen Verhältnissen und Orientierung in verschiedenen Maßstäben bestehen, so ermöglicht es diese Methode aus der einmaligen Eingabe der Komponenten im ersten Schritt, das heißt aus den Hauptkörpern heraus, eine feinere Aufsplitterung zu erzeugen. Als Resultat weist dann eine nähere Betrachtung eine ähnliche Charakteristik auf wie das Ganze. Eine nachfolgende Adaptierung ist allerdings aus Gründen der örtlichen Gegebenheiten, der Konstruktion oder der Funktion notwendig, wie es auch bei dem Wettbewerbsbeitrag zur Cardiff Oper von Greg Lynn der Fall war.[18] Dort wurde die Kaskade des Verlaufs der Küstenlinie vom Großen zum Kleinen in ein Fraktal übersetzt und, sowohl im Hafenbecken vor dem Gebäude als auch in den Baukörpern selbst, nach entsprechender Anpassung an die örtlichen Gegebenheiten beziehungsweise an die Anforderungen an ein Opernhaus, fortgesetzt.

D.2.2. L-Systeme – Lindenmayer

Bei einem Lindenmayer-System oder kurz L-System handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 vom ungarischen Biologen Aristid Lindenmayer (1925-1989) als Grundlage zur Beschreibung des Wachstums durch parallel stattfindende Zellteilung bestimmter einfacher Algen herangezogen wurde.[19] Er nutzte bei seiner Formulierung ein von Noam Chomsky in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts entwickeltes, auf Ersetzungsregeln basierendes Sprachsystem, wobei Lindenmayer im Unterschied zu dem Vorgänger-Modell, die Zeichen sequentiell und nicht parallel durch Zeichenketten ersetzte. Darüber hinaus ergänzte er das System noch um eine geometrische Übersetzung, die zusammen mit dem Einzug in die Computergrafik dazu beitrug, dass diese Methode heute eine gebräuchliche Simulationstechnik für Pflanzenwachstum, das letztendlich durch das L-System eine mathematische Beschreibung erhielt, darstellt. Wie in der *Abb.25* (*Seite 49*) ersichtlich können auf diese Weise, vor allem wenn es sich um nicht-deterministische L-Systeme handelt, Bilder erzeugt werden, die natürlichen Strukturen wie Gräsern, Blättern, Sträuchern oder Bäumen in ihrer Form sehr ähnlich sind.

Analog zum iterierten Funktionensystem, bedient sich das Lindenmayer-System ebenfalls sogenannter Ersetzungs- oder Produktionsregeln, diesmal allerdings handelt es sich bei den Elementen zumeist um Zeichen oder Symbole, die aus einem endlichen Alphabet V entnommen werden. Dementsprechend wird, in einem L-System G, dann auch zunächst ein Startelement s (das aus einem oder mehreren Zeichen besteht), das sogenannte Axiom, durch eine Kette von Zeichen, ebenfalls Elemente des Alphabets V, einer bestimmten Produktionsregel P, ersetzt. Das beschreibt den Beginn des darauf folgenden rekursiven Prozesses, bei dem ein Ergebnis wieder als Eingabe in den Ersetzungsvorgang dient, und die entsprechenden Zeichen der neu entstandenen Zeichenkette wiederum gleichzeitig gemäß der Produktionsregel P ausgetauscht werden. Damit aber überhaupt weitere Ersetzungen möglich sind, muss in der Zeichenkette jenes Teils von P, der neu zugewiesen wird, zumindest ein Zeichen mit dem zu ersetzenden Teil übereinstimmen, im anderen Fall endet der Prozess.

Produktions-Regeln

Ein L-System G, wie jenes für die Koch-Kurve, die bereits aus dem Kapitel *B.1.2. Monsterkurven/Koch-Kurve* bekannt ist, besteht dann aus dem Alphabet V, mit drei Elementen $\{F, +, -\}$ im Fall der Koch-Kurve, dem Axiom s, das hier durch den Buchstaben $F \in V$ definiert ist, und der Produktionsregel P, mit einem ursprünglichen Zeichen und der ihm zugewiesenen Zeichenkette:

$$F \dots Axiom$$

$$F \rightarrow F + F - -F + F$$

Im ersten Schritt wird der Buchstabe F des Axioms nach der Produktionsregel ersetzt, wodurch vier neue Buchstaben F mit zusätzlichen Konstanten + und - entstehen. Im nächsten Schritt erfolgt in gleicher Weise der, und darin liegt der Unterschied zu Chomskys Sprache, gleichzeitige erneute Austausch jeder der vier Buchstaben F. Das Ergebnis, bei dem die neu hinzugefügten Zeichenketten

17 *Barnsley M. (1993)*, Seiten 385-388

18 *Lynn G. (1999)*, Seiten 82ff

19 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 153
vgl. *Kruft H.-W. (1995)*

der ausgetauschten Zeichen des ersten Schrittes zusätzlich hervorgehoben wurden, lautet dann:

$$\boxed{F+F--F+F}+\boxed{F+F--F+F}--$$
$$\boxed{F+F--F+F}+\boxed{F+F--F+F}$$

Soll nun das Ergebnis nach der n-ten Iteration, das einem bestimmten Wachstumsstadium einer Pflanze entsprechen kann, gezeichnet werden, muss darüber hinaus ein Katalog von Anweisungen für die grafische Übersetzung vorliegen. Dabei bedeutet in der Regel:

(1) F ... eine Bewegung um die Länge L nach vorne, die eine sichtbare Spur hinterlässt.

(2) + ... eine Konstante, die einem Richtungswechsel um einen bestimmten Winkel α gegen den Uhrzeigersinn entspricht.

(3) - ... eine Konstante, die einen Richtungswechsel um einen bestimmten Winkel α im Uhrzeigersinn entspricht.

Im Fall der Koch-Kurve sei die Länge L_0 die Einheitslänge eins und der Winkel α durch 60 Grad gegeben.

Ausbau des L-Systems

Um komplexere Strukturen mit Verästelung, wie sie Sträucher und Bäume darstellen, modellieren zu können, bedarf es einer Erweiterung der Versuchsanordnung um zwei Elemente, der geöffneten eckigen Klammer als Symbol für den Beginn und die geschlossene als Symbol für das Ende eines Stranges (siehe *Abb.25*). Diese beiden Elemente werden zunächst dem Alphabet V hinzugefügt, wodurch sie erst einer Verwendung in der Produktionsregel zur Verfügung stehen. Das Zeichen [in einer Zeichenkette signalisiert dann, dass sowohl die derzeitige Position als auch die Orientierung abgespeichert werden sollen um beim Erreichen des entsprechenden Endes dieses Stranges, das durch das Zeichen] gekennzeichnet ist, wieder aufgerufen zu werden. Der Weg wird folglich wieder von der abgespeicherten Position fortgesetzt.

Das verwendete Alphabet V kann gleichfalls um Buchstaben erweitert werden, die, ähnlich dem zuvor eingeführten F, dann wieder in eine Vorwärtsbewegung, mit oder ohne hinterlassener Spur, übersetzt werden, beziehungsweise als Symbol für einen Verbleib am selben Ort dienen. Es sind aber auch weitere Ersetzungsregeln innerhalb der Produktionsregel $P=\{p_1,p_2,p_3,\ldots,p_n\}$ möglich. Sind dabei nur eindeutige Zuordnungen der Zeichen erlaubt, das heißt, darf ein Zeichen nur durch genau eine Zeichenkette ersetzt werden, und besteht der zu ersetzende Teil tatsächlich nur aus einer Stelle, so wird von einem deterministischen kontextfreien L-System, einem d0L-System $G=\{V,s,P\}$, gesprochen.

d0L-Systeme

Die Null in d0L bedeutet, dass ein Zeichen unabhängig von seinem jeweiligen Nachbarzeichen betrachtet wird, entsprechend einer einzelnen Stelle im linken Teil einer Ersetzungsregel, während das d für deterministisch steht, das heißt für jedes Zeichen darf es genau nur eine ersetzende Zeichenkette geben.

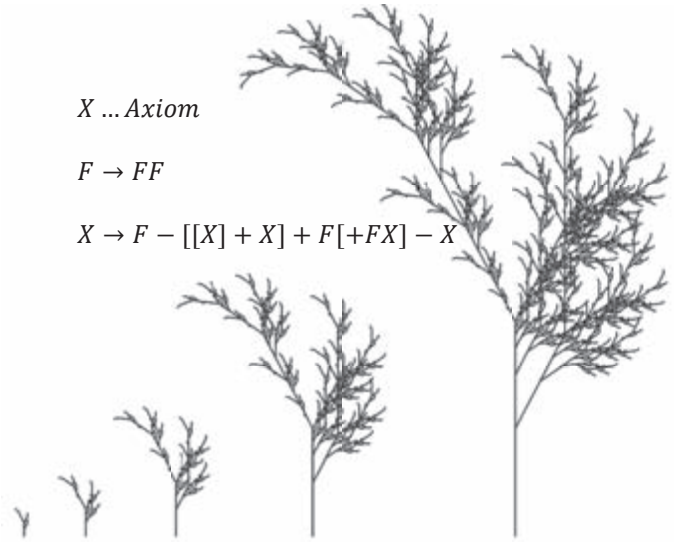


Abb.25.: L-System: Plant 2D, 1-6. Iteration; Axiom: X; Winkel: 27,7°; Startwinkel: 90°; Längen F=1; X=0

Bei jedem Durchgang werden dann alle Zeichen, die der Ersetzungsregel p_1 entsprechen, durch die ihr zugewiesene Zeichenkette ersetzt, jene Zeichen, die p_2 entsprechen, durch die diesem Zeichen zugewiesene Zeichenkette und so weiter bis zu p_n. Auf diese Weise lassen sich komplexe zwei-dimensionale, aber auch drei-dimensionale Formen durch eine Turtle-Grafik (um die Sprache aus der Logo-Programmierung zu verwenden) interpretieren. Nachdem L-Systeme bis zum Ende eines Stranges ohne Unterbrechung durchschritten werden können, bekommt bei einer Turtle-Grafik, eine virtuelle Schildkröte einen Bleistift auf den Bauch geschnallt, der nur dann das Papier berührt, wenn das Symbol es verlangt. Bei Richtungswechsel dreht sich die Schildkröte entsprechend und beim Erreichen des Endes eines Stranges wird sie an den Anfang desselben gestellt, um gleichzeitig die dort gespeicherte Orientierung übertragen zu bekommen. Im Kapitel *F. Computer-Programme/Das Programm als L-System* wird der beschriebene Algorithmus schließlich anhand eines VBA Skriptes genauer betrachtet.

Turtle-Grafik

Durch die Darstellung mehrerer Stadien eines geeigneten L-Systems kann nicht nur das Wachstum von Pflanzen im Großen, sondern, wie ursprünglich von Lindenmayer bei der Einführung der Methode dargestellt, auch das gegenseitig

beeinflussende Verhalten von Pflanzenzellen in ihrer engeren Umgebung modelliert werden.[20]

L-Systeme in der Architektur

Das L-System besitzt die Eigenschaft, dass die grafische Umsetzung Interpretationen zulässt, wodurch die Äste in der Übersetzungsliste sowohl als Zylinder oder Kuben definiert werden können. Aus dem Blickwinkel der Architektur beinhaltet der Code selbst Informationen über das Verhältnis von Freiflächen zur bebauten Fläche, über die Orientierung, die Lage von Verbindungsteilen und die Ausbreitung in der Ebene. Der Vorteil dieser Codierung liegt darin, dass mögliche Erweiterungen in der Produktionsregel bereits abgespeichert sind, die Formen der Einzelteile aber noch Spielraum lassen.

D.2.3. Mittelpunktverlagerung

Quadratur der Parabel

Die Grundlagen der Mittelpunktverlagerung – im englischen Original Midpoint-Displacement-Method – gehen auf Archimedes von Syrakus (um 287 – 212 v. Chr.) und die von ihm beschriebene Methode zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments zurück. Archimedes Idee beruht dabei auf der Zerlegung des Segments in einfachere Geometrien, in diesem Fall einzelne Dreiecke, deren Flächeninhalte F leicht zu berechnen sind (siehe *Abb.26*). Werden alle F des schrittweisen Verfahrens addiert, nähert sich das Ergebnis schließlich dem tatsächlichen Flächeninhalt des Segmentes an.[21]

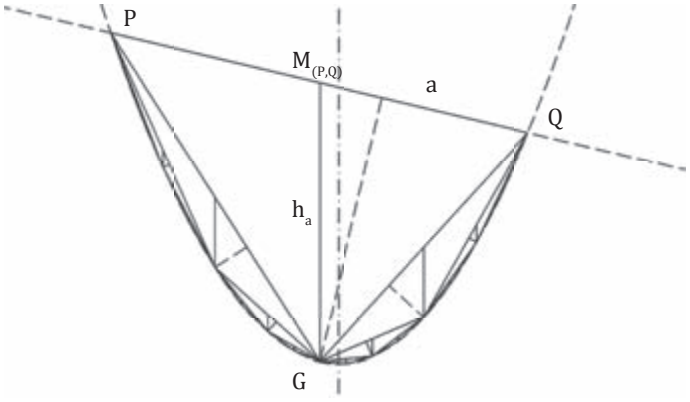


Abb.26.: Parabel f(x)=ax²+bx+c; a= 0,02, b=c=0;

Die Begrenzung der gesuchten Fläche sei zunächst durch die Sehne $\overline{PQ}$, die aus einer die Parabel in zwei Punkten (P, Q) schneidenden Linie hervorgeht, und dem Parabelsegment selbst, gegeben. Bei dem Näherungsverfahren wird dann eine, durch den Mittelpunkt $M_{(P,Q)}$ der Sehne $\overline{PQ}$ führende und zur Parabelachse parallele Linie konstruiert, die genau einen Schnittpunkt G mit der Parabel besitzt. Dadurch ergeben sich zwei neue Parabelsehnen $\overline{GP}$ und $\overline{GQ}$, die zusammen mit der Sehne $\overline{PQ}$ das erste Dreieck bilden[22], das speziell ein gleichschenkeliges Dreieck ist, wenn die Sehne $\overline{PQ}$ und die Parabelachse einen rechten Winkel umschließen. Die Fläche F_0 dieses ersten Dreiecks mit $a_{(0)} = \overline{PQ}$, kann nun allgemein durch die Flächenformel eines Dreiecks berechnet werden:

$$F_{(0)} = \frac{a_{(0)} \cdot h_{a_{(0)}}}{2}$$

Im nächsten Schritt wird die zuvor beschriebene Anweisung wiederholt. Folglich ergeben die zur Parabelachse parallelen Linien, die jeweils durch die Mittelpunkte der beiden neuen Parabelsehnen verlaufen, zwei neue Schnittpunkt mit der Parabel und spannen zwei zusätzliche Dreiecke auf. Diese Vorgehensweise wiederholt sich dann in jedem weiteren Schritt, wodurch der verbleibende Raum zwischen den bereits konstruierten Dreiecken und der Parabel immer kleiner wird. Diese Methode des schrittweisen Füllens der Restfläche durch weitere Dreiecke wird auch Exhaustionsmethode des Archimedes genannt. Drei Eigenschaften dieser Methode sind:

(1) Die zur Parabelachse parallel verlaufende Höhe, die durch den Mittelpunkt der Sehne und den Schnittpunkt gegeben ist, hängt mit jener des vorhergehenden Schrittes in folgender Weise zusammen:[23]

$$h_{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot h_{(n)}$$

(2) Die Dreiecke eines Schrittes beschreiben alle dieselbe Fläche.

(3) Die Summe der Flächen aller neu hinzugefügten Dreiecke eines Schrittes entspricht einem Viertel der Summe der Flächen des vorhergehenden Schrittes:

$$F_{(n+1)} = \frac{1}{4} \cdot F_{(n)}$$

Aus Punkt drei lässt sich schließlich eine einfache Näherungsformel für den Flächeninhalt F_{PQ} eines Parabelsegments ableiten:

$$F_{(PQ)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{a_{(0)} \cdot h_{a_{(0)}}}{2}$$

20 *Peitgen H.-O. et al. (1998b)*, Seiten 505ff und 515f

21 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seiten 11, 244

22 Die Tangente in Q ist parallel zur Sehne PQ.

23 *Bovill C. (1996)*, Seite 75

Die Fläche des Parabelsegments F_{PQ} beträgt dann vier Drittel der Fläche des ersten eingeschriebenen Dreiecks F_0. Im Beispiel der *Abb.26* bedeutet das nach vier Iterationen eine Differenz zwischen der Summe der Dreiecks-Flächen und der Fläche des Parabelsegments von nur 0,39%. Die exakte Fläche wird allerdings tatsächlich erst nach unendlichen Wiederholungen erreicht, da erst dann die gesamte Fläche durch Dreiecke ausgefüllt ist.

Mittelpunktverlagerung und 2-D Gebirge

Von der Exhaustionsmethode des Archimedes lässt sich ein einfacher Algorithmus, die sogenannte Mittelpunktverlagerung, ableiten, mit dessen Hilfe es möglich ist, Strukturen zu modellieren, die den natürlichen Verläufen von Gebirgen entsprechen. Die Methode der zufälligen Mittelpunktverlagerung, mit dessen Hilfe Landschafts-Modelle erzeugt werden können, wurde von Fournier, Fussel und Carpenter erstmals 1982 beschrieben.[24]

Bei der einfachsten Form der Mittelpunktverlagerung wird zunächst, von einer Strecke $\overline{P_0Q_0}$ ausgehend, der Mittelpunkt $M_{(P_0,Q_0)}$ markiert und um einen bestimmten Wert h_0, der in Prozent ausgedrückt als Verhältnis zur Länge der Strecke $\overline{P_0Q_0}$ gegeben sei, vertikal nach oben verschoben. Der so ermittelte Punkt $M_{0,0}$ bildet neben P_0 und Q_0 den dritten Fixpunkt eines rekursiven Verfahrens (siehe *Abb.27*). Die beiden resultierenden Strecken $\overline{M_{0,0}P_0}$ und $\overline{M_{0,0}Q_0}$, werden dann auf dieselbe Weise verändert, wodurch zwei zusätzliche, nach oben verlagerte Mittelpunkte mit insgesamt vier Teilstrecken entstehen. In weiterer Folge wiederholt sich die Ersetzungsregel bei jedem Schritt und für jede einzelne Teilstrecke, das Ergebnis bildet also wieder das Ausgangsobjekt für den nächsten Durchlauf. Beträgt der Wert für h_{n+1}, wie bei der Quadratur der Parabel, ein Viertel von h_n, so nähert sich der Streckenzug schließlich schrittweise der Form einer Parabel an.

Im Gegensatz zu einer glatten Kurve, wie der Grenzfigur dieser Versuchsanordnung mit dem Verkleinerungsfaktor von einem Viertel, sind die natürlichen Vorbilder mehr oder weniger stark zerklüftet. Der Grad der Zerklüftung wird dabei von der Tektonik (Faltung) beziehungsweise den Erosionskräften beeinflusst und steht im Zusammenhang mit dem Alter des Gebirges. Um schließlich mit Hilfe eines Computer-Modells auch künstliche Landschaften unterschiedlicher Zerklüftung simulieren zu können, muss daher der Algorithmus entsprechend erweitert werden.

Der Mathematiker Landsberg ersetzte den Verkleinerungsfaktor von einem Viertel allgemein durch den Faktor ω mit $0{,}5 < \omega < 1{,}0$.[25] Dadurch entstehen gezackte, wenn auch regelmäßige Kurven – wie jene in *Abb.27* mit $\omega = 0{,}616$ –, die nach unendlichen Wiederholungen stetig, aber analog der Koch-Kurve, an keiner Stelle differenzierbar sind. Zwischen der Verlagerung h_{n+1} eines nachfolgenden Schrittes und jener des aktuellen (h_n) besteht durch den Faktor ω folgender Zusammenhang:

$$h_{(n+1)} = \omega \cdot h_{(n)}$$

Daraus lässt sich die schrittweise Verkleinerung von h entsprechend der Anzahl der Wiederholung n ableiten:

$$h_n = \omega^n \cdot h_0$$

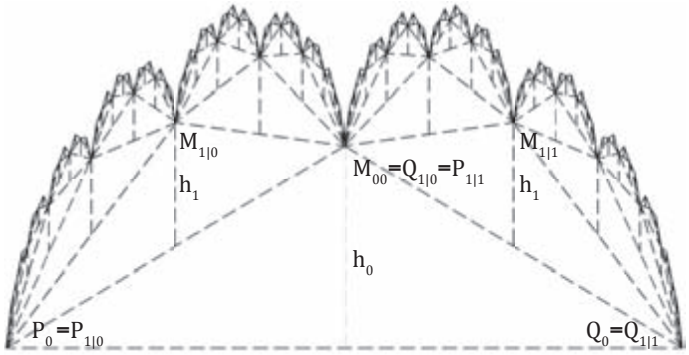


Abb.27.: Midpoint-Displacement: h_0=30% der Länge P_0Q_0; ω=0,616;

Für $0{,}5 < \omega < 1{,}0$ konnte weiters gezeigt werden, dass es sich genau dann um eine fraktale Kurve handelt.[26] Dabei gilt, je näher der Verkleinerungsfaktor ω an der oberen Schranke von Eins liegt, desto stärker erfolgt die Auf-und-Ab-Bewegung und die resultierende Kurve erscheint folglich stärker zerklüftet. Hingegen bedeutet ein niedriger Wert für ω, also nahe einem Halb, durch die stärkere Verkleinerung der Verlagerung h_n von einem Schritt zum nächsten, eine flachere Kurve. Landsberg stellte schließlich den Zusammenhang zwischen ω und der fraktalen Dimension her, wodurch sich letztlich auch der Grad der Zerklüftung ausdrücken lässt.[27] Demnach liegen die fraktalen Dimensionen der resultierenden Kurven, nach unendlichen Wiederholungen, zwischen Eins für $\omega = 0{,}5$ und Zwei für $\omega = 1$:

$$D = 2 - |log_2 \omega|$$

24 vgl. *Fournier A. et al. (1982)*
Peitgen H.-O. et al. (1998a), Seite 452

25 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 246

26 *Bovill C. (1997)*, Seite 76

27 *Bovill C. (1997)*, Seite 76

Die bisher in diesem Kapitel beschriebene Versuchsanordnung erzeugt ausschließlich deterministische Kurven, nachdem jeder neuerliche Aufruf des Algorithmus mit den gleichen Anfangswerten zu dem exakt gleichen Ergebnis führt. Für ein realistisches Modell erscheinen diese Kurven aber noch zu regelmäßig, weshalb in weiterer Konsequenz der Faktor Zufall durch einen Münzenwurf mit einbezogen wird. Grundsätzlich ist dann, bei jeder einzelnen Verlagerung eines Mittelpunkts, sowohl eine vertikal nach oben verlaufende Verlagerung als auch eine nach unten erlaubt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die eine oder andere Seite gewählt wird, ist mit dem Münzenwurf gleichzusetzen und beträgt jeweils fünfzig Prozent. Durch diesen zusätzlichen, vom Zufall beeinflussten, Parameter kommen die generierten Kurven den Formen der natürlichen Vorbilder einen Schritt näher. Die Kurve mit ω = 0,616 in *Abb.28* besitzt bereits große Ähnlichkeiten mit einer stärker zerklüfteten Gebirgssilhouette, während jene mit ω = 0,51 zu einer hügelig anmutenden Landschaft führt. Ein zu hohes ω (0,8) scheint hingegen zu große Ausschläge zu beinhalten.

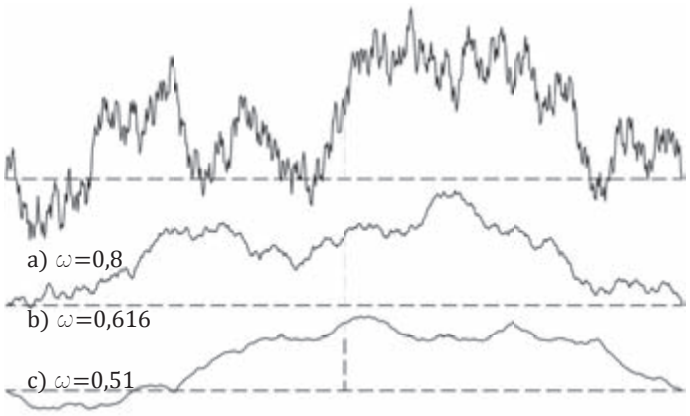


Abb.28.: Midpoint-Displacement: h_0=10% der Länge P_0Q_0; tendiert gegen: a) D=1,6781; b) D=1,301; c) D=1,0286;

Gausssche Normalverteilung

Um noch realistischer anmutende Scherenschnitte künstlich erzeugter Gebirgszüge zu erhalten, soll die Verlagerung h_n innerhalb jedes Schrittes aus einer Bandbreite möglicher Werte, gegeben durch die Gaußsche Normalverteilung, per Zufall entnommen werden.[28] Die Verlagerung h_n entspricht dann einer Gaußschen Zufallsverlagerung, mit dem Mittelwert Null und einer Varianz Δ_n^2.[29] Dadurch werden Abweichungen in der lokalen Umgebung der Tief- beziehungsweise Hoch-Punkte zugelassen, und ansonsten symmetrische Täler und Gipfel vermieden.

Zufällige Mittelpunkt-Verlagerung

Bei der zufälligen Mittelpunktverlagerung handelt es sich zunächst um eine Methode zur Simulation der graphischen Darstellung einer Brownschen Bewegung[30] als eindimensionale Zeitreihe.[31] Die Aufzeichnung der tatsächlichen Teilchenbewegung erfolgt dabei in einem Graphen mit der Zeit t als horizontale und die Lage X als vertikale Koordinatenachse. Für verschiedene Zeitpunkte (Intervalle) $0 \le t \le 1$ wird dann die jeweilige Lage $X_{(t)}$, als Summe aller bis zu dem Zeitpunkt t erfolgten Verlagerungen, mit freien Weglängen zwischen -L und +L, eingetragen. Die Simulation einer solchen Aufzeichnung geht nun zunächst von bestimmten Werten zur Anfangs- und Endzeit aus, die durch $X_{(t=0)}$ gleich Null beziehungsweise $X_{(t=1)}$ gleich einer Gaußschen Zufallsverlagerung, mit dem Mittelwert Null und der Varianz, dem mittleren Abweichungsquadrat σ^2, gegeben sind. $X_{(t=0)}$ entspricht dabei dem zuvor verwendeten Punkt Q_0 und $X_{(t=1)}$ dem Punkt P_0. In dem darauf folgenden, ersten Schritt wird, wie bereits unter *D.2.3. Mittelpunkt-verlagerung/Mittelpunktverlagerung und 2-D Gebirge* beschrieben, der Mittelwert zwischen $X_{(0)}$ und $X_{(1)}$ ermittelt und um h_1 verlagert. Diesmal ist h_1 allerdings eine Gaußschen Zufallszahl, die einen positiven oder negativen Wert annehmen kann und die um 1/2 skaliert wird.[32] In jedem weiteren Schritt n+1 wird die Gaußschen Zufallszahl für h_{n+1}, das heißt, den Wertebereich der Zufallszahlen, im Bezug auf den vorhergehenden Schritt n, entsprechend der Halbierung des Zeitintervalls Δt, um jeweils Eins durch die Wurzel aus Zwei verkleinert. Dabei gilt für Δt im Verhältnis zum ursprünglichen Intervall [1,0] und der Rekursionstiefe n:

$$\Delta t = \frac{1}{2^n}$$

Wie bei den zuvor gezeigten Beispielen sind auch in diesem Fall die Verlagerungen h_n wieder proportional zur Länge der Teilstrecke P_nQ_n, diesmal aber mit der Varianz Δ_n^2, die in Abhängigkeit von der Rekursionstiefe n steht und mit dieser abnimmt. Der Zusammenhang der Varianz der Gaußschen Zufallszahl mit der Rekursionstiefe n und σ^2 ist dann gegeben durch:

$$\Delta_n^{\,2} = \frac{1}{2^{(n+1)}} \cdot \sigma^2$$

Die resultierende Kurve ist statistisch selbst-ähnlich und zeigt eine ähnliche Charakteristik unabhängig vom betrachteten Maßstab, wenn die Zeitachse t um den Faktor Zwei und die Lage X um die Wurzel aus Zwei skaliert werden.

28 *Bovill C. (1996)*, Seite 80

29 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 79

30 Die thermische Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen folgt der Gesetzmäßigkeit der Brownschen Bewegung. Benannt nach dem schottischen Botaniker Robert Brown (1773-1858)

31 *Deussen O. (2003)*, Seite 124

32 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 453

Hurst-Exponent H

Zur Abschätzung, ob sich in einer gegebenen Kurve ein Trend abzeichnen lässt, dient der nach dem Hydrologen Harold Edwin Hurst (1900-1978) benannte Hurst-Exponent H. Für eine gegebene Kurve bedeutet dann ein Wert von H=0,5, dass sie ein höchstes Maß an Zufälligkeit (random walk) aufweist, wie es bei der Brownschen Bewegung der Fall ist, die zuvor, als Zeitreihe interpretiert, durch zufällige Mittelpunktverlagerung erstellt wurde. Liegt der Hurst-Exponent hingegen zwischen 0<H<0,5 besteht eine hohe Wahrscheinlichkeit, dass auf eine Aufwärtsbewegung eine Abwärtsbewegung und umgekehrt folgt, während Werte zwischen 0,5<H<1 eine erhöhte Tendenz andeuten. Dieser erweiterte Bereich 0<H<1 (H≠0,5) wird dann als gebrochene oder fraktale Brownsche Bewegung, kurz fBM bezeichnet.[33] Ermittelt wird der Faktor über die sogenannte Rescaled-Range-Analyse, bei der zunächst die maximale Schwankung innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls gemessen wird.[34] Dieses Intervall wird in weiterer Folge verkleinert (halbiert) und der Durchschnitt der beiden maximalen Schwankungen berechnet. Nach mehreren Durchläufen, das sind Verkleinerungen der Intervalle, lässt sich durch die Steigung der Regressionskurve in einem doppellogarithmischen Graphen mit log(Zeit-Intervall) versus log(Durchschnitt der maximalen Schwankungen) der Hurst-Exponenten abschätzen.

Rescaled-Range- Analyse

Um mit der unter *D.2.3. Mittelpunktverlagerung/ Gaußsche Normalverteilung* beschriebenen Methode nicht nur eine Brownsche Bewegung mit H=0,5 erzeugen zu können sondern auch Kurven mit einem Hurst-Exponenten 0<H<1 (H≠0,5), wird schließlich die Varianz von h_n entsprechend erweitert:[35]

$$\Delta_n{}^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{(2H)}} \cdot \left(1 - 2^{(2H-2)}\right)$$

Der Skalierungsfaktor jedes einzelnen Schritts für die Gaußsche Zufallszahl steht ebenfalls im Verhältnis zur Konstanten für die Zerklüftung, dem Hurst-Exponent H, und beträgt für h_1 zunächst $\sqrt{1 - 2^{(2H-2)}}$. In jedem weiteren Schritt wird der Faktor dann jeweils um $1/2^H$ im Verhältnis zum vorherigen Schritt verkleinert, mit, wie unter *D.2.3. Mittelpunktverlagerung/Gaußsche Normalverteilung* beschrieben, $1/2^{0,5} = 1/\sqrt{2}$ für die Brownschen Bewegung.[36]

Aus dem Hurst-Exponenten H lässt sich die fraktale Dimension schließlich einfach ableiten, wobei die *euklidische* Dimension für eine Linie mit E=1 als Basis gegeben ist:

$$D = (E + 1) - H = 2 - H$$

Zusammenfassend folgt nun, dass mit einem abnehmenden H, das heißt mit einer Tendenz gegen Null, der Wert des Skalierungsfaktors für die Gaußsche Zufallszahl zunimmt. Die Verkleinerung von einem Schritt zum nächsten fällt somit geringer aus, woraus auch eine stärkere Varianz und somit eine höhere fraktale Dimension resultiert. Umgekehrt führt ein hoher Wert H, nahe Eins, zu einer stärkeren Verkleinerung des Wertebereichs für die Zufallszahlen von einem Schritt zum nächsten, wodurch die Kurve glatter, mit weniger Schwankungen, erscheint und die fraktale Dimension sich dem Wert Eins nähert.

Mittelpunktverlagerung und 3-D Gebirge

Ausgehend von der zufälligen Mittelpunktverlagerung zur graphischen Darstellung einer Brownschen Bewegung, kann in weiterer Folge auch ein Modell zur Simulation von Gebirgen entwickelt werden (siehe *Abb.29*). Diese künstlichen, am Computer erzeugten Landschaften weisen dann dieselben statistischen Eigenschaften wie die an den realen Objekten gemessenen auf.

Abb.29.: Midpoint-Displacement ohne Gaußsche Zufallszahl

Das Ausgangsobjekt des adaptierten Algorithmus ist diesmal ein beliebiges Dreieck, dessen Eckpunkte – mit beliebigen z-Koordinaten – die ersten Fixpunkte eines neuerlich rekursiven Prozesses beschreiben. Im ersten Schritt erfolgt dann eine Verlagerung der Mittelpunkte der drei Seitenlinien, deren Höhen gemittelt aus ihren jeweiligen beiden Nachbarpunkten hervorgehen, um einen bestimmten Wert vertikal nach oben oder unten. Die auf diese Weise konstruierten Punkte sind weitere Fixpunkte, aus denen, zusammen mit den ersten drei Eckpunkten, vier neue Dreiecke entstehen, deren Seitenmittelpunkte in weiterer Folge wieder um einen bestimmten Wert verlagert

33 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 82
34 *Bovill C. (1996)*, Seite 84
35 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 85
36 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seite 462

werden. Durch die Wiederholung dieser Ersetzungsregel bei jedem Schritt und für jede Seitenlinie entstehen eine Vielzahl an Dreiecken, die kaum mehr voneinander unterschieden werden können. Die *Abb.29* zeigt eine solche künstliche Landschaft aus zwei, zu einem Rechteck aneinander gefügten Start-Dreiecken. Die Wasserlinie entspricht dabei einfach der Null-Ebene.

Analog zu dem im Kapitel *D.2.3. Mittelpunktverlagerung/Gaußsche Normalverteilung* vorgestellten, weiterentwickelten Algorithmus zur Erzeugung von statistisch selbstähnlichen Kurven können die Werte für die Verlagerung wieder Gaußsche Zufallszahlen darstellen, deren Wertebereiche gleichfalls, entsprechend dem jeweiligen Schritt, verkleinert werden. Um schließlich noch die scharfen Kanten der aneinander treffenden Dreiecke abzuschwächen, besteht die Möglichkeit der Darstellung als Netz mit Kontroll-Punkten und Glättungsfunktion an Stelle von Polygonen.

Diamond-Square-Methode

Für die Programmierung und anschließende Visualisierung künstlicher Landschaften eignet sich besonders der Algorithmus der Diamond-Square-Methode.[37] Diese Methode verwendet als Ausgangsobjekt kein Dreieck sondern ein Quadrat, aus dem, im Grundriss betrachtet, ein Gitternetz aus vielen kleinen Quadraten entsteht. Nach einer vertikalen Verschiebung der vier Start-Punkte wird zunächst, im ersten sogenannten $square$ Schritt, der Quadrat-Mittelpunkt in Bezug auf seine vertikale Lage, als Durchschnittshöhe der vier Eckpunkte, um einen Zufallswert nach oben oder unten versetzt. Von oben betrachtet entsteht so ein um 45 Grad gedrehtes Gitternetz, beziehungsweise ein aus Rauten oder Diamanten zusammengesetztes Muster. Im nächsten, dem $diamond$ Schritt erfolgt dann die Bestimmung und Verlagerung der Mittelpunkte dieser Diamanten, deren ursprüngliche Höhen wieder Interpolationen aus den jeweiligen Nachbarpunkten entsprechen. An den Rändern sind diese Formen allerdings abgeschnitten und bestehen jeweils aus nur drei an Stelle von vier Punkten. Während diese für die Bestimmung der Mittelpunkte um den vierten Punkt zum Diamanten ergänzt werden, berechnet sich die Höhe aus den drei gegebenen Eckpunkten. Die $square$ und $diamond$ Konstruktionsschritte werden dann nacheinander n-Mal wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Nachdem das Quadrat nicht auf einmal verkleinert wird, sondern über den Zwischenschritt der Diamanten, beträgt die jeweilige Verkleinerung des Wertebereichs für die Gaußsche Zufallszahl diesmal für jeden einzelnen Schritt $\sqrt{1/2^{H}}$.

37 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*. Seiten 466f

Mittelpunktverlagerung in der Architektur

Eine der beschriebenen Methoden der Mittelpunktverlagerung erzeugt Oberflächen, die aus Dreiecken zusammengesetzt sind und als Dach- oder Fassadenflächen interpretiert werden können. Diese Flächen stehen dann in Abhängigkeit einer gewünschten Rauheit, die durch den Sonnenstand, eine mögliche Reflexion und durch den Ausblick beeinflusst wird. Als Hurst-Exponent ausgedrückt, besteht in weiterer Folge die Möglichkeit mehrere Simulationen zu erstellen und nach verschiedenen Kriterien zu überprüfen. Eine Liste der unterschiedlichen Formate verschafft beispielsweise einen Überblick über die Wirtschaftlichkeit der verschiedenen Simulationen.

D.2.4. Curdling und Staubwolken

Als Curdling bezeichnete Benoît Mandelbrot den Prozess zur Erzeugung von skaleninvarianten fraktalen Staubwolken, das sind Mengen nicht zusammenhängender Staubkörner.[38] Die Cantor Menge bildet, wie bereits im Kapitel *B.1.3. Cantor'sche Punktmenge (Cantor-Menge)* unter *Curdling (Gerinnung)* beschrieben, ein solches, aus einer Strecke entstandenes und daher auf die erste Dimension beschränktes, deterministisches Ergebnis. Gebiete mit einer Häufung von Punkten wechseln sich dabei mit leeren Abschnitten ab. Wenn dieser Prozess nicht auf eine Strecke beschränkt bleibt, sondern auf den dreidimensionalen Raum ausgeweitet und durch den Faktor Zufall ergänzt wird, so sind schließlich Ähnlichkeiten zwischen den Häufungen der Punkte in diesem Modell und der Verteilung von Galaxien und Sternen zu erkennen.[39]

Für die nachfolgende Beschreibung eines Algorithmus, der einem solchen rekursiven Prozess in der Ebene zugrunde liegt, sei das Ausgangsobjekt zunächst durch ein in nxm Felder unterteiltes Quadrat gegeben. Im ersten Schritt wird dann jedes einzelne Quadrat dahingehend untersucht, ob es erneut unterteilt werden soll, das heißt im Spiel verbleibt, oder ausscheidet. Diese Entscheidung trifft ein Zufallsgenerator, wobei dem Ereignis des Verbleibs und damit der neuerlichen Unterteilung in nxm Felder, eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugewiesen ist. Bleibt nun ein Quadrat nach einem Durchlauf erhalten, so besteht in diesem Feld die Möglichkeit der künftigen Häufung von Punkten. In jedem weiteren Schritt wird dann der Vorgang der Unterteilung und Prüfung, mit einer darauf folgenden Verwerfung beziehungsweise neuerlichen Untersuchung wiederholt, wodurch schließlich nach unendlichen Schritten eine unzusammenhängende Staubwolke entsteht.

38 *Bovill C. (1996)*, Seite 92

39 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 88f, Seiten 96f

Die statistische Selbstähnlichkeit des Ergebnisses dieses Prozesses ist dann die Folge einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, mit der ein Quadrat weiter untersucht wird, und weicht dadurch von einer reinen Selbstgleichheit ab. Zur Verdeutlichung dieses Unterschieds werden in der *Abb.30* jeweils vier Iterationen eines deterministischen Algorithmus und einer Gerinnung gegenübergestellt, die beide von einer Einteilung in drei mal drei Felder ausgehen. Während im linken, dem deterministischen Beispiel zwei Drittel der Felder in einer bestimmten Anordnung für den Verbleib ausgewählt werden, beträgt im rechten Beispiel lediglich die Wahrscheinlichkeit für den Verbleib, der durch einen Zufallsgenerator bestimmt wird, zwei Drittel. In beiden Fällen sind die Ergebnisse der einzelnen Schritte, zur besseren Lesbarkeit, durch unterschiedliche Grauwerte – mit den Quadraten der vierten Iteration in Schwarz – gekennzeichnet. Wird nun jeweils die letzte Iteration (nach unendlichen Wiederholungen) betrachtet, zeigt sich im ersten Fall, dass die Verteilung der Punkte im hellgrauen linken mittleren Feld einer exakt verkleinerten Kopie des Ganzen gleicht, während es sich im zweiten um eine statistisch ähnlichen Verteilung handelt. Das trifft allerdings nur nach unendlichen Schritten zu, die beiden Darstellungen der vier Iterationen in der *Abb.30* lassen aber bereits diese Eigenschaft erkennen.[40]

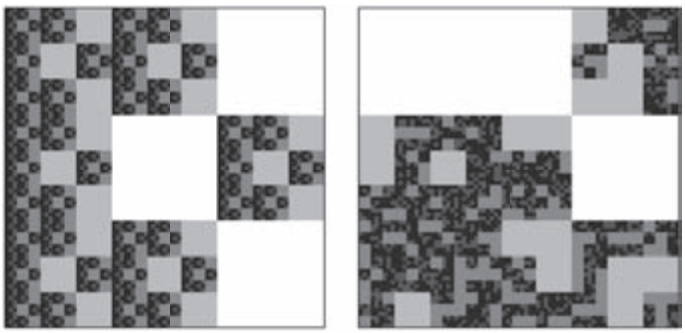


Abb.30.: Links eine Anordnung mit 2/3 besetzten Feldern; rechts Curdling mit der Wahrscheinlichkeit von 66%

Das Konzept der Gerinnung besteht nun darin, dass die Masse der ursprünglichen Fläche in die nächst kleineren Quadrate, das heißt in die nach einem Schritt verbleibenden, fließt. Das kommt einer Verdichtung gleich, die in *Abb.30* durch eine immer dunkler werdende Schattierung gekennzeichnet ist. Die resultierende Dichte als Ergebnis des Prozesses wird schließlich durch die fraktale Dimension charakterisiert. Zwischen zwei Schritten kann diese durch die Box-Counting-Methode (hier sei auf das Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* verwiesen) berechnet werden, bei der die Differenz der Logarithmen der Anzahl besetzter Felder (N_n, N_{n-1}) durch die Differenz der Logarithmen des Kehrwertes der Skalierung der jeweiligen Feldgröße (s_n, s_{n-1}) dividiert wird:

$$D_B = \frac{log(N_{s_2}) - log(N_{s_1})}{log\left(\frac{1}{s_2}\right) - log\left(\frac{1}{s_1}\right)}$$

Die Wahl der Wahrscheinlichkeit kann, in Abhängigkeit der Unterteilung, aus einem bestimmten Bereich von Werten erfolgen. In dem zuvor beschriebenen Beispiel, mit 3x3 Feldern, ist die untere Schranke durch ein Neuntel gegeben, da es bei kleineren Werten als sehr wahrscheinlich gilt, dass bereits im ersten Durchgang der Zufallsgenerator jedes Feld ausscheidet, und der Prozess infolgedessen vorzeitig beendet wird.[41] Umgekehrt verbleibt bei einem Wert von neun Neuntel jedes einzelne Feld mit absoluter Sicherheit im Spiel, womit auch die obere Schranke des Bereichs definiert ist. In diesem Fall wird die Fläche vollständig von Punkten ausgefüllt und die fraktale Dimension beträgt somit augenscheinlich Zwei. Für eine gegebene Wahrscheinlichkeit berechnet sich die fraktale Dimension mit der Box-Counting-Methode aus jenen Quadraten, die im Idealfall verbleiben. Bei einer Wahrscheinlichkeit von zwei Drittel und einer 3x3 Unterteilung sind das in jeder Runde pro vorhergehendem Feld genau zwei Drittel der neun möglichen Quadrate, womit aus N_1=6 und N_2=36 die fraktale Dimension zwischen den ersten beiden Schritten von 1,63 folgt. Die Berechnung für eine Gerinnung kann durch den Faktor Zufall schließlich von diesem Wert abweichen. Für das in *Abb.30* gegebene Beispiel mit einer Wahrscheinlichkeit von zwei Drittel beträgt etwa die, mittels Box-Counting-Methode ermittelte, fraktale Dimension zwischen n_1 und n_2 1,68, zwischen n_2 und n_3 1,64 und zwischen n_3 und n_4 1,60.

Wahrschein-lichkeit

Curdling in der Architektur

Curdling ermöglicht für eine gewünschte Dichte, bestimmt durch die fraktale Dimension, Simulationen einer Verteilung von besetzten Flächen in einem gegebenen Gebiet. Beschränkt auf wenige Iterationen können diese dann als mögliche Entwürfe für das Verhältnis von bebauter und nicht bebauter Fläche aufgefasst werden.

D.2.5. Diffusionsbegrenztes Wachstum

Als Diffusion wird der Prozess selbst eintretender Vermischung von miteinander in Berührung stehenden Gasen, Flüssigkeiten und Lösungen bezeichnet, die zufällig

40 Siehe Kapitel *C.1.1. Selbstähnlichkeit/Strikte Selbstähnlichkeit*

41 *Bovill C. (1996)*, Seite 99

erfolgt und mathematisch nicht vorhersagbar ist.[42] Voraussetzung dafür ist die thermische Molekularbewegung, auf deren Grundlage sich auch Teilchen fester Materie in Gasen oder Flüssigkeiten bewegen und deren Richtungswechsel durch Stöße von Molekülen zustande kommen. Diese zufällige thermische Eigenbewegung der Moleküle wird als Brownsche Bewegung bezeichnet und findet im diffusionsbegrenzten Wachstum, im Original Diffusion-Limited Aggregation (kurz DLA), Anwendung.[43]

Das Wesen einer solchen DLA ist die Anlagerung sich zunächst frei bewegender, das heißt durch ein Medium diffundierender Teilchen an einen aus bereits abgelagerten Teilchen gebildeten Cluster[44]. Das ist dann der Fall wenn ein bestimmter Mindestabstand unterschritten wird. Die auf solche Weise entstehenden dendritischen (verästelten) Strukturen finden sich unter anderem bei Metallabscheidungen, Schneeflocken, der elektrolytischen Abscheidung von Zink-Kristallen oder der Anlagerung von Rußteilchen in einem Rauchfang. Die beiden Physiker Leonard M. Sander und Thomas Witten entwickelten im Jahr 1981 ein Modell, mit dem solche statistisch selbstähnliche (fraktale) Strukturen, basierend auf der Brownschen Bewegung, durch Computer-Programme erzeugt werden können.[45]

In dem auf Witten und Sander zurückgehenden Modell definiert zunächst eine Start-Zelle, etwa in der Mitte des Bildschirmes, das erste feste Teilchen des Clusters.[46] Von einer beliebig gewählten Position, auf einem Kreis mit der Initial-Zelle als Mittelpunkt, startet dann ein weiteres, diesmal frei bewegliches Teilchen seine, analog zur Brownschen Bewegung, zufällige Wanderung. In manchen Simulationen wird der Startpunkt eines solchen Teilchens auch zwischen dem Umkreis des Clusters und einem maximalen Abstand von diesem gewählt. In weiterer Folge sind nun zwei Entwicklungen möglich:

(1) Das Teilchen entfernt sich auf seinem Weg immer weiter von der Start-Zelle, oder

(2) es berührt die Start-Zelle und hängt sich diese an.

Der erste Fall tritt dann ein, wenn der Abstand zur festen Zelle einen kritischen Wert überschreitet, wodurch es als sehr unwahrscheinlich gilt, dass noch eine Ablagerung stattfindet. Das führt zum Abbruch der Bewegung, beziehungsweise zum Löschen des Teilchens und das nächste wird gestartet. Im zweiten Fall kommt es hingegen zu einer Ablagerung bevor der Prozess von neuem beginnt, das heißt, die Bewegung eines weiteren Teilchens untersucht wird. Der Kreis, auf dem der Startpunkt eines solchen gewählt wird und jener für das Abbruchkriterium, das ist die maximale Distanz, wachsen dabei mit dem sich bildenden Cluster abgelagerter Teilchen mit. Nachdem in der Versuchsanordnung eine geringe Menge freier Teilchen angenommen wird, soll sich immer nur eines innerhalb des, den kritischen Abstand beschreibenden, Kreises befinden. Aus diesem Grund wird auch zunächst das Ergebnis einer Bewegung abgewartet, bevor das nächste Teilchen startet. Je mehr Ablagerungen bereits erfolgt sind, desto weniger weit kann schließlich zwischen den Ästen in den Cluster eingedrungen werden, weil es als sehr wahrscheinlich gilt, dass dieser bereits davor berührt wird und eine Ablagerung erfolgt. Die *Abb.31* zeigt nun zwei Ergebnisse einer solchen Simulation, in der zeitlich ältere Ablagerungen durch ein dunkleres Grau und neuere durch ein helleres gekennzeichnet sind. Dabei lässt sich erkennen, dass tatsächlich keine jüngeren Teile nahe am Kern zum Liegen kommen.

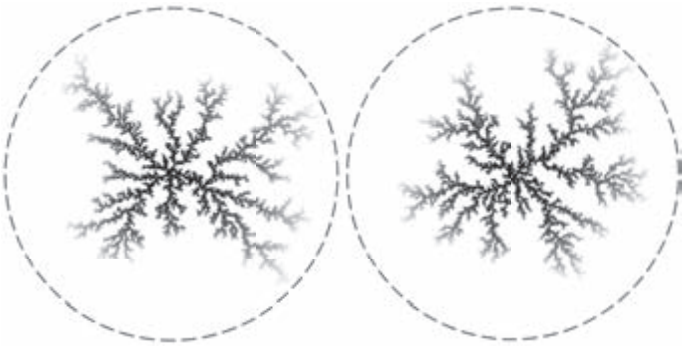


Abb.31.: Zwei Beispiele von DLA, mit der als Kreis gekennzeichneten maximalen Ausdehnung um die Start-Zelle

Dieses Modell kann durch Veränderung der Wahrscheinlichkeit mit der ein Teilchen an den Cluster anhaftet entsprechend erweitert werden.[47] Bei geringeren Werten besteht dann die Möglichkeit, dass Teilchen tiefer in die dendritische Struktur eindringen. Die Folge ist eine kompakter ausgefüllte Fläche und eine daraus resultierende höhere fraktale Dimension. Die Strukturen zeigen, obwohl aus zufälligen, ungeordneten Bewegungen der Teilchen entstanden, eine Ordnung, die sich als statistische Selbstähnlichkeit manifestiert.

42 *Voß H. (1994)*, Seite 92

43 Die Ergebnisse des diffusionsbegrenzten Wachstums zählen zu den Zufallsfraktalen.

44 Cluster: engl. Anhäufung

45 *Weston, R. (2004): Weston, Richard: Plans, Sections and Elevations - Key buildings of the twentieth century (Laurence King Publishing Ltd, London, 2004)*
Peitgen H.-O. et al. (1998a), Seite 439 und *Batty et al. (1994)*, Seite 248

46 *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seiten 441ff

47 *Batty et al. (1994)*, Seite 248

Anwendung

Simulationen von Stadtwachstum basierend auf DLA wurden von den beiden Geographen Batty und Longley, unter anderem in ihrem 1994 erschienenen Buch *Fractal Cities* beschrieben und mit gewachsenen Städten wie der Stadt Cardiff (Wales) verglichen.[48] Bei diesem Modell entstehen dendritische Strukturen durch die Ablagerung von sich zunächst frei bewegenden Individuen oder Haushalten an einen sich um einen Kern bildenden Cluster. Die verästelte Form weist dann Ähnlichkeiten zu den Anknüpfungen an wichtige Verkehrsverbindungen auf. Bestimmte, diesem Modell zugrunde liegende Wachstumsgesetze finden sich auch in Städten wieder. So erfolgen Neugründungen von Geschäfts- oder Wohnvierteln vorwiegend an den Rändern des Clusters, weil dort mehr Platz für künftiges Wachstum zur Verfügung steht.[49] Weitere Analogien bestehen in der Anlagerung um einen zentralen Punkt, der dendritischen Ausdehnung und den Lücken im Plan, die unverbaubare oder unbebaute Flächen beschreiben. Nachdem reale Städte kompaktere Strukturen hervorrufen als jene durch die DLA, erfolgt eine Ergänzung, nach der Teilchen öfters hin und her springen können, bevor sie sich endgültig festsetzen.[50] Dadurch besteht dann für frei bewegliche Teilchen die Möglichkeit tiefer in den Cluster einzudringen. Eine Variation der DLA bildet auch das Dielectric Breakdown Model (kurz DBM), bei dem die Struktur aus dem Kern herauswächst und dessen Kompaktheit eingestellt werden kann. Um ein noch realistischeres Modell zu erhalten, wurden schließlich von Batty und Longley in weiteren Versuchsanordnungen natürliche Hindernisse wie das Meer oder Flüsse berücksichtigt.

Stadt-Wachstum

D.3. Conclusio

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, gibt es verschiedene Kriterien, nach denen Fraktale eingeteilt werden können. Im Zusammenhang mit der praktischen Anwendbarkeit zur Beschreibung der Natur beziehungsweise zur Verwendung in der Architektur erscheint jene Einteilung nach der fraktalen Methode am Zweckmäßigsten, da sie die Prinzipien für eine Computer-Programmierung beinhaltet. Im folgenden Kapitel über die Beschreibung von Architektur mit der fraktalen Geometrie wird gelegentlich auf eine solche Einteilung zurückgegriffen, um schließlich im Kapitel *F. Computer-Programme*, in dem die Programmierung der einzelnen Algorithmen näher betrachtet wird, wieder aufgegriffen zu werden. An dieser Stelle werden auch einfache initiale Beispiele für eine praktische Anwendung der fraktalen Geometrie in der Entwurfsplanung gegeben.

48 *Batty et al. (1994)*, Seiten 300ff

49 *Ball P. (2009)*, Seite 65

50 *Ball P. (2009)*, Seite 65

FRAKTAL/EUKLID

E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal
von der Moderne zur organischen Architektur

Jene in den Kapiteln *D.2.2. L-Systeme – Lindenmayer* und *D.2.3. Mittelpunktverlagerung* beschriebenen Methoden simulieren Wachstumsprozesse natürlicher Strukturen, um auf diese Weise Erkenntnisse über die Wirkungsweise der zugrunde liegenden Kräfte zu erlangen, die wiederum die äußere Form beeinflussen. Es ist aber umgekehrt auch möglich, gegebene Objekte der realen Welt hinsichtlich der Existenz fraktaler Eigenschaften zu analysieren. In diesem Zusammenhang stellt sich nun die Frage, ob die fraktale Geometrie für die Beschreibung beziehungsweise in weiterer Folge zur Beurteilung von Architektur herangezogen werden kann und zu welchen Schlussfolgerungen das führt. Als Grundlage soll zunächst Benoît Mandelbrots Vermutung dienen, wonach fraktale Kunst bereitwilliger vom Betrachter akzeptiert wird, weil diese Nähe zur Natur erkennen lässt und natürliche Formen dem Menschen vertrauter sind.[01] Charakteristisch für fraktale Kunst ist dabei das Vorhandensein von vielen verschiedenen Längenskalen und Selbstähnlichkeit – im Gegensatz zu jener Kunst, die sich auf die ‚glatte' euklidische Geometrie bezieht. Demnach mag Architektur, die Eigenschaften einer fraktalen Geometrie aufweist und somit der Natur und ihren Gesetzen nahe steht, gleichfalls vom Betrachter eher akzeptiert werden als jene mit einer Affinität zur euklidischen Geometrie.

Wird Architektur, die der fraktalen Geometrie nahe steht, eher akzeptiert als jene, die der euklidischen folgt?

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich nun mit den Voraussetzungen einer solchen Betrachtung. Zum Einen liegen diese in der Abgrenzung der fraktalen zur euklidischen Geometrie, deren Beschreibung anschließend unter dem Gesichtspunkt der Architektur erfolgt, und zum Anderen in der Analyse von Beispielen hinsichtlich fraktaler Eigenschaften. Letzteres bleibt dabei vorwiegend auf Fassaden beschränkt, weil diese für jeden Betrachter gleichermaßen vom Straßenraum aus erfahrbar sind. Solche Untersuchungen verdeutlichen dann auch den Unterschied zur mathematischen Definition von Fraktalen. Bemerkenswert ist allerdings, dass theoretische Schriften einiger Architekten fraktale Eigenschaften beschreiben, bevor B. Mandelbrot den Begriff der Fraktale geprägt und die früheren Ansätze mathematischer Fraktale zu einer einzigen Theorie zusammenfasste.[02] So weisen dann die gebauten Beispiele jener zuvor genannten Gruppe von Architekten Selbst-Ähnlichkeit auf, wenn auch auf wenige Maßstabsebenen beschränkt.

01 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 35

02 In seinem Buch Die Geometrie der Natur demonstrierte B. Mandelbrot, dass viele Eigenschaften der frühen mathematischen Fraktale auch in natürlichen Formen zu finden sind. *Peitgen H.-O. et al. (1998a)*, Seiten 81f

E.1. Grundlagen

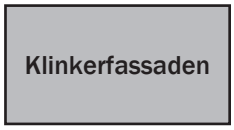
In den vorangegangenen Kapiteln wurde gezeigt, dass natürliche Strukturen wie Berge oder Küstenlinien im Gegensatz zu euklidischen Formen nicht glatt, sondern rau sind und dieselbe Irregularität unabhängig von der zur Betrachtung gewählten Vergrößerung besitzen. Obwohl es möglich ist, derartige Strukturen durch eine Komposition aus einzelnen, glatten Bestandteilen zu beschreiben, weicht eine solche Zusammensetzung dann in ihren Einzelheiten von der Vorlage ab. Der Grund liegt darin, dass durch die Abstraktion Teilbereiche geglättet werden und somit die Zerklüftung verändert wird, beziehungsweise in manchen Bereichen sogar verloren geht. Die fraktale Geometrie untersucht nun direkt die Rauheit des Objektes, ohne es dabei zu verändern. Demgemäß werden in diesem Kapitel im Anschluss Fassaden in verschiedenen Ausschnitten, das heißt von unterschiedlichen Entfernungen betrachtet, auch um sie auf Selbst-Ähnlichkeit zu überprüfen.

E.1.1. Die Betrachtung einer Fassade

Bei genauerer Betrachtung der Fassaden ist zu erkennen, dass diese augenscheinlich mehr als die äußeren, sie kennzeichnenden, ein-dimensionalen Linien, das heißt mehr als nur Silhouetten, aber dennoch keine ausschließlich glatten zwei-dimensionalen Flächen, sind. Die Ansichten von Gebäuden weisen dann auch Einschnitte wie Fenster und Türen, Ein- und Ausbuchtungen wie Erker, Gesimse und Vordächer, beziehungsweise Unebenheiten an den Oberflächen, hervorgerufen durch das verwendete Material und dessen Verarbeitung, auf. Darüber hinaus bestehen sie aus einer Vielzahl von Elementen unterschiedlicher Größe, die etwa vom Umriss über die Fenster, die Fensterrahmen, bis hin zum Fenstergriff oder einer möglichen Holzmaserung des Rahmens reichen. Die Fassade ist folglich keine zwei-dimensionale Fläche, sondern eher ein mehr oder weniger raues Objekt. Daraus lässt sich ableiten, dass die äußere Hülle von Gebäuden im allgemeinen eine Nähe zur fraktalen Geometrie aufweist, mit einer gebrochenen, das heißt fraktalen Dimension, die für eine Ansicht (als Abbild in einem zwei-dimensionalen Plan) letztlich einen Wert zwischen Eins und Zwei annimmt.

Zerklüftung und Oberflächen

Inwiefern eine Fassade eher der euklidischen oder doch mehr der fraktalen Geometrie zugeordnet werden kann, hängt von der ähnlichen Zerklüftung und dem Maßstabsbereich, für den das zutrifft, ab, das heißt, von deren Kontinuität. Für die Ermittlung des Bereiches wird die Distanz des Betrachters zum Gebäude kontinuierlich verändert, entsprechend dem Fokus auf unterschiedliche Elemente, um auf diese Weise die Fortführung beziehungsweise den Punkt oder den Grad der Veränderung der Rauheit zu erfassen. Von einem größeren Abstand zum Gebäude nimmt etwa ein Betrachter eine Klinkerfassade zunächst als glatte einheitliche Wandfläche wahr, selbst wenn weitere Details – die einzelnen Ziegel – auf Grund der Erfahrung in Hinsicht auf Farbe, Form und Konstruktion bereits vor dem tatsächlichen Erkennen der Fugen als wahrscheinlich gelten. Eine Nähe zur fraktalen Geometrie verlangt nun einerseits nach Elementen, die dem Charakter der Verfugung entsprechen, das heißt auf gewisse Weise den kleineren Elementen entspringen, und andererseits muss bei der Annäherung Kontinuität gewährleistet sein, das heißt, es dürfen keine Veränderungen des Grades der Zerklüftung entstehen. Die Fugen selbst zeigen sich, als Unterbrechung oder als Unebenheit innerhalb der gesamten Fläche, tatsächlich erst ab einem bestimmten, kleineren Abstand des Betrachters zum Objekt, womit dann schließlich auch die Klinker als voneinander getrennte Teile erkannt werden. Wird die Distanz noch weiter verringert, so wird ein Punkt erreicht, an dem die Oberfläche des Klinkers selbst in den Vordergrund tritt.



Bei geeigneter Wahl des Ausschnittes zeigt sich bei allen Fassaden ein gewisser Grad an Zerklüftung, weil letztendlich jedes Material eine ihm anhaftende Rauheit besitzt. Das trifft auf Putzfassaden mit ihren unterschiedlichen Bearbeitungen, vom Kratzputz über den Reibeputz bis zum geglätteten Putz, genauso zu, wie auf Holzfassaden mit ihrer erkennbaren Maserung, auf Sichtmauerwerke mit seinem Fugenbild, oder auf Fassaden aus Sichtbeton. Bleibt die Zerklüftung auf diesen Abschnitt beschränkt, besteht keine große Nähe zur fraktalen Geometrie, weil dadurch nur ein kleiner Bereich, beziehungsweise nur wenige Distanzen abgedeckt werden.

Messung der Zerklüftung

Im nachfolgenden Teil und vor allem unter *E.3. Fraktal-nahe Architektur* werden Gebäude, und hier im speziellen ihre Fassaden, hinsichtlich der Präsenz fraktaler Eigenschaften untersucht. Dabei zeigt sich, dass Gebäude generell keine Fraktale im eigentlichen Sinn der mathematischen Definition sind. Manche Beispiele weisen aber für einen bestimmten Maßstabsbereich sehr wohl fraktale Eigenschaften auf, wodurch diese als fraktal-ähnliche Strukturen bezeichnet werden können, beziehungsweise als erste Iterationen eines Fraktals. Die Ansätze für eine strikte Selbst-Ähnlichkeit bilden dabei die Ausnahme, zumeist handelt es sich vielmehr um eine statistische Selbst-Ähnlichkeit, beschränkt auf wenige Stufen und hervorgerufen durch die Variation eines, dem Entwurf zugrunde liegenden Leitmotivs. Das führt wiederum dazu, dass auch ein kleinerer Ausschnitt des Ganzen eine ähnliche Zerklüftung aufweist. Diese Charakteristik ist für die Einteilung von Fassaden nach ihrer Nähe zur euklidischen oder fraktalen Geometrie vor allem auch deshalb von großer Bedeutung, weil sie gemessen werden kann. Im Kapitel *C.1.3. Fraktale Dimension* wurde im Zusammenhang mit den Monsterkurven, als Beispiele für deterministische Fraktale, die Selbstähnlichkeitsdimension als Maß der Zerklüftung angeführt. Diese wird im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* um die Box-Counting-Dimension erweitert, deren Methode zur Berechnung sich für statistisch-selbstähnliche, aber auch nicht selbst-ähnliche Strukturen eignet. Eine ähnliche Zerklüftung, die als ein Indiz für (statistische) Selbst-Ähnlichkeit dient, äußert sich schließlich in einer ähnlichen fraktalen Dimension für das Ganze wie für seine Teile.

E.1.2. Nähe zur euklidischen/fraktalen Geometrie

Die Ermittlung des Maßstabsbereiches ähnlicher Zerklüftung erfolgt durch die Analyse während der Annäherung an ein Gebäude. Das soll an dieser Stelle an Hand der von Le Corbusier stammenden und 1931 fertig gestellten *Villa Savoye*[03] in Poissy, nahe Paris, demonstriert werden. Zum Einen, weil sie als Beispiel der *modernen Architektur* eher der euklidischen Geometrie nahe steht und somit diesen Bereich abdeckt, zum Anderen weil deren Fassaden im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* auch hinsichtlich ihrer fraktalen Dimension untersucht werden.[04]

Das Gebäude, das als bemerkenswertes Beispiel der modernen Architektur des 20. Jahrhunderts gilt, ist inmitten einer, von einem Laubwald umschlossenen, großzügigen Wiese gelegen. Dabei entsteht durch die Aufständerung auf dünne, vom Obergeschoss zurückgesetzte Säulen, zunächst der durchaus gewollte Eindruck eines über dem Grund schwebenden simplen Quaders.[05] Eine genauere Betrachtung führt allerdings zu dem Resultat, dass selbst bei einer solchen gewollten Reduktion verschiedene Architekturelemente einen gewissen Grad an Zerklüftung hervorrufen. So zeigt sich an der Eingangsfassade, das heißt an der Süd-Ost Fassade, bereits aus einiger Entfernung, dass der puristische Eindruck eines einfachen geometrischen Körpers – den das Obergeschoss noch vermitteln mag – durch die fünf sichtbaren zurückgesetzten dünnen Säulen im Erdgeschoss, die dahinter gelegene gläserne Eingangshalle und die geschwungenen Wände des sogenannten Solariums als Windschutz für den Dachgarten, für den Gesamteindruck nicht mehr zutrifft.[06] Von dieser Distanz zum Gebäude ist auch bereits das horizontal herausgeschnittene durchgängige Fensterband, wenn auch als einzige Unterbrechung des ansonsten glatt wirkenden Teils der Fassade des Obergeschosses, augenfällig.

Während nun bei einer Annäherung im Obergeschoss lediglich die dünnen Fensterrahmen als zusätzliches Element wahrgenommen werden und der Dachaufsatz, der zurückgesetzt ist, mit keinen neuen Details aufwartet, bietet das Untergeschoss einige Überraschungen. Dort lassen sich dann hinter den Säulen, förmlich aus dem Schatten des vorgezogenen Obergeschosses hervortretend, die eng gestellten dünnen Rahmen der gebogenen Glaswand der Eingangshalle erkennen. Durch die gläserne Front rückt auch die dahinter liegende Rampe und Einrichtung in den Fokus des Betrachters, was schließlich die Frage nach der Berücksichtigung dieser Elemente bei der Berechnung der fraktalen Dimension aufwirft. Im Moment genügt die Erkenntnis, dass die Süd-Ost Fassade der Villa Savoye aus großen und kleinen Elementen besteht, wobei diese von geringer Anzahl sind und auch nur wenige unterschiedliche Größenordnungen umfassen. Wenn lediglich die nächsten Details betrachtet werden sollen, kommt das somit einer sprunghaften Annäherung gleich, da zwischen dem Gesamtbild und der Oberflächenstruktur im Grunde nur der Maßstab des Rahmens und der Türklinke liegen.

Villa Savoye

Gebäude der von Hitchcock und Johnson als *International Style* bezeichneten Bewegung, zu dessen Hauptvertretern sie unter anderem Le Corbusier zählten,[07] weisen nur wenige Bereiche mit zusätzlichen Elementen auf, die ihrerseits wiederum in der Anzahl beschränkt sind.[08] Messungen der fraktalen Dimensionen zeigen in diesen Fällen dann auch nach anfänglich durchschnittlichen Werten eine rasche Verflachung, je kleiner die Distanz zum Gebäude gewählt wird. Begründet wird das mit der bewusst glatten Gestaltung dieser Fassaden, dem Hang zu einfachen geometrischen Formen[09], einer Reduktion sichtbarer Details, wie extrem schmaler Rahmenbreiten, dem Fehlen von Ornamenten, einer gewollten Einfachheit und Klarheit, beziehungsweise bei Le Corbusier‘s Purismus der Verwendung der Materialien im Sinne von Effizienz und Reinheit ihrer Anwendung.[10] Die glatte Fassade sollte möglichst nicht unterbrochen werden (vergleiche *Abb.32*).

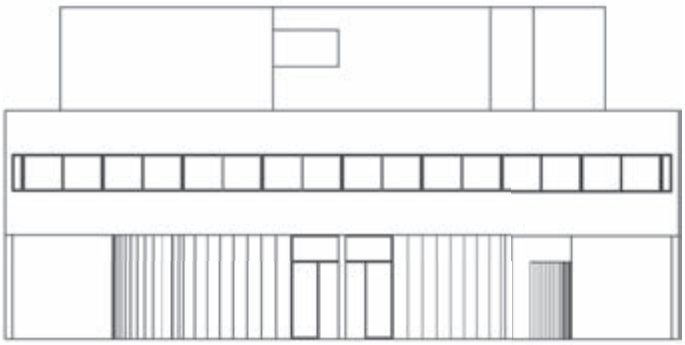


Abb.32.: LeC orbusier: *Villa Savoye* 1928-1931; *Süd-Ost Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)*

03 Auch Villa les Heures Claires genannt.

04 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 82

05 *Sbriglio, J. (1999)*, Seite 40

06 Die kubischen und runden Formen erinnern an die Gestaltung in einem kubistischen Gemälde.

07 *Khan, H.-U. (1998)*, Seiten 7 und 87

08 Siehe *E.2. Euklidisch-nahe Architektur.*

09 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 459
Einfache geometrische Formen verdeutlichen in diesem Zusammenhang die Nähe zur euklidischen Geometrie im Gegensatz zu einer komplexeren fraktalen Geometrie.

10 *Bovill C. (1996)*, Seite 143

	euklidisch	fraktal
Alter	Bekannt seit über 2000 Jahren.	Der Begriff der Fraktalen Geometrie existiert seit dem Jahr 1975.
Bezug zur Natur	Wolken sind keine Kugeln. Ist eher auf künstliche Objekte anwendbar. Kristalle sind Beispiele aus der Natur.	Natur wird durch die fraktale Geometrie besser beschrieben. Eine Architektur mit fraktalen Eigenschaften ist der Natur näher.
Objekte	Werden durch Formeln beschrieben.	Werden durch rekursive Algorithmen beschrieben.
Charakterisierung	Sind lokal glatt und differenzierbar. Regelmäßige geometrische Figuren.	Sind lokal zerklüftet und nicht differenzierbar. Besteht theoretisch aus unendlich kleinen Teilen.
Maßstabsebenen	Objekte ändern sich beim Vergrößern: Sie werden glatt (Kreis wird zur Geraden).	Die Komplexität bleibt auch bei Vergrößerung erhalten. Wesentliche Eigenschaften bleiben dabei erhalten: Skaleninvarianz.
Architektur	*International Style.* Purismus, Standardisierung, Abstraktion.	*Gotik.* *Jugendstil.*
Städtebau	Geplante Stadt (römisches Militärlager). Raster. Wenige Entscheidungsträger.	Gewachsene Stadt. Idealpläne von Stadtbefestigungen des *Barocks* (Ähnlichkeiten zur Koch Kurve). Verschiedene Entscheidungsträger auf unterschiedlichen Ebenen.

Tab.E.1.: Vergleich zwischen der euklidischen und der fraktalen Geometrie

Fraktale Eigenschaften

Einfache geometrische Körper bilden nicht selten die Grundlage von Gebäuden. So fügen sich etwa einzelne Ziegelsteine, Schalungssteine, Holzplatten, Bretter, Balken, Staffeln oder Bruchsteine zu einem Ganzen. Das Ergebnis lässt sich dann vielfach nicht wieder auf einen einfachen Körper reduzieren, sondern präsentiert sich oftmals als vielschichtiges Ganzes. Ähnlich den Fraktalen entstehen somit aus simplen Regeln, das entspricht in der Architektur der Entwurfsidee, und einfachen Körpern, mehr oder weniger komplexe Strukturen.

Sowohl in der Architektur als auch im Städtebau finden sich dann fraktale Eigenschaften in unterschiedlich ausgeprägter Form und innerhalb eines begrenzten Maßstabsbereiches. Zu den nahezu strikt selbst-ähnlichen Beispielen zählen unter anderem gotische Spitzbogenfenster, die Grundrisse mancher afrikanischer Dörfer[11], in gewisser Weise das in Apulien (im Südosten Italiens) gelegene Castel del Monte, und die Shikhara hinduistischer Tempel. Sie werden deshalb nur als nahezu strikt selbst-ähnlich bezeichnet, weil es selbst dort zu gewissen Abweichungen hinsichtlich der Form von einer Iteration zur nächsten kommt. Exakt gleiche Elemente liegen demnach nie vor und selbst annähernd gleiche bilden die Ausnahme. Die Selbst-Ähnlichkeit in der Architektur findet sich vielmehr in der Variation eines Motivs in verschiedenen Größen, beziehungsweise in der Weiterführung und Übersetzung des Charakters des gesamten Gebäudes in die einzelnen Architekturelemente. Selbst die Grundform des Ganzen kann aus der Umgebung entspringen und dabei die umgebende Felsenformation, eine Hügellandschaft, den Wald oder die Weite der Prärie widerspiegeln. Als Beispiele des Letztgenannten dienen in dieser Kategorie die Prärie-Häuser von Frank Lloyd Wright (siehe Robie House: *Abb.42*). Andererseits basieren manche Gebäude auf Formen, die selbst als Fraktal bezeichnet werden, wie die selbst-ähnliche Spirale des Bavinger House von Bruce Goff aus dem Jahr 1955 (siehe *Abb.46*).

> *... zwischen unkontrolliertem Chaos – vollständiger Unordnung – und euklidischer Ordnung liegt eine ‚Zone einer fraktalen Ordnung' ...*[12]

Das gilt nun gleichermaßen für die Architektur. Während einige Gebäude einer starken Ordnung folgen (etwa Mies van der Rohe's *Farnsworth House* in Plano oder das *Seagram Building* in New York) sind andere von nahezu irritierender Komplexität (etwa Frank O. Gehry's Walt *Disney Concert Hall* in Los Angeles oder das *Guggenheim-Museum* in Bilbao). Das Wesen jener Gebäude, die zwischen diesen beiden Extremen liegen, wie Frank Lloyd Wright's *Robie House*, ist nun jenes, dass sie zunächst komplex erscheinen mögen, aber dennoch einer Ordnung folgen. Diese Beispiele verursachen dann auch keine Verwirrung, sondern sind trotz ihrer Komplexität fassbar. Der Betrachter bleibt bei seiner Annäherung neugierig und wird in der Erwartungshaltung bestätigt oder überrascht, aber immer in einem für ihn erträglichen Ausmaß. In diesem Fall tauchen bei einer sich verringernden Distanz zum Gebäude immer kleinere Elemente aber mit einem ähnlichen Charakter wie das Ganze auf, während die größeren Elemente aus dem Blickfeld verschwinden. Um ein interessantes und kohärentes Gebäude zu erhalten, sollte dieses dann auch auf der Ebene des kleinsten möglichen Abstandes noch solche wahrnehmbare Details besitzen.[13]

Die oben angeführte *Tab.E.1* gibt einen kurzen – keinesfalls vollständigen – Überblick über die wesentlichen Unterschiede zwischen der fraktalen und der euklidischen

11 *Eglash, R. (1999)*

12 *Gausa M. (2003)*, Seite 238

13 *Salingaros N. (2006)*, Seite 55

Geometrie, einschließlich ihrer Analogien in der Architektur und dem Städtebau.

E.1.3. Architektur und Monsterkurven

Gebäude weisen zunächst eine unterschiedliche Anzahl an Elementen auf und reichen von stark reduzierten Beispielen wie dem Barcelona Pavillon von Mies van der Rohe auf der Weltausstellung 1929 mit seinen horizontalen und vertikalen Flächen, die den Raum regelrecht hindurch fließen lassen, bis zur mit Ornamenten überladenen Villa der Gründerzeit. Diese Elemente können dann entweder mehrere verschiedene Maßstabsebenen abdecken, oder sich nur auf einige wenige beschränken. Die einzelnen Komponenten können wiederum zum Einen miteinander in Verbindung stehen, das heißt, sich mit Variation auf den verschiedenen Ebenen wiederholen – in diesem Fall liegt nun eine (statistische) Selbst-Ähnlichkeit vor –, oder zum Anderen keinen Bezug zueinander aufweisen. Wenn wiederum ein Objekt aus verkleinerten exakten Kopien von sich selbst besteht, d.h. wenn die Teile ihrerseits das Ganze präzise widerspiegeln, wird von einer strikten Selbst-Ähnlichkeit gesprochen. Für eine strikte oder statistische Selbstähnlichkeit sind gleichermaßen Elementen unterschiedlicher Größe wesentlich, wodurch sie sich von einer einfachen Wiederholung eines bestimmten Architekturelementes auf einer einzigen Maßstabsebene unterscheiden. Außerdem bedarf es einer Zunahme der Anzahl der Teile je kleiner der Maßstab ist.

Repetition

Zwischen den im Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen* vorgestellten Monsterkurven und der als fraktalähnlich bezeichneten Architektur ergeben sich nun zwei wesentliche Unterschiede:

(1) Während die Ausschnitte von Monsterkurven wie der Koch Kurve exakt gleichen Kopien des gesamten Objektes entsprechen und somit eine strikte Selbst-Ähnlichkeit, oder Selbst-Gleichheit vorliegt, kommen in der Architektur, wie auch in der Natur, mehr oder weniger abgewandelte Formen vor, die aber nichts desto weniger den Charakter des Ganzen widerspiegeln. Es handelt sich daher in der Architektur ähnlich der Chaotischen Fraktale, wie der im Kapitel *C.3.2. Fraktale Geometrie* vorgestellten Mandelbrot Menge, deren Ausschnitte gleichfalls im Bezug auf das Ganze ähnliche aber nicht identische Elemente aufweisen, um keine strikte Selbst-Ähnlichkeit.

Fraktale und Architektur

(2) Im Gegensatz zur Koch Kurve, bei der jeder noch so kleine Ausschnitt einer verkleinerten Kopie des Ganzen entspricht, lassen sich fraktale Eigenschaften in der Architektur oder bei den Beispielen aus der Natur nur in einem bestimmten Maßstabsbereich erkennen. Auch wenn ein Fraktal im mathematischen Sinn erst nach unendlichen Iterationen vorliegt, reichen bei mathematischen Fraktalen zur Beschreibung der wesentlichen Charakteristiken tatsächlich nur wenige Iterationen aus. Aus diesem Grund und nachdem unendliche Iterationen in Ermangelung der Zeit praktisch nicht möglich sind, kann im weiteren Sinn die Darstellung einer Koch Kurve mit wenigen Iterationen bereits als Fraktal bezeichnet werden. Deshalb erscheint es plausibel, Gebäude ähnlich der natürlichen Phänomene als Fraktal zu betrachten, wenn nur der Maßstab richtig gewählt wird. Dieser entspricht dann der Distanz des Betrachters zum Bauwerk und ist von dessen Wahrnehmung abhängig.

E.2. Euklidisch-nahe Architektur

Die Wurzeln jener der euklidischen Geometrie nahe stehenden und sich über Amerika, Europa, Australien bis nach Japan ausbreitenden Architektursprache des *International Styles* liegen am Beginn des 20. Jahrhunderts. An dieser Stelle seien exemplarisch einige der Wegbereiter und deren Grundhaltungen genannt, ohne auch nur ansatzweise den Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Die Auswahl bezieht sich vielmehr auf einzelne diese Nähe zur euklidischen Geometrie verdeutlichende Beispiele, deren fraktale Dimensionen später unter *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* berechnet werden und somit als Vergleichsobjekte für fraktalähnliche Gebäude dienen.

E.2.1. Adolf Loos und die beginnende Moderne

Bereits im Jahr 1910 konnte Adolf Loos (1870-1933) seine Vorstellungen, eines auf einfache geometrische Formen reduzierten Gebäudes am *Haus Steiner* in Wien-Hietzing, verwirklichen. Zusammen mit dem von ihm 1910 begonnenen und nach einem Baustopp 1912 fertig gestellten, als Looshaus bekannten Nobelgeschäft des Schneiderunternehmens Goldman & Salatsch am Michaelerplatz in Wien, löste es starke Kontroversen aus. Loos' puristische Haltung, beeinflusst durch seinen Aufenthalt in Amerika zwischen 1893 und 1896, wandte sich zunächst gegen den damals bereits im Ausklingen befindlichen Historismus, mit seiner Verwendung von Schmuckformen aus verschiedenen Stilen der vergangenen Jahrhunderte, und schließlich auch gegen die *Secession*[14], der spezifisch wienerischen Variante des

Gegenposition zur Secession

14 Die *Vereinigung bildender Künstler Secession* war 1897 als Abkehr vom traditionsverhafteten Wiener Künstlerhaus gegründet worden.

Jugendstils.[15] Obwohl die Wiener Prägung des Jugendstils eines Otto Wagners oder Josef Hoffmanns, im Gegensatz zu der organisch geschwungenen Sprache mit floralen Motiven und Formen eines Charles Plumets, Victor Hortas oder Antoni Gaudís, bereits kubische Formen und eine flächige Gestaltung bevorzugt, findet sich an den Gebäuden immer noch eine zum Teil florale Dekoration. In diesem Zusammenhang sei das von O. Wagner errichtete sogenannte Majolika-Haus an der Linken Wienzeile 40 in Wien (1898/1899) erwähnt, dessen im Grunde flächige und geradlinig gehaltene Fassade mit glasierten Majolikafliesen[16] überzogen ist, die Motive von farbintensiven rankenden Blumen, Knospen und Blättern aufweisen.[17][18] Daneben finden sich bei den aus Eisen gefertigten Teilen der Balkone ebenfalls einige geschwungene Details.[19] Nach O. Wagners Ansicht sollte sich *moderne Architektur* – die sich deutlich gegen den Historismus wendet – aus einer zweckmäßigen Komposition von Material und Konstruktion ergeben, den neuen Konstruktionen und Aufgaben entsprechen und klar, einfach und symmetrisch sein.[20] Auch das Palais Stoclet (1905-1911) in Brüssel von Wagners Schüler Josef Hoffmann, als das wohl kompletteste Werk der Wiener *Secession*, unterstreicht die klare Formensprache, zeigt aber ebenfalls eine, wenn auch reduzierte und diesmal lineare Dekoration, als bronzene Rahmung der Fenster und der aus Marmorplatten bestehenden Wandflächen, beziehungsweise ein noch verspieltes Zusammenfügen der Baukörper am Treppenturm.

Der publizistisch tätige A. Loos sah sich nun vor allem in Ermangelung eines zeitgemäßen Ornaments, ohne dieses gänzlich zu verdammen[21], einer Schmucklosigkeit verhaftet.[22] Seinen Vorstellungen zufolge sollte mehr Wert auf edle Materialien gelegt werden, wie am, mit grünem Cipollino-Marmor verkleideten, ebenerdigen Geschäftsbereich des Looshauses oder im Inneren des Hauses Steiner mit dunkel gebeiztem Eichenholz als Wandverkleidung, ersichtlich. Das Äußere des aus Ziegelstein errichteten Hauses Steiner hingegen wurde mit einer glatten Putzfassade versehen,[23] die nur durch die rechtwinkligen Fenster unterbrochen wird, und so eine Charakteristik des International Styles bereits vorwegnimmt (siehe ***Abb.33***).[24] An den jeweiligen Ansichten des Gebäudes lenkt keine als schmückendes Beiwerk verstandene Dekoration, wie sie vom Historismus bekannt war, von der klaren Form ab, die vor allem an der Gartenansicht durch das Flachdach unterstrichen wird. Eine Gliederung erfolgt gartenseitig durch die seitlich vorspringenden Risalite, weiters durch die, abgesehen vom Gartenzugang, symmetrisch angeordneten unterschiedlichen Fensterformate, und durch die vorgelagerte Terrasse mit den beidseitig angeordneten zum Garten führenden Treppen.[25] Auf Grund der geltenden Bauvorschriften war straßenseitig lediglich ein Erdgeschoss oder ein allfälliges Hochparterre vorgesehen, wodurch bereits an dieser Stelle ein als Halbtonne ausgeführtes Blechdach mit einer Mansarde beginnt, das zum Garten hin schließlich in das Flachdach übergeht und zwei Geschosse beherbergt.

Abb.33.: Adolf Loos: *Haus Steiner* 1910; Garten-*Ansicht entnommen aus: TU München Hrsg. (1999)*

Das Gebäude zeigt eindrucksvoll die Auffassung von Adolf Loos, nach der Gebrauchsgegenstände wie auch die Architektur von der Kunst getrennt sein sollten und somit keines Schmuckes bedürfen.[26] Die Verzierung alltäglicher Objekte mündete für ihn in einer Abhängigkeit der Lebensdauer vom Geschmack des Zeitgeistes und folglich von der Dauer einer Mode.[27] In weiterer Konsequenz ergab sich die Ästhetik eines Gebrauchsgegenstandes lediglich aus den verwendeten Materialien (*materialgerecht*) selbst und aus der für den Gebrauch bestimmten Funktion (*zweckmäßig*)

Ornamentlosigkeit

15 *Czeike F. (2008)*, Seiten 49f

16 Majolika ist ein Steingut oder eine Keramik, die mit einer deckenden weißen Zinnglasur versehen wurde.

17 *Nemetschke N. (2000)*, Seite 425

18 A. Loos nannte das „*Majolikahaus*" (Linke Wienzeile 40) sarkastisch „*tätowierte Architektur*". *Gössel P. et al. (1994)*, Seite 62

19 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 399

20 *Kruft H.-W. (1995)*, Seiten 367f

21 A. Loos setzte sich vor allem gegen eine willkürliche Verwendung des Ornamentes ohne jeglichen Bezug ein. *Loos, A. (1924 in 1997)*, Seite 177

22 *Loos, A. (1908a in 1997)*, Seite 80

23 *Schezen R. (1996)*, Seite 78

24 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 15

25 Die Beschreibung entspricht der ursprünglichen Ausführung. Das Gebäude wurde zwischenzeitlich stark verändert. *Nemetschke N. (2000)*, Seiten 367f

26 Aus der Architektur gehören laut A. Loos nur das Grabmal und das Denkmal der Kunst an. *Loos, A. (1909 in 1997)*, Seite 101

27 *Loos, A. (1924 in 1997)*, Seiten 175, 177

unter der jeweiligen Prämisse einer Schonung der Ressourcen. A. Loos' Vorstellung der Trennung des Handwerks von der Kunst, die für ihn von jedem Zweck befreit war, machte ihn schließlich zum Kritiker des deutschen Werkbundes, der individuelles Ornament zuließ[28][29], und des *Bauhauses*, das Kunst und Handwerk miteinander zu verbinden trachtete. Dennoch lassen sich durch die klare Linienführung, das Orthogonale und in der Forderung nach Ornamentlosigkeit Ähnlichkeiten zwischen der Architekturauffassung des Bauhaus und den Gebäuden von A. Loos erkennen. Für eine vollständige Abschaffung des Ornaments war allerdings auch A. Loos nicht:

> *... Ich habe damit niemals gemeint, ..., daß das ornament systematisch und konsequent abzuschaffen sei. Nur da, wo es einmal zeitnotwendig verschwunden ist, kann man es nicht wieder anbringen. ...*[30]

Seine Ablehnung des Ornaments begründete er mitunter damit, dass er sich in einer Zeit wähnte, die kein eigenes Ornament hervorbringen konnte und daher darauf verzichten sollte.[31]

E.2.2. Deutscher Werkbund

Der deutsche Werkbund wurde in München im Jahr 1907 unter dem Einfluss der Industrialisierung und mit dem in der Satzung definierten Ziel einer „*Veredelung der gewerblichen Arbeit*" durch die interdisziplinäre Zusammenarbeit von Kunst, Industrie und Handwerk[32] gegründet. Zu den Gründungsmitgliedern zählten jeweils zwölf Vertreter aus Unternehmen und der Kunst, darunter die Architekten Peter Behrens, Joseph Maria Olbrich, Josef Hoffmann und Hermann Muthesius. Das Zusammenführen von Künstlern mit den Herstellern sollte über ein *industrial design*, also der Gestaltung von Industrieprodukten, zu einer Verbesserung der internationalen Wettbewerbsfähigkeit des deutschen Handwerks und der Industrie führen. Hier ist auch das erste Corporate Design angesiedelt, das P. Behrens für die AEG schuf und von der einheitlichen Gestaltung des Briefpapiers, über Broschüren, bis hin zu den Produkten, wie einer Bogenlampe oder elektrischen Teekesseln, reichte.

Peter Behrens

Daneben plante er Ausstellungspavillons und mehrere Industriebauten, wie die *Turbinenhalle der AEG* in Berlin-Moabit (1908/1909). Das Gebäude besteht aus einem Stahlskelett mit einer an der Längsseite nach innen geneigten offen wirkenden Eisen-Glas-Konstruktion. Hier lässt sich bereits deutlich der Verzicht auf Ornamente erkennen, wenn auch aus Gründen der Gestaltung an den ebenfalls nach innen geneigten Ecken Fugen in den Beton eingeschnitten sind, die an die Schichtung eines Mauerwerks erinnern (siehe ***Abb.34***).[33]

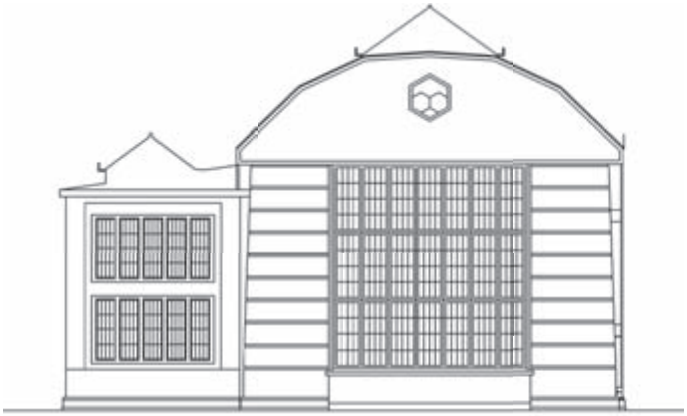


Abb.34.: P. Behrens: *AEG Turbinenhalle* Berlin-Moabit; 1908/09; ***Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)***

Während im Historismus die seriell produzierten Produkte der Industrie noch Imitationen oder Adaptionen handwerklicher Formen vergangener Stile waren, die mitunter sehr reichhaltiges Ornament aufwiesen, sollten sich nun die Formen für Gebrauchsgegenstände, Möbel aber auch Gebäude aus dem Material, der Funktion und der Konstruktion heraus entwickeln, wie es H. Muthesius bereits Anfang 1907, also vor der Gründung des deutschen Werkbundes, formulierte,[34] und dadurch ihre besondere Qualität und Ästhetik entfalten. Beeinflusst durch die industrielle Fertigung entstanden, auf der Suche nach einem zeitgemäßen Ausdruck, handwerkliche Produkte ohne Ornamente, die unter anderem 1924 in der Ausstellung *Die Form ohne Ornament* einer breiten Öffentlichkeit präsentiert wurden. Die klare Gestaltung der Produkte, wandte sich gegen den Historismus aber auch gegen den *Jugendstil* mit seinen teilweise üppigen Dekorationen, und entsprach auch eher der Industrieproduktion, da sie sich durch die Maschinen einfacher herstellen ließen. Eine klare Formgebung lässt sich auch an der von W. Gropius und Adolf Meyer entworfenen Schuhleistenfabrik in Alfeld an der Leine (1910-1914) erkennen, die bereits *moderne* Elemente aufweist, wie einen quaderförmigen Baukörper, eine stützenlose Ecke, die ein konstruktives Novum darstellt,

28 *Loos, A. (1924 in 1997)*, Seite 176, *Loos, A. (1908b in 1997)*, Seiten 71ff und *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 421

29 Der deutsche Werkbund (weniger ein „*Stil*" als vielmehr eine heterogene Tendenz in einem gemeinsamen Sammelbecken, *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 428) vertrat vor allem die Ansicht das überflüssige Ornament zu eliminieren, nicht aber gänzlich auf das Ornament zu verzichten.

30 *Loos, A. (1924 in 1997)*, Seite 177

31 *Loos, A. (1924 in 1997)*, Seite 79

32 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 426

33 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seiten 450f und *Windsor A. (1985)*, Seite 93

34 *Kruft H.-W. (1995)*, Seiten 424f

und eine leicht vorspringende, wenn auch noch durch dünne Pfeiler unterbrochene, große Fensterfront. Die Felder dieser Fensterfront sind gleichartig behandelt und unterscheiden sich lediglich hinsichtlich der Füllung aus Glas oder grauen Blechtafeln im Brüstungsbereich, wodurch fast von einer Vorhangfassade gesprochen werden kann.[35] Darüber hinaus wurde neben dem gelben Backstein, der bei den Pfeilern und als oberer Abschluss des Gebäudes unterhalb des Daches beziehungsweise unterer Abschluss als Sockel zur Anwendung kommt, vor allem die Baustoffe Glas und Eisen verwendet.

In der 1927 vom deutschen Werkbund veranstalteten Bauausstellung in der Stuttgarter *Siedlung am Weißenhof*, zeigt sich schließlich anhand der dort verwirklichten Gebäude, obwohl die 16 mitwirkenden Architekten aus fünf verschiedenen Ländern kamen, durchaus eine gemeinsame Formensprache, die heute als der euklidischen Geometrie nahe stehend bezeichnet werden kann. Zu den teilnehmenden Architekten zählten etwa W. Gropius, Mies van der Rohe, Le Corbusier und P. Behrens, ein Architekt der frühen Generation der Moderne.[36] Unter der Federführung von Mies van der Rohe sollten dem Anspruch durch Rationalisierung und Standardisierung entsprechend Prototypen für günstigere Wohngebäude entwickelt werden,[37] auch mit dem Zweck durch besondere Beachtung von Licht und Luft eine angenehme gesunde Wohnatmosphäre zu schaffen. Gemeinsames Kennzeichen sind:

Weißenhof Siedlung

- quaderförmige klare Baukörper
- das Flachdach
- glatte, weiß verputzte Fassaden und
- der Verzicht auf die Verwendung von Ornamenten.

Daneben finden sich mitunter breite Fensterbänder, bei Le Corbusier ein offenes Erdgeschoss durch Aufständerung, die Ausführung als Skelettbau und die Verwendung der neuen Baumethoden wie Leichtbeton- und Trockenbauweise. Die Siedlung demonstrierte als gebautes Beispiel wie *neues Wohnen* von der Einrichtung bis zum Gebäude selbst aussehen konnte und welche Vielfalt dabei entsteht. Das besondere war auch die Intention, die Wohngebäude nach der Ausstellung nicht abzureißen, sondern weiterhin entsprechend ihrer Bestimmung zu nutzen, wobei einige im Zweiten Weltkrieg durch Bombentreffer zerstört wurden.

E.2.3. Bauhaus

Von W. Gropius wurde in Weimar im Jahr 1919 die als *staatliches Bauhaus* bekannte Kunstschule gegründet, deren erklärtes Ziel es war, die Kunst und das Handwerk miteinander zu verbinden (siehe ***Abb.35***).[38] Daraus entwickelten sich neue pädagogische Methoden, nach der Künstler und Handwerker zusammenwirkten und daher gleichermaßen im Lehrkörper vertreten waren, mit der Werkstatt als einem wichtigen Bestandteil in der Ausbildung. Die freien und die angewandten Künste sollten näher zusammengeführt werden und die Bildhauerei, die Malerei, das Handwerk und das Kunstgewerbe in einem Gesamtkunstwerk einer neuen Baukunst aufgehen, die stilistisch manchmal dem *Funktionalismus* zugeordnet[39] oder als *Neue Sachlichkeit*[40] bezeichnet wurde.

Abb.35.: W. Gropius: Bauhaus Dessau 1925-1926; *Nord Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)*

In der Anfangszeit stand vor allem die Förderung des Kunsthandwerks im Mittelpunkt, das Zusammenwirken von Kunst und Industrie war hingegen noch nicht vollzogen. Längstens mit der Formulierung des Leitsatzes *Kunst und Technik eine neue Einheit* aus dem Jahr 1923 wurde aber der wichtige Stellenwert der Industrie bei der Umsetzung von Gebrauchsgegenständen,[41] vor allem aufgrund der preiswerteren Herstellung und somit der Leistbarkeit für jedermann, erkannt und in weiterer Folge in den eigenen Werkstätten auch Vorlagen für die serielle Massenfertigung erstellt. Im Vordergrund stand im Gegensatz zur anfänglichen individuellen Kreativität[42] nun eine Standardisierung des Designs, die dauerhafte, günstige und gleichzeitig „*schöne*" Gegenstände ermöglicht.[43] Daraus entwickelte sich unter Berücksichtigung des Herstellungsprozesses eine der einfachen geometrischen Klarheit verbundene Formensprache, deren Umsetzung von Lampen, Möbeln bis zum Gebäude und Städtebau reichte. Obwohl der Stellenwert der

Charakteristika des Bauhaus

35 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seiten 482, 492

36 Zu den Architekten dieser frühen Generation können auch F.L. Wright und A. Loos gezählt werden. *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 468
W. Gropius, Mies van der Rohe und Le Corbusier waren zumindest für kurze Zeit bei P. Behrens beschäftigt. *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seiten 459, 481

37 *Windsor A. (1985)*, Seite 164

38 Das *Bauhaus* war von 1919-1925 in Weimar, von 1925-1932 in Dessau und von 1932-1933 in Berlin beheimatet.

39 *Thurm-Nemeth V. et al. (1998)*, Seite 49

40 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 16
Thurm-Nemeth V. et al. (1998), Seiten 46ff

41 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 485

42 *Thurm-Nemeth V. et al. (1998)*, Seite 25

43 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 444

Architektur bereits unter der Leitung von W. Gropius in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts hervorgehoben wurde, schließlich sah er als Endziel aller bildnerischen Tätigkeit den Bau[44], kam es zu der Gründung einer Abteilung für Architektur erst im Jahr 1927. Dennoch gehen gerade von W. Gropius und Mies van der Rohe[45] entscheidende Impulse hinsichtlich der Formulierung der Grundsätze einer *modernen Architektur* aus.[46] Zu ihren wesentlichen Charakteristiken, die sie letztlich vom Historismus abgrenzen, können folgende Punkte gezählt werden:

- Zumeist quaderförmige gestaffelte Baukörper,
- das Orthogonale,
- eine klare Linienführung,
- in Serie angeordnete gleiche Elemente,
- Ornamentlosigkeit,
- die Bevorzugung von Asymmetrie,
- Fenster, die um eine stützenlose Ecke führen,
- der Skelettbau, der seinerseits wiederum freie Grundrisse ermöglicht und
- die Vorhangfassade (Curtain Wall),
- unter der Verwendung der Materialien Glas, Eisen, Beton und Eisenbeton.

Darüber hinaus sollte die Architektur ihren Inhalt und ihren Zweck zum Ausdruck bringen. W. Gropius erreichte das bei dem 1925 errichteten Bauhaus-Gebäude in Dessau, der ersten Umsetzung dieser *neuen* Architektur im großen Maßstab, durch die Trennung der Funktionen in verschiedene Trakte, wodurch diese ihrer Aufgabe entsprechend gestaltet werden konnten. So erhielt unter anderem der helle Werkstatt-Trakt eine gläserne Vorhangfassade, während der Wohntrakt der Studenten mit kleinen Balkonen versehen wurde. Im Zentrum der Architektur des Bauhaus standen demnach Einfachheit und Zweckmäßigkeit, aber auch Standardisierung[47] und Präfabrikation. Die Schule wurde schließlich 1933, nur ein Jahr nach der Übersiedelung nach Berlin, unter politischer Einflussnahme geschlossen, woraufhin viele Lehrer und Schüler emigrierten. Dadurch kam es zu einer stärkeren Verbreitung der Ideen und einer Internationalisierung.

E.2.4. Le Corbusier und eine neue Architektur

Ein starker Einfluss auf die *moderne Architektur* geht von Le Corbusier[48] (1887-1965) aus, der unter anderem bei Auguste Perret (1874-1934), einem der ersten Architekten, der Eisenbeton verwendete, und bei P. Behrens beschäftigt war – beides Wegbereiter einer solchen *neuen* Architektur. Am Anfang seiner Karriere stand allerdings noch mehr die Malerei im Vordergrund, bei der die vom Kubismus beeinflussten puristischen Gemälde einfach gestalteter Objekte des täglichen Lebens bereits die Reduktion auf euklidische Formen erkennen lassen. Sein fünf Punkte umfassendes Programm zu einer neuen Architektur veröffentlichte er schließlich im Jahr 1927 im Zuge der Präsentation der beiden von ihm geplanten Gebäude für die Weißenhofsiedlung in Stuttgart. Die Punkte, die unter anderem auch bei der Villa Savoye (1928-1931) umgesetzt wurden, lauten:[49]

(1) *die Stütze*; Pilotis[50], das sind freistehende Stützen, heben die Obergeschosse an und halten so den Erdgeschoss-Bereich frei,

(2) *die Dachgärten*, mitunter als begehbare Flachdächer, ergeben zusätzliche Grünflächen am Dach,

(3) *die freie Grundriss-Gestaltung*,

(4) *die Langfenster* oder Fensterbänder ermöglichen eine gleichmäßige und gute Belichtung,

(5) *die freie Fassaden-Gestaltung*, die durch eine Skelettbauweise ermöglicht wird, bei der die Wände von statischen Aufgaben befreit sind.

Charakteristika von Le Corbusier

Manche Charakteristika von Le Corbusiers Architektur scheinen von A. Loos beeinflusst, wobei er die Fenster regelmäßiger und mit der Außenwand bündig anordnet, wodurch die Auffassung des Gebäudes als Volumen stärker hervortritt.[51] Entgegen anderen Vertretern des sogenannten International Style durchbricht er allerdings die äußere Hülle durchaus noch mit architektonischen Elementen, etwa Balkonen und Vordächern. Jedenfalls zeigt sich auch hier, wie bereits bei A. Loos, die Ablehnung der traditionsbehafteten École des Beaux Arts und der Verzicht auf Ornamente.

E.2.5. International Style

Charakteristika des International Styles

Während W. Gropius 1925 zur Zeit des Bauhaus noch den Begriff *Internationale Architektur* für eine Publikation zeitgenössischer Architektur benutzte, lässt sich jener des International Style auf das im Jahr 1932 im Zuge der gleichnamigen Ausstellung erschienene Buch *The International Style:*

44 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 21

45 Mies van der Rohe leitete die Kunstschule von 1930-1933.

46 *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 13

47 *Thurm-Nemeth V. et al. (1998)*, Seite 33

48 Eigentlich Charles-Édouard Jeanneret-Gris

49 *Ungers L. (2002)*, Seite 233

50 Französisch: Pfahlwerk

51 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 486
Bei zurückgesetzten Fenstern kommt durch die sichtbare Tiefe der Laibung eher der Eindruck von Masse zur Geltung.

Architecture Since 1922[52] von den Kunsthistorikern H.-R. Hitchcock und P. Johnson zurückführen. In dem Katalog zur Ausstellung wurden, neben der Beschreibung von Gebäuden 50 verschiedener Architekten aus 16 unterschiedlichen Ländern der Jahre 1922 bis 1932, die durch Schlichtheit, Klarheit der Volumen und Verzicht auf Dekoration gekennzeichnet sind, auch die Prinzipien der sich gegen den Jugendstil und den Historismus richtenden neuen Architektur zusammengefasst, die allerdings auf einer rein formalen Kennzeichnung basiert.[53] Obwohl es durchaus unterschiedliche Ausprägungen gibt und H.-R. Hitchcock selbst bereits im Jahr 1951 seine Kriterien hinterfragt, indem er die Verdeutlichung der Baustruktur als wesentliches Prinzip hinzufügt und seine Einstellung zum Ornament, die er nunmehr als Geschmacksfrage sieht, änderte,[54] umreißen die Prinzipien im wesentlichen die Merkmale jener modernen Architektur, die Benoît Mandelbrot als skalenbeschränkt und nahe zur euklidischen Geometrie bezeichnet. Die drei Prinzipien lauten:[55]

- *Architektur als umschlossener Raum*: Architektur wird als reines Volumen aufgefasst, wodurch zumeist klare quaderförmige Bauten mit Flachdach entstehen, die an Stelle eines massiven Sichtmauerwerks eine glatte, weiß verputzte Fassade aufweisen, bei der selbst die Fenster nahtlos, das heißt außen bündig, eingearbeitet sind. Als Technik kommen die dünnere Vorhangfassade, die Curtain Wall, und der Skelettbau zur Anwendung, wodurch eine freie Gestaltung der Grundrisse ermöglicht und die Massivität aufgelöst wird. Unterstützt wird diese Gestaltung durch neueste Materialien, wie Stahl und Stahlbeton in Verbindung mit Glasfassaden, wobei dünne, die Einheitlichkeit der Fläche kaum störende Sprossen, Voraussetzung sind.
- *Bemühung um modulare Regelmäßigkeit*: Es werden standardisierte Teile in einer durch den Skelettbau unterstützten Regelmäßigkeit forciert, wodurch allerdings, wie es auch bereits H.-R. Hitchcock und P. Johnson erkannten, die Gefahr einer Monotonie durch Wiederholung besteht. Nachdem es auf den Grad und den Charakter derselben ankommt beziehungsweise auf die rhythmische Komposition regelmäßiger Formen, konnte aus deren Sicht dieser Eindruck allerdings vermieden werden. Die davon abgeleitete Schwierigkeit im Entwurf liegt dann in dem Versuch, die Räume unterschiedlicher Bestimmung mit der Regelmäßigkeit der Konstruktion in Einklang zu bringen. Daneben werden Fensterbänder und eine Horizontalität, die beim Wolkenkratzer allerdings nahezu ungelöst bleibt, bevorzugt. Von einer Rechtwinkligkeit wiederum wird zwar mitunter abgewichen, die Natur allerdings als direkter Kontrast zur Regelmäßigkeit der Architektur gesehen.
- *Vermeidung aufgesetzter Dekoration*: Als Resultat auf die Nachahmung vorangegangener Stile im Historismus, wird Dekoration nur sparsam eingesetzt und dem Ganzen untergeordnet. Viel mehr Wert wird dagegen auf die Eleganz des Materials und die Proportion gelegt. Vordächer, Balkonbrüstungen und Fensterrahmen sind oft die einzigen *Dekorationen*.

Auch wenn die Bezeichnung *International* etwas unpräzise ist,[56] so grenzt sie sich aufgrund der vorhergehenden Beschreibung ähnlicher Kriterien und Merkmale, mit euklidisch bestimmten Grundformen, einer glatten ornamentlosen Gestaltung und der Konstruktionen als Skelett aus Stahlbeton oder Stahl, von der Masse der damals errichteten eher traditionell orientierten Architektur ab (vergleiche ***Abb.36***).[57]

Abb.36.: Mies van der Rohe: *Villa Tugendhat*, Brünn 1928-1930; ***Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)***

E.2.6. Conclusio

Sowohl die glatt verputzten Fassaden als auch die gläsernen Vorhangfassaden, aber auch die Flachdächer unterstreichen den Wunsch nach quaderförmigen schmucklosen Baukörpern. Rauer Putz wird aufgrund der Assoziation mit älteren Gebäuden und vor allem aufgrund einer Abschwächung der gewünschten scharfen Kanten für die Wahrnehmung des Baukörpers als klar umrissenes Volumen abgelehnt.[58] Außer den notwendigen architektonischen Elementen, wie Fenster und Türen wird alles weitere möglichst ausgeblendet und dem Grundkörper untergeordnet, wodurch wenige Maßsabsebenen abgedeckt werden. Obwohl die Formulierung der Prinzipien die Nähe zur euklidischen Geometrie zu unterstreichen und zu begründen scheint, so zeigen Beispiele wie die *Villa Tugendhat* in der ***Abb.36***, dass auch vermeintlich glatte Fassaden unterschiedlich große Ausschnitte aufweisen

52 *Hitchcock H.-R. (1932)*
Kruft H.-W. (1995), Seiten 419f

53 *Khan, H.-U. (1998)*, Seiten 67ff

54 *Hitchcock H.-R. (1951)* und *Khan, H.-U. (1998)*, Seite 80

55 *Khan, H.-U. (1998)*, Seiten 67f, *Evers B. (2006)*, Seite 478 und *Neumeyer F. (2002)*, Seiten 461ff

56 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 413

57 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seite 414

58 *Neumeyer F. (2002)*, Seite 466

und die Außenwand nicht in einer Ebene verläuft, sondern nach vor und zurück springt. Nachdem es sich folglich bei Gebäuden generell um mehr als eine simple geschlossene euklidische Box handelt, scheint eine eindeutige Zuordnung des International Style zur euklidischen Geometrie nicht mehr gegeben zu sein.

E.3. Fraktal-nahe Architektur

Die im Kapitel C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition beschriebenen Eigenschaften von Fraktalen finden sich in der Architektur, wenn auch nur auf wenige Iterationen beschränkt, nicht erst seit der Formulierung der Theorie durch Benoît Mandelbrot in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. So wendeten Architekten bereits zuvor mitunter Selbstähnlichkeit intuitiv oder ganz bewusst als Fortführung einer in Form gebrachten Idee an, die sich in weiterer Folge sowohl im Ganzen, der Übersicht, als auch in jedem einzelnen architektonischen Element manifestiert. Bei der Idee kann es sich nun um eine bestimmte Proportion, der sich sämtliche Komponenten unterordnen, um ein Motiv, das allerdings in weiterer Folge dem jeweils zu erfüllenden Zweck des Bauteils angepasst wird, oder um eine Inspiration aus der Umgebung handeln. Die Ebenen der Selbstähnlichkeit reichen dann von der Erfassung des gesamten Gebäudes, oder der Umgebung, falls diese als Quelle der Selbstähnlichkeit dient, bis zum kleinsten Element, das noch von der Idee abgeleitet wird. Diese Idee der Kontinuität vom Großen zum Kleinen findet sich bisweilen auch in so mancher Passage theoretischer Arbeiten von Architekten, häufig im Zusammenhang mit dem Ziel der Erreichung von Harmonie.

E.3.1. Einleitung

Wiederholung und Selbstähnlichkeit

Selbstähnlichkeit entspricht einer Wiederholung mit Verkleinerung, wodurch ein Ausschnitt bei geeigneter Wahl des Vergrößerungsfaktors mit dem Ganzen in Deckung gebracht werden kann, oder diesem zumindest in dessen Charakter ähnelt. Das trifft auch auf die versetzt hintereinander angeordneten Spitzbögen zu, wie sie an den Portalen gotischer Kathedralen zu finden sind, zumindest jeweils für eine Hälfte des symmetrischen Aufbaus. Wie aus der stilisierten Abbildung *Abb.37* hervorgeht, entspricht in diesem Fall das Skalierungszentrum den Mittelpunkten der Kreissegmente.

gotisches Portal

Damit nun die Vergrößerung des Ausschnittes tatsächlich mit dem Ganzen übereinstimmen kann, müssen die Abstände zwischen den einzelnen Segmenten entsprechend von Innen nach Außen zunehmen. Eine Einschränkung für die perfekte Überdeckung besteht dann immer noch durch den Umstand, dass die kleinsten Elemente des Originals aufgrund der limitierten Anzahl an Iterationen fehlen. Trotz erkennbarer Selbstähnlichkeit handelt es sich in diesem Fall um kein Fraktal. Der Grund liegt im Algorithmus für die Erstellung des beschriebenen Portales, der aus zwei Anweisungen besteht: einer Translation mit Verkleinerung, um das nächste nach hinten versetzte Kreissegment zu generieren, und einer Kopie ohne Skalierung, das heißt, einem unveränderten Segment, wodurch bei jeder Iteration eine Kopie von sich selbst entsteht. Wie bereits an Hand der Video-Rückkoppelung im Kapitel *D.2.1. IFS – Iteration-Function-System/ Versuchsanordnung* beschrieben, liegt erst dann ein Fraktal vor, wenn das Ausgangsobjekt durch eine Komposition aus mindestens zwei Elementen, die sich als affine Transformationen mit Verkleinerung beschreiben lassen, mit oder ohne Variation, ersetzt wird. Im Fall des Portals erfüllt die zweite Anweisung jene Bedingung nach der Verkleinerung nicht. Davon abgesehen konvertiert die Folge gegen einen Punkt. Das gleiche gilt für die Spitze des Chrysler Buildings, bei der im Grunde auf jeder der vier Seiten ein diesmal runder Bogen als einziges Element mehrfach übereinander gereiht wird.

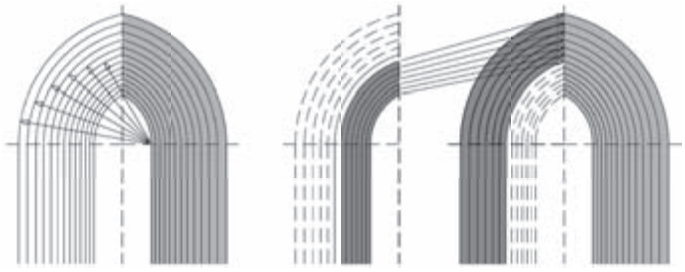


Abb.37.: Vereinfachte Darstellung eines gotischen Portals

Selbstähnlichkeit und Fraktal

Eine gotische Kathedrale wiederholt die Betonung der Vertikalen in architektonischen Elementen ähnlicher aber auch unterschiedlicher Größen. Das Streben nach oben findet sich dann sowohl in den Spitzbögen, deren unterschiedliche Verwendungen von den Portalen und Fenstern, über die Gewölbe bis zu den Baldachinen der Statuen reichen, als auch in den Turmelementen, die den Glockenturm genauso mit einschließen wie die Fialen. Das Dach einer Stabkirche wiederum unterscheidet sich von der Spitze des *Chrysler Buildings* durch die Abwechslung von Giebeldach und Zeltdach unterschiedlicher Dimension, beziehungsweise

Gotische Kathedrale

durch die Variation, die sich aus einer wechselnden Anordnung der Dachflächen in Abhängigkeit des zu erfüllenden Zwecks, wie schützender Eingangsbereich, konstruktiver Holzschutz oder der Verwendung als krönender Abschluss ergibt.

Eine Schallschutzmauer, die aus denselben Betonfertigteilen besteht, entspricht wiederum zunächst lediglich einer Aneinanderreihung identischer Elemente, ähnlich einer gleichmäßigen Anordnung von Fenstern mit demselben Format. Selbstähnlichkeit entsteht erst dann, wenn die Schallschutzmauer einer Komposition aus verschieden großen Platten gleich kommt und der Rhythmus aus der Anordnung der Platten oder deren oberer Abschluss dabei eine Kurve bilden, die einen Trend, wie im Kapitel *D.2.3. Mittelpunktverlagerung/Hurst-Exponent H* beschrieben, erkennen lässt (siehe *Abb.38*).

Schallschutz-Mauer

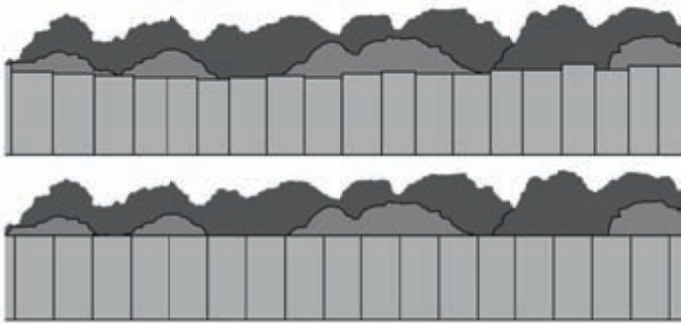


Abb.38.: Lärmschutzwand: Rhythmische- und Gleich-Verteilung

Das Detail und das Ganze

Eine der fraktalen Geometrie nahe stehende Architektur drückt sich durch eine Harmonie aus, bei der jedes einzelne architektonische Element mit dem Ganzen in Verbindung steht. Auch eine etwaige Dekoration folgt dann einem Grundthema, das einen formalen Ursprung haben kann, etwa in einem Motiv, oder das sich von einem auf verschiedenen Maßstäben wiederholenden konstruktiven Element ableitet. Wesentlich dabei ist, dass viele verschiedene Ebenen, vom Gesamteindruck, den sich der Betrachter aus einiger Entfernung verschafft, bis zum kleinsten mit dem freien Auge gerade noch unterscheidbaren architektonischen Element, abgedeckt werden. Tritt der Betrachter also näher an das Gebäude heran, so hat er aufgrund des zuvor gewonnen Eindrucks eine bestimmte Erwartungshaltung, die dann bei einer der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur auch weitgehend erfüllt wird. Zu dieser Gruppe zählen gotische Kathedralen oder wie bereits angeführt die Shikhara hinduistischer Tempel genauso wie bestimmte Gebäude von Frank Lloyd Wright oder Bruce Goff.

Selbstähnlichkeit und Harmonie

Was unterscheidet nun generell Bauwerke mit Selbstähnlichkeit, das heißt jene, bei denen das Ganze bereits auf seine Teile schließen lässt, von solchen, die diese Eigenschaft nicht aufweisen? Selbstähnlichkeit in der Architektur entstammt einer Idee, die vom Großen zum Kleinen konsequent umgesetzt wird und sich in einem ähnlichen Charakter äußert, wodurch einem Bauwerk Orientierung und Ausgewogenheit verliehen wird. Dennoch ist gleichzeitig Variation wichtig, um bei der Annäherung eine gewisse Spannung durch Abwechslung aufrecht zu erhalten und Monotonie zu vermeiden. Exakt gleiche verkleinerte Kopien des Ganzen, wie es nur bei der Selbstgleichheit der Fall ist, finden sich aber ohnedies lediglich bei jenen deterministischen Fraktalen, die auf der Ersetzung der Elemente durch immer denselben Generator basieren und nach unendlichen Rekursionen entstehen. Erst durch die Variation, die beim Gebäude auf die Konstruktion oder den Zweck des Elementes zurückzuführen ist, bleibt schließlich ein Objekt beim Näherkommen interessant, ähnlich der Mandelbrot Menge, bei der neben der Form des sogenannten Apfelmännchens unterschiedliche, wenn auch immer an den Rändern stark zerklüftete Formen auftauchen. In diesem Fall kann die nächste Stufe erahnt werden, es kann letztendlich aber dennoch zu einer Überraschung kommen, wobei die Charakteristik nichtsdestoweniger gleich bleibt (vergleiche dazu *Abb.39*: links die Mandelbrot-Menge und rechts ein Ausschnitt daraus).

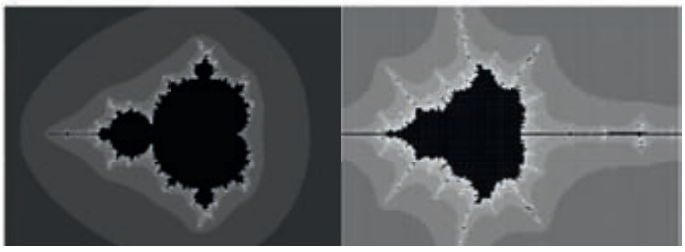


Abb.39.: Mandelbrot-Menge (*C.3.2. Fraktale Geometrie*); links: X=-1,5/-2,5 Y=-1,5/1,5 und rechts: X=-1,8/-1,7 Y=-0,0375/0,0375

Das Prinzip der Wechselwirkung zwischen Klein und Groß und allen Stufen hat seine Äquivalenz mit dem Aufbau in der Natur, da dort, wie im Kapitel *D.2.2. L-Systeme – Lindenmayer* beschrieben, Selbstähnlichkeit bereits im Wachstum verankert scheint. Das Detail als Spiegel des Ganzen führt folglich zu einer Qualität in der Architektur, die jener der Natur ähnlich ist.

Vergleich mit der Natur

Frank Lloyd Wright und die Fraktale Geometrie

Frank Lloyd Wrights *Prärie-Häuser*, die anschließend im Kapitel ***E.3.2. Beispiele/Frank Lloyd Wright (1867-1959)*** näher beschrieben werden, aber auch die von ihm formulierten Prinzipien zur *organischen Architektur*, dessen Begriff bereits durch seinen *lieben Meister* Louis Henry Sullivan benutzt wurde, lassen Nähe zur fraktalen Geometrie erkennen. Die Prinzipien wurden rückblickend auf die Zeit der Errichtung der Prärie-Häuser (Vorläufer ab 1893; bis ca. 1910) in den sogenannten Kahn Vorträgen aus dem Jahr 1930 erläutert:[59]

- Die *Erfahrbarkeit*: Im ersten Prinzip, nach dem Teile eines Gebäudes, wie auch Zimmer auf ein Minimum zu reduzieren sind, um das Ganze als Einheit erfahrbar zu machen, liegt die Grundvoraussetzung dafür, dass ein möglicher Bezug zwischen dem Ganzen und seinen Teilen überhaupt erkannt werden kann. Dem Betrachter wird auf diese Weise bei der Annäherung und dem Durchschreiten eines Gebäudes die Sicht auf einen größeren Bereich gestattet, wodurch in weiterer Folge erst die Möglichkeit gegeben ist, Elemente verschiedener Größenordnung zu erfassen und in Beziehung zu setzen.
- *Einfachheit* und *Harmonie*: Die zur damaligen Zeit vorherrschende Verschachtelung der Räume sollte entsprechend dem dritten Prinzip zugunsten eines fließenden Raumes aufgegeben und nur dort aufrecht erhalten werden, wo es unbedingt notwendig ist, etwa bei privaten Schlafzimmern. Das unterstreicht die Forderung nach Einfachheit, die F.L. Wright nur dann als gegeben sieht, wenn ein Teil zum harmonischen Element des Ganzen wird.[60] In der fraktalen Geometrie scheint diese Harmonie in der Übereinstimmung der Charakteristika in den verschiedenen Maßstabsebenen zu liegen, die sich als Selbstähnlichkeit äußert.
- Die *Form*: Die Behandlung der Frage nach dem Ornament fällt als sechstes Prinzip bei F.L. Wright weniger drastisch aus, als dies bei den Prinzipien zur modernen Architektur von H.-R. Hitchcock und P. Johnson der Fall ist, da dieses nicht gänzlich abgelehnt wird, sondern sich lediglich aus dem Material selbst entwickeln soll. Nicht nur beim Ornament sondern generell fordert F.L. Wright eine dem Baustoff entsprechende Form, eine Forderung, die den Zusammenhalt zwischen Elementen auch unterschiedlicher Größe unterstützt.
- Die *Beziehung* zwischen dem Ganzen und seinen Teilen: Aus dem zweiten Prinzip, nach dem zum Boden parallel verlaufende architektonische Elemente gefordert werden, um das Gebäude förmlich mit der Erde zu verschmelzen, lässt sich jene in allen Einzelteilen umzusetzende zentrale Idee erkennen, die von einer der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur gefordert wird. Die Teile und das Ganze folgen dann einer daraus abgeleiteten Betonung der Horizontalität, wodurch zumindest für den Standort in der Prärie des Mittelwestens auch eine Verankerung mit der Umgebung resultiert.
- Die *gerade Linie*: Das achte Prinzip, wonach die Möbel mit dem Gebäude in Einklang gebracht werden sollen, weist einmal mehr auf die Bedeutung der Einheit des Ganzen und seiner Teile hin. Unterstützt wird dieses Bestreben durch die Bevorzugung von geraden Linien, die sowohl im sechsten als auch im achten Prinzip angesprochen und durch die im Baugewerbe verwendeten Maschinen als logisch begründet angesehen werden. Darin ist, wie bereits bei der Betonung der Horizontalität angedeutet, eine Grundidee zu erkennen, der sich alle Teile des Gebäudes, bis hin zur Ausstattung, unterzuordnen haben.

Von den zuvor genannten Prinzipien zur organischen Architektur des F.L. Wright kann in weiterer Folge für eine der fraktalen Geometrie nahe stehende Architektur die Suche nach der vereinfachten spezifischen Form, die ein Gebäude ausdrückt, abgeleitet werden – das *Leitmotiv*, aus dem sich das Ganze und alle anderen formalen Elemente heraus entwickeln, wodurch diese in Maßstab und Charakter zusammen gehalten werden. Analog einem Spiegel lassen sich dann die einzelnen Elemente mit dem Ganzen verbinden – das Gebäude erscheint als Einheit und wirkt nicht aus Einzelteilen zusammengesetzt.[61] Auf die Ähnlichkeit zwischen der Architekturauffassung von F.L. Wright und der fraktalen Geometrie wies auch C. Bovill bereits im Jahr 1996 in seinem Buch ***Fractal Geometry in Architecture and Design*** hin.[62]

Eero Saarinen zwischen Euklid und Fraktal

Für Eero Saarinen (1910-1961) war der Charakter oder der Ausdruck eines Gebäudes wichtig, der für ihn nur dann erreicht werden konnte, wenn es in sich selbst ein totaler Ausdruck ist.[63] Er forderte, dass das Gebäude durch ein starkes einfaches Konzept bestimmt und jeder Teil, ob innen oder außen, zu einem aktiven Teil eines übergeordneten beherrschenden Themas wird. Darin findet sich erneut ein Ansatz für eine der fraktalen Geometrie nahe stehende Architektur, nachdem

Ausdruck und Grund-Thema

59 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 494, *Neumeyer F. (2002)*, Seiten 452f und *Wright F.L. (1966)*, Seiten 104-106

60 *Neumeyer F. (2002)*, Seite 454

61 *Evers B. (2006)*, Seite 494

62 *Bovill C. (1996)*, Seiten 127f

63 *Borcherdt H. (1988)*, Seiten 104f

sich diesem Grund-Thema oder Leitgedanken in weiterer Folge alles unterordnet, unabhängig von der Größe des Elementes und vom Zeitpunkt, wann die Entscheidung der Umsetzung erfolgt, d.h. ob es sich zu Beginn um den Grundriss oder das Konstruktions-System handelt, oder später um detailliertere Entscheidungen wie der Auswahl der Farbe im Inneren oder jener der Türgriffe.[64] Entscheidend für die Nähe zur fraktalen Geometrie ist letztendlich aber die Existenz von unterschiedlich großen Elementen, deren Anzahl mit abnehmendem Maßstab zunimmt. Vor allem jene durch den International Style geprägten Entwürfe E. Saarinens, etwa dem General Motors Technical Center in Warren, Michigan (1949–1956), weisen diese Eigenschaft allerdings kaum auf.

Yale University

Das *Ezra Stiles* und *Samuel F.B. Morse College* wiederum, das zwischen 1958 und 1962 als Erweiterung der Yale-University in New Haven (Connecticut) für jeweils 250 Studenten als *Residential Colleges* errichtet wurde, lässt Merkmale einer der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur erkennen. Eero Saarinen entschied sich in diesem Fall, beeinflusst mitunter durch den unregelmäßigen Bauplatz, für einen an mittelalterliche Städte Italiens erinnernden Entwurf, an dessen nördlichem Ende sich ein halbkreisförmiger Platz befindet, der Assoziationen mit jenem in Siena zulässt, während die Verwendung von Flachdächern und die Gestaltung der Außenwände der Gebäude aus in Beton eingelegten Steinen, einer Neu-Interpretation des Natursteinmauerwerks, der Moderne verpflichtet sind.[65] Durch den Entwurf sollte das Gemeinschaftsleben mit Betonung des dort lebenden Individuums in den Vordergrund gestellt werden. Daraus entwickelte sich das Grund-Konzept der Vielfalt, dem schließlich in einer polygonalen Architektur mit Sichtmauerwerk Ausdruck verliehen wurde, und dem sich nun jeder einzelne Teil unterzuordnen hatte. Die Räume selbst sind dann auch nicht wie in den modernen Motels jener Zeit üblich standardisiert, sondern so individuell wie möglich gestaltet, ähnlich den, wie es E. Saarinen selbst ausdrückte, zufällig anmutenden Räumen in einem alten Gasthaus.[66] Dieser Eindruck wurde vor allem dadurch erreicht, dass der rechte Winkel vermieden und die Räume, die unter anderem in Türmen zusammengefasst wurden, in Größe und Form variieren.[67] Die Analogie zu der mittelalterlichen, von Geschlechtertürmen geprägten Stadt San Gimignano in Italien war seine Antwort auf die neo-gotischen aus Sandstein bestehenden Gebäude, die bis in die 30er Jahre des 20. Jahrhunderts am Campus der Yale-University errichtet wurden. E. Saarinen suchte in den wiederkehrenden polygonalen Formen, die sich im Lageplan der vor- und zurückspringenden Mauern genauso finden wie in den auf verschiedenen Ebenen angeordneten Höfen, den sich schlängelnden Wegen, den übergeordneten Einheiten, zu denen die Studentenzimmer zusammengefasst wurden, den Räumen selbst, aber auch in den Bruchsteinen, eine adäquate Ausdrucksweise für die Individualität innerhalb dieser *Colleges*. Auch wenn die Räume ob ihres verwinkelten Zuschnitts und der Größe, beziehungsweise die Gebäude ob ihrer in Beton eingelassene Steine und somit ihrer Imitation der Steinmauer kritisiert wurden,[68] erreichte E. Saarinen ein harmonisches Ganzes, das sich in den Bestand einfügt, ohne ihn dabei zu kopieren. Das entspricht seiner Vorstellung, dass ein Gebäude aus dem Ort herauswachsen soll, um mit seiner Umgebung, unabhängig ob es sich dabei um eine natürliche oder von Menschenhand geschaffene handelt, in Beziehung zu treten.[69]

E.3.2. Beispiele

Im Fall der bereits im Kapitel A.2. Charakterisierung und Analyse erwähnten Charakterisierung der Architektur hinsichtlich einzelner Elemente und deren Beziehung zueinander besteht abseits des Extrems einer chaotischen, nicht kohärenten Architektur grundsätzlich die Möglichkeit einer verlaufenden Einteilung zwischen zwei sich gegenüberstehender Positionen: einerseits jener, die in einem bestimmten Maßstabsbereich fraktale Eigenschaften wie Selbstähnlichkeit erkennen lässt, und andererseits jener, die sich auf wenige geometrische Körper beschränkt und zumeist als glatt bezeichnet werden kann. Während es sich bei der ersteren um eine der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur handelt, beschreibt die zweite eine Affinität zur euklidischen Geometrie, wobei der Übergang zwischen diesen beiden Polen fließend erfolgt. Innerhalb der fraktal-ähnlichen Architektur existieren dann im Wesentlichen zwei Untergruppen: jene mit einer nahezu exakten Selbstähnlichkeit, und jene mit einer statistischen. An Hand konkreter Beispiele wird im folgenden Abschnitt der Frage nachgegangen, inwiefern Gebäude überhaupt fraktale Eigenschaften aufweisen, beziehungsweise in welcher Form sich diese dem Betrachter präsentieren. Einzelne Ergebnisse dieser Untersuchung hinsichtlich Selbstähnlichkeit – als wichtiges fraktales Charakteristikum –, Zerklüftung und Entstehung durch Iterationen dienen dann als Ausgangspunkt für daraus entwickelte Algorithmen, die

64 *Saarinen E. (1968)*, Seite 10
65 *Merkel J. (2005)*, Seiten 142-149
66 *Saarinen E. (1968)*, Seite 88
67 *Roman A. (2003)*, Seite 85
68 *Merkel J. (2005)*, Seite 149
69 *Saarinen E. (1968)*, Seite 6

im Kapitel F. Computer-Programme näher betrachtet werden, mit deren Hilfe die Grundlage der jeweiligen Form des Ganzen, beziehungsweise der Zusammenhang zwischen dem Ganzen und den Details verdeutlicht wird.

Antonio Gaudí (1852-1926)

Obwohl die expressiven Formen des katalanischen Architekten Antonio Gaudí Anklänge aus dem *Neo-Gotischen*, dem *Maurischen*, dem *Marokkanischen* und dem *Modernisme*, der katalanischen Prägung des *Jugendstils*, aufweisen, lässt er sich dennoch nicht in eine bestimmte Gruppe einordnen.[70][71] Während etwa die Designer und Architekten des Jugendstils die natürliche Umgebung, so wie sie sichtbar in Erscheinung tritt, als Inspiration für ihre vorwiegend ornamentalen und linearen Formen nahmen und sich dabei in der Regel auf eine flächige Dekoration beschränkten, entwickelte A. Gaudí, inspiriert durch die das Äußere bestimmenden Konstruktionsprinzipien der Natur, etwa der Wechselbeziehung der Kräfte innerhalb eines Baumes, eine reichhaltige plastische Formenvielfalt.[72] Die von ihm im Laufe der Jahre erschaffene architektonische Form basiert demnach vielmehr auf der zugrundeliegenden Struktur der Kraftableitung und nicht nur auf der (äußeren) Erscheinungsform. Säulen etwa waren für A. Gaudí dann nicht mehr lediglich vertikale, gerade, zylindrische, euklidische Formen sondern folgten denselben Regeln, wie sich in der Natur ein Baum – mit seiner einer fraktalen Hierarchie entsprechenden Verästelung vom Stamm über die Äste, den Zweigen bis hin zu den Blättern – empor windet. Es sind also die natürlichen Strukturen, deren Wachstum durch die fraktale Geometrie beschrieben wird[73], die von A. Gaudí in Architektur übersetzt wurden. Eine Betrachtung der von ihm entworfenen Gebäude unter dem Aspekt der Beziehung zwischen dem Ganzen und seinen Teilen lässt darüber hinaus eine weitere Analogie zur fraktalen Geometrie erkennen, indem die oftmals geschwungenen Formen, die an die Tier- und Pflanzenwelt erinnern, sowohl in den unregelmäßigen Grundrissen, den Ansichten und den Dachformen als auch in den Details, wie den Kaminen, den Balkonen und letztlich auch in der Inneneinrichtung aufgegriffen werden, was ein Hinweis auf das Bestreben nach einem ganzheitlichen Ausdruck ist. Obwohl ein überwiegender Teil seiner Werke als sehr komplex bezeichnet werden kann, so wirken dennoch alle Teile, von der reichhaltigen Ausgestaltung der Details bis hin zum Ganzen stimmig und zusammenhängend.[74] Der Grund dafür liegt nun darin, dass sie einem übergeordneten durch die Natur inspirierten Gestaltungsprozess folgen.

fraktale Geometrie bei A. Gaudí

Temple Expiatori de la Sagrada Familia (Barcelona)

Mit der Errichtung der *Sühnekirche der Heiligen Familie* (Sagrada Familia) in Barcelona beauftragte der *Geistliche Verein der Verehrer des Hl. Joseph* zunächst den Diözesanarchitekt Francisco de Paula del Villar y Lozano, dessen Entwurf eine Kirche im Stil der *Neo-Gotik* vorsah. Nachdem im Jahr 1883, nur ein Jahr nach dem Beginn der Bauarbeiten, del Villar aufgrund von Unstimmigkeiten mit dem Auftraggeber als verantwortlicher Architekt ausschied, erging diese Position an A. Gaudí, der sich schließlich die folgenden 43 Jahre bis zu seinem Tod im Jahr 1926, und davon die letzten etwa 12 Jahre ausschließlich, der Planung der Sagrada Familia widmen sollte. Zu Beginn seiner Tätigkeit waren die Arbeiten an der Krypta unter der Apsis, dessen Hauptkapelle dem heiligen Joseph gewidmet ist, von del Villar bereits soweit fortgeschritten, dass dadurch die Ausrichtung und die grundsätzlichen Abmessungen der Kirche beziehungsweise die Gestaltung der Krypta im neo-gotischen Stil grundsätzlich festlagen.[75] Der nun für das Gebäude folgende, über die Jahrzehnte heranreifende Entwurf A. Gaudís unterschied sich aber grundlegend von jenem seines Vorgängers, sowohl die Höhe als auch die Interpretation beziehungsweise Weiterentwicklung der Gotik betreffend, und war wie die meisten seiner Werke stark von Naturbeobachtungen beeinflusst, unter anderem vom Eukalyptusbaum als Vorbild für die Tragfähigkeit der Säulen oder dem Helikoid gedreht wachsender Bäume.[76]

Die nötige Erfahrung über die Anwendung von Konstruktionsschemata und Formen sammelte A. Gaudí zunächst bei den kleineren zur Sagrada Familia parallel entwickelten Projekten, wie bei der Colònia-Güell-Kirche mit dem Einsatz von schräg gestellten Stützen oder hyperbolischen Paraboloiden, ehe er diese auch auf sein größtes Bauwerk übertrug. Setzte er bei der Sagrada Familia zunächst einfachere Formen wie das Rotationsparaboloid oder das Ellipsoid ein, so wurden diese im Laufe der Zeit immer mehr durch Regelflächen abgelöst, also Flächen, die durch die stetige Bewegung einer Geraden, deren Richtungsvektor sich ändern kann, entlang einer

Regelflächen

70 *Güell, X. (1987)*, Seite 9

71 *Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: Chaos and Fractals – New Frontiers of Science, 2. Auflage (Springer Verlag, New York, 2004)*, Seite 227

72 *Hitchcock H.-R. (1994)*, Seiten 382 und 406 und *Zerbst R. (1993)*, Seite 31

73 siehe Kapitel *D.2.2. L-Systeme – Lindenmayer*

74 *Burry, M. (2007)*, Seite 11

75 *Burry, M. (2007)*, Seiten 20f

76 *Zerbst R. (1993)*, Seite 208

Leitkurve entstehen.[77] Diese avancierten in weiterer Folge auch zum Grund-Thema und kamen schließlich in zahlreichen Elementen der Sagrada Familia, sowohl an der Fassade als auch im Inneren, zur Anwendung.[78] Neben der leichteren Erfassung der Konstruktion solcher Formen durch die bei der Ausführung Beteiligten, sah A. Gaudí in der Formulierung der prinzipiellen Entwurfsvorstellung als Regelwerk, wie es nun durch die Regelflächengeometrie gegeben war, auch den Vorteil der Festlegung der Gesamtstruktur und der einfacheren Weitergabe der Gestaltungsvorstellungen an die nachfolgenden Generationen von Architekten, die mit der Errichtung der Sagrada Familia nach ihm betraut werden sollten.[79] Das war umso wichtiger, als die erste Fassade, jene der Ostfassade oder sogenannten Weihnachtsfassade zu seinem Tod noch nicht zur Gänze fertiggestellt war und viele Entscheidungen zur Gestaltung erst während des Baufortschrittes getroffen wurden.

Im Wesentlichen finden sich Variationen folgender Grundformen:[80]

- Hyperboloid (siehe *Abb.40*): mit offenem Hals als Gewölbeeindeckung; Fenster des Obergaden; mit geschlossenem Hals als Kapitelle der Säulen;
- Hyperbolisches Paraboloid (siehe *Abb.40*): die noch fehlenden Türme über der Vierung sollen aus hyperbolischen Paraboloiden bestehen; Übergänge zwischen den Gewölben; Triforium des Obergadenfensters; am Fuß der Säulen;
- Helikoid (siehe *Abb.40*): Wendeltreppen; die Säulen des Kirchenschiffs als Verschneidung von zwei gegensinnig gedrehten Helikoiden;

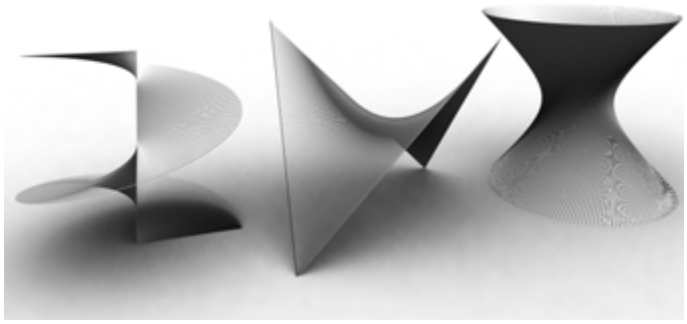


Abb.40.: Helikoid, Hyperbolisches Paraboloid, Hyperboloid

77 Durch jeden Punkt einer Regelfläche geht zumindest eine Erzeugende, das sind die verschiedenen Geraden entlang der Fläche, die auch Bestandteil der jeweiligen Tangentialebene sind.

78 *Burry, M. (2007)*, Seiten 67,69

79 *Burry, M. (2007)*, Seite 25

80 *Burry, M. (2007)*, Seite 69

Hängemodell

Bei der Statik ließ sich A. Gaudí vor allem durch den Verlauf der Kräfte in der Natur inspirieren. Bereits für den Entwurf zur Colònia-Güell-Kirche, bei der letztlich lediglich die Krypta zur Ausfertigung kam, benutzte A. Gaudí ein durch ihn erstmals dreidimensional angewandtes Hängemodell aus Schnüren, bei dem an den zukünftigen Punkten der Krafteinleitung mit Schrot gefüllte kleine Leinensäcke montiert wurden, um die auf den Kopf gestellte nach statischen Erfordernissen optimierte Form zu erhalten. In den Schnüren, die biegeschlaff sind, wirken keine Biegemomente, und in deren Verlauf nur Zugkräfte, beziehungsweise, wird das Modell umgedreht, nur Druckkräfte.[81] Das Ergebnis aus dem Hängemodell machte schließlich die Strebepfeiler, als seitliches Gegengewicht zur Aufnahme der Schubkräfte der Gewölbe gotischer Kathedralen überflüssig, die A. Gaudí auch abwertend als „*Krücken*“ bezeichnete.[82] Auf ähnliche Weise modifizierte er auch den in der Gotik häufig verwendeten Spitzbogen, indem er ihn durch einen Bogen ersetzte, dessen Verlauf sich aus der umgedrehten Kurve einer Kettenlinie, der Katenoide, ergibt und der Ähnlichkeiten mit dem Maya-Bogen aufweist. Die Kettenlinie ist, bedingt durch die Verformung aufgrund des Eigengewichts, keine Parabel, ähnelt dieser aber und wird durch den Graphen folgender Funktion beschrieben[83]:

$$f_{(x)} = \frac{1}{2} \cdot (e^{x} + e^{-x})$$

Der fraktale Aspekt

Der Zusammenhalt zwischen den einzelnen Komponenten unterschiedlicher Größenordnung ist bei der *Sagrada Familia* zum Einen dem Hängemodell (beziehungsweise der generellen nach statischen Kriterien optimierten Grund-Struktur des Gebäudes) und zum Anderen den Regelflächen zu verdanken. Das führt zu einer Konsistenz des Gebäudes, die von den Fassadentürmen über die schräg nach innen verlaufenden, knochenförmigen Stützen der Passionsfassade (Westfassade oder Fassade des Leidenswegs) bis hin zu der im Inneren erkennbaren Verästelung der Säulen und deren Kapitelle reicht.

Als bestimmende Geometrie finden sich Regelflächen sowohl bei den Fenstern, als auch bei den Emporen und Zwickelflächen, bei den Wendeltreppen und bei den Gewölben, deren Fortsetzung im Verlauf der Säulen wie ein Wald aus Steinen anmutet. Durch ihre Kombination mit den schräg gestellten sich nach oben verzweigenden Säulen

81 *Burry, M. (2007)*, Seite 59

82 *Zerbst R. (1993)*, Seiten 25, 33

83 *Duden (2003)*, Seite 130

im Inneren konnte, wie es A. Gaudí forderte, gleichzeitig ein sanfter Übergang zwischen den stützenden und den lastenden Elementen erreicht werden. Die Regelflächen bilden also die Basis aller Geometrien innen wie außen, vom Kapitell bis zu den Türmen der Vierung[84], wobei die einzelnen architektonischen Elemente verschiedene Maßstabsebenen abdecken, ohne dabei Lücken entstehen zu lassen, wodurch Kontinuität gewährleistet ist, eine für Fraktale gleichermaßen geltende Voraussetzung. Die Anzahl der Elemente nimmt dabei wie gefordert vom Großen zum Kleinen zu, von ein paar wenigen Türmen zu den zahlreichen Kapitellen der Säulen. Nachdem also die Geometrie der einzelnen architektonischen Teile derselben Idee zur Gestaltung entspringen, erscheint alles, vom Kleinen bis zu dem in die Höhe strebenden Ganzen, als kohärent. Unterstützt wird die Schaffung eines harmonischen Ganzen durch das auf die Zahl 12 basierende Proportionssystem, aus dem sich das Verhältnis des Grundrisses bis zu den Interkolumnien (Säulenzwischenräumen) und die Maße der Fenster ableiten lassen.[85]

Für die Sagrada Familia gilt somit Ähnliches wie für gotische Kathedralen, deren Konstruktion und Gestaltung A. Gaudí weiterentwickelte und deren Formgebung er stark mit naturalistischen, plastischen Formen auflöste:[86] Durch die Variation eines Grundthemas vom Ganzen bis zum Detail entsteht in beiden Fällen eine ähnliche Zerklüftung und ein Zusammenhalt zwischen den einzelnen Elementen, da es sich um eine Fortführung eines Konzeptes, des Regelwerks oder die in den Himmel strebende Geste, vom Großen zum Kleinen handelt.

Col·legi de les Teresianes (1888-1890)

Als A. Gaudí im Jahr 1888 mit der Planung des viergeschoßigen Col·legi de les Teresianes, dem Kollegienhaus des 1876 gegründeten Ordens der Theresianerinnen, in Sant Gervasi de Cassoles nördlich von Barcelona, betraut wurde, fand er mit den bereits begonnen Bauarbeiten eine ähnliche Situation wie bei der Sagrada Familia vor, wobei nun durch den Baufortschritt bis zum ersten Geschoss im wesentlichen die Struktur des Grundrisses festlag.[87] Darin und im sehr knappen Budget mögen, neben der Verpflichtung zur Kargheit und Sparsamkeit des *Ordens der Heiligen Teresia von Avila*, dem Mutterorden des Auftraggebers, auch die Gründe liegen, warum sich, im Vergleich zu den ansonsten reich dekorierten Entwürfen von A. Gaudí, dieses Gebäude karger und in einer strengeren Form präsentiert, beziehungsweise als Baumaterialien der Fassade unverputzter Ziegel und Naturstein zur Anwendung kamen.

Als wesentliches Merkmal des von der *Gotik* inspirierten rechteckigen Kollegienhauses verwendete A. Gaudí den parabolischen Bogen unter der Verwendung der Scheingewölbetechnik der Maya, deren Methode er vermutlich aus Büchern kannte.[88] Der parabolische Bogen, der erstmals im Palacio Güell (1885-89) verwendet wurde, kann dabei als Weiterentwicklung des Spitzbogens gedeutet werden und findet sich nun als Grund-Thema in verschiedenen Ausmaßen sowohl im Inneren des Gebäudes wie auch außen, etwa als Eingangstor, geteilt als Konsolen im Patio beziehungsweise im Korridor des Erdgeschosses, verputzt und auf Pfeilern aus Sichtziegel ruhend als Serie in den Korridoren des ersten Obergeschosses, die einen Kreuzgang bilden und der Lastabtragung der sich darüber befindlichen tragenden Wände zum Innenhof dienen, und als Fenster- und Türlaibungen, dessen Höhen sich an die Bedürfnisse anpassen (In ***Abb.41*** ist der Zusammenhang zwischen Parabel, Kettenlinie und Ziegelbogen dargestellt). Die nach oben stumpf zulaufenden Fensterlaibungen beziehungsweise Blindbögen des obersten Geschosses können wiederum als gerade Variante interpretiert werden, ähnlich den als Krönung auf der Außenwand emporragenden Zinnen aus Sichtziegel, die allerdings als „*negative*“, weil gefüllte, Form und mit rundem Abschluss ausgeführt sind.[89] Die Fensterläden der unteren Geschosse weisen durch ihre in einer einzigen Stufe angedeuteten Verschmälerung eine noch stärkere Abstraktion des Motivs auf. Dadurch wird ein Übergang zwischen den rechteckigen Ausnehmungen und den darin befindlichen parabolischen Fensterlaibungen geschaffen, die sie abdecken.

Der parabolische Bogen

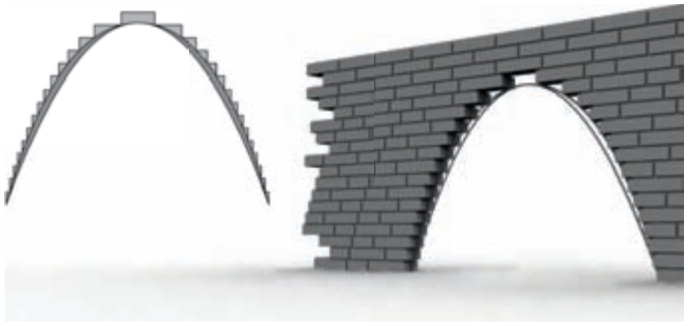


Abb.41.: Links und rechts: Verlauf einer Parabel (innen), einer Kettenlinie (mittig) und einer Kettenlinie aus Ziegelsteinen gleicher Formate (außen)

84 Die ersten acht errichteten Türme weisen noch keine Regelflächen auf, sondern haben die Form von Drehparaboloiden (beziehungsweise elliptischen Paraboloiden). Das rührt vor allem daher, dass sie in einer früheren Phase entworfen wurden.

85 *Burry, M. (2007)*, Seite 89

86 *Burry, M. (2007)*, Seite 42

87 *Zerbst R. (1993)*, Seite 92

88 *Burry, M. (2007)*, Seite 77

89 *Martinell, C. (1975)*, Seiten 279ff

A. Gaudí konnte durch den vielfältigen Einsatz des parabolischen Bogens, unter anderem als Laibung oder in den Korridoren des ersten Obergeschosses zum Zweck der Entlastung der tragenden Wände zum Hof und somit zur besseren Belichtung, beziehungsweise in Form der geraden dreieckigen Varianten, trotz der vom Orden der Theresianerinnen geforderten spartanische Nüchternheit mehrere Maßstabsebenen abdecken und eine Komplexität erreichen, die sich dennoch zu einem harmonischen Ganzen fügt. Allerdings fehlen derartige Formen in einem kleineren Maßstab, da A. Gaudí aufgrund der Vorgaben des Bauherrn auf die von ihm ansonsten reichhaltige Verwendung von Ornamenten verzichtete. Diesen Bereich decken dann vielmehr das Natursteinmauerwerk mit der dekorativen Verwendung von Sichtziegel in den unteren Geschossen beziehungsweise die unverputzten Ziegel des obersten Geschosses ab. Demnach besteht das *Col·legi de les Teresianes* zwar aus verschiedenen Elementen ähnlichen Charakters, das Grund-Thema selbst wird aber nur über einen beschränkten Bereich fortgeführt. Dennoch lässt die Variation dieses Grund-Themas eine Komplexität entstehen, die aber nicht verwirrend erscheint, sondern für den Betrachter verständlich bleibt, das heißt die Teile und das Ganze werden harmonisch zusammengehalten, worin, wie schon zuvor unter ***E.3.1. Einleitung/Frank Lloyd Wright und die Fraktale Geometrie*** erwähnt, ein erstes Indiz für eine der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur gesehen werden kann.

> *... Mit einfachsten Mitteln und einer leichten Variation immer gleicher Grundformen erreichte Gaudí den Eindruck spartanischer Nüchternheit und zugleich großer architektonischer Komplexität. ...*[90]

Mit seiner zerklüfteten Fassade, dem ähnlichen Charakter und dem Grundthema, das über mehrere Maßstabsebenen hinweg fortgesetzt wird, weist das Col·legi de les Teresianes nun einige Eigenschaften, die als Voraussetzungen für eine der fraktalen Geometrie ähnlichen Architektur gelten, auf. Dabei geht der ähnliche Charakter, analog zu Küstenlinien, nicht aus identischen verkleinerten Kopien von sich selbst hervor, sondern äußert sich in einer ähnlichen Zerklüftung des Ganzen und seiner Teile, zu dem die Varianten parabolischer Bögen aber auch der Naturstein und die unverputzten Ziegel der Fassade beitragen.

Conclusio

Die Gebäude des A. Gaudí erscheinen im Gegensatz zu jenen, die der euklidischen Geometrie nahe stehen und eher konstruiert wirken, wie natürlich gewachsen, was generell für den Jugendstil zutrifft, zu dessen Vertretern er manchmal trotz eigenständiger Ausdrucksweise mit Anklängen ans Maurische, Marokkanische und Gotische gezählt wird.[91] Der Grund liegt nicht nur in den geschwungenen Formen sondern in der von der Natur inspirierten Kraftableitung, aber auch in der Verwendung von architektonischen Elementen, die einer übergeordneten Idee entsprechen, wodurch das Gebäude vom Ganzen bis zum Kleinen zusammenhängend wirkt. Im Jugendstil wird eine derartig ausgeprägte Wechselwirkung zwischen den Komponenten kaum erreicht, da sich dieser häufig auf eine dekorative Ausprägung der vegetabilen Formen und gekurvten Linien beschränkt.[92]

Frank Lloyd Wright (1867-1959)

Sowohl A. Gaudí als auch F.L. Wright zählen zu den Vertretern der sogenannten organischen Architektur. Diese wenn auch heterogene Strömung in der Architektur entwickelte sich vornehmlich seit dem Ende des 19. Jahrhunderts, beeinflusst unter anderem durch das von L.H. Sullivan formulierte und aus der Natur abgeleitete Gesetz, nach dem die Form immer der Funktion folgt, und dem sich nicht nur das Ganze sondern auch das Detail wie das Ornament unterzuordnen hat.[93] Nachdem keine einheitliche theoretische Grundlage existiert, umfasst der Begriff der organischen Architektur verschiedene Richtungen beziehungsweise unterschiedliche Auffassungen ihrer Vertreter, etwa die Bevorzugung einer aus der Fauna und Flora abgeleiteten gekurvten Form als Abgrenzung gegenüber der euklidisch glatten, die Forderung nach Einheit von Landschaft und Architektur, die Verwendung von natürlichen Baustoffen wie Lehm, Holz oder auch Ziegel, die von der Natur inspirierte Vorstellung des Ganzheitlichen, in das sich die Teile eingliedern, oder die Auffassung, dass natürliche Formen im Gegensatz zu künstlichen aus sich selbst heraus entstehen.[94][95] Während im Jugendstil die Verbindung zur Natur noch in der Verwendung von stilisierten aber dennoch erkennbaren vorwiegend floralen Vorbildern in den zumeist geschwungenen Ornamenten liegt, erfolgte diese bei A. Gaudí und F.L. Wright tiefgreifender, da sie nicht die Formen der Natur kopieren wollten, sondern vielmehr die Natur in die spezifischen Anforderungen der Architektur übersetzten. Es war ihnen folglich nicht die äußere Erscheinung eine Inspirationsquelle sondern die Gesetzmäßigkeit der Natur, die allerdings zu einer unterschiedlichen formalen Umsetzung führte: bei A. Gaudí

organische Architektur

90 *Zerbst R. (1993)*, Seite 94

91 *Koch W. (1991)*, Seite 380

92 *Pevsner N. et al. (1992)* Seiten 227 und 335

93 *Sullivan L.H. (1896)*, Seite 23 und *Kruft H.-W. (1995)*, Seiten 401f, 411, 413

94 *Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: Chaos and Fractals – New Frontiers of Science, 2. Auflage (Springer Verlag, New York, 2004)*, Seite 464

95 *Voigt A. (2005)*, Seite 37

– mit der in ein Gebäude transformierten aus Naturbeobachtungen stammenden Kraftableitung – resultierte sie in einer ausgeprägten Plastizität und bei F.L. Wright's Prärie-Häusern in einer Betonung der Horizontalität.[96]

Geprägt wurde der Begriff der *organischen Architektur* vor allem durch F.L. Wright, der in der Einleitung zu dem im Jahr 1910 erschienenen *Wasmuth-Portfolio*, das nahezu alle seine bis dahin ausgeführten Bauten beinhaltete, ein diesbezügliches Programm entwickelte, in dem er überdies das *gotische* mit dem *organischen* gleichsetzte.[97] Obwohl er keine endgültige Definition für die organischer Architektur hinterließ, versteht sich darunter im Wesentlichen eine von innen nach außen entwickelnde Architektur, unter Erfüllung des Zwecks des Gebäudes, der Bedürfnisse des Menschen, respektive des Auftraggebers und der Umgebung, die ihrerseits Struktur, Material, Form und Farbe beeinflusst.[98] Wesentliche Bestandteile waren auch ein System, basierend auf Einheiten, das einen regelmäßigen Raster bildet und die Auskragung.[99] Dadurch erreichte er eine Harmonie zwischen Architektur und Landschaft, eine Verzahnung von Innen- und Außenbereich, aber auch einen Zusammenhang zwischen dem Ganzen und seinen Teilen, eine Eigenschaft die Natur und fraktale Geometrie miteinander verbindet.

organisch und gotisch

Prärie-Häuser

Eine zentrale Stellung in F.L. Wright's Schaffen nehmen die am Beginn seiner Karriere als selbständiger Architekt stehenden Prärie-Häuser ein, deren Typus aus dem Bestreben nach einer eigenständigen amerikanischen Architektur entstand, nachdem um die Jahrhundertwende zum 20. Jahrhundert vorwiegend ein die europäischen Stile kopierender Eklektizismus vorherrschte.[100] Die Entwicklung beginnt mit seinem ersten Entwurf im eigenen Büro für William H. Winslow im Jahr 1893 und reift in den folgenden Jahren zu einem umfassenden Programm heran. Bis 1910 entstanden schließlich etliche Prärie-Häuser, die als Beispiel dafür dienen, wie sich ein Gebäude harmonisch in seine natürliche Umgebung einfügen kann, indem die Vorgaben der natürlichen Gegebenheiten wie Licht, Wind und Topographie konsequent in den Entwurf mit einbezogen werden. Einige der Charakteristika dieses Gebäudetyps sind:

Charakteristika der Präriehäuser

- Ausgedehnte offene Grundrisse: Größe und Anordnung der Räume werden von ihrem Zweck bestimmt, wobei Halle, Speisezimmer und Wohnzimmer nicht mehr konstruktiv voneinander getrennt angeordnet werden, sondern als Bereiche ineinander übergehen.[101]
- Die Räume entwickeln sich vom Zentrum nach außen: Auf diese Weise wird die äußere Form bestimmt.
- Quaderförmige Baukörper mit gedrungenen Proportionen: Der Quader als Grundform wird durch weit auskragende flache Dächer, die einen ausreichenden Sonnen- und Witterungsschutz gewährleisten und den Einfluss aus Japan bekunden, mit der Natur verbunden.
- Terrassen und Garten gehen ineinander über und vorgezogene Mauern grenzen Gärten ab.
- Als bevorzugte Baumaterialien gelten natürliche Baustoffe wie Ziegel, Holz und Stein, die in ihrer spezifischen Struktur in Erscheinung treten.

Die im Kapitel ***E.3.1. Einleitung/Das Detail und das Ganze*** und ***E.3.1. Einleitung/Frank Lloyd Wright und die Fraktale Geometrie*** beschriebene Forderung F.L. Wrights nach der erkennbaren Umsetzung der Beziehung zwischen dem Ganzen und seinen Teilen in einem Design ist die Folge einer bestimmten zentralen Idee beziehungsweise der Variation einer Form. Die Gestaltung wurde folglich im Sinne eines gesamtheitlichen Konzepts konsequent bis zum Detail und, sofern es die Auftraggeber zuließen, bis zur Inneneinrichtung, die F.L. Wright stets selbst in Übereinstimmung mit dem Grundriss-Raster und dem Formenkanon des spezifischen Gebäudes planen wollte, fortgesetzt.[102]

Frederick C. Robie House

In F.L. Wrights *Robie House* (1906-1909; siehe ***Abb.42, Seite 80***), nahe Chicago gelegen, dem bekanntesten Beispiel der Prärie-Häuser, werden das Ganze und seine Teile im wesentlichen durch zwei Grund-Themen zusammengehalten. Zum Einen handelt es sich dabei um die Horizontalität als Charakteristikum der Weite der umgebenden Prärie des Mittleren Westens, die sich schließlich auch in der Gestaltung des Gebäudes wieder findet.[103]

Horizontalität der Prärie

- Das Gebäude als Ganzes schmiegt sich an die Ebene an.
- Das Gebäude besteht im Wesentlichen aus zwei versetzt angeordneten Rechtecken, die sich zu quaderförmigen gedrungen Baukörpern entwickeln.
- Die Dächer sind flach geneigt und kragen weit aus.

96 *Zerbst R. (1993)*, Seite 31
97 *Pahl J. (1999)*, Seite 33 und *Evers B. (2006)*, Seiten 492, 494
98 *Kruft H.-W. (1995)*, Seiten 494, 498 und *Wright F.L. (1966)*, Seite 9
99 *Storrer W. A. (1993)*, Seite 126
100 *Evers B. (2006)*, Seite 494
101 *Koch W. (1991)*, Seite 382
102 *Borcherdt H. (1988)*, Seite 37
103 *Evers B. (2006)*, Seite 494

Diese Grund-Idee wird in Elementen mit immer kleiner werdenden Maßstäben weitergeführt und reicht von den horizontalen Fensterbändern, über die Umfassungsmauern unterschiedlicher Höhen beziehungsweise der Brüstungen der Terrassen mit ihren länglichen Mauerkronen aus Stein, bis zur Gestaltung der Fugen des Ziegelmauerwerks, bei der sich die vertikalen Stoßfugen aus rot gefärbten Zement mit den Ziegelsteinen bündig auf einer Ebene befinden, während die horizontalen Lagerfugen aus einfachem Zement zurückversetzt sind.[104] Die Iterationen bleiben somit von der Gesamterscheinung bis zum Detail selbst des flachen römischen Ziegels oder der Steinvase auf der Umfassungsmauer nachvollziehbar.

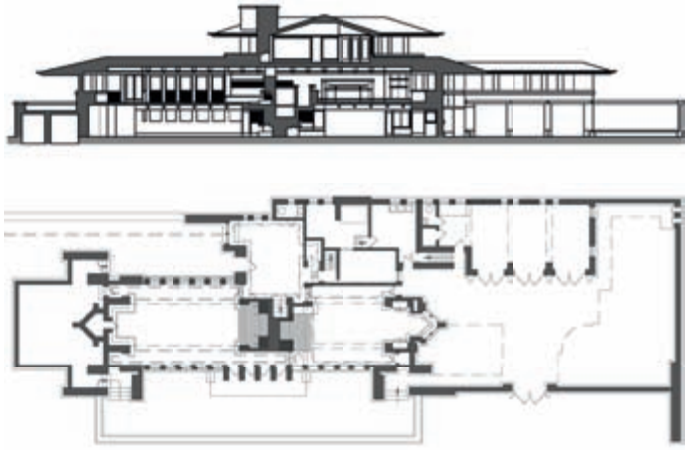


Abb.42.: F.L. Wright: *Robie House*, nahe Chicago 1906-1909; *Schnitt u. Grundriss entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Neben der Horizontalität tritt der Winkel der in Anlehnung an einen Ozeandampfer bugförmig genannten Ausbuchtungen des Grundrisses im Osten und Westen auf ähnliche Weise in unterschiedlichen Elementen auf, wodurch erneut mehrere Maßstabsebenen abgedeckt werden. Er wird nicht nur in das Glas-Design etwa der Türen zum südlichen Garten im Untergeschoss mit den ineinander verschränkten Rauten oder der Doppelfenster im ersten Obergeschoss übernommen, sondern findet sich auch in den Eisenarbeiten am Tor zum Hof, der zu den Garagen führt, dem Design der mit einem kleinen Dach versehenen Tischleuchten, oder im großen Maßstab, wenn auch etwas abgewandelt, in der flache Neigung des weit ausladenden Walmdaches.[105] Im Inneren wiederum lässt sich das Motiv etwa am Esstisch erkennen, in dem vier der sechs weit unter die Tischplatte geschobenen Tischbeine und das Glas-Design der Esstisch-Leuchten, die ihrerseits von vier Eckpfeilern getragen werden, den Winkel aufnehmen.[106] Ebenso verhält es sich mit den beiden V-förmigen tragenden Teilen des Tisches in der Eingangshalle, deren Spitzen jeweils nach innen zeigen, während die auskragende Tischplatte das Thema des schützenden Daches aufgreift.[107] Im Unterschied zur Horizontalität, die in sich selbst zu finden ist, handelt es sich beim Winkel der bugförmigen Ausbuchtung um voneinander getrennte Elemente, die aber dennoch einer Grund-Idee folgen, wodurch eine Kohärenz bis zum kleinsten Teil erreicht wird. Folglich besteht das fraktale Konzept einmal mehr darin, dass einfache Formen und Regeln, die einem Grund-Thema entspringen, in mehreren Maßstabsebenen anzutreffen sind:

Winkel des *Buges*

- Eine aus der Weite der Prärie entspringende Horizontalität reicht vom Ganzen bis zum länglichen Ziegelformat.
- Der Winkel der bugförmigen Ausbuchtung wiederum findet sich bis zum Glas-Design.

Sowohl das Grund-Thema der Horizontalität, als auch jenes des Winkels führen so zu einer Kaskade interessanter Details vom Großen bis zum Kleinen, wodurch das Gebäude eine ähnliche Charakteristik beziehungsweise eine ähnliche Zerklüftung aufweist – beides Eigenschaften der fraktalen Geometrie. Auf diese Weise fügt sich alles zu einem harmonischen Ganzen.

Falling Water; Haus für Edgar J. Kaufmann

Horizontale Schichtung

Die Grund-Idee die dem Entwurf zu F.L. Wright's *Fallingwater* (1935-1939) in Ohiopyle, Bear Run, Pennsylvania, zugrunde liegt, basiert einmal mehr auf Horizontalität, die sich diesmal von der Schichtung der umgebenden Felsformation des Wasserfalls, über dem das Gebäude errichtet wurde, ableitet (siehe *Abb.43*, *Seite 81*). Aufgegriffen wird das Thema etwa von den übereinander angeordneten Terrassen mit ihren Brüstungen und weit auskragenden Platten aus Stahlbeton, die ähnlich dem natürlichen Vorbild unterschiedliche Ausmaße annehmen, dem Mauerwerk aus Naturstein mit dem länglichem Format der Steine und der horizontalen Lagerung, oder den Trittstufen der Außen-Treppe die zum Fluss hinunter führt. Über die Schichtung des Mauerwerks wird das Thema schließlich vom Außenbereich ins Gebäudeinnere weitergeleitet, wo es etwa unterhalb der Decke in den hölzernen Ablageflächen, die mitunter bis vor die Fenster reichen, und in den Natursteinplatten des Fußbodens, der zum Teil auch aus dem natürlichen Felsen besteht, in Erscheinung tritt. Das

104 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 42
105 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 64
106 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 73
107 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 51

Ganze, das vor allem aus dem Blickwinkel des Flusses betrachtet wie die quaderförmigen Fels-Terrassen emporsteigt, findet sich somit, von der Umgebung inspiriert, in verschiedenen Elementen wieder, bis hin zum Mauerwerk.[108]

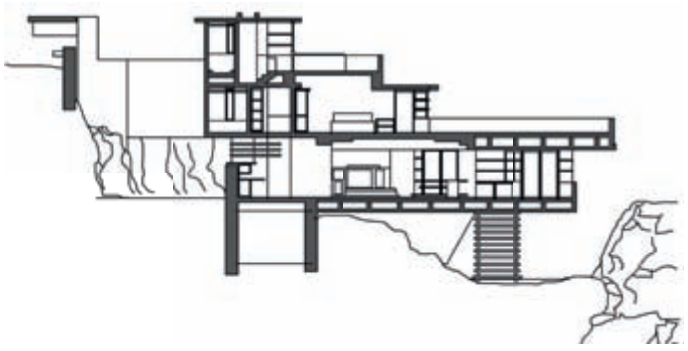


Abb.43.: F.L. Wright: Falling Water, Bear Run 1935-1939; *Schnitt entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Darin liegt wie zuvor bei Robie House die Parallele zu den Fraktalen, die gleichfalls aus bestimmten einfachen Regeln entstehen: diese Regeln entsprechen in der Architektur einer Grund-Idee, die zu einer einfachen, spezifischen Form führt und umgesetzt in verschiedenen architektonischen Elementen mehrere Maßstabsebenen abdeckt. Wenn allerdings lediglich eine begrenzte Anzahl von Iterationen vorliegt, wirkt das Gebäude glatt und dem Betrachter fehlen bei der Annäherung Elemente, die im kleineren Maßstab den Eindruck des Ganzen bestätigen.

Le Corbusier (1887-1965)

Villa Schwob

Wenn Le Corbusier, eigentlich Charles-Édouard Jeanneret-Gris in dem Artikel *Die Maß-Regler*, der 1923 in dem Buch *Vers Une Architecture* abgedruckt wurde, über die Notwendigkeit von auf der Mathematik basierenden Regeln für den Entwurf eines Gebäudes schreibt, mit der Begründung, dass nur auf diese Weise die Einhaltung einer Ordnung gewährleistet sein kann und somit das Ganze als Einheit erscheint, so deutet das erneut auf eine Grund-Idee hin, der sich sämtliche Teile wie auch das Ganze unterzuordnen haben.[109] Diese Idee erklärt er unter anderem an Hand der Ansichten zur Villa Schwob in La Chaux-de-Fonds aus dem Jahr 1916, indem zunächst ein bestimmter Winkel α die wesentlichen Maße der Vorder- und Rück-Seite bestimmt.[110] Parallelen zur Hypotenuse des daraus abgeleiteten rechtwinkligen Basis-Dreiecks und deren Normalen dienen dann zur Festlegung der weiteren architektonischen Elemente, wie Fenster, Türen, Wandflächen, bis hin zum kleinsten Detail. Die Grund-Idee bezieht sich demnach auf einen bestimmten Winkel α, der an der Fassade nur insofern ablesbar ist, als er die Diagonalen von Elementen unterschiedlicher Größe, vom gesamten Baukörper bis zum Detail, definiert und auf diese Weise miteinander verbindet. Das Ganze und seine Teile werden, wenn auch nur bis zu einem bestimmten kleinsten Maßstab, miteinander in Beziehung gesetzt, womit eine Kohärenz zwischen Gebäude und seinen Elementen, beziehungsweise zwischen den Elementen unterschiedlicher Größen, erreicht wird.

Maß-Regler als Grund-Idee

Ozenfant's Studio

Das Wohnhaus und Atelier für den Maler Amédée Ozenfant in Paris aus dem Jahr 1922 von Le Corbusier basiert ebenfalls auf der konsequenten Umsetzung einer Maß-Regel, der sich sowohl das Ganze als auch seine Teile, wie Fenster und Fensterteilung unterordnen (siehe *Abb.44*).[111] Aus der Gesamtstruktur ergeben sich mehrere Scharen von Parallelen, aus denen sich weitere Elemente der Fassade ableiten.[112] Das Prinzip der Fortsetzung einer Grund-Idee vom Großen zum Kleinen ist allerdings auch in diesem Fall nur auf einige wenige Schritte begrenzt, nachdem der Purismus, dem das Gebäude folgt, inspiriert von der Ästhetik der Maschine, einfache klare geometrische Formen unter Ausschluss jeglicher Dekoration bevorzugte. Daraus ergibt sich, dass der Entwurf zwar zunächst der Grundidee folgt, wenn der Betrachter aber näher kommt, fehlen derartige Elemente im entsprechenden Maßstab und die Fassade des Gebäudes erscheint in diesem Bereich glatt.

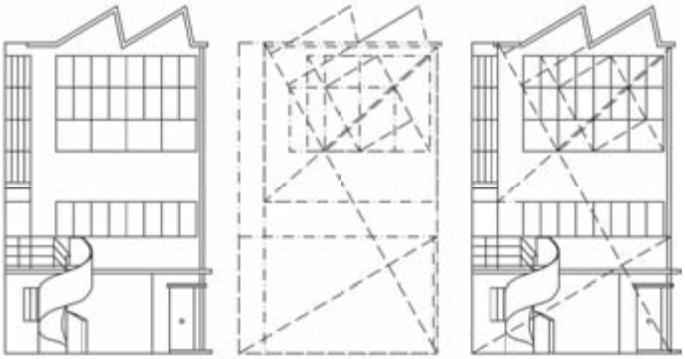


Abb.44.: Le Corbusier: Ozenfant's studio, Paris 1922; *Vorlage entnommen aus: Kurrent F. et al. (1997)*

108 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 42
109 *Le Corbusier (1993)*, Seiten 61-74
110 *Le Corbusier (1993)*, Seite 71
111 *Le Corbusier (1993)*, Seite 72
112 *Lorenz W. E. (2002)*, Seiten 45, 95

Malerei

Auch Le Corbusier's Gemälde aus der Zeit der Errichtung des Studio Ozenfant basieren auf einer Maß-Regel. So liegt etwa der *Composition à la guitare et à la lanterne* aus dem Jahr 1920 ein Kompositions-Schema zugrunde, das sich aus Rechtecken im goldenen Schnitt und Quadraten zusammensetzt.[113] Während aus einer vertikalen mittigen Teilung der Leinwand zunächst zwei goldene Rechtecke hervorgehen, resultiert eine weitere horizontale Teilung in vier Rechtecken, die ihrerseits einer Verkleinerung des Ganzen entsprechen. Die hauptsächliche Bild-Komposition wiederum befindet sich innerhalb eines Quadrates, das zerlegt in vier kleinere Quadrate mit dazwischen liegenden goldenen Rechtecken und einem noch kleineren Quadrat in der Mitte zu einer groben Definition der Elemente des Bildes führt. Durch eine Verfeinerung des Netzes aus Quadraten und goldenen Rechtecken werden schließlich immer feinere Teile des Gemäldes geometrisch erfasst.

Conclusio

Sowohl die Villa Schwob als auch das Wohnhaus und Atelier von Ozefant erfüllen zwei Grundvoraussetzungen für eine der fraktalen Geometrie nahe stehende Architektur, indem eine Grund-Idee ihre Teile untereinander und mit dem Ganzen verbindet und die einzelnen Elemente verschiedene Maßstabsebenen abdecken. Im Vergleich zu den zuvor genannten Beispielen eines F.L. Wrights oder A. Gaudís bleiben sie aufgrund des, in Ermangelung der Fortführung in die kleineren Maßstäbe, limitierten Bereichs dennoch mehr der euklidischen Geometrie verhaftet. Das trifft, wie bereits im Kapitel *E.2. Euklidisch-nahe Architektur* erwähnt, besonders auf jene Beispiele einer modernen Architektur zu, die als Reaktion auf den Historismus und den Jugendstil entstanden ist. Wenn nun darüber hinaus keine statistische Selbstähnlichkeit etwa durch die Umsetzung einer Grundidee vorliegt, verschiebt sich die Einordnung noch weiter in Richtung euklidisch nahestehende Architektur.

Gerrit Thomas Rietveld (1888-1964)

Haus Schröder-Schräder

Das *Haus Schröder-Schräder* in Utrecht aus dem Jahr 1924 (siehe ***Abb.45***) wurde von Gerrit Thomas Rietveld für die Innenarchitektin Truus Schröder-Schräder entworfen und gilt als komplettestes Beispiel der niederländischen *De Stijl* Bewegung, die im Jahr 1917 gegründet wurde. Die Kunstströmung steht im Zeichen einer Entwicklung in der die Naturform aufgehoben und durch Abstraktion jene Form gefunden werden sollte, von der nichts mehr weggenommen werden kann, mit dem Ziel die reine Struktur der Natur freizulegen.[114] So beschäftigte sich etwa Piet Mondrian, eigentlich Pieter Cornelis Mondriaan, der wohl bedeutendste Maler der Gruppe, bereits vor der Gründung der Bewegung mit der Reduktion auf Rhythmus und Harmonie, um zum Wesentlichen zu gelangen, und stellt die Suche nach dem Universellen des Abstrakten im Gegensatz zum Individualismus der Natur in das Zentrum seiner Arbeit.[115] Höhepunkt dieser Entwicklung bilden jene Gemälde ab dem Jahr 1921, die aus einem Raster sich rechtwinkelig kreuzender unterschiedlich starken schwarzer Linien aufgebaut sind mit dazwischen liegenden verschieden großen Feldern in den Primärfarben Gelb, Rot und Blau beziehungsweise Weiß, und die eine vollkommene Ausgewogenheit ausstrahlen.

Abb.45.: G.T.R ietveld: *Haus Schröder-Schräder*, Utrecht 1924; ***Süd-Ost Ansicht aus: Weston, R. (2004)***

Erklärtes Ziel der De Stijl Bewegung, deren Namen auf die von Theo van Doesburg herausgegebenen Kunstzeitschrift zurückgeht, die auch zu ihrem Sprachrohr wird, ist vorrangig das Durchbrechen konventioneller Begrenzungen.[116] Dementsprechend soll sich auch die Architektur von der Einengung durch eine vorweggenommene Definition der äußeren Form befreien, indem Funktionsbereiche nicht in einen Würfel gepresst werden, sondern sich von innen nach außen entwickeln.[117][118] Diese Überlegungen führen schließlich zu Wänden, die etwa beim Haus Schröder-Schräder über deren Berührungspunkte weitergeführt werden oder sich durchdringen (siehe ***Abb.45***, ***Seite 82***). Dadurch entstehen, unterstützt durch Schiebewände im Inneren und nur nach Außen im 90-Grad Winkel zu öffnende Fenster, fließende Übergänge

113 *Padovan R. (2002)*, Seiten 29-31

114 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 437 und *Padovan R. (2002)*, Seite 4

115 *Bax M. (2001)*, Seite 12 und *Padovan R. (2002)*, Seite 96

116 *Padovan R. (2002)*, Seiten 2, 3, 34

117 *Padovan R. (2002)*, Seite 95; Aus dem Fünften Punkt des 1924 erschienen Manifest *Towards a Representational Architecture* von Van Doesburg.

118 *Kruft H.-W. (1995)*, Seite 438

auch mit der Umgebung.[119] Eine weitere Charakteristik ist das Flachdach als Konsequenz der Forderung nach einer Anordnung von zwei-dimensionalen Flächen, die miteinander einen rechten Winkel einschließen, wodurch geneigte Dächer ausgeschlossen werden.

Das Haus Schröder-Schräder setzt sich aus voneinander getrennten und aneinander vorbeiführenden Flächen zusammen, wodurch die Räume zwar definiert aber nicht eingekapselt werden, und aus horizontalen beziehungsweise vertikalen Linien, die jeweils einem Bauteil, als Scheibe etwa einem Balkon, einem Vordach, oder einer Brüstung und als lineare Komponente etwa einer Regenrinne entsprechen.[120] Um die Idee der Trennung der Elemente stärker hervorzuheben, unterscheiden sie sich an ihren Berührungspunkten auch hinsichtlich Farbe oder Größe. Diesem Prinzip der Abfolge von Linien und Flächen unterschiedlicher Größe und Funktion ordnet sich jeder Teil der Komposition unter, wodurch das Haus Schröder-Schräder eher der fraktal-ähnlichen Architektur zugeordnet werden kann:[121]

Linien und Flächen

- Die Hauptelemente aus großen weißen Scheiben bestimmen die räumliche und konstruktive Struktur des Hauses.
- Kleinere Scheiben in vier verschiedenen Grautönen oder in Weiß formen die Balkone und die Brüstungen.
- Die linearen Elemente in den Farben Grau, Rot, Gelb und Blau, zu denen die Eisenträger wie Stützen und Balken aber auch das Regenfallrohr oder das Geländer zählen, sind streng horizontal oder vertikal angeordnet.
- Fenster, Türen und Geländer fügen sich, in ihrer Größe ausschließlich durch den Zweck etwa des Raumes bestimmt, in jene Öffnungen, die zwischen den vorherigen Teilen ausgespart bleiben.

Die Grundidee der Auflösung von Begrenzungen durch aneinander vorbeiführende Linien und Flächen findet sich entsprechend der Forderung der De Stijl Bewegung nach einer Integration aller Künste auch bei der Sitzbank am Eingang oder bei der Inneneinrichtung, etwa dem rot-blauen Stuhl von T. Rietveld, der aus einem sich überschneidenden Holzgerüst und Platten für die Sitzfläche beziehungsweise für die Rückenlehne besteht. Das Haus Schröder-Schräder ist demnach ein Beispiel dafür, dass glatte Oberflächen bei der Wandgestaltung und ein Verzicht auf Ornamente nicht notwendigerweise zu einer der euklidischen Geometrie nahe stehenden Architektur führen müssen, sondern dass vielmehr die Abdeckung verschiedener Maßstabsebenen durch unterschiedliche Elemente, die der gleichen Grundidee folgen, für eine fraktal-ähnliche Architektur wesentlich ist.

Bruce Alonzo Goff (1904-1982)

Vor allem das Frühwerk von Bruce Alonzo Goff zeigt sich von den Publikationen und ausgeführten Entwürfen zeitgenössischer Architekten beeinflusst, etwa von Vertretern der *Prairie School* wie seinem Mentor F.L. Wright und dessen Ideen zur *organischen Architektur*, aber auch von L.H. Sullivan oder A. Gaudí und selbst von Vertretern der später als *International Style* bekannt gewordenen Architekturströmung, woraus sich schließlich eine durch die Verbindung zur Musik inspirierte, außergewöhnliche Architektur entwickelt, die nur schwer in eine bestimmte Kategorie eingeordnet werden kann.[122] B.A. Goff's Entwürfe, die in weiterer Folge einen unabhängigen Ausdruck aufweisen, lassen sich ob ihrer Vielfalt nur schwer charakterisieren, zeichnen sich aber häufig durch die Verwendung ungewöhnlicher Materialien, mitunter durch einen Reichtum an Dekoration, durch eine Formenvielfalt und stets durch die Verpflichtung, den Wünschen und Vorstellungen seiner Auftraggeber gerecht zu werden, aus.[123] Aufgrund der überwiegend die Quaderform sprengenden expressiven kristallinen oder gekurvten Formen und dem Detailreichtum, tritt die Architektur des B.A. Goff schließlich in Gegensatz zum International Style und zeigt auf mannigfaltige Weise Eigenschaften der fraktalen Geometrie. Wie L.H. Sullivan und F.L. Wright erklärt sich auch B.A. Goff einer organischen Architektur verhaftet, dessen wenn auch heterogener Begriff im wesentlichen einen von Innen nach Außen gerichteten Entwurfsprozess unter der natürlichen Verwendung der Materialien umfasst.[124]

Gene und Eugene Bavinger Haus

Zwischen dem Grundriss des *Gene und Eugene Bavinger House* in der Nähe von Norman in Oklahoma (1950-1955) und dem zu den Kopffüßern (*Cephalopoda*) zählenden *Nautilus* besteht eine gewisse Analogie. Diese liegt in der logarithmischen Spirale (siehe ***Abb.46**. **Seite 84***) begründet, die sich bei dem lebenden Fossil in der aus dem Wachstum der Kammern ergebenden Form der Schale wieder findet und im Gebäude dem Verlauf der sich schraubenförmig nach oben windenden Außenwand aus geschichteten Bruchsteinen entspricht, ähnlich dem Entwurf von B.A. Goff für das *Constance Gill Haus* aus dem Jahr 1945, der allerdings nicht zur

selbstähnliche Kurve

119 *Padovan R. (2002)*, Seite 17 und *Küper M. (1992)*, Seite 100
120 *Küper M. (1992)*, Seite 98
121 *Weston, R. (2004)*, Seite 48
122 *Goff B. (1995)*, Seite 7 und *Goff B. (1988)*, Seiten 7-13
123 *Goff B. (1995)*, Seiten 13, 20, 62
124 *Pevsner N. et al. (1992)*, Seiten 464f

Ausführung gelangte.[125] Die Form stellt auch den Bezug zur fraktalen Geometrie her, indem die logarithmische Spirale die Eigenschaft besitzt selbstähnlich zu sein, das heißt sie ist invariant gegenüber einer zentrischen Streckung mit dem Faktor $e^{k \cdot \varphi}$, wenn gleichzeitig um den Winkel φ gedreht wird, wobei $k = tan\alpha$ der Steigung und α dem Steigungswinkel entsprechen. Folglich ist in jedem Punkt der Kurve der Winkel, den die Tangente mit der Geraden durch den Pol, das ist der Punkt, den die Spirale umkreist ohne ihn zu erreichen, einschließt, gleich groß.

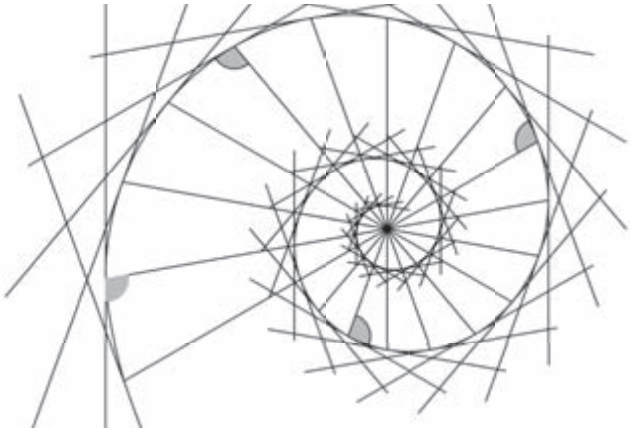


Abb.46.: Logarithmische Kurve*; Steigungswinkel = 10°*

Innerhalb dieser äußeren Begrenzung des Gene und Eugene Bavinger House sind die in Bereiche aufgelösten ineinander übergehenden Räume als offene Plattformen von einem Stahlmast abgehängt und steigen, über eine flache Wendeltreppe miteinander verbunden, in Form einer diesmal regulären Spirale bis zu einer adäquaten Höhe von drei Stockwerken empor.[126] Die Plattformen selbst, die jeweils durch eine gespiegelte Form überdacht werden, nehmen in einem kleineren Maßstab als Funktionsbereiche für Wohnen, Schlafen, Malen und Spielen erneut das übergeordnete Thema der Kurve auf, diesmal als kreisrunde Schalen, und treten in den oberen Bereichen zum Teil aus der logarithmischen Spirale hervor, wodurch sie von außen erfahrbar werden.[127] Auch hier besteht eine Verbindung zur logarithmischen Spirale, indem sich diese mit einer Steigung von $k \to 0$ ebenfalls einem Kreis annähert.

Joe Price House (Shin'enKan)[128]

Das Grund-Thema des *Joe Price House* in Bartlesville in Oklahoma (1956-1958), das von B.A. Goff für seinen Mentor der späteren Jahre Joe Price entworfen und mehrmals erweitert wurde (1966-1969, 1974-1976), basiert auf einem gleichseitigen Dreieck, dessen Innenwinkel der Ecken von jeweils 60 Grad, beziehungsweise ein Vielfaches oder ein Bruchteil davon sowohl das Ganze als auch seine Teile bestimmt.[129] Das betrifft im großen Maßstab etwa die Form des zentralen Wohn-Bereichs, der ein gleichseitiges Dreieck beschreibt und von dem aus weitere Räume, an die teilweise später angebaut wurde, windmühlenartig abzweigen, aber auch Wände, die nicht senkrecht stehen, sondern sich schräg nach außen neigen, um dann in die nach innen ansteigende Untersicht des Daches überzugehen, das wiederum eine ebenfalls dreieckige Aussparung für das Oberlicht aufweist. Dreieckige Formen finden sich auch in der Einfriedung des Hofes, in der Dachneigung, an den Wänden des Musikzimmers beziehungsweise als spitzwinkelige Variante in der dortigen Decken-Verkleidung, die zur qualitativen Verbesserung der Akustik beitragen, oder als Elemente eines Flechtwerks, das zur Beschattung der überdachten und verglasten Veranda dient. Hexagonale Formen reichen schließlich als Varianten des Grundthemas von den die Ecken des Haupt-Raumes flankierenden *Serviceelementen* wie dem Badezimmer, über die in den Boden eingelassene Sitzfläche als *Konversationsgrube* im zentralen Wohnbereich, der Wanne im Badezimmer, dem Bett, den Hockern und dem Esstisch als einzige variable Einrichtungsgegenstände des ersten Bauabschnittes, der Form mancher Fenster, der ersten Erweiterung um ein hexagonales Museum mit ebenfalls hexagonalen Nischen, bis hin zum Muster im Glasdesign der Türen zum Hauptraum.[130] Demnach überspannen einzelne Elemente im Sinne einer der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur viele verschiedene Maßstabsebenen und werden dabei durch ein Grundmotiv zusammengehalten. Eine solche Analogie zur fraktalen Geometrie wurde bereits durch Charles Jencks in seinem Buch *die Architektur des springenden Universums* beschrieben.[131]

Gleichseitiges Dreieck

Steven Holl (geb. 1947)

Im Gegensatz zu den bisher in diesem Kapitel beschriebenen Gebäuden, die im wesentlichen vor der Zusammenfassung vorangegangener Untersuchungen und der darauf folgenden Formulierung zur *fraktalen Theorie* durch B. Mandelbrot errichtet wurden, zählt Steven Holl zu jener Gruppe von Architekten, die bereits mit der Theorie vertraut ist und diese somit bewusst in ihre Entwürfe aufnimmt.

125 *Goff B. (1988)*, Seiten 80-82 und *Cook J. (1978)*, Seite 46

126 *Goff B. (1995)*, Seite 24

127 *Goff B. (1988)*, Seite 109

128 1996 durch Brandstiftung zerstört.

129 *Goff B. (1988)*, Seite 141

130 *Goff B. (1988)*, Seiten 140-149, 239f und *Cook J. (1978)*, Seite 84

131 *Jencks C. (1998)*, Seite 47

Sarphatistraat Offices

An das Bürogebäude *Sarphatistraat Offices* (1996-2000) am *De Singel-Kanal* in Amsterdam, einer renovierten ehemaligen U-förmigen Lagerhalle aus Sichtziegel, dockt eine pavillonartige Erweiterung an, die mit dem *Menger Schwamm* (siehe ***Abb.47***), einem mathematischen Objekt das vom österreichischen Mathematiker Karl Menger (1902-1985) im Jahr 1926 erstmals veröffentlicht wurde, in ihrem porösen Charakter eine durchaus gewollte Ähnlichkeit aufweist. Die Form des Menger Schwamms entsteht dabei durch kontinuierliche Aushöhlung eines Basis-Würfels mit der Kantenlänge L. Dieser wird zunächst gedrittelt, das heißt in drei mal drei mal drei, also in Summe 27 kleinere Würfel mit der Kantenlänge $L_0/3$ zerlegt, von denen in weiterer Folge die sechs mittleren der Seitenflächen und jener im Zentrum des Würfels entfernt werden, wodurch mit zunehmender Anzahl der Iteration i einerseits die Oberfläche O_i wächst und andererseits das Volumen V_i schrumpft (siehe ***Abb.47***). Mit den verbleibenden zwanzig kleineren Würfeln wird gleichermaßen verfahren und so fort, bis schließlich nach unendlich vielen Iterationen $i \to \infty$ ein Objekt mit einer unendlich großen Oberfläche aber ohne Volumen entsteht. Die Formeln zur Berechnung des Volumens beziehungsweise der Oberfläche einer bestimmten Iteration i lauten in Bezug auf einen Grund-Würfel der Seitenlänge L_0 (mit einer Seitenfläche des Grund-Würfels $F_0=L_0^2$ und einem Volumen $V_0=L_0^3$):

Menger Schwamm

$$V_i = {L_i}^3 \cdot N_i = \left(\frac{L_0}{3^i}\right)^3 \cdot {N_0}^i = {L_0}^3 \cdot \left(\frac{N_0}{3^3}\right)^i = V_0 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^i$$

$$O_i = F_0 \cdot \frac{2 \cdot 20^i + 4 \cdot 8^i}{9^i}$$

Daraus folgt für i=1 und i=10:

- Für das Volumen:

$$V_1 = V_0 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^1 = V_0 \cdot 0{,}7407$$

$$V_{10} = V_0 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^{10} = V_0 \cdot 0{,}0497$$

- Für die Oberfläche:

$$O_1 = F_0 \cdot \frac{2 \cdot 20^1 + 4 \cdot 8^1}{9^1} = F_0 \cdot 8$$

$$O_{10} = F_0 \cdot \frac{2 \cdot 20^{10} + 4 \cdot 8^{10}}{9^{10}} = F_0 \cdot 5874{,}837$$

Analog zum Menger Schwamm besteht der auf einem rechteckigen Grundriss basierende Pavillon aus unterschiedlich großen Öffnungen, die in Abhängigkeit innerer und äußerer Einflüsse wie Lichteinfall, Sonnenschutz und Ausblick aus der perforierten Kupfer-Oberfläche geschnitten sind. Die auf diese Weise entstehende schwammähnliche Struktur wird in die dritte Dimension erweitert, etwa durch einen in den offenen Innenraum reichenden Balkon, einen offenen Besprechungsraum als Galerie oder dem Windfang, aber auch durch die Tiefe des Raumes, der sich zwischen der inneren und der äußeren perforierten Schicht aufspannt. Diese Maßnahmen führen schließlich zu einer Vergrößerung der Oberfläche ähnlich dem Menger Schwamm.

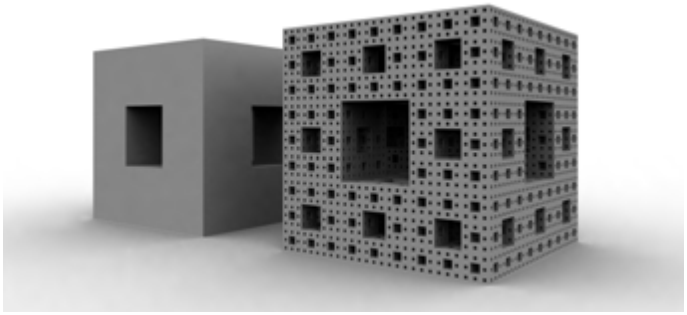


Abb.47.: Menger Schwamm, 1. Iteration und 4. Iteration

Die Porosität des mathematischen Objekts unterstützt auch das von dem Musikstück *Patterns in a Chromatic Field* von Morton Feldman hergeleitete Konzept, einen Raum mit leichten optischen Phänomenen durch zufallsgenerierte reflektierende Farben zu erzeugen.[132] Der *chromatische Raum* entsteht dabei durch das Licht zwischen den perforierten Schichten in Kombination mit den farbigen Elementen an der Außenseite des inneren Wandelements.[133] Vor allem in der Nacht treten die verschieden großen Öffnungen als Farbtupfer, die sich im Kanal spiegeln, stark in Erscheinung, wobei manche Ausschnitte wie eine Wand oder ein Vorhang aus Licht erscheinen.

Simmons Hall

Simmons Hall (1999-2002), ein von S. Holl geplantes Studentenwohnheim am ***Massachusetts Institute of Technology*** in Cambridge bei Boston, lässt gleichfalls die Inspiration durch den *Menger Schwamm* erkennen, diesmal allerdings als Durchlässigkeit einer porösen Struktur. Diese wird durch verschieden große Löcher in der Fassade erzielt und vermittelt als optische Komponente zwischen Stadt und

Monotonie

132 *Holl S. (2002)*, Seite 36

133 *Holl S. (2003)*, Seite 350

Campus, beziehungsweise unterstützt ähnlich einer Lunge die thermische Zirkulation. Die größten Einschnitte entsprechen dabei in etwa den Eingängen, den Außen-Terrassen und den Korridoren mit Aussicht. Hingegen lassen Berührungen der vertikalen durch das Gebäude verlaufenden organisch geformten Volumina – die als soziale Zentren der Gemeinschaftsbereiche fungieren – mit der Außenhaut etwas kleinere unregelmäßige Fensteröffnungen entstehen, die Luft und Licht in das Innere des Blocks leiten.[134] Die kleinste Einheit entspricht schließlich den unzähligen quadratischen und gleich großen Fenstern, deren Abstände zueinander ebenfalls gleich groß sind und auf diese Weise an der Außenseite einen regelmäßigen Raster, der einer Präfabrikation entgegen kommt, entstehen lassen. Jeweils drei übereinander angeordnet entsprechen dann der Geschosshöhe beziehungsweise ergeben nebeneinander die Breite eines Einzelzimmers, in denen sämtliche Fenster nach außen geöffnet werden können.[135] Nachdem das Gebäude mit etwa 115 Metern Länge und einer Höhe von zehn Geschossen ein beträchtliches Volumen aufweist, entsteht der Eindruck, die verschieden großen Einschnitte versuchen der Monotonie, die bei einem Block dieser Größe und einem regelmäßigen Raster aufkommt, entgegen zu wirken. Nachdem allerdings ohne maßstäblichen Vergleich auch zwei oder gar jedes der kleinen Fenster von außen betrachtet als ein Geschoss gelesen werden kann und die Anzahl der Geschosse dann 15 beziehungsweise 30 betragen würde, erscheint das Volumen größer als es tatsächlich ist. Eine solche optische Vergrößerung auch des regelmäßigen Rasters stellt in diesem Zusammenhang die Maßnahme der Verwendung unterschiedlich großer Öffnungen zur Vermeidung von Monotonie wiederum in Frage. Darüber hinaus weist Simmons Hall Elemente unterschiedlicher Größenordnung nicht in denselben Maßen auf wie es etwa bei F.L. Wrights Robie House der Fall ist, da im Bereich zwischen den wenigen großen und den vielen kleinen Öffnungen weitere fehlen, also solche, die in Maßstab und Anzahl dazwischen liegen.

Weitere Beispiele

Eiffelturm

Bereits im Jahr 1884 hatten Maurice Koechlin und Emile Nouguier, als sie bei der Firma *G. Eiffel & Cie.* beschäftigt waren, die Idee anlässlich der bevorstehenden Pariser Weltausstellung des Jahres 1889 einen sehr hohen Turm als markantes Zeichen zu errichten. Eine erste Skizze der beiden Ingenieure zeigt einen unten gespreizten und nach oben zu einer Spitze zusammenlaufenden, aus dem Brückenbau abgeleiteten Pylon aus Gitterträgern, beziehungsweise vier Pylone die sich nach oben hin aneinander schmiegen.[136] Diese Skizze wurde von dem Architekten Stephen Sauvestre weiterentwickelt, indem er an den vier Seiten der Basis monumentale Bögen hinzufügte, um den Eindruck der Stabilität zu erhöhen.[137] Damit waren auch die wesentlichen Charakteristika des schließlich nach Gustave Eiffel (1832-1923) benannten zwischen 1887 und 1889 errichteten 300 Meter hohen Turms festgelegt: Zum Einen sind das die vier im großen Maßstab erkennbaren A-förmigen Elemente, von denen je zwei eine gemeinsame Kante aufweisen, und zum Anderen ist das die bereits auf der ersten Skizze ersichtliche, den statischen Berechnungen zu verdankende nach innen gerichtete Krümmung der Stahl-Konstruktion.[138] Das räumliche Fachwerk verjüngt sich somit ähnlich dem Stamm eines Baumes von unten nach oben, um auf diese Weise dem Winddruck entgegenzuwirken und die Kräfte auf eine breite Grundfläche, vergleichbar mit ausgreifenden Wurzeln, abzuleiten. Diese großmaßstäbliche Form wird in ein Stabwerk aufgelöst, dessen Stäbe ihrerseits wieder aus einem Stabwerk bestehen, wodurch das Gesamtgewicht im Vergleich zu massiven Trägern stark reduziert und die Angriffsfläche für den Wind minimiert wird.[139] Der Turm besteht somit aus Elementen, die sämtlich eine ähnliche Struktur als Stabwerk im Stabwerk zur Ableitung der Kräfte aufweisen, womit dieses Beispiel der Ingenieurskunst über Eigenschaften einer der fraktalen Geometrie nahe stehenden Architektur verfügt. B. Mandelbrot bemerkt darüber hinaus, dass in Anlehnung an das Sierpinski Dreieck, einer Kurve deren sämtliche Punkte Verzweigungspunkte sind, dem Eiffelturm die *Vorstellung von einer fraktalen Kurve voller Verzweigungspunkte innewohnt*.[140]

Stabwerk im Stabwerk

Internationales Konferenzzentrum von Kyoto

Während die Räume des von Sachio Otani (1924-2013) entworfenen und 1966 eröffneten Konferenzzentrums in Kyoto, mit Erweiterungen aus den Jahren 1972 beziehungsweise 1985, auf einem rechteckigen Grundriss basieren, sind die charakteristischen

Trapeze als Grund-Motiv

134 *Holl S. (2002)*, Seite 68

135 *Holl S. (2003)*, Seite 512

136 Pylon bezeichnet einen Pfeiler oder Mast einer Hängebrücke. *Pevsner N. et al. (1992)*, Seite 516

137 *Lemoine B. (1988)*, Seite 86

138 *Lemoine B. (1988)*, Seite 88

139 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 143

140 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 142, 143
Als Verzweigungspunkt wird ein Punkt einer Kurve genannt, wenn in seiner unmittelbaren Umgebung mehr als zwei Punkte der Kurve angrenzen.

Betonelemente der Konstruktion, die unterschiedliche Maßstäbe aufweisen, dreieckig oder trapezförmig.[141] Das Trapez entspricht dabei einer modernen Umsetzung der traditionellen Holzkonstruktion *gassho-zukuri*, wodurch ein Bezug zwischen Gegenwart und Geschichte hergestellt wird.[142] Dieses Grundthema, das vor allem im Schnitt und in der Ansicht deutlich hervortritt, setzt sich konsequent vom Ganzen bis zum Detail fort, wodurch auch dieses Beispiel über Eigenschaften einer der fraktalen Geometrie Nahe stehenden Architektur verfügt.

Wettbewerbsbeitrag zur Oper von Cardiff

Die Ausschreibung des im Jahr 1994 durchgeführten Architektur-Wettbewerbs für das *Cardiff Bay Opera House* hatte zwei wesentliche Vorgaben zum Inhalt: Das Opernhaus, als Heimstätte der *Welsh National Opera*, sollte sowohl eine symmetrische, hufeisenförmige Konzerthalle aufweisen als auch eine Verbindung zu dem durch die Reste der Schiffsbauindustrie geprägten Ort mit dem historischen ovalen Hafenbecken und den Werften herstellen. Es war etwas Neues gefragt bei gleichzeitiger Gewährleistung der Kontinuität. Aus diesem Grund wollte Greg Lynn (geb. 1964), der zu jenen Architekten gehört, die mit der Theorie der fraktalen Geometrie vertraut sind, bei seinem Wettbewerbsbeitrag Nostalgie aber auch die Negierung der Geschichte vermeiden. Im Zuge der Analyse der Umgebung entdeckte er als Schnittstelle zwischen Wasser und Land eine Selbstähnlichkeit in Form von Einbuchtungen, bei der die Wasserflächen förmlich von der natürlichen beziehungsweise von der künstlich veränderten Küstenlinie eingefasst werden.[143] Diese Charakteristik bleibt vom großen Maßstab der Buchten, die immer kleinere Buchten miteinschließen, bis zum kleineren Maßstab des Hafenbeckens erkennbar. Das Oval des Beckens diente dann seinerseits als Vorlage für den Generator eines Fraktals, das zwei Verzweigungen unterschiedlicher Orientierung mit verschiedenen Verkleinerungen als Wiederholung der Grundform aufweist.[144] Analog zu den Vorbildern in der Natur, die von verschiedenen Kräften wie Gezeiten oder Erosion beeinflusst sind, widerfährt dem Entwurf schließlich eine Anpassung an die inneren und äußeren Bedingungen der Bauaufgabe:[145]

- Berücksichtigung der Umgebung durch den Verlauf der Straßen, der unterirdischen S-Bahn, der Unterführung der Autobahn, der Kaimauer des Hafenbeckens, aber auch der Aussicht. So orientiert sich etwa die Konstruktion aus Rippenwänden, auf denen analog zu den Schiffen am Trockendock die einem Schiffsrumpf ähnelnden Körper des Opernhauses aufliegen, mit ihren Abzweigungen an solche vorhandene Linien des Ortes.[146]
- Berücksichtigung des Raumprogramms durch die logische Zuordnung von Bereichen unterschiedlicher Größe, wie Konzertsaal, Bühne, Foyer, Garderoben, Ladenflächen oder Proberäume, beziehungsweise durch deren spezifische Anforderungen wie jene an die Akustik.

Der Entwurf lässt demnach auf der einen Seite die Kontinuität der Umgebung als Charakteristikum des vorherrschenden Übergangs zwischen Land und Wasser erkennen, unterzieht sich aber auf der anderen Seite einer Wandlung durch äußere und innere Einflüsse. Die Selbstähnlichkeit der Küstenlinie wird demnach fortgesetzt, aber ähnlich dem natürlichen Erscheinungsbild nicht als Selbstgleichheit.

E.4. Conclusio

Die in diesem Kapitel beschriebenen Gebäude stammen vorwiegend aus dem 20. Jahrhundert und werden unterschiedlichen Stilen zugeordnet. Dabei scheinen zunächst jene Beispiele, die oberflächig betrachtet lediglich glatte Fassaden und keine Ornamente aufweisen, einer der euklidischen Geometrie nahe stehenden Architektur anzugehören. Allerdings konnte an Hand des Haus Schröder-Schräder von G. Rietveld oder dem Ozenfant's Studio von Le Corbusier gezeigt werden, dass bei näherer Betrachtung auch in dieser Gruppe Beispiele existieren die, wenn auch zum Teil auf wenige Maßstabsebenen beschränkt, Eigenschaften einer der fraktalen Geometrie nahestehenden Architektur aufweisen. Die Charakteristika für eine solche Nähe liegen in der Existenz von unterschiedlich großen Elementen, die durch eine oder mehrere Grund-Ideen miteinander in Verbindung stehen, das heißt, es handelt sich hierbei um Gebäude, bei denen das Ganze und seine Teile kohärent sind. Dieser Zusammenhang kann aus einem Grundmotiv hervorgehen, in einer gemeinsamen Proportion aller Teile begründet sein oder einem mathematischen Fraktal entspringen. Bei der zuletzt genannten Gruppe konnte allerdings gezeigt werden,

141 *Koepf H. (1990)*, Seite 242

142 *Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: Chaos and Fractals – New Frontiers of Science, 2. Auflage (Springer Verlag, New York, 2004)*, Seite 470

143 *Lynn G. (1999)*, Seiten 83ff

144 Es handelt sich um eine fraktalähnliche Struktur, weil das jeweilige Ausgangsobjekt, ähnlich dem gotischen Fenster, nicht verkleinert wird, also eine Abbildung keine Verkleinerung aufweist.

145 *Lynn G. (1995)*, Seiten 51f

146 *Lynn G. (1999)*, Seite 89

dass die bewusst nach der fraktalen Geometrie entworfenen Beispiele Grenzen aufweisen. Nachdem die Grundformen den Erfordernissen angepasst werden müssen, entstehen weniger deutlich statistisch selbstähnliche Strukturen wie es bei jenen Gebäuden der Fall ist, bei denen die Umsetzung einer Grundidee vom Ganzen bis zum Detail aus der Aufgabe selbst erfolgt. Es scheint schwieriger zu sein, die Funktionen in eine formales Konstrukt zu zwängen und dieses bis zum kleinsten Detail fortzuführen, als umgekehrt die Form aus einer den Entwurfsprozess begleitenden übergeordneten Idee zu generieren. Auch eine Überlagerung mehrerer Grundthemen, etwa jene der Horizontalität und des Winkels des Bugs bei Robie House, scheinen für eine Abdeckung vieler verschiedener Maßstabsebenen, durch Elemente, die miteinander im Zusammenhang stehen, förderlich zu sein. Die Fragen nach der Messbarkeit solcher Eigenschaften und den Auswirkungen auf die Qualität eines Gebäudes bleiben allerdings offen.

COMPUTERPROGRAMME

F. Computer-Programme
Mathematische Fraktale, Proportionen, Architektur

Bei den im Kapitel *B.1.2. Monsterkurven* beschriebenen Monsterkurven wächst die Anzahl der einzelnen Segmente bereits nach wenigen Iterationen stark an, wodurch eine von Hand gezeichnete Illustration sehr zeitintensiv wird. Erst durch die Leistungsfähigkeit der Computer konnten derartige Kurven tiefgreifender berechnet und ihre Charakteristika, wie Längenwachstum, Selbstähnlichkeit und Zerklüftung, entsprechend grafisch dargestellt werden, was letztendlich auch zur schnelleren Verbreitung der zur fraktalen Geometrie zusammengefassten Theorie beitrug. Aufgrund dieser dem Computer beigemessenen zentralen Rolle wird nachfolgend jene im vorangegangenen Kapitel angeführte fraktalähnliche Architektur durch die Beschreibung einzelner Computer-Programme und die daraus generierten Beispiele ergänzt. Diese Programme basieren im wesentlichen auf den klassischen mathematischen Fraktalen und sind in der Lage, Formen der gebauten wie natürlichen Umgebung, wenn auch stark abstrahiert, zu imitieren, um mögliche Erklärungen für das Wachstum beziehungsweise Rückschlüsse auf die Form (etwa das Vorhandensein von Selbstähnlichkeit) zu liefern. Eine solche Entwicklung führt etwa von der Koch-Insel über das Castel del Monte bis hin zur Shikhara hinduistischer Tempel, wobei die Architektur abgesehen von der Erweiterung in die dritte Dimension auch Überschneidungen der Segmente aufweist. Auch wenn die vorgestellten Algorithmen zu einer starken Abstraktion der Vorbilder führen und sich daher nur in eingeschränktem Maß für die Simulation von gebauter Architektur eignen, verdeutlichen sie dennoch zumindest in einer begrenzten Tiefe deren fraktale Eigenschaften. Dementsprechend unterscheidet sich eine Analyse der Stadt oder der Architektur unter Zuhilfenahme fraktaler Analogien von klassischen mathematischen Fraktalen vor allem darin, dass letztere die relevanten Eigenschaften theoretisch vom Ganzen bis zum unendlich kleinen Detail aufweisen, während erstere sich auf ein kleines Intervall beschränken.

F.1. Computer-Programme

In diesem Kapitel werden vor allem Algorithmen zur Erstellung sowohl von klassischen mathematischen Fraktalen als auch von Proportionsreihen beziehungsweise architektonischen Formen, die auf der fraktalen Geometrie basieren, an Hand von Passagen im Code der jeweiligen Computer-Programme erklärt. Die verwendete Skriptsprache für die Programmierung ist *Visual Basic for Applications* (VBA) und die benutzte Applikation das *computer-aided design* Programm von Autodesk (AutoCAD), wodurch die jeweiligen Ergebnisse als Vektorgrafiken und in einer für den Architekten vertrauten Umgebung vorliegen. Das kommt einer möglichen weiteren Bearbeitung durch den Benutzer entgegen. Um einen im Verhältnis zu einem angemessenen Ergebnis stehenden Zeitaufwand aufgrund der limitierten Rechenleistung der verwendeten Computer gewährleisten zu können, existiert bei sämtlichen Programmen für die im jeweiligen Formular einstellbare Anzahl an möglichen Iterationen eine obere Schranke als maximal wählbarer Wert.[01] Die im Folgenden einheitliche Darstellung von Ergebnissen ist schließlich dem Umstand zu verdanken, dass für den Plot als pdf-File beziehungsweise für das jeweilige Rendering immer dieselben Einstellungen verwendet wurden.

F.1.1. Visual Basic for Applications (VBA)

VBA ist eine Skriptsprache, die aus dem von *Microsoft®* entwickelten Dialekt von *BASIC*, dem *Visual Basic* (VB) hervorgeht, mit der etwa Abläufe innerhalb von *Microsoft® Office* Programmen gesteuert werden können. Nachdem es sich um eine interpretierte Programmiersprache handelt und demnach der Quellcode von einem Interpreter nicht nur ausgeführt, sondern von ihm zuvor auch eingelesen und analysiert werden muss, ist die Geschwindigkeit, mit der das Programm läuft, im Vergleich zu Compiler-Sprachen, die das Programm

VBA
Vor- und Nach-Teile

01 Die vorliegenden Berechnungen erfolgten auf verschiedenen Rechnern mit unterschiedlichen Konfigurationen.

in Maschinencode übersetzen, der vom Prozessor direkt ausgeführt wird, langsam. Der Vorteil liegt aber darin, dass VBA von der Rechnerarchitektur unabhängig ist, solange der Quellcode des Interpreters dort auch übersetzt werden kann. Ein weiterer Vorteil von VBA in AutoCAD liegt in der Möglichkeit im VBA-Editor zu debuggen, wodurch Fehler schneller ausgeforscht werden können. Die zukünftige Unterstützung von VBA in AutoCAD ist aber fraglich, nachdem die Applikation seit AutoCAD 2010 nicht mehr Bestandteil der Standardinstallation ist, sondern das VBA-Modul gesondert heruntergeladen und installiert werden muss.[02]

F.2. Initiator/Generator mit VBA

Monsterkurven wie die Koch-Kurve entstehen aus elementaren Regeln, bei denen ein Initiator, beispielsweise eine in AutoCAD gezeichnete Strecke, durch einen Generator, etwa einer Polygonlinie mit mindestens drei Punkten, die vom Anfangspunkt des Initiators bis zu dessen Endpunkt reicht, ersetzt wird. Jedes Segment des Generators geht somit durch Ähnlichkeitsabbildungen, die in weiterer Folge bei jeder Iteration wiederum auf jedes einzelne Segment angewandt werden, aus dem Initiator hervor. Während der Algorithmus selbst einfach beschreibbar ist, erscheint das Ergebnis nichtsdestoweniger nach mehreren Iterationen mitunter sehr komplex. Nachdem aber ein Fraktal erst dann vorliegt, wenn die Ersatzregeln unendlich oft angewendet werden, weil erst dann jeder noch so kleine Ausschnitt dem Ganzen gleicht, bleiben die fraktalen Eigenschaften dennoch, selbst als Ausgabe eines Computer-Programmes – etwa einer Bildschirm-Darstellung oder eines Plots – auf einen bestimmten Bereich beschränkt.

F.2.1. Die Koch-Kurve als Computer-Programm

Varianten der Koch-Kurve

Das Konstruktionsprinzip, das bei der Koch-Kurve zur Anwendung kommt, beginnt zunächst mit einer Strecke der Länge initL als Initiator, der anschließend durch einen Generator bestehend aus vier Teilstrecken von einem Drittel Länge des Initiators ersetzt wird. Dieses Prinzip wird in weiterer Folge auf alle vier Teilstrecken angewandt, woraus 16 neue entstehen, die wieder in gleicher Weise ersetzt werden und so fort. Wenn die beiden mittleren Segmente des Generators, die bei der eigentlichen Koch-Kurve aus zwei Seiten eines nach oben weisenden gleichseitigen Dreiecks bestehen, durch die beiden symmetrischen Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks ohne Basis ersetzt werden, so entstehen Varianten der Koch-Kurve, deren jeweiliger Konstruktionswinkel α aus dem Seitenwinkel des Dreiecks hervorgeht. Dieser Winkel kann nun zwischen null und 90 Grad (jeweils exklusive) variieren und beträgt bei der eigentlichen Koch-Kurve 60 Grad. Je nach Steilheit handelt es sich um eine stärker zerklüftete Variante der Koch-Kurve (siehe *Abb.48*), die einen größeren Konstruktionswinkel α und damit einen schmaleren Abstand zwischen dem zweiten und vierten Punkt beziehungsweise einen spitzen Winkel im dritten Punkt des Generators aufweist, oder um eine flachere mit einem kleineren Konstruktionswinkel und einem größeren Abstand.

Der Konstruktionswinkel

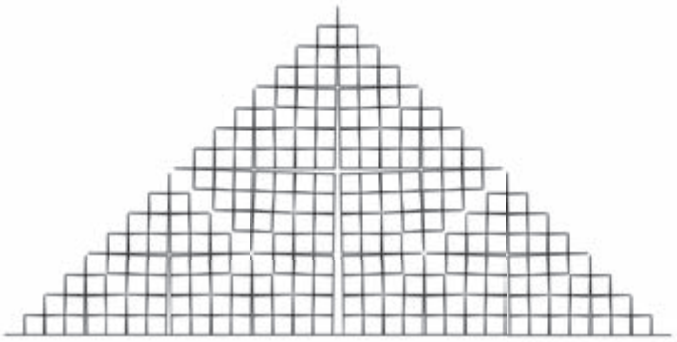


Abb.48.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 89 Grad; L = 12,84 * initL

Mit dem Konstruktionswinkel α ändert sich auch der Skalierungsfaktor s, der bei der eigentlichen Koch-Kurve mit einem Winkel von 60 Grad zunächst ein Drittel beträgt und etwa bei der 89 Grad Variante auf 49,1 Prozent ansteigt, während er bei der 30 Grad Variante auf 26,8 Prozent sinkt. Dadurch ändert sich auch die Geschwindigkeit, mit der die Kurve gegen Unendlich strebt, da ein größerer Faktor gleichbedeutend mit einem längeren Segment des Generators in Bezug auf die Initiator-Länge ist und daher die Gesamtlänge des Generators im Verhältnis zu einem kleineren Faktor ansteigt. Nachdem der Skalierungsfaktor s vom Konstruktionswinkel α und der Initiator-Länge abhängt, kann dieser wie folgt abgeleitet werden:

- Zwischen dem mittleren offenen Abstand genLmiddle und der Länge eines Segmentes des Generators genL besteht zunächst folgender Zusammenhang:

  $$\frac{genLmiddle}{2} = genL \cdot \cos(\propto)$$

  Die Initiator-Länge initL setzt sich wiederum aus zwei Segmenten des Generators genL und dem offenen Abstand genLmiddle zwischen dem zweiten und vierten Punkt des Generators zusammen:

  $$initL = 2 \cdot genL + genLmiddle$$

02 *http://www.autodesk.de/ (29.04.2012)*

Nach entsprechender Umformung folgt daher:

$$genLmiddle = \frac{initL \cdot \cos(\propto)}{1 + \cos(\propto)}$$

- Im Programm lauten die entsprechenden Zeilen:

```
Dim genLmiddle As Double
genLmiddle =    (initL * Cos(angle * (Pi / 180))) / _
                (1 + Cos(angle * (Pi / 180)))
Dim scalingFact As Double
scalingFact = (initL - genLmiddle) / (2 * initL)
```

- Das Abbruchkriterium des Programms ist durch die vom Benutzer gewünschte Anzahl der Wiederholungen maxNrec festgelegt:

```
If rec <= maxNrec Then
    ...
end if
```

- Die Wiederholung erfolgt als Rekursion, das heißt die Prozedur wird in sich selbst neuerlich aufgerufen:

```
Sub fract(rec As Integer, startPoint() As Double, _
    endPoint() As Double, scalingFact As Double, _
    angle As Double)
```

Dieser neuerliche Aufruf der Prozedur, bei dem auch der Zähler für den Durchlauf um eins erhöht wird, erfolgt für jedes der vier Segmente, nachdem der jeweilige Start- und Endpunkt neu berechnet wurde:

```
    startPoint(0) = ...
    fract rec + 1, startPoint, endPoint, scalingFact, angle
    startPoint(0) = ...
    fract rec + 1, startPoint, endPoint, scalingFact, angle
    ...
end sub
```

Das Programm als L-System

Bei der Programmierung als L-System besteht der Initiator der Koch-Kurve aus einem Buchstaben, etwa F, der durch eine entsprechende Kette von Symbolen F+F--F+F, dem Generator, ersetzt und erst im Anschluss an die letzte Wiederholung grafisch ausgegeben wird, mit F als Strecke und + beziehungsweise - als Winkel (siehe *Abb.49*).

Abb.49.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 30 Grad; L = 1,39 * initL

- Die Symbole des Generators werden zunächst in einem Array (Feld) gespeichert:

```
Dim arrSymb As String
```

- Dann folgt die Ermittlung der Länge des Array, um anschließend jede einzelne Stelle darin analysieren zu können, wobei die Ergebnisse dieser Analyse in ein neues leeres Array übernommen werden:

```
Dim count As Long
count = Len(arrSymb)
Dim arrSymbNew As String
For i = 0 To count - 1
```

- Innerhalb der Schleife wird das Symbol der jeweiligen Stelle im Array als String Symb zwischengespeichert:

```
    Symb = Mid(arrSymb, i + 1, 1)
```

- Der String Symb wird nun mit den verwendeten Symbolen, etwa F, + und -, verglichen und das Ergebnis aus dieser Untersuchung an den neuen Array angehängt, wobei + und - jeweils unverändert übernommen und F durch eine entsprechende Kette von Symbolen arrSymbF $F \rightarrow F + F - -F + F$ ersetzt wird:

```
    If Symb = „F“ Then
        arrSymbNew = arrSymbNew & arrSymbF
    End If
```

- Solange die maximale Anzahl an Wiederholungen nicht erreicht ist, wird nach der Schleife das neue Array schließlich zu jenem Array, das im nächsten Durchlauf untersucht werden soll:

```
    arrString = arrNewString
```

- Das Ergebnis nach 3 Iterationen lautet:

F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F-
-F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--
F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F+F+F--
F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F

Bei der grafischen Übersetzung entspricht F schließlich einer Strecke mit einer bestimmten Länge, das + einem Richtungswechsel um 60 Grad gegen den Uhrzeigersinn und das - einem Richtungswechsel um 60 Grad im Uhrzeigersinn (siehe *Abb.50*).

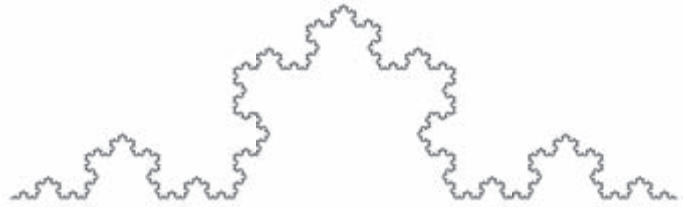


Abb.50.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 60 Grad; L = 1,78 * initL

Programm-Erweiterungen

- Das Skript kann schließlich um mehrere Symbole, die wieder durch Ketten von Symbolen ersetzt werden, oder um Äste erweitert werden:

```
If Symb = „F“ Then
   arrSymbNew = arrSymbNew & arrSymbF
End If
If Symb = „X“ Then
   arrSymbNew = arrSymbNew & arrSymbX
End If
If Symb = „Y“ Then
   arrSymbNew = arrSymbNew & arrSymbY
End If
```

Die Kennzeichnung eines Astes erfolgt zunächst wieder durch verschiedene Symbole, etwa ‚[‘ für den Start und ‚]‘ für das Ende. Bei der grafischen Übersetzung wird dann am Ende eines jeden Astes auf dessen zwischengespeicherte Anfangsposition zurückgesetzt (siehe *Abb.51*):

```
If posInArr = „]“ Then
   counterTwig = counterTwig - 1
   Dim posArr As Double
   posArr = 2 + counterTwig * 3
   pointA(0) = AbzweigungsPunkte(posArr + 1)
   pointA(1) = AbzweigungsPunkte(posArr + 2)
   pointA(2) = AbzweigungsPunkte(posArr + 3)
   ...
End If
```

$F \rightarrow F$

$X \rightarrow [+YFX][--YFX]$

$Y \rightarrow YF$

Abb.51.: Baumartige Verzweigung als L-System nach 6 Schritten

Koch-Insel und Zufall

Die eigentliche Koch-Insel besteht aus drei aneinandergefügten Koch-Kurven, wobei je ein Initiator einer Seite eines gleichseitigen Dreiecks entspricht, wodurch der Konstruktionswinkel der einzelnen Koch-Kurven mit 60 Grad identisch mit dem Innenwinkel einer Ecke des Basis-Dreiecks ist. Besteht das Basis-Objekt, das aus den Initiatoren gebildet wird, nun nicht mehr aus drei, sondern aus n-Ecken, so unterscheiden sich die Innenwinkel in den Ecken des Polygons und infolge dessen zwangsläufig auch der Konstruktionswinkel der einzelnen Koch-Kurven an dessen Seiten. Während nämlich der Innenwinkel alphaPoly der Ecken des Polygons multipliziert mit der Anzahl der Ecken n $(n-2)\cdot 180°$ betragen muss, um eine geschlossene Insel zu erhalten, darf der Konstruktionswinkel dabei 90 Grad nicht überschreiten und muss dementsprechend angepasst werden:

Polygon mit n-Ecken

```
Dim alphaPoly As Double
alphaPoly = (n - 2) * 180
Dim alpha As Double
alpha = alphaPoly / n
Dim numRAng As Double
numRAng = Int(alpha / 90)
If numRAng >= 1 Then
   alpha = (numRAng * 180) - alpha
End If
```

Die Koch-Insel dient als erste Annäherung an die Form von Küstenlinien, und kann durch die Einführung des Faktors Zufall noch näher an die durch Erosion verformten natürlichen Vorbilder angeglichen werden. Ähnliches gilt für einen unter laborgleichen Bedingungen eines Computers erzeugten Baum, dessen natürliches Vorbild durch verschiedene Kräfte wie zum Beispiel Wind aber auch in Abhängigkeit von den Bodenverhältnissen Wuchsformen aufweist, die innerhalb einer Bandbreite als zufällig bezeichnet werden können. In diesem Zusammenhang bedeutet Zufall, dass die Betrachtung im großen Maßstab keine eindeutigen Rückschlüssen auf die Form im Kleinen zulässt, sondern eine Variation vorliegt, wodurch der Teil nicht eindeutig vorhersehbar ist.

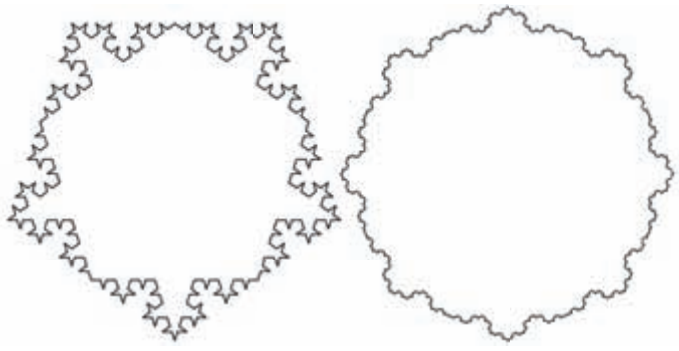


Abb.52.: Koch-Insel mit n=5 und n=8; Der Umriss nähert sich langsam einem Kreis an

Die Koch-Insel lässt Ähnlichkeiten mit einem Zentralbau erkennen, der analog der Ein- und Ausbuchtungen im Inneren wie an der Außenseite Nischen entlang der Mauer aufweist (vergleiche *Abb.52*). Zu den Architekturvorhaben,

bei denen dieses Prinzip angewendet wurde, zählen etwa Donato Bramantes Plan zur Peterskirche im Vatikan, die Liebfrauenkirche in Trier, aber auch im größeren Maßstab die *Idealstädte des Barock*.[03]

F.2.2. Weitere Monsterkurven

Um mit Hilfe des anhand der Koch-Kurve beschriebenen Lindenmayer-Systems weitere Monsterkurven generieren zu können, müssen innerhalb des Programm-Codes lediglich die Symbole und/oder die Ersatzregeln entsprechend verändert oder ergänzt werden. Dasselbe gilt für die Anweisungen der Initiator/Generator Methode. Während etwa der Initiator der Peano-Kurve, dessen Algorithmus bereits im Kapitel ***B.1.2. Monsterkurven/Peano-Kurve*** beschrieben wurde, wieder eine Strecke ist, besteht diesmal der Generator aus neun in einer Schlangenlinie angeordneten Segmenten mit einer Länge von jeweils einem Drittel des Ausgangs-Objektes. Zur besseren Verdeutlichung, dass es sich in diesem Fall tatsächlich um eine durchgehende Kurve handelt, werden manchmal bei der grafischen Ausgabe die Berührungspunkte der Segmente abgeschrägt. Diese Abschrägung erfolgt im AutoCAD mit dem Befehl _chamfer („***Erstellen von Fasen***“), für den bei jeder Rekursion zusätzlich die Distanz der Schräge um den Skalierungsfaktor s korrigiert wird, damit das Verhältnis zur Länge des einzelnen Segments gleich bleibt (siehe ***Abb.53***).

L-System und Initiator/ Generator

Abb.53.: Peano-Kurve mit abgeschrägten Ecken nach 1, 2 und 3 Schritten

F.2.3. Mandelbrot-Menge

Die französischen Mathematiker Gaston Maurice Julia und Pierre Fatou beschäftigten sich unabhängig voneinander zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit der Iteration rationaler Funktionen in der komplexen Zahlenebene.[04] Aus ihren Untersuchungen über das Verhalten komplexer Zahlen unter der wiederholten Anwendung einer definierten Funktion f auf das jeweilige Ergebnis gingen die nach ihren Entdeckern benannten Julia-Mengen (siehe ***Abb.54***) beziehungsweise deren Komplemente[05] die Fatou-Mengen hervor. Dabei gilt:

G.M. Julia und P. Fatou

- Führt eine noch so geringe Veränderung des Startwertes zu einer völlig anderen Folge, dann gehört der untersuchte Wert der Julia-Menge an.
- Führt eine kleine Änderung des Startwertes zu einem ähnlichen Verhalten der Folge, gehört er der Fatou-Menge an.

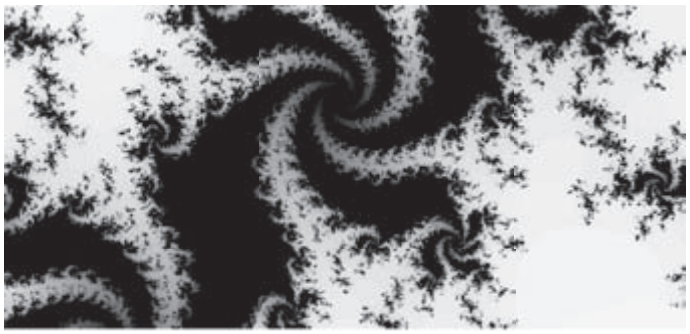


Abb.54.: Julia-Menge der Funktion f=sin(z)+c mit c=1,25+1,25i für das Intervall [-6 bis -2; -0,6 bis 1,3]

Die Publikationen von G. M. Julia und P. Fatou gerieten in den darauf folgenden Dekaden nahezu in Vergessenheit und erlangten erst wieder durch B. Mandelbrot mit der nach ihm benannten Mandelbrot-Menge Aufmerksamkeit, unterstützt durch den Einsatz der Computertechnik, die es schließlich ermöglichte, das Verhalten der rekursiven Anwendung einer Funktion f zu visualisieren. Bei einer solchen grafischen Darstellung entspricht die Zeichenebene der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ und die jeweiligen Punkte den komplexen Zahlen der Form $a + bi$. Auf der x-Achse wird dann der Realteil, das ist die reelle Zahl a, aufgetragen, und auf der y-Achse der Imaginärteil, das ist die reelle Zahl b, die mit der imaginären Einheit i, der Wurzel von -1, multipliziert wird.

Die Darstellung der Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge ist definiert als Menge der komplexen Zahlen c, für welche die Folge, die durch eine wiederholte Anwendung der Funktion

$$f_c(z) \to z^2 + c;\ c \in \mathbb{C}$$

entsteht, beschränkt bleibt, das heißt deren Folgeglieder nicht ins Unendliche wachsen (***Abb.55*** auf ***Seite 95*** zeigt die grafische Ausgabe eines Ausschnitts der Menge als Ergebnis eines in VBA für AutoCAD geschriebenen Computer-Programmes). Für einen solchen Startwert c werden nun mehrere Iterationen der Gleichung $z_{(n+1)} = z_n^2 + c$ mit

$$z_n = (x_n, y_n);\ z_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1});\ c = (a, b)$$

03 *Portoghesi, P. (2000)*, Seite 397 und *Lorenz W. E. (2002)*, Seite 56

04 *Peitgen H.-O. et al. (1988)*, Seite 150

05 Zusammen bilden die beiden Mengen die Menge der komplexen Zahlen, schließen einander gegenseitig aber aus.

durchgeführt, wobei sich der x-Wert beziehungsweise der y-Wert des jeweils nächsten Folgegliedes, gemäß den beiden nach x_{n+1} und y_{n+1} aufgelösten Gleichungen wie folgt berechnet:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a$$
$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_n + b$$

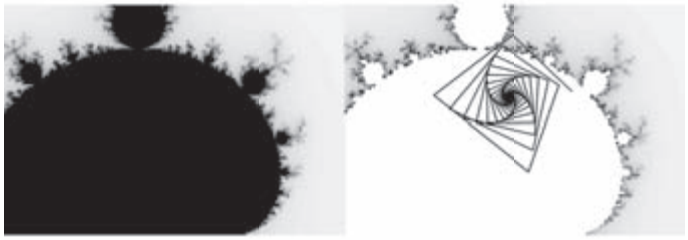


Abb.55.: Ausschnitt der Mandelbrot-Menge [-0,6 bis 0,6; 0 bis 0,8] mit der Folge für $C=0{,}2+0{,}5i$; rechts: Darstellung einer Folge und deren Konvergenz

- Die zugehörigen Zeilen im Programm-Code lauten, mit $maxIt=100$ als maximale Wiederholung und isInMaxDist als Ergebnis der Prüfung, ob eine bestimmte Entfernung, durch die eine Divergenz angedeutet wird, als Abbruchkriterium erreicht wurde:[06]

```
While i < maxIt And isInMaxDist = True
    realP = PointZ(0) ^ 2 - PointZ(1) ^ 2 + pointC(0)
    imagP = 2 * PointZ(0) * PointZ(1) + pointC(1)
    PointZ(0) = realP
    PointZ(1) = imagP
    ...
    If (PointZ(0) ^ 2 + PointZ(1) ^ 2) > 10 Then
        isInMaxDist = False
        ...
    End If
Wend
```

Bei der zumeist schwarz dargestellten Mandelbrot-Menge bleibt der Startwert z_0, im Gegensatz zu den entsprechenden Julia-Mengen für die gleiche Funktion $f_c(z) \to z^2 + c;\ c \in \mathbb{C}$, konstant mit $z_0 = 0 + 0i$, das heißt $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$, während der Wert für $c = a + bi$ variiert. Das Verhalten jedes dieser Anfangspunkte c der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ wird dann, wie zuvor beschrieben, durch wiederholtes Einsetzen in die Gleichung $z_{(n+1)} = z_n^2 + c$ untersucht, wobei grundsätzlich drei Fälle auftreten können:

(1) Das Ergebnis strebt gegen Unendlich, es handelt sich also um eine divergente Folge. Die Geschwindigkeit, mit der das Ergebnis gegen Unendlich strebt, kann durch eine unterschiedliche Färbung oder einen unterschiedlichen Wert für die Position in der z-Achse ebenfalls grafisch dargestellt werden. In diesem Fall dient die Anzahl der Rekursionen, die nötig sind, um einen bestimmte Grenzwert zu überschreiten, das heißt, um eine bestimmte Entfernung vom Ausgangspunkt zu erreichen, als Index für die Färbung oder die Höhe.

(2) Die Folge konvergiert zu einem bestimmten Punkt, dem Fixpunkt. Das Ergebnis ist demnach endlich und der Ausgangspunkt gehört der Mandelbrot-Menge an.

(3) Die Folgeglieder springen zwischen bestimmten Werten hin und her, das heißt, es existieren mehrere Fixpunkte und der Ausgangspunkt gehört ebenfalls der Mandelbrot-Menge an.

Der Rand des finalen Bildes weist eine, wenn auch nicht exakte, Selbstähnlichkeit auf. Bei der Betrachtung von Ausschnitten können folglich immer wieder Teile entdeckt werden, die dem Ganzen ähneln, sofern die Auflösung ausreichend ist und etwaige Rundungsfehler vernachlässigbar bleiben.

F.3. Initiator/Generator und Architektur

Ausgangspunkt der folgenden Analysen, die Computer-Programme und deren grafische Ausgaben mit einschließen, bildet jeweils die Selbstähnlichkeit, als wichtiges, wenn auch nicht einziges Kriterium für eine fraktalähnliche Architektur. Obwohl eine strikte Selbstähnlichkeit, wie bereits im Kapitel *E.3. Fraktal-nahe Architektur* beschrieben, in der Architektur nur sehr selten vorkommt, lassen sich eine fraktalähnliche Architektur beziehungsweise die ihr zugrunde liegenden Algorithmen am deutlichsten anhand derjeniger Beispiele veranschaulichen, bei denen das Ganze ähnlich den Monsterkurven aus verkleinerten Kopien von sich selbst besteht. Über eine solche Charakteristik verfügt etwa das *Castel del Monte Fraktal*, das *Shikhara Fraktal* oder das *gotische Fenster Fraktal*, die allesamt nach ihren Vorbildern benannt sind.[07] Beim Vergleich der grafischen Ausgaben der entsprechenden Computer-Programme mit den gebauten Objekten wird jedenfalls deutlich, dass in der Architektur generell fraktale Eigenschaften lediglich in einem sehr begrenzten Maßstabsbereich auftreten, das heißt, sie weist nur einige wenige Iterationsschritte auf.

06 *Voß H. (1994)*, Seite 175

07 *Lorenz, W. E. (2011)*, Seiten 186ff

F.3.1. Castel del Monte Fraktal

Das Jagdschloss *Castel del Monte* des Hohenstaufer Kaisers Friedrich II in Apulien (1240-1250) dient als Vorlage für das erste einer Reihe von Computer-Programmen durch die fraktalähnliche Architektur generiert werden kann.

Initiator/Generator Methode

Der erste Schritt des Algorithmus, der dem Castel del Monte Fraktal zugrunde liegt, umfasst zunächst die Verkleinerung eines Start-Objekts – im vorliegenden Fall ein Oktogon – mit dem Verkleinerungszentrum im Schwerpunkt. Anschließend erfolgt die ringförmige Anordnung von acht um einen anderen Faktor verkleinerte Kopien des Start-Objekts entlang eines individuell einstellbaren Umkreises. In jedem weiteren Schritt (Iteration) wird dann jede einzelne Kopie auf die gleiche Weise ersetzt, bis nach unendlich vielen Schritten das eigentliche Fraktal entsteht.

Das Start-Objekt (der Initiator) der ersten Variante des Computer-Programms entspricht einem Kreis mit dem Radius r, der gemäß der Initiator/Generator Methode durch den Generator, der aus $n+1$ verkleinerten Kreisen besteht, ersetzt wird. Die Entfernung der ersten n-Mittelpunkte $M_{(1 \text{ bis } n)}$ des Generators vom Mittelpunkt M_I des Basis-Kreises beträgt r_1', das ist der um den Faktor x_1 verkleinerte Radius r. Während der Start-Winkel α die Richtung von M_I zum ersten Mittelpunkt M_1 definiert, resultieren alle weiteren für $M_{2\text{-}n}$ aus der wiederholten Addition des Winkels $\beta = 360/n$, wodurch sich schließlich eine ringförmige Anordnung der Kreise um den Basis-Mittelpunkt M_I ergibt. Diese n-Kreise weisen den Radius r_2' auf, das ist der um den Faktor x_2 verkleinerte Radius r. Für den letzten Kreis $n+1$ mit einem um den Faktor x_3 verkleinerten Radius r_3' gilt wiederum $M_{n+1}=M_I$, das heißt die Kopie wird diesmal nicht verschoben. Diese Handlungsanweisungen werden im nächsten Schritt auf jeden der $n+1$ Kreise erneut angewandt und so fort. In *Abb.56* ist eine solche Serie von Schritten für die Startwerte $x_1=0{,}795$, $x_2=0{,}205$, $x_3=0{,}59$ und $n=12$ dargestellt. Während die ersten beiden Schritte an die Grund-Struktur gotischer Fensterrosen erinnern, lässt der vierte erahnen, dass der Algorithmus nach unendlichen Wiederholungen schließlich in dem Bild eines Clusters, ähnlich dem des sogenannten Cantor-Staubs, resultiert.

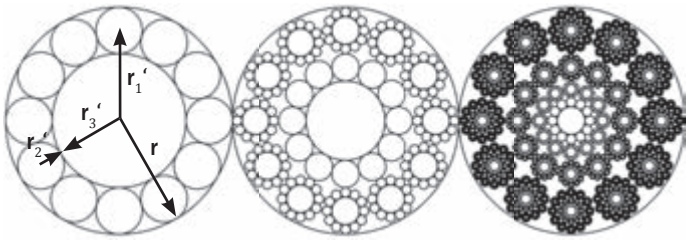


Abb.56.: Eine Variante des *Castel del Monte* Fraktals, mit $x_1=0{,}795$, $x_2=0{,}205$, $x_3=0{,}59$ und $n=12$ nach 1, 2 und 4 Iterationen

- Im Computer-Programm entsprechen dann:

x_1 ... redFactCir: Faktor für die Position der n Kreise
x_2 ... redFact: Faktor für Radius der n Kreise
x_3 ... redFactMid: Faktor für Radius des n+1 Kreises
n ... numEdges: Anzahl der Ecken
α ... startAngle: Start-Winkel
β ... Innenwinkel; $\beta = 360 / \text{numEdges}$

Die benötigten Parameter des rekursiv aufgerufenen Programms recCastel sind der Zähler für den aktuellen Durchlauf curIt, der vorangegangene Mittelpunkt midPointPre, und der aktuelle beziehungsweise vorangegangene Radius radCur und radPre:

```
Sub recCastel(curIt As Integer, midPointPre() As Double,_
    radCur As Double, radPre As Double)
```

Eine Schleife berücksichtigt den Aufruf für die $n+1$ Kreise:

```
    For curEdge = 1 To numEdges + 1
```

Die Anzahl der Aufrufe der Prozedur wird durch eine Abfrage begrenzt:

```
        If curIt <= maxIt Then
```

Der Winkel α für die Positionierung der Mittelpunkte der n-Kreise errechnet sich jeweils aus der aktuellen Ecke:

```
            alpha = startAngle + beta * (curEdge - 1)
```

Der Radius radCircum, auf dem die ersten n-Kreise liegen, ist abhängig vom aktuellen Radius des vorangegangenen Schrittes radPre und dem Reduktionsfaktor redFactCir:

```
            radCircum = radPre * redFactCir
```

Insgesamt wird n-Mal die Position des Mittelpunktes $M_{1\text{-}n}$ in Abhängigkeit zum vorherigen M_{Pre} gesetzt, indem sie von diesem einen bestimmten Abstand und eine bestimmte Richtung aufweisen:

```
            midPoint(0) = midPointPre(0) + radCircum * _
                Cos(alpha * (Pi / 180))
            midPoint(1) = midPointPre(1) + radCircum *_
                Sin(alpha * (Pi / 180))
            midPoint(2) = midPointPre(2)
```

Für den letzten Kreis gilt schließlich $M_{n+1}=M_{Pre}$:

```
            If curEdge = numEdges + 1 Then
                midPoint(0) =    idPointPre(0)
                midPoint(1) =    idPointPre(1)
                midPoint(2) =    idPointPre(2)
            End  f  I
```

Beim rekursiven Aufruf des Programms recCastel wird der Zähler für die Wiederholung curIt um Eins erhöht und der aktuelle Radius radCur um den Faktor redFact verkleinert, beziehungsweise der aktuelle Radius des vorangegangenen Schrittes auf den aktuellen gesetzt (radPre=radCur):

```
            recCastel curIt + 1, midPoint, radCur * redFact,_
                radCur
        End If
    Next curEdge
end sub
```

Varianten des *Castel del Monte* Fraktals

Beim eigentlichen Castel del Monte Fraktal, dessen erster und dritter Schritt in der *Abb.57* dargestellt sind, handelt es sich beim Initiator nun nicht mehr um einen Kreis, sondern um eine in diesen eingeschriebene Polygonlinie mit $n=8$ Ecken. Zusätzlich weist das oktogonale Start-Objekt wie sein gebautes Vorbild einen um den Faktor redFactCourt verkleinerten eingeschriebenen Hof gleicher Form auf. Die letzte Darstellung in der *Abb.57* wiederum zeigt die grafische Ausgabe mit denselben Einstellung, allerdings für $n=3$ Ecken.

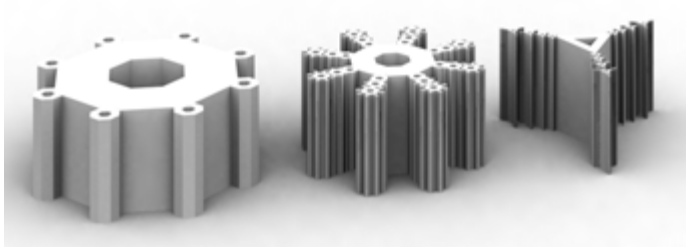


Abb.57.: Das *Castel del Monte* Fraktal, mit $x_1=0{,}844$, $x_2=0{,}156$, $x_3=0{,}779$; links und Mitte mit $n=8$ Ecken, rechts mit $n=3$ Ecken; links nach 1, Mitte und rechts nach 3 Iterationen

Bei einer weiteren Variante des Algorithmus, wie er in der oberen Reihe der *Abb.58* als grafische Ausgabe wiedergegeben ist, bleibt der mittlere Teil unverändert. Dadurch kommt es bei jedem Durchlauf zu einer Wiederholung und somit Überlagerung sämtlicher Elemente des vorangegangenen Schritts. Nachdem die Ersetzungsregel, die einen solchen unveränderten mittleren Teil generiert, mit $x_3=1$ keine Kontraktion aufweist, liegt nach *D.2.1. IFS – Iteration-Function-System/Versuchsanordnung* auch kein Fraktal im eigentlichen Sinn vor. Die untere Reihe in der *Abb.58* zeigt schließlich jenes Ergebnis für $n=8$ beziehungsweise $n=4$ Ecken, das entsteht, wenn es für den mittlere Teil keine Ersetzungsregel gibt und nur der letzte Schritt dargestellt wird.

Der mittlere Teil

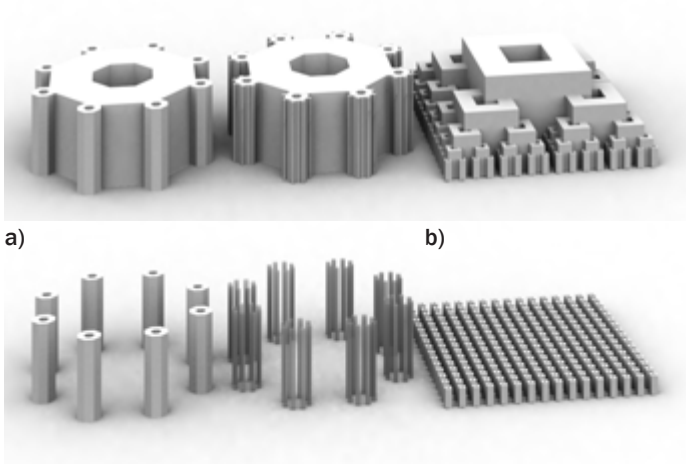


Abb.58.: Eine weitere Variante des *Castel del Monte* Fraktals, mit und ohne eingefrorene(n) Resultate(n) für
a) $x_1=0{,}16$, $x_2=0{,}78$ und $n=8$ (1 und 3 Iterationen)
b) $x_1=0{,}5$, $x_2=1{,}0$ und $n=4$ (4 Iterationen)

Die fraktalen Eigenschaften des Castel del Monte

Das Oktogon ist das Grund-Element des Castel del Monte und findet sich in weiterer Folge im Hof, im Grundriss der Türme, dem Turmzimmer und erweitert zum Kreis auch im Treppenhaus. Dementsprechend wiederholt sich im Sinne einer begrenzten Selbstähnlichkeit das Ganze in verschiedenen Elementen. Darüber hinaus ist die Oberfläche des Gebäudes aufgrund des verwendeten Materials, des Sandsteins, nicht glatt, sondern weist einen bestimmten Grad an Zerklüftung und Rauheit auf, womit eine weitere fraktale Eigenschaft erfüllt ist. Nähert sich dann der Betrachter, so lassen sich immer mehr Details und dabei eine immer feinere Zerklüftung in der vom Wetter zerfurchten Oberfläche erkennen. Diese Rauheit oder Zerklüftung kann aber auch als Weiterführung der Ausbuchtungen der Türme im Grundriss gelesen werden. Ein Fraktal im eigentliche Sinn liegt dennoch nicht vor, nachdem dieses erst nach unendlichen Wiederholungen der Ersetzungsregeln entsteht – ein Umstand, der weder in der Natur noch in der Architektur erfüllt werden kann (siehe *F.3.2. Shikhara Fraktal*).

F.3.2. Shikhara Fraktal

Einige Beispiele der hinduistischen Tempelarchitektur, als Repräsentation des heiligen Berges *Meru*, dem *Weltenberg*, und Versinnbildlichung des Zentrums, basieren auf einem ähnlichen Algorithmus wie jenem des Castel del Monte Fraktals, weisen im Gegensatz zu diesem allerdings mehr

als nur eine Rekursion auf.[08] Wieder dient eine spezifische Grundform als Ausgangs-Objekt, deren reduzierte Abbildungen werden diesmal aber nicht an den Ecken, sondern an den Seitenflächen wiederholt (siehe *Abb.59*). Nachdem die Kopien wiederum von verkleinerten Kopien umgebenen sind, die wiederum von verkleinerten Kopien umgeben sind und so fort, erscheinen derartige Tempelformen als ein früher und durchaus bewusster Versuch gebauter Selbstähnlichkeit. Es handelt sich dabei aber nicht in jedem Fall um eine strikte Selbstähnlichkeit, da die einzelnen Elemente von einem Schritt zum nächsten hinsichtlich ihrer Steigung, der Proportion, dem Faktor der Positionierung oder dem Verkleinerungs-Faktor leicht variieren können.

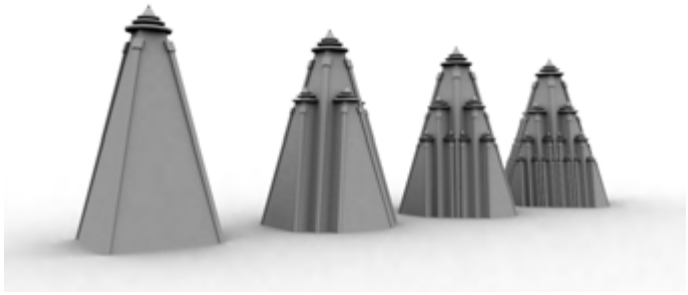


Abb.59.: ‚*Shikhara Fraktal*' nach Vorlage der Shikhara eines Jaina Tempels auf Mount Girnar; Grundform, Ersetzungsregel, 3. und 4. Schritt

Die Grundform (der Initiator) des *Shikhara Fraktals* bildet der gleichnamige über dem Allerheiligsten, der Cella mit der zentralen Götterfigur, errichtete konvex gekrümmte Turm, dessen Form an einen Bienenkorb oder buchstäblich an eine Flamme erinnert. Im Computer-Programm ist diese Grundform von einem Jaina Tempel auf dem Mount Girnar in Indien abgeleitet und entspricht, wie in der grafischen Ausgabe in *Abb.59* ersichtlich, einem über quadratischem Grundriss errichteten Körper, der sich an den vier Seiten in einem sanften Bogen leicht nach oben verjüngt.[09] Durch die Veränderung des Grades dieser Biegung können weitere Varianten entstehen, wie die etwas gedrungener wirkende Shikhara des Lodurva Heiligtums in der Thur Wüste nahe Jaisalmer (vergleiche *Abb.60*).[10] Der Generator besteht wiederum aus einer unveränderten Kopie des Ausgangs-Objektes und aus vier an die Seiten des Initiators verschobenen sogenannten *Urushringas*, das sind verkleinerte Wiederholungen des Hauptturmes. Abhängig von den gewählten Verkleinerungs-Faktoren beziehungsweise vom Verschiebe-Faktor für die Position der vier im Kreis angeordneten Kopien, können Teile von diesen durch das mittlere unveränderte Element verdeckt werden, ähnlich wie es beim eigentlichen Castel del Monte Fraktal und seinen oktogonalen Eck-Türmen der Fall ist. Nachdem bei jedem Schritt auch die jeweilige Mitte ersetzt wird und diese keinen Verkleinerungsfaktor aufweist, wiederholt sich der jeweils vorangegangene Schritt immer wieder aufs Neue und es kommt dadurch zu Überlagerungen. Wie schon beim Castel del Monte Fraktal handelt es sich daher auch in diesem Fall um kein Fraktal im eigentlichen Sinn.

Shikhara

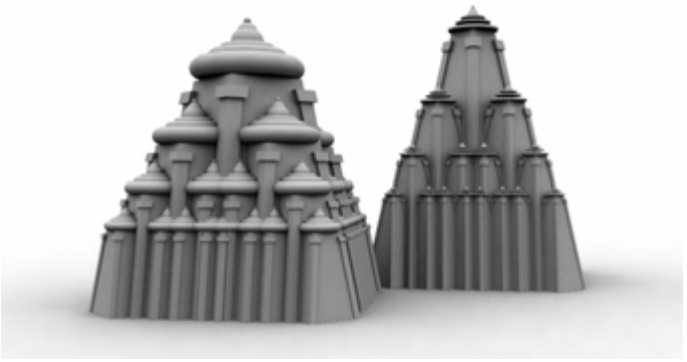


Abb.60.: ‚*Shikhara Fraktal*' mit verschiedenen Parametern; 4. Schritt

Die Betrachtung eines Ausschnittes des Resultats nach wiederholten Anwendung der definierten Handlungsanweisungen lässt dennoch Rückschlüsse auf das komplexe Ganze zu. Es können zwar Variationen zwischen den einzelnen Elementen auftreten, die Erwartungshaltung infolge des Gesamteindrucks wird aber im Wesentlichen auch in seinen Teilen erfüllt. Darüber hinaus bleibt durch die Transformationen eine spezifische Rauheit für viele unterschiedlich große Ausschnitte erhalten, wozu letztlich auch die dekorativen Elemente beitragen. Selbst die Silhouette der Shikhara zeigt unter verschiedenen Abständen des Betrachters, ähnlich einer durch Mittelpunktverlagerung entstandenen fraktalen Kurve, die gleiche Intensität an Aus- und Einbuchtungen, beziehungsweise die gleiche Charakteristik. Diese wird, wie bereits im Kapitel *D.2.3. Mittelpunktverlagerung/ Hurst-Exponent H* beschrieben, durch den Hurst Exponent beziehungsweise durch die daraus abgeleitete fraktale Dimension gekennzeichnet. Dabei weist eine niedrigere fraktale Dimension auf eine weniger stark zerklüftete Silhouette hin, ähnlich wie es bei den glatteren Verläufen von Küstenlinien, dem natürlichen Ebenbild einer fraktalen Kurve unter Einschluss des Faktors Zufalls, der Fall ist. Ein höherer Wert hingegen entspricht analog den schroffen Küstenlinie einem deutlich gezackteren Verlauf.

08 *Portoghesi, P. (2000)*. Seite 242
vgl. *Lorenz, W. E. (2004)*

09 *Portoghesi, P. (2000)*. Seite 245

10 *Portoghesi, P. (2000)*. Seite 397

F.3.3. Gotisches Fenster Fraktal

Gotische Kathedralen, wie jene in Reims, Lyon oder Straßburg, sind Beispiele für einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit, zumal die Betonung der Vertikalen, als Folge des bewussten Strebens nach Höhe, in zahlreichen architektonischen Elementen unterschiedlicher Größenordnung in Erscheinung tritt.[11] Diesem Drang nach Höhe liegt der Gedanke des *Nahe-An-Gott-Kommens* zugrunde, das dem vorherrschenden Wunsch entsprach, ein Gefühl für und von Gott zu erhalten.[12] Durch die Vertikale wird demnach der Verbundenheit mit dem Himmel Ausdruck verliehen.[13]

Betonung der Vertikalen

Obwohl eine allgemeine Beschreibung der Vielfalt gotischer Kathedralen nicht gerecht wird, veranschaulicht sie die Fülle an Bestandteilen, wie sie zumindest zum Teil bei den realisierten Bauwerken anzutreffen ist. Eine solche Betrachtung beginnt dann zunächst mit dem aufwärts strebenden Gesamteindruck, wie er durch die größten vertikalen Elemente entsteht, zu denen ein steil aufragendes Dach genauso zählt wie das System aus Strebepfeilern und -bögen oder die flachen stumpfen beziehungsweise mit steil aufragendem spitzem Turmhelm bekrönten Türme. Letztere können ihrerseits durch die als Fialen bezeichneten Türmchen, das heißt, durch verkleinerte Varianten von sich selbst, flankiert sein, die gleichfalls auf den äußeren Strebepfeilern anzutreffen sind. Die hohen, durch Spitzbögen überwölbten Eingangstore und Fenster (vergleiche ***Abb.61***) führen dann die Betonung der Vertikalen in gleicher Weise fort, so wie im Innenraum die immer höher aufragenden Mittel- beziehungsweise Seitenschiffe, deren Pfeiler in die spitzbogigen Kreuzrippengewölbe übergehen. Selbst die Fülle an Dekoration sowohl an der Fassade als auch im Innenraum, die sich auf wenige Grundelemente zurückführen lässt und dabei das Ganze erahnen lässt, oder die Details wie die Kreuzblume, aber auch die Nischen der Statuen spiegeln den Charakter des Ganzen wider.[14] Demzufolge werden zahlreiche Maßstabsebenen abgedeckt, wodurch eine Einheit entsteht, die als eindrucksvolles Beispiel fraktal-ähnlicher Architektur gilt. Bei den einzelnen Elementen handelt es sich aber nicht um exakt gleiche Verkleinerungen eines Ausgangsobjektes, sondern sie bleiben lediglich im Durchschnitt der einzelnen Schritte ähnlich, wodurch keine strikte, sondern eine statistische Selbstähnlichkeit vorliegt. Jeder Bereich lässt demnach im Durchschnitt eine ähnliche Zerklüftung erkennen wie der jeweils nächste beziehungsweise vorhergehende. Auch wenn sich die einzelnen Elemente in ihrer Form unterscheiden, so ist die zugrundeliegende Charakteristik am gesamten Gebäude anzutreffen und der typische Eindruck bleibt bei verändertem Abstand des Betrachters erhalten.

Abb.61.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gleichseitiger Spitzbogen; Initiator, Generator und 2.-4. Schritt

Der Spitzbogen

Obwohl der Spitzbogen islamischen Ursprungs ist und bereits in der Romanik zum Einsatz kommt, wird er infolge seiner häufigen Verwendung aber vor allem mit der *Gotik* in Verbindung gebracht.[15] Im Gegensatz zu dem bis dahin vorherrschenden Kreisbogen nähert sich der Spitzbogen nun der Form einer umgekehrten Kettenlinie an, in dessen Verlauf der Krümmung lediglich Druckkräfte auftreten. Während der Schubwinkel, der sich aus der Verbindung zwischen Bogenscheitel und Bogenbasis beziehungsweise der Vertikalen durch die Bogenbasis ergibt, beim Rundbogen 45 Grad beträgt, verringert sich dieser für den klassischen Spitzbogen auf 30 Grad. Das kommt nicht nur dem als Baumaterial verwendeten Stein entgegen, zumal die senkrecht zur Stützlinie angeordneten Lagerfugen überwiegend Druckkräfte übertragen können, sondern ermöglicht über die Reduktion der Schubkräfte in den Wänden überhaupt erst die schlanken und hohen Konstruktionen.[16] Diesem Umstand ist es letztlich zu verdanken, dass der Spitzbogen zusammen mit dem Strebewerk zu einem der zentralen Elemente der gotischen Architektur wurde. Eine Abfolge dieser charakteristischen Form lässt sich anhand eines Wandaufrisses am Langhaus illustrieren, wenn dieses etwa aus einem Kreuzrippengewölbe besteht, dessen Längsgurt einem Spitzbogen entspricht. Dessen Joche können dann jeweils zwei Spitzbogenfenster umfassen, die ihrerseits wiederum jeweils zwei durch einen senkrechten steinernen Stab getrennte Spitzbögen überwölben. Die Querschnitte der Gurte und Stäbe, die

gotischer Wand-Querschnitt

11 *Lorenz W. E. (2002)*. Seite 36

12 *Koch W. (1991)*, Seite 148

13 *Jaxtheimer B. W. (1990)*, Seite 114

14 *Binding G. (2006)*, Seite 25

15 *Jaxtheimer B. W. (1990)*, Seiten 38f und *Koch W. (1991)*, Seite 149

16 *Jaxtheimer B. W. (1990)*, Seiten 40f

Proportionen oder die Form des Maßwerks etwa als Drei-, Vier- oder Vielpass können sich dabei von einem Schritt zum nächsten ändern. Der Bereich, der durch diese Wiederholungen abgedeckt wird, ist dennoch beschränkt, nachdem sowohl das Gebäude als Ganzes als auch der Stein als kleineres Element keinem Spitzbogen entsprechen.

Der Algorithmus

Die Handlungsanweisung, die zu einem *gotischen Fenster Fraktal* führt, beginnt mit einem Spitzbogen als Initiator. Dieser setzt sich aus zwei gleich großen Kreisbögen zusammen, deren Durchmesser $d=2xr$ größer als die Stützweite s beziehungsweise die Breite der Fensteröffnung ist. Beim sogenannten gleichseitigen oder normalen Spitzbogen liegen die Kreis-Mittelpunkte M_{K1} und M_{K2} auf jeweils einem der beiden Kämpfer-Punkte K_1 und K_2, das heißt, auf einem der Schnittpunkte des Spitzbogens mit der Stütze oder der Mauer (siehe ***Abb.62*** a). Mit einem Radius r gleich der Stützweite $r=s$ verläuft dann der Kreis-Bogen vom jeweils gegenüberliegenden Kämpfer-Punkt, der Bogenbasis, bis zum Bogenscheitel in der Symmetrieachse der Fensteröffnung. Abhängig von der Lage der Kreis-Mittelpunkte können zwei weitere Fälle eintreten. Befinden sie sich mit $s>r>s/2$ etwa innerhalb der Kämpfer-Punkte, so entsteht ein gedrückter Spitzbogen (siehe ***Abb.62*** b), während außerhalb liegende mit $r>s$ zu einem überhöhten oder Lanzettbogen führen (siehe ***Abb.62*** c).[17]

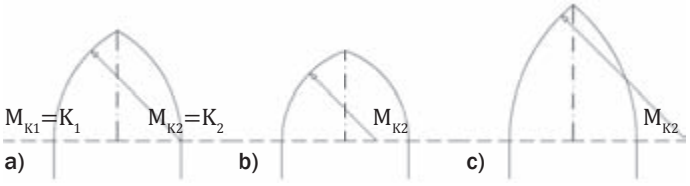


Abb.62.: Spitzbögen: a) gleichseitiger Spitzbogen; b) gedrückter Spitzbogen; c) überhöhter Spitzbogen

Der Generator, der den Initiator ersetzt, besteht schließlich aus n verkleinerten Spitzbögen mit einer jeweiligen Breite von $1/n$ der Stützweite s. Die Mittelpunkte der Kreis-Bögen befinden sich dabei erneut auf der Kämpfer-Linie, liegen also auf der gedachten Horizontalen zwischen den beiden Kämpfer-Punkten K_1 und K_2. Bei jedem weiteren Schritt wird entsprechend der Ersatzregel verfahren, wobei erneut Variationen der Elemente möglich sind. Das betrifft etwa die Anzahl der Teilungen, die Anzahl der Passe im Zwickel zwischen den Bögen, den Radius für den Bogen und den Durchmesser der trennenden Stäbe.

- Die ***Abb.63*** zeigt zwei grafische Ausgaben des Computer-Programms zur Erzeugung eines Gotischen Fenster Fraktals mit unterschiedlich gewählten Parametern und einer zur x-Achse parallelen Kämpfer-Linie. In der linken Darstellung bleibt der Durchmesser der Stäbe für alle Schritte gleich, während sich dieser in der rechten wie auch bei der in ***Abb.61*** dargestellten Folge von Schritten eines gleichseitigen Spitzbogens gemäß des Verkleinerungsfaktors $redFactTube=0,6$ ändert. Ein entsprechender Faktor für das Nach-Innen-Versetzen der kleineren Bögen des jeweils folgenden Schrittes verhindern im letzteren Fall, dass die dickeren Stäbe des vorangegangenen Schrittes die dünneren des folgenden verdecken.

  Sowohl für die rechte Darstellung der ***Abb.63***, als auch für jene der ***Abb.61*** und ***Abb.64***, wurden zusätzlich hinter jedem einzelnen Bogen zwei weitere Bogen-Reihen konstruiert. Deren Mittelpunkte sind jeweils in positiver y-Richtung um einen bestimmten Faktor in Relation zum Durchmesser des Stabes versetzt und weisen einen entsprechend diesem Faktor größeren Radius, für den äußeren Bogen, beziehungsweise einen kleineren, für den inneren, auf. Die Anzahl dieser Reihen kann im Computer-Programm frei gewählt werden.

Abb.63.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gleichseitiger Spitzbogen mit unterschiedlichen Parametern; 2. Schritt

Abb.64.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gedrungener, gleichseitiger und überhöhter Spitzbogen. 3 Schritte

17 *Binding G. (2006)*, Seiten 198f

Das Grundprinzip des Computer-Programmes ist dasselbe wie beim Castel del Monte Fraktal und dem Shikhara Fraktal, das heißt, der größere mittlere Teil des Generators weist neuerlich keine Verkleinerung auf.

Die Wiederholung

Der Unterschied zwischen einer reinen Wiederholung und jener mit Selbstähnlichkeit (vergleiche *E.3.1. Einleitung/ Wiederholung und Selbstähnlichkeit*) lässt sich gleichfalls anhand gotischer Kathedralen demonstrieren. Die Staffelung etwa des gotischen Bogens als trichterförmiges Portal entspricht lediglich der Wiederholung ein und desselben Elementes, nämlich jenem des Spitzbogens, der mit leicht variierendem Radius hintereinander versetzt angeordnet wird. Ähnlich verhält es sich mit der Spitze des Chrysler Buildings in New York, dessen sich nach oben verjüngende Teile im wesentlichen aus der gleichen Zahl an Komponenten besteht. Bei einer gotischen Kathedrale hingegen nimmt die Summe der Elemente mit kleiner werdender Größe immer stärker zu. Das zeigt sich etwa in den wenigen mächtigen Türmen, der größeren Schar an Fenstern, Wimpergen und Fialen und schließlich den zahlreichen Details wie den Krabben, Kreuzblumen oder Baldachinen.[18] Die einzelnen Elemente, wie auch das Ganze, setzen sich dabei gemäß einer Selbstähnlichkeit wiederum aus ähnlichen kleineren Elementen zusammen. Dementsprechend finden sich etwa an einem Turm mit Maßwerken und durch Kreuzblumen bekrönte Wimpergen, häufig Fialen mit Maßwerken und Wimpergen kleineren Ausmaßes, die ihrerseits durch eine Kreuzblume bekrönt werden.[19] Nachdem die einzelnen Elemente infolge der Anpassung an eine spezifische Funktion, an die Konstruktion oder an einen künstlerischen beziehungsweise inhaltlichen Ausdruck keine exakt gleichen Kopien des Ganzen sind, handelt es sich bei gotischen Kathedralen in der Begrenztheit eines definierten Maßstabsbereiches allerdings um keine strikte sondern um eine statistische Selbstähnlichkeit. Trotz dieser Unterschiede in der Form, beinhalten die einzelnen Teile dennoch eine Grund-Information über das Ganze beziehungsweise weisen dieselbe Rauigkeit auf, wodurch ein einheitlicher Charakter entsteht und die einzelnen Elemente mit dem Ganzen zusammengehalten werden. Die gotische Kathedrale ist somit Ausdruck einer Einheit zwischen dem Ganzen und seinen Teilen.[20]

statistische Selbstähnlichkeit

F.3.4. Varianten

Das Turm Fraktal

Das zugrundeliegende Prinzip ist beim Castel del Monte Fraktal, beim Shikhara Fraktal und beim Gotischen Fenster Fraktal jeweils dasselbe: Ein Initiator, das heißt, eine Grundform, wird durch einen Generator ersetzt, der aus einer bestimmten Anzahl verkleinerter Kopien $n+1$ von sich selbst besteht, wobei eine Kopie des Ausgangsobjektes unverändert in der Mitte verharrt, während sich die n weiteren Elemente nach einer definierten Regel entlang dessen Kanten oder an den Ecken verteilen. Diese Ersetzungsregel wird in jedem weiteren Schritt auf sämtliche im vorangegangenen Schritt erzeugten Einzelteile angewandt, bis schließlich eine in einem beschränkten Bereich zerklüftete und selbstähnliche Struktur entsteht. Die Parameter dieses Algorithmus beschränken sich im Wesentlichen auf die Anzahl der Elemente des Generators $n+1$, den Verkleinerungsfaktor für den mittleren Teil beziehungsweise für die äußeren Teile und bestimmte für die Positionierung notwendige Größen, etwa den Winkel und den Radius bei einer kreisförmigen Anordnung der n Verkleinerungen um das jeweilige zentrale Element. Durch die Modifikation dieser Werte, aber auch durch die Veränderung der Form des Ausgangs-Objekts können zahlreiche weitere Varianten erzeugt werden, die nach wie vor auf demselben Grundprinzip basieren. Entspricht dem Initiator etwa ein auf einem rechteckigen Grundriss errichteter Turm, der in weiterer Folge durch sich selbst beziehungsweise an seinen Ecken oder Kanten durch verkleinerte Kopien ersetzt wird, so entsteht eine sich nach oben verjüngende Form, die eine breite und stark gegliederte Basis aufweist. Nachdem es sich nun nicht mehr um eine quadratische Grundfläche handelt, erfolgt die Positionierung der n Elemente auch nicht mehr kreisförmig, sondern annähernd elliptisch mit entsprechenden Adaptierungen in x- beziehungsweise y-Richtung.

das Grundprinzip und Varianten

Die beiden in *Abb.65* (*Seite 102*) dargestellten Türme zeigen zwei grafische Ausgaben eines derartigen Computer-Programmes, das zudem für die Tiefe und die Breite der Grundfläche eines Elementes jeweils unterschiedliche Verkleinerungsfaktoren erlaubt. Selbst der Verkleinerungsfaktor für die Höhe ist in diesem Fall von der Basis gänzlich entkoppelt und kann zusätzlich per Zufall aus einer definierten Bandbreite ausgewählt werden. Dadurch ergibt sich, wie in der zweiten Illustration der *Abb.65*

18 *Binding G. (2006)*, Seiten 265ff. Wimperg: giebelförmiger Bauteil als Ziergiebel über Portalen oder Fenster. Krabben: dekoratives blattförmiges Element auf den Schrägen der Wimpergen oder Fialen. Kreuzblume: kreuzförmige Bekrönung mit Enden in Form von Knospen oder Blumen. Baldachin: auf Stützen oder Säulen stehender Prunkhimmel über Altären, Grabmälern, Kanzeln oder Taufbecken.

19 *Binding G. (2006)*, Seite 277, Seite 292

20 *Jakob, G. (1870)*, Seite 69

ersichtlich, eine weniger strikte Form der Höhenstaffelung. Ein solches Ergebnis das sich nach mehreren Schritten einstellt, lässt schließlich auch Assoziationen zur Staffelung eines Hochhauses zu.

Erweiterungen des Turm Fraktals

Bei dem Ergebnis nach unendlichen Wiederholungen der Handlungsanweisungen handelt es sich allerdings in jedem Fall nur dann um ein Fraktal im eigentlichen Sinn, wenn der Verkleinerungsfaktor des mittleren Elements auch tatsächlich einen positiven Wert kleiner als Eins aufweist und dieses daher von einem Schritt zum nächsten schrumpft. Erfolgt hingegen keine Veränderung der Größe, das heißt, beträgt der Wert genau Eins, bedeutet das, dass die jeweiligen mittleren Komponenten durch eine exakte Kopie von sich selbst und jenen entsprechend dem Generator umgebenden verkleinerten Kopien ersetzt werden. In diesem Fall stimmen dann letztere in ihrer Größe und Position wiederum exakt mit Elementen vorangegangener Schritte überein, die gleichfalls durch sich selbst ersetzt werden, wodurch zahlreichen Überlagerungen entstehen. *Abb.65* zeigt eine solche Gegenüberstellung zwischen einem gewählten Verkleinerungsfaktor gleich Eins in der linken Illustration und einem kleineren Wert in der Mitte, bei dem schließlich die einzelnen Ersetzungen auch deutlicher hervortreten.

Verkleinerungsfaktor kleiner als Eins

Abb.65.: Varianten eines *Turm Fraktals* ohne und mit zufälliger Auswahl der Höhen; rechts eine weitere Variante mit Kuppeln; 4 Schritte

Die rechte Darstellung in *Abb.65* zeigt eine weitere Variante dieses *Turm Fraktals*, mit gleich lautenden Handlungsanweisungen. Das Ausgangsobjekt basiert diesmal allerdings auf einem Turm mit quadratischem Grundriss aus dem ein Teil ausgeschnitten wird, um die vier Stützen und das Gewölbe zu formen, beziehungsweise dem eine Kuppel hinzugefügt wird. Nachdem die Stützen für alle Schritte gleich dimensioniert sind, existiert auch eine Schranke für die Anzahl an möglichen Wiederholungen, die durch ein Mindestmaß für die Größe eines Elementes mit zwei Stützen-Breiten gegeben ist. Wie aus der Abbildung hervorgeht, kommt es durch die hier gewählten Parametern bei den am Rand befindlichen Elementen des Weiteren zu Überschneidungen.

F.3.5. Aushöhlung und Cluster

Der Menger Schwamm als Ausgang

Aus dem im Kaptitel *E.3.2. Beispiele/Steven Holl (geb. 1947)/ Sarphatistraat Offices* beschriebenen Menger Schwamm lassen sich weitere Algorithmen ableiten, die auf gleiche Weise unter Verwendung ein und desselben Grund-Elements komplexe Formen mit Hohlräumen generieren. Diese aus einer spezifischen Anweisung hervorgehenden Strukturen basieren dann einerseits auf identischen kleinsten Einheiten, wie einem Quader, und spiegeln andererseits in ihren Einzelteilen die übergeordnete Form des Ganzen wider. Ein Zwischenergebnis der wiederholten Anwendung einer solchen Handelsanweisung kann als Grund-Struktur für eine architektonische Form interpretiert werden, die infolge der Abwechslung von Vor- und Rücksprüngen beziehungsweise geschlossenen und offenen Bereichen den Eindruck von Monotonie – etwa bei langen Zeilenbauten – vermeidet unter gleichzeitiger Demonstration einer Zusammengehörigkeit unterschiedlicher Maßstabsebenen durch Selbstähnlichkeit. Selbst bei einer leichten Variation der Komponenten bleibt in diesem Fall die Erkennbarkeit des Ganzen und damit die Identität des Gebäudes infolge des ähnlichen Charakters erhalten.

Die oberste Darstellung in *Abb.66* (*Seite 103*) zeigt das grafische Ergebnis einer solchen Variante des Algorithmus nach drei Schritten. In diesem Fall handelt es sich um einen ausgehöhlten Block, der ein bestimmtes Verhältnis zwischen offenen und geschlossenen Bereichen (beziehungsweise zwischen der Anzahl entfernter und verbliebener Quader) aufweist, das in weiterer Folge aufgrund von spezifischen Sichtverhältnissen oder infolge von Vorgaben für die Beschattung adaptiert werden kann. Dabei ist auch eine Veränderung der Orientierung einzelner Segmente denkbar, ohne dass dadurch der eigentlichen Charakter, der durch die Aushöhlung gegeben ist, verändert wird. Während das Volumen des zugrunde liegenden Initiators der abgebildeten Struktur 4x4x2 Einheiten (Breite x Tiefe x Höhe) beträgt, setzt sich der Generator aus 11 Kuben auf dem nullten und 11 Kuben auf dem ersten Level mit jeweils einer Kantenlänge von einer Einheit zusammen.

die Lochfassade

Dementsprechend weist der Generator ein Verhältnis zwischen offenen und geschlossenen Teilen von

$$N_o : N_g = 10 : 22 = 0{,}46$$

auf, mit N_o als Summe der offenen Elemente und N_g als Summe der geschlossenen Elemente. Bei einer Fortsetzung der Aushöhlung verändert sich dieses Verhältnis zugunsten der offenen Teile bei gleichzeitiger Verringerung der Summe des Volumens der geschlossenen Elemente, bis schließlich nach unendlichen Schritten ein Cluster ohne Volumen entsteht.

Sämtliche Varianten können in einem einzigen Computer-Programm zusammengefasst werden, indem der Benutzer zunächst die Anzahl der Segmente in x-, y- und z-Richtung definiert. In einem drei-dimensionalen Array, das sich aus den drei Koordinaten zusammensetzt, legt schließlich ein Wahrheitswert fest, ob ein Element des Generators verbleibt oder nicht. Der Wert $wahr$ bedeutet dabei, dass ein Teil gezeichnet beziehungsweise weiter unterteilt wird, während $falsch$ jene Teile kennzeichnet, die entfernt werden. Auf diese Weise entstehen unterschiedliche Generatoren für Zeilen oder Blöcke, von denen einige Ergebnisse in *Abb.66* dargestellt sind. Die beiden Zeilen rechts unten, die jeweils den vierten Schritt zeigen, basieren etwa auf einer länglichen Grund-Struktur aus 6x2x2 Elementen, aus denen jeweils fünf respektive sechs Segmente ausgeschnitten werden.

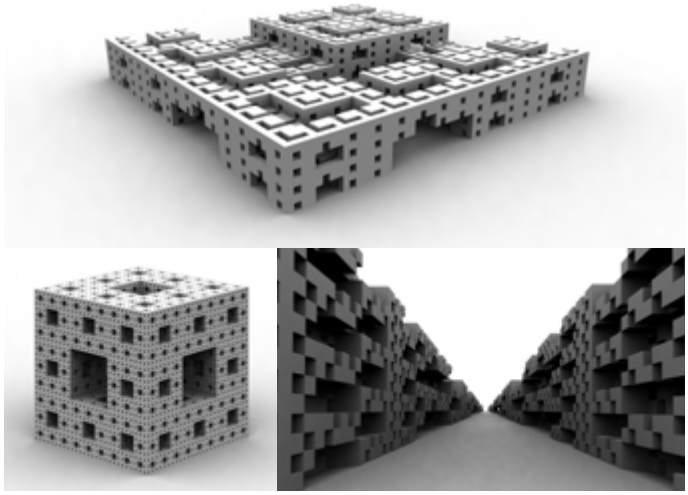


Abb.66.: Menger Schwamm und Varianten; 3 und 4 Schritte

Siepinski Teppich und Curdling

Der Sierpinski Teppich entsteht wie der Menger Schwamm durch stetiges Aushöhlen einer Grundform. Diesmal besteht der Initiator aus einem Quadrat, und der Generator aus drei mal drei kleineren Quadraten, von denen das mittlere entfernt wird. Die Darstellung in *Abb.67* zeigt eine Folge mehrerer Schritte der wiederholten Anwendung dieses Algorithmus. Zur besseren Illustration wurden die Quadrate um eine Höhe ergänzt und um einen fixen Wert nach Innen versetzt. Dadurch entsteht der Eindruck von immer feiner gegliederten Blöcken, die durch Straßen voneinander getrennt sind.

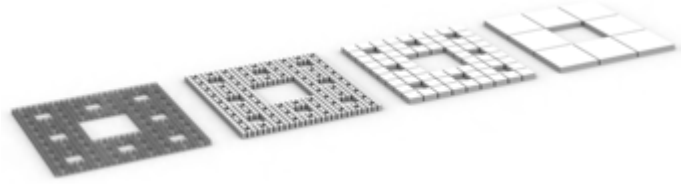


Abb.67.: Sierpinski Teppich: 1-4 Schritte

Das im Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen* vorgestellte Verfahren der *B.1.3. Cantor'sche Punktmenge (Cantor-Menge)/Curdling (Gerinnung)* führt zu einer Struktur, die vom Großen bis zum Kleinen eine ähnliche Verteilung aufweist, und diente B. Mandelbrot etwa als Modell für die Verteilung der Sterne am Nachthimmel.[21] Bei diesem Verfahren wird zunächst ein Ausgangsquadrat in nxn Quadrate geteilt, von denen in weiterer Folge eine bestimmte Anzahl entfernt wird. Es basiert auf der Annahme, dass die Masse des ursprünglichen Quadrats in die verbleibenden übergeht.[22] Die Entscheidung welche Quadrate entfernt werden und welche verbleiben, erfolgt durch die zufällige Wahl infolge einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Dabei haben, wie aus den Darstellungen der Folgen für 25%, 50% und 75% in *Abb.68* ersichtlich, niedrige Werte eine geringere Dichte zur Folge, beziehungsweise umgekehrt resultieren höhere in einer stärkeren Häufung. Ähnlich wie dieses Verfahren als vereinfachtes Modell für die Verteilung der Sterne am Nachthimmel angesehen wird, kann es auch als vereinfachtes Modell eines Quartiers mit einer bestimmten Bebauungsdichte zur Anwendung kommen.

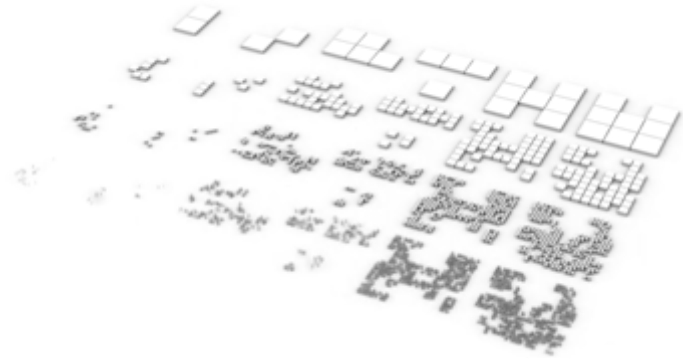


Abb.68.: Curdling mit einer Wahrscheinlichkeit von je zweimal 25, 50 und 75% ; 1-4 Schritte

21 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 96, 224

22 *Bovill C. (1996)*, Seiten 92f

Die charakteristische Größe zwischen zwei Schritten wird durch die entsprechende Fraktale Dimension bestimmt. Diese errechnet sich aus dem Vergleich der Differenz des Logarithmus der Anzahl der verbleibenden Quadrate N_i beziehungsweise N_{i-1} und der Differenz des Logarithmus des Maßstabes $1/s_i$ beziehungsweise $1/s_{i-1}$. Der Maßstab ist dabei durch den Reziprokwert der Anzahl der belegten und nicht besetzten Boxen einer Reihe gegeben.

$$D_{((i-1)-i)} = \frac{\log(N_i) - \log(N_{(i-1)})}{\log\left(\frac{1}{s_i}\right) - \log\left(\frac{1}{s_{(i-1)}}\right)}$$

Curdling und die fraktale Dimension

Die entsprechend dieser Formel errechneten fraktalen Dimensionen zwischen dem dritten und vierten Schritt lauten für die in *Abb.68* dargestellten Folgen jeweils von rechts nach links: 1,73, 1,72 | 1,37, 1,37 | 0,70 und 0,72. Bei den ersten beiden Werten handelt es sich um die Ergebnisse infolge einer zufälligen Auswahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% und einer Teilung in $3x3$ Quadrate. Die Anzahl der in diesem Fall theoretisch verbleibenden Quadrate errechnet sich im ersten Schritt aus $3x3$ Quadraten mal 75%, das sind 6,75 Quadrate. Im zweiten Schritt sind es $6{,}75 \cdot 9 \cdot 75\% = 45{,}56$ Boxen, im dritten $307{,}55$ und im vierten $2075{,}94$. Bei einem Maßstab von 1/3, 1/9, 1/27 und 1/81 beträgt der errechnete Wert für die fraktale Dimension folglich $1{,}74$ und stimmt mit den beiden gemäß der Wahrscheinlichkeit zufällig ausgewählten Boxen aus *Abb.68* nahezu überein. Dasselbe gilt für die mittleren beiden Abbildungen mit einer 50-prozentigen Wahrscheinlichkeit und einem Wert von $1{,}37$, beziehungsweise für die linken beiden mit einer 25-prozentigen Wahrscheinlichkeit und einem Wert von $0{,}74$.

F.3.6. Goldenes Rechteck

Der Goldene Schnitt war bereits in der Antike bekannt und findet seither, vom Parthenon über gotische Kathedralen bis zum Modulor von Le Corbusier, als harmonische Proportion Anwendung in der Architektur (vergleiche *C.2.1. Entstehung durch Iterationen/Iteration*).[23] Aus diesem spezifischen Maßverhältnis lässt sich auch das sogenannte Goldene Rechteck ableiten, bei dem die Länge a mit der Breite b gemäß des Verhältnisses des Goldenen Schnittes in direktem Zusammenhang steht. Dabei verhält sich die Summe aus $a+b$ zur längeren Seite a gleich wie die längere Seite a zur kürzeren Seite b:

$$\frac{a}{b} = \frac{(a+b)}{a}$$

Daraus folgt:

$$a^2 - ab - b^2 = 0;\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Wird die negative der beiden möglichen Lösungen eliminiert, so lautet das Ergebnis der quadratischen Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$$

Auf der Basis des Goldenen Rechtecks können schließlich eine ganze Reihe von ähnlichen Rechtecken erstellt werden, deren Seitenverhältnisse sich jeweils im Goldenen Schnitt befinden (siehe auch *C.1. Eigenschaften Teil 1*). Für die Konstruktion sei zunächst der linke untere Eckpunkt A_0 eines Goldenen Rechtecks G_0 mit den Seiten a_0 und b_0 im Ursprung $(0|0)$ gegeben, von dem aus in weiterer Folge das größtmögliche Quadrat mit der Seitenlänge b_0 eingeschrieben wird. Auf diese Weise entsteht am gegenüberliegenden Ende ein weiteres Goldenes Rechteck G_1 mit den Seitenlängen a_1=b_0 und b_1. Im nächsten Schritt wird der Eckpunkt A_1, der die Position des Quadrates angibt, entlang der Kante gegen den Uhrzeigersinn um die Länge a_0 verschoben und ein zweites Quadrat, diesmal mit der Seitenlänge b_1, in das kleinere Goldene Rechteck G_1 eingeschrieben. Dadurch bildet sich ein weiteres Goldenes Rechteck G_2, das erneut um 90 Grad gedreht ist. Gleichzeitig wandert der Eckpunkt A_2 um a_1 gegen den Uhrzeigersinn weiter, um die Position des nächsten Quadrats mit der Seitenlänge b_2 zu definieren und so fort. In diese Konstruktion aus immer kleiner werdenden Goldenen Rechtecken, die gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind, lässt sich, wie in *Abb.69* dargestellt, eine sogenannte Goldene Spirale konstruieren, die aus in die Quadrate eingeschriebenen Viertelkreisen besteht.[24]

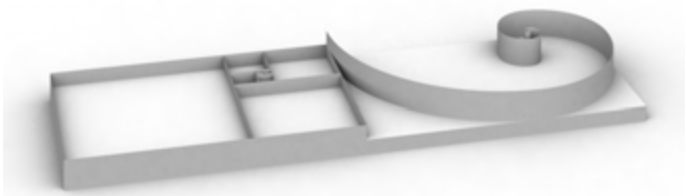


Abb.69.: Goldene Rechtecke und Goldene Spirale

Der Modulor

Eine solche Folge von Goldenen Rechtecken findet seine Anwendung etwa bei Fassaden, indem das Maßverhältnis nicht nur als Grundlage für das Ganze dient sondern auch für die Anordnung der Fenster, deren Proportionen selbst oder für das Design der Ornamente.

23 *Spinadel V. de (2004)*, Seite 13

24 *Spinadel V. de (2004)*, Seite 51

Le Corbusiers Modulor baut ebenfalls auf Goldene Rechtecke auf und setzt diese darüber hinaus in Verbindung mit dem menschlichen Körper. Seine sogenannte Rote Reihe beginnt mit einer angenommenen Durchschnittsgröße eines Menschen von 183cm (ursprünglich 175cm), während die Blaue Reihe mit 226cm von der Größe mit ausgestrecktem Arm ausgeht und im wesentlichen einer Verdoppelung der ersten Reihe entspricht.[25] Beide Reihen bestehen aus einer Folge von Maßzahlen, die zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnittes stehen. Sie finden bei Le Corbusier im Design des Innenraums genauso Anwendung wie Außen an der Fassade, etwa bei der Cité Radieuse (Unité d'Habitation, *Wohneinheit*) in Marseille (1947-1952) oder dem Kloster Sainte-Marie de La Tourette in Éveux bei Lyon (1956-1960).[26] Daraus folgt eine konsequente Umsetzung eines Grundprinzips, dem sich alle Teile unterordnen. Die Anzahl der Elemente einer Ebene nimmt dabei entsprechend der Vorgaben einer fraktalähnlichen Architektur mit abnehmender Größe zu.

F.4. Weitere Methoden

IFS als Computer-Programm

Im Kapitel *D.2.1. IFS – Iteration-Function-System/Verkettung von Matrizen* wurde darauf hingewiesen, dass als Grundlage für einen iterativen Prozess, wie es das IFS darstellt, auch die Möglichkeit besteht, aus einem gegebenen Rechteck R_0 und mehreren aus diesem hervorgehenden verkleinerten, gedrehten, verzerrten und/oder verschobenen Rechtecken $R_{1\text{-}n}$ die zugehörigen Ähnlichkeits-Abbildungen zu bestimmen. Den Ausgangspunkt einer solchen Betrachtung bildet dabei die Funktion g_i

Eingabe IFS durch Rechtecke

$$g_{i(x,y)} = (a_i x + b_i y + e_i,\ c_i x + d_i y + f_i)$$

die jeden der vier Punkte A_0, B_0, C_0 und D_0 des Basis-Rechtecks R_0 in einen der vier Punkte A_i, B_i, C_i und D_i des adäquaten Rechtecks R_i mit $i=\{1 \text{ bis } n\}$ transformiert. Nachdem vier Punktepaare bekannt sind, ergeben sich daraus für x_i und y_i jeweils vier Gleichungen mit drei Unbekannten. Für die Berechnung der drei gesuchten Parameter a_i, b_i und e_i beziehungsweise c_i, d_i, und f_i sind davon drei Gleichungen, das heißt drei einander zugeordnete Eckpunkte, notwendig. Werden nun etwa die Punktepaare $A_0 \rightarrow A_i$, $B_0 \rightarrow B_i$ und $C_0 \rightarrow C_i$ eines der transformierten Rechtecke R_i nach x_i ausgewählt, so lautet die zugehörige Koeffizientenmatrix M_{xi} beziehungsweise der Spaltenvektor der Konstanten (x_{Ai}, ...) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x_{A0} & y_{A0} & 1 \\ x_{B0} & y_{B0} & 1 \\ x_{C0} & y_{C0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Ai} \\ x_{Bi} \\ x_{Ci} \end{pmatrix}$$

Die Lösung eines solches Gleichungssystems erfolgt durch das Gaußsche Eliminations-Verfahren. Dieses basiert auf der Äquivalenzumformung für Gleichungssysteme, bei der eine Gleichung, das heißt, eine Zeile der Matrix, durch die Summe aus dieser und einer anderen Zeile ersetzt beziehungsweise jede Zeile mit einem Wert ungleich Null multipliziert oder dividiert werden darf.[27] Dadurch kann die Matrix M_{ix} in die Form einer Einheitsmatrix gebracht werden, bei der jeweils ein Koeffizient des Gleichungssystems einer Zeile der Koeffizientenmatrix gleich Eins ist, während alle anderen dem Wert Null entsprechen, wodurch sich die Lösung im Spaltenvektor, mit a_1 gleich dem Wert X_1, b_1 gleich X_2 und e_1 gleich X_3, ablesen lässt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

- In dem entsprechenden Computer-Programm werden zunächst die zur Lösung benötigten Koordinaten in einem Array gespeichert. Das sind etwa für das erste Rechteck R_1 und die Gleichung nach x_1 die Punkte A_0, B_0, C_0 und die x-Werte von A_1, B_1 und C_1:

```
listGauss1(1, 1) = point_A(0)
listGauss1(1, 2) = point_A(1)
listGauss1(1, 3) = 1
listGauss1(1, 4) = point_A1(0)
listGauss1(2, 1) = point_B(0)
listGauss1(2, 2) = point_B(1)
listGauss1(2, 3) = 1
listGauss1(2, 4) = point_B1(0)
listGauss1(3, 1) = point_C(0)
listGauss1(3, 2) = point_C(1)
listGauss1(3, 3) = 1
listGauss1(3, 4) = point_C1(0)
```

- Im nächsten Schritt erfolgt in einem eigenen Modul Gauss.Gauss die Berechnung der Parameter a_1, b_1 und c_1 gemäß der Äquivalenzumformung für das Rechteck R_1 mit dem Array listGauss1=Cells. Das Verfahren behandelt zunächst die Hälfte unterhalb der Diagonale und im Anschluss die darüber:

25 *Beutelspacher A. et al. (1996)*, Seite 149

26 *Spinadel V. de (2004)*, Seite 21

27 *Müller-Fonfara R. et al. (2004)*, Seiten 543f

```
Sub Gauss(Cells() As Double)
  ...
  For k = 2 To UBound(Cells, 1)
    i = k
    j = k - 1
    For i = k To UBound(Cells, 1) - 1
      coeff = -Cells(i, k - 1) / Cells(k - 1, k - 1)
      For j = k - 1 To m
        Cells(i, j) = coeff * Cells(k - 1, j) + Cells(i, j)
      Next j
    Next i
  Next k
  k = k - 2
  i = k
  While i >= 1
    Sum = 0
    If i = n - 1 Then
      Cells(n, i) = Cells(n - 1, i + 1) / Cells(n - 1, i)
      i = i - 1
    Else
      For j = i + 1 To m - 1
        Sum = Sum + Cells(n, j) * Cells(i, j)
      Next j
      Cells(n, i) = (Cells(i, m) - Sum) / Cells(i, i)
      i = i - 1
    End If
  Wend
  ....
End Sub
```

- Daraus resultieren schließlich a_1, b_1 und e_1 des ersten Rechtecks R_1:

```
a1 = listGauss1(4, 1)
b1 = listGauss1(4, 2)
e1 = listGauss1(4, 3)
```

Das Computer-Programm berechnet auf diese Weise aus einem Ausgangsrechteck und vier vom Benutzer definierten transformierten Rechtecken die Parameter a_i, b_i und e_i beziehungsweise c_i, d_i, und f_i für alle vier affinen Transformationen, um dann gemäß der in ***D.2.1. IFS – Iteration-Function-System*** beschriebenen fraktalen Methode die grafische Ausgabe nach k Wiederholungen zu erzeugen. In der ***Abb.70*** sind schließlich drei Beispiele mit ihren jeweiligen Ausgangsrechtecken R_0 beziehungsweise den transformierten Rechtecken $R_{1\text{-}4}$ und den grafischen Ausgaben nach $k=7$ Schritten dargestellt. Demnach sind die Erstellung sehr unterschiedlicher Muster möglich, von denen einige Ähnlichkeiten zu Pflanzen aufweisen.

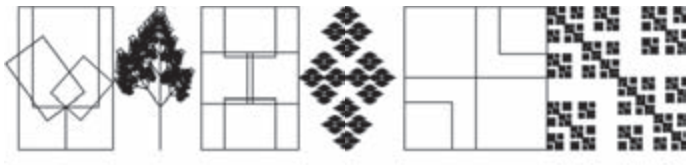


Abb.70.: Gegebene Rechtecke und jeweils 7 Iterationen

F.5. Conclusio

VBA für AutoCAD

Die Umsetzung der Fraktalen Methoden in VBA für AutoCAD ermöglicht es Architekten, einerseits die Parameter selbst zu bestimmen beziehungsweise zu beeinflussen und andererseits die daraus resultierenden Ergebnisse in einer vertrauten digitalen Umgebung weiter zu nutzen. So kann etwa der als Vektorgrafik vorliegende Output eines IFS, für das im letzten Abschnitt bereits die Möglichkeit einer vereinfachten Eingabe über transformierte Rechtecke dargestellt wurde, im CAD-Programm als Ausgangspunkt eines architektonischen Entwurfs dienen oder das Curdling als Inspiration zur Realisierung einer geforderten Bebauungsdichte in einem Quartier. Eine andere Möglichkeit bieten die L-Systeme oder die Mittelpunktverlagerung, die ihrerseits als digitale Ebenbilder von Pflanzen, Bäumen oder Gebirge in Visualisierungen von Entwürfen Anwendung finden.

Die in diesem Kapitel gezeigten Beispiele der Initiator/Generator Methode wiederum demonstrieren, wie die Grundform eines Bauwerks aus immer gleichen beziehungsweise ähnlichen Formen von sich selbst bestehen kann und veranschaulichen auf diese Weise, dass bei den gebauten Vorbildern die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit zumindest in einem begrenzten Bereich anzutreffen ist. Dabei lässt sich diese Eigenschaft mitunter auf eine bewusste Anwendung zurückführen. Die verkleinerten Kopien der *Shikhara* etwa, die *Urushringa*, sollen das Auge empor zum höchsten Punkt führen, unter dem sich das Bild der wichtigsten Gottheit des Tempels befindet.[28] Beim gotischen Fenster lässt sich hingegen die Unterteilung durch ein Stabwerk auf die Auflösung der Wand und der Schaffung größerer Öffnungen zurückführen, in dessen Bahnen schließlich die Windeisen und die Bleistege der Verglasung eingepasst sind.[29]

Schlussendlich verdeutlichen aber sämtliche dieser Beispiele die Grenzen einer fraktal-ähnlichen Architektur. Zum Einen betrifft das die starke Beschränkung des Maßstabsbereiches sowohl bei den realisierten Bauwerken

28 *Lochtefeld J. (2001)*, Seite 725

29 *Binding G. (2006)*, Seite 197 und *Jaxtheimer B. W. (1990)*, Seiten 74f

als auch bei den erzeugten Computerbildern (hier infolge der limitierten Rechenleistung). Zum Anderen widerfährt bei den gezeigten Beispielen der Initiator/ Generator Methode eines der Elemente keine Verkleinerung, was bei einem klassischen Fraktal nicht der Fall ist und zu zahlreichen Überlagerungen führt. Demnach handelt es sich hierbei auch nicht um ein Fraktal im eigentlichen Sinn.

Architektur ist kein Fraktal

Fraktal-ähnlich

Eine strikte Fortführung ein und derselben Transformation scheint in der Architektur in jedem Fall nicht sinnvoll, nachdem bedingt durch die Konstruktion oder Funktion bestimmte architektonische Elemente lediglich eine beschränkte Anzahl an Maßstabsebenen abdecken. Die Form und die Größe eines Fensters zur Belichtung eines Raumes wird etwa durch die Größe des Raumes, die Art der Tätigkeit im Raum, die Ausrichtung nach der Himmelsrichtung, die Wirtschaftlichkeit der gewählten Konstruktion, die Art des Glases und durch das Füllmaterial selbst mit seiner maximal möglichen Ausdehnung beeinflusst. Für die Größe eines Ziegelsteins wiederum war ursprünglich die Voraussetzung, ihn mit einer Hand tragen und versetzen zu können, entscheidend.[30] Daraus ergeben sich Begrenzungen sowohl im Hinblick auf mögliche Größen und Proportionen der Einzelteile eines Gebäudes als auch im Hinblick auf ihre Verwendung und Position innerhalb des Gebäudes. Aufgrund dieser Einschränkung und der unzweifelhaft vorhandenen Grenzen im Großen wie im Kleinen kann im Zusammenhang mit Architektur lediglich von fraktal-ähnlichen Strukturen gesprochen werden, die selten eine strikte Selbstähnlichkeit sondern vielmehr eine statistische Selbstähnlichkeit aufweisen und allenfalls durch eine begrenzte Zahl von Wiederholungen eines iterativen Prozesses entstehen. Die Umsetzung von fraktalen Eigenschaften in der Architektur stellt aber jedenfalls durch das Charakteristikum einer ähnlichen Zerklüftung, das durch eine ähnliche fraktale Dimension ausgedrückt wird, einen Gegensatz zur *glatten* Euklidischen Architektur dar.

30 *Pfeifer G. (2001)*, Seite 31

Fraktale Dimension

G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität

Die Box-Counting Methode

Die fraktale Dimension ist ein charakteristischer Wert für ein Fraktal (siehe *C.1.3. Fraktale Dimension*). Sie kennzeichnet die Geschwindigkeit, mit der etwa die Gesamtlänge, die Oberfläche oder das Volumen anwächst, wenn ein immer feinerer Maßstab zur Messung herangezogen wird und stellt somit eine Verbindung zwischen den einzelnen Iterationen, beziehungsweise zwischen verschiedenen Maßstabsebenen mit selbstähnlichen Elementen, her.[01] Anders ausgedrückt, gibt die fraktale Dimension an, wie viel eine Struktur vom metrischen Raum, in dem sie sich befindet, ausfüllt und kann infolge dessen als Index für die Komplexität verstanden werden.[02] Nachdem etwa natürliche Fraktale keine strikte Selbstähnlichkeit aufweisen, ist sie darüber hinaus häufig die einzige Möglichkeit ein Fraktal zu beschreiben und bietet gemäß Benoît Mandelbrot eine weitere Differenzierung topologisch identischer Formen wie jene der Küstenlinien.[03] Zur Bestimmung der fraktalen Dimension stehen unterschiedliche Mess-Methoden zur Verfügung, deren Ergebnisse durch Parameter beeinflusst werden. Bei der Box-Counting Methode sind das die Größe der Boxen, der Maßstab des Plans und damit die Genauigkeit der Darstellung, der Verkleinerungsfaktor, die Orientierung und die relative Position der Boxen zum Objekt. Handelt es sich um real existierende Strukturen, spielt darüber hinaus die Datenaufbereitung eine Rolle, die zumeist einer Digitalisierung entspricht. Für einen Vergleich verschiedener Objekte über deren fraktale Dimension müssen dementsprechend diese Einflussfaktoren auf ein Minimum reduziert werden.

Die fraktale Dimension lässt sich grundsätzlich als Trend, das heißt als gerader Verlauf in einem doppellogarithmischen Graphen mit der jeweiligen Skalierung versus der Größenänderung wie Länge, Fläche oder Volumen ablesen. Im Fall von Fassaden wird dem Maßstab etwa eines Gitternetzes die Menge signifikanter Übergänge gegenübergestellt. Stehen diese in einem direkten Zusammenhang, so deutet das auf die Einheit eines Gebäudes vom Großen zum Kleinen hin, für dessen Erreichen F.L. Wright eine Einflussnahme des Architekten selbst auf die im Maßstab kleineren Entscheidungen voraussetzt.[04] Eine solche Kohärenz findet wiederum seine Entsprechung in der fraktalen Eigenschaft der Selbstähnlichkeit, etwa als Fortführung eines Leitmotivs oder einer Leitidee vom ganzen Gebäude bis zum kleinsten Detail. Daraus entsteht eine ähnliche Zerklüftung, die sich als ähnliche Verteilung von Strichen in einem Plan äußert. Wird daher eine Idee konsequent in allen Elementen angewandt, so lässt sich das umgekehrt als konstante fraktale Dimension über einen bestimmten Bereich ablesen.

01 *Barnsley M. (1993)*, Seite 171

02 *Peitgen H.-O. et al. (2004)*, Seite 192

03 Küstenlinien sind topologisch identisch mit Kreisen. *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 29, 42

04 *Hoffmann D. (1984)*, Seite 49

G.1. Dimensionsbegriff

Intuitiv ist die Dimension eines Objektes zunächst gleich der Anzahl unabhängiger Parameter oder Koordinaten, die notwendig sind, um einen Punkt dieses Objektes zu beschreiben.[05] Eine solche aus der Euklidischen Geometrie bekannte Erklärung[06] ist allerdings für fraktale Kurven nicht mehr ausreichend, nachdem etwa die Länge, wie im Kapitel *B. Mathematische Fraktale – Grundlagen* dargestellt, als Parameter zur Beschreibung ausscheidet. Aufgrund dieser Unzulänglichkeit wurden in der Mathematik verschiedene Dimensionsbegriffe eingeführt, von denen keiner eine universelle Erklärung bietet und die darüber

mehrere Dimensions-begriffe

05 *Peitgen H.-O. et al. (2004)*, Seite 105

06 *Voß H. (1994)*, Seite 315

hinaus zu unterschiedlichen Werten führen können.[07] Exemplarisch werden im Folgenden als Grundlage für die Messung von Fassaden mit der Box-Counting-Dimension neben dieser noch die topologische, die Hausdorff-Besicovitch und die Zirkel-Dimension vorgestellt.

G.1.1. Topologische Dimension D_T

Die topologische Dimension D_T einer Punktmenge hat den Wert Null, wenn eine beliebig kleine Umgebung jedes einzelnen dieser Punkte keinen anderer Punkt der Menge enthält. Allgemein ist dann D_T um Eins höher als die Dimension dieser Umgebung und aus diesem Grund stets ganzzahlig.[08] Nachdem nun ein beliebiger Punkt einer Kurve in seiner unmittelbaren Umgebung wieder einen Punkt der Menge besitzt, dem seinerseits der Wert Null zugewiesen ist, entspricht die topologische Dimension D_T der Kurve selbst dem Wert Eins. Anders ausgedrückt wird zur Trennung einer Kurve, wie sie eine Küstenlinie oder eine Kreislinie darstellt, ein Punkt mit $D_T=0$ benötigt. Wird dieser Wert um Eins erhöht, führt das demnach zu $D_T=1$ für Kurven. Eine Ebene wiederum kann durch eine Gerade mit $D_T=1$ getrennt werden und weist daher $D_T=2$ auf.[09]

G.1.2. Hausdorff-Besicovitch-Dimension D_H

Die topologische Dimension D_T der im Kapitel *B.1.2. Monsterkurven* beschriebenen *Peano-Kurve* ist gleich eins, obwohl sie die Fläche, in der sie sich befindet, und die ihrerseits ein $D_T=2$ aufweist, vollständig ausfüllt. Daher scheint eine feinere Unterteilung zur Charakterisierung von komplexen Strukturen notwendig, wie sie etwa die Hausdorff-Besicovitch-Dimension D_H ermöglicht.[10] Vereinfacht dargestellt wird für D_H jene minimale Anzahl von Kugeln N_r mit dem Radius r gesucht, die eine gegebene Menge von Punkten in einem endlichen drei-dimensionalen Raum abdecken. Dabei erhöht sich die Anzahl der Kugeln N_i bei einer Verkleinerung des Radius r_i. Der Wert für D_H ergibt sich dann aus dem Zusammenhang zwischen r_i, und N_i gemäß:

$$D_H = -\lim_{r\to 0}\frac{log(N)}{log(r)}$$

Die Hausdorff-Besicovitch-Dimension von Fraktalen übersteigt nach B. Mandelbrot, der den Begriff der fraktalen Dimension vorzieht, jedenfalls ihre topologische Dimension D_T und kann sowohl einen gebrochenen als auch einen ganzzahligen Wert annehmen.[11] Bei euklidischen Objekten wie der Linie oder der Fläche wiederum stimmt D_T mit D_H überein:

$$Fraktal: D_H > D_T$$

$$Euklidisch: D_H = D_T$$

Werden für die Messung Boxen anstelle der Kugeln oder Kreise verwendet, führt das schließlich zur Box-Counting-Dimension, die zur Einstufung von Fassaden dienen soll. Verschiedene Ergebnisse aus derartigen Untersuchungen von Gebäuden aber auch von natürlichen Strukturen mit fraktalen Eigenschaften verdeutlichen, dass sich eine Verbindung zwischen dem Maßstab und der Länge oder der Fläche in diesen Fällen nur für einen bestimmten Bereich herstellen lässt. Eine solche obere beziehungsweise untere Schranke entspricht dann dem Beginn und dem Ende des geraden Verlaufs in einem doppellogarithmischen Graphen.

G.2. Fraktale Dimension: Mess-Methoden

Die Wahl einer bestimmten Methode zur Messung der fraktalen Dimension[12] bezieht sich im wesentlichen darauf, ob es sich bei dem vorliegenden Objekt um ein strikt selbstähnliches Fraktal, um eine Kurve, oder um mehrere Kurven beziehungsweise eine aus Linien zusammengesetzte Struktur handelt. Dementsprechend wird die Selbstähnlichkeitsdimension, die Zirkel-Dimension oder die Box-Counting-Dimension berechnet, wobei letztere etwa bei Abbildungen von Gebäuden zum Einsatz kommt. Im Fall von Fassaden lassen dann annähernd konstante Werte innerhalb eines bestimmten Maßstabsbereich darauf schließen, dass die Anzahl der jeweils für einen bestimmten Maßstab signifikanten architektonischen Elemente von einem Messschritt zum nächst feineren im gleichen Maß zunimmt. Die Höhe der fraktalen Dimension, die jedenfalls keine Rückschlüsse auf die Form zulässt, hängt wiederum davon ab, wie strukturiert die Fassade ist, das heißt, sie ist umso höher, je mehr Elemente in dem betrachteten Ausschnitt vorkommen. Ein Blockhaus etwa weist auf Grund der Fugen und der Struktur der Stämme bis zu einem sehr kleinen Maßstab eine generell hohe fraktale Dimension auf.[13] Eine solche untere Schranke bis zu der eine ähnliche fraktale Dimension vorherrscht, soll schließlich die fraktale Tiefe des Gebäudes genannt werden.

07 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 26

08 *Zeitler H. et al. (2000)*, Seite 166

09 *Voß H. (1994)*, Seite 315

10 Die Hausdorff-Besicovitch-Dimension wurde von Felix Hausdorff (1868-1942) formuliert und durch Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) in die endgültige Form gebracht. *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 27

11 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 27

12 *Barnsley M. (1993)*, Seiten 171ff

13 Vergleiche Messergebnisse in *Lorenz W. E. (2002)*, Seiten 101-102, 125 und 128-139

G.2.1. Selbstähnlichkeits- oder Ähnlichkeitsdimension D_s

Strukturen, wie sie in Kapitel *B.1.2. Monsterkurven* beschrieben wurden, verfügen über ein definitives Verhältnis zwischen dem Verkleinerungsfaktor s_i, aus dem im Bezug auf den Initiator die Länge eines Segmentes hervorgeht, und der Anzahl der Teile N_i einer bestimmten Iteration i. Eine solche Beziehung besteht bei strikt selbstähnlichen Objekten unabhängig davon, ob es sich tatsächlich um ein Fraktal handelt oder nicht und lässt sich durch folgende Funktionen darstellen (siehe auch *C.1.3. Fraktale Dimension*):[14]

Strikt selbstähnlich

$$s_i = \frac{1}{N_i^{\frac{1}{D_{s_i}}}}$$

$$D_{s_i} = \frac{\log(N_i)}{\log\left(\frac{1}{s_i}\right)}$$

Im Fall der Koch Kurve, deren erste Iteration aus dem Ersetzen einer Strecke durch vier Segmente mit jeweils einem Drittel der ursprünglichen Länge besteht, beträgt die Selbstähnlichkeitsdimension D_s demzufolge 1,26. Diese bleibt dann für sämtliche Iterationen konstant, wie es sich anhand der zweiten Iteration mit $s_1=1/9$ und $N_1=16$ oder der dritten mit $s_2=1/27$ und $N_2=64$ leicht nachvollziehen lässt. Eine Linie, für die ebenfalls ein Verkleinerungsfaktor von $s=1/3$ gewählt wird, weist dagegen im ersten Schritt drei identische Abschnitte auf, womit ihre Selbstähnlichkeitsdimension D_s gleich Eins ist und wie vermutet $D_s=D_T$ gilt:

$$Linie: s = \frac{1}{3};\ N = 3;\ D_s = 1$$

In der nachfolgenden Tabelle sind neben Selbstähnlichkeitsdimensionen D_s bekannter fraktaler Kurven auch die jeweiligen Längen der ersten drei Iterationen mit $L_0=1$ angeführt, woraus ersichtlich wird, dass der Wert von D_s ein Index dafür ist, wie schnell die Länge einer Kurve gegen Unendlich strebt.

- Koch Kurve

$L_1 = \frac{4}{3} =$ 1,33	$s = \frac{1}{3}$
$L_2 = \frac{16}{9} =$ 1,78	$N = 4$
$L_3 = \frac{64}{27} =$ 2,37	$D_s = 1{,}26186$

- Minkowski Kurve

$L_1 = \frac{8}{4} =$ 2,00	$s = \frac{1}{4}$
$L_2 = \frac{64}{16} =$ 4,00	$N = 8$
$L_3 = \frac{512}{64} =$ 8,00	$D_s = 1{,}5$

- Peano Kurve

$L_1 = \frac{9}{3} =$ 3,00	$s = \frac{1}{3}$
$L_2 = \frac{81}{9} =$ 9,00	$N = 9$
$L_3 = \frac{729}{27} =$ 27,0	$D_s = 2{,}0$

G.2.2. Zirkel-Dimension D_Z

Wenn das betrachtete Objekt keine strikte Selbstähnlichkeit mit identischen Komponenten aufweist, bedarf es einer anderen Methode zur Bestimmung der fraktalen Dimension. Eine Möglichkeit bietet die Zirkel-Dimension, die auf Lewis Fry Richardsons Analysen von Grenzlinien aus dem Jahr 1961 und dem von B. Mandelbrot im Jahr 1967 erschienenen Artikel mit der Frage nach der Länge der Küstenlinie Großbritanniens zurückgeht.[15][16] Ausgangspunkt ist die Feststellung, dass eine Landkarte mit einem kleineren Maßstab einen genaueren Ausschnitt der realen Welt abbildet und daher eine dort vorgenommene Längenmessung zu einem größeren Wert führt als Landkarten, die einen weniger genauen Ausschnitt zeigen. So wird, wie in *B.1.1. How long is the coastline of Britain?/ Grenzlinien* beschrieben, etwa die Länge der Landesgrenze zwischen Portugal und Spanien von beiden Ländern unterschiedlich angegeben, nachdem Portugal als kleineres Land offizielle Karten mit einem kleineren Maßstab verwendet.[17] Dieses Phänomen war bereits L.F. Richardson bekannt, dessen Untersuchungen von Längen $L(\varepsilon)$ verschiedener Grenzlinien zwischen zwei Staaten zu der Erkenntnis führten, dass diese mit der jeweiligen zur Messung herangezogenen Einheitslänge ε einem Potenzgesetz folgen.

Lewis Fry Richardson

$$L(\varepsilon) \sim \lambda \cdot \varepsilon^{1-D_F}$$

Der Exponent D_F ist für natürliche Objekte zumeist gebrochen und wurde von B. Mandelbrot als fraktale Dimension interpretiert, die zur Charakterisierung einer fraktalen Kurve dient.[18] Eine Küstenlinie weist

14 *Voß H. (1994)*, Seite 318

15 *Richardson L.F. (1961)*

16 *Mandelbrot B. B. (1967)*

17 *Voß H. (1994)*, Seite 13 und *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 45

18 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seite 41

demnach eine gebrochene nicht-ganzzahlige fraktale Dimension D_F zwischen Eins und Zwei auf, nachdem sie aufgrund ihres gebrochenen, gezackten Verlaufs mehr als eine ein-dimensionale Linie ist, die zwei-dimensionale Fläche, in der sie liegt, aber nicht vollständig ausfüllt.

Die Berechnung der Zirkel-Dimension

Zur Berechnung der Zirkel-Dimension, die das Verhalten der Gesamtlänge einer Kurve bei gleichzeitiger Veränderung des betrachteten Maßstabs kennzeichnet, werden mehrere Ersatzpolygone mit unterschiedlichen Einheitslängen herangezogen. Dabei entsteht zunächst durch das Abschlagen eines Zirkelradius r_0 entlang der Kurve ein erstes Ersatzpolygon mit N_0 Segmenten und einer Näherungslänge von $L_0 = N_0 \cdot r_0$. Im nächsten Schritt führt dann die Verkleinerung von r_0 um den Faktor s zu einem weiteren Zirkelradius r_1 und einem Ersatzpolygon mit der Gesamtlänge L_1. Je kleiner nun der Zirkelradius r_i gewählt wird, desto stärker nähert sich der Polygonzug dem eigentlichen Verlauf der Kurve an. Die Zirkel-Dimension D_Z zwischen zwei Einheitslängen errechnet sich schließlich aus dem Verhältnis des Kehrwertes der jeweiligen Radien und der entsprechenden Gesamtlängen der Polygonzüge gemäß der Potenzfunktion:

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{D_{Z\overline{12}}}$$

Daraus folgt:

$$D_{Z\overline{12}} = \frac{log\left(\frac{L_2}{L_1}\right)}{log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

Ein Zusammenhang zwischen D_Z und der fraktalen Dimension D_F besteht dann durch:[19]

$$D_{F\overline{12}} = D_{Z\overline{12}} + 1$$

Für einen bestimmten Wertebereich entspricht die Zirkel-Dimension der Steigung der linearen Ersatzgeraden (Regressionsgerade oder Trendlinie) in einem doppellogarithmischen Graphen mit $\log(L_i)$ und $\log(1/r_i)$.[20]

Das Computer-Programm

Zur Berechnung der Zirkel-Dimension wurde in VBA für AutoCAD ein Computer-Programm erstellt, das die Einheitslängen als Segmente r_i und die Gesamtlängen L_i verschiedener Ersatzpolygone zur weiteren Analyse in einem Tabellenkalkulationsprogramm als Textdatei ausgibt. Die Eingabe erfordert dabei ein offenes oder geschlossenes durchgehendes Polygon und einen darauf befindlichen Startpunkt A. Sollte der gewählte Punkt diesem Kriterium nicht entsprechen, erscheint ein entsprechender Hinweis. Von diesem Startpunkt A aus erfolgt im Anschluss entlang des gewählten Polygons das hintereinander gereihte Abschlagen eines bestimmten vom Benutzer eingegebenen Zirkelradius r_0. Daraus ergibt sich ein erstes näherungsweises Ersatzpolygon mit einer bestimmten Gesamtlänge L_0, die aus der Anzahl ganzer Segmente und dem Reststück resultiert. Der Zirkelradius r_1 des nächsten Schritts entspricht der Verkleinerung von r_0 um einen eingegebenen Skalierungsfaktors s, woraus ein feineres Ersatzpolygon mit einer Gesamtlänge L_1 entsteht.

Für einen definitiven Skalenbereich berechnet sich die Zirkel-Dimension D_Z – wie zuvor beschrieben – aus n gewählten Ersatzpolygonen als Steigung der linearen Ersatzgeraden in einem doppellogarithmischen Graphen mit dem Kehrwert der Längen der Segmente $r_{1\text{-}n}$ versus den Gesamtlängen $L_{1\text{-}n}$. Die fünf in ***Abb.71*** übereinander gelegten Ersatzpolygone mit unterschiedlichen Längen der Segmente verdeutlichen, wie sich deren Verlauf an das Ausgangspolygon einer Koch Kurve mit 8 Iterationen annähert und sich dabei naturgemäß die Gesamtlänge verändert.

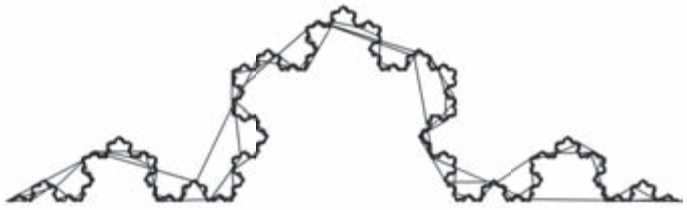


Abb.71.: Koch Kurve mit 8 Iterationen und 5 Ersatzpolygonen

Zirkel-Dimension Messungen

In *Tab.G.1* (auf *Seite 113*) ist die Selbstähnlichkeitsdimension D_s bekannter fraktaler Kurven, wie jener der Koch Kurve, der Koch Insel, der Minkowski Kurve und der Peano Kurve, ihrer jeweiligen Zirkel-Dimension D_Z einer bestimmten Versuchsanordnung, respektive der daraus berechneten fraktalen Dimension D_F, gegenübergestellt. Bei sämtlichen dieser Messungen sind sowohl die Länge des Initiators L_0, der Zirkelradius r_0, aber auch die Anzahl der Schritte mit Zwanzig und der Skalierungsfaktor s für die Reduktion des Zirkelradius von einem Schritt zum Nächsten mit 75 Prozent als gleich angenommen. Dabei entspricht jedenfalls r_0 mindestens vier mal der Länge einer geraden Komponente des jeweiligen Polygons. Dadurch wird vermieden, dass die geraden Segmente, aus denen die fraktalen Kurven aufgrund der endlichen Anzahl an Iterationen tatsächlich bestehen, gemessen werden und das Ergebnis infolgedessen

19 *Peitgen H.-O. et al. (2004)*, Seite 197

20 Die Steigung jener Geraden im doppellogarithmischen Graphen, von der die einzelnen Datenpunkte möglichst wenig abweichen, entspricht dem Mittelwert von D_Z. vgl. *Peak D. et al. (1995)*, Seiten 99f

verflacht. Wie aus der Tabelle ersichtlich, weichen die Resultate in allen Fällen nur geringfügig von der Selbstähnlichkeitsdimension D_s ab:

Koch Kurve (8 Iterationen)	$D_s=1{,}26186$	$D_F=D_Z+1=1{,}258$
Koch Insel (6 It.)	$D_s=1{,}26186$	$D_F=D_Z+1=1{,}226$
Minkowski Kurve (7 It.)	$D_s=1{,}5$	$D_F=D_Z+1=1{,}491$
Sierpinski Dreieck (10 It.)	$D_s=1{,}58496$	$D_F=D_Z+1=1{,}591$
Peano Kurve (5 It.)	$D_s=2{,}0$	$D_F=D_Z+1=1{,}944$

Tab.G.1.: Fraktale Dimension D_F bekannter fraktaler Kurven

In Anlehnung an die Berechnungen von L.F. Richardson sind in der *Tab.G.2* einige Ergebnisse von Messungen verschiedener Landesgrenzen ohne der bei Küstenlinien allenfalls vorgelagerten Inseln angeführt. Um einen Vergleich der Resultate untereinander zu ermöglichen, stammen sämtliche der untersuchten digitalen GIS-Daten aus ein und derselben Quelle.[21] Außerdem kam immer die gleiche Versuchsanordnung zur Anwendung, mit einem Wertebereich zwischen $r_0=280$ Kilometern und $r_n=4$ Kilometern, womit sich bei einem Skalierungsfaktor $s=90$ Prozent insgesamt 50 Schritte ergeben (vergleiche *Abb.72*). Wie vermutet weist dann die Landesgrenze von Norwegen mit ihrem hohen Anteil an stark gezackten Fjorden den höchsten Wert auf, während etwa Australien aufgrund der glatter verlaufenden Küsten über einen niedrigeren Wert verfügt.

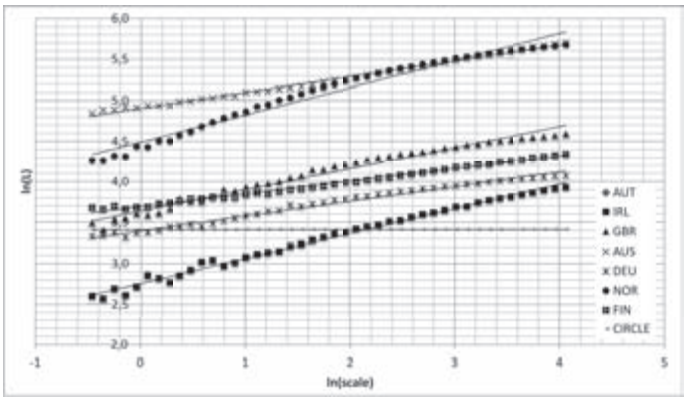


Abb.72.: Doppellogarithmischer Graph zur Messung der Zirkel-Dimension verschiedener Küstenlinien

Die Ergebnisse sind in dem doppellogarithmischen Graphen der *Abb.72* zusammengefasst. Dabei ist der horizontale Verlauf der Referenzlinie der Messung einer Kreislinie mit $D_Z=0$ und $D_F=1$ augenfällig.

Österreich	$D_F=D_Z+1=1{,}128$
Finnland	$D_F=D_Z+1=1{,}154$
Australien	$D_F=D_Z+1=1{,}184$
Deutschland	$D_F=D_Z+1=1{,}185$
United Kingdom	$D_F=D_Z+1=1{,}282$
Irland	$D_F=D_Z+1=1{,}313$
Norwegen	$D_F=D_Z+1=1{,}340$

Tab.G.2.: Fraktale Dimension D_F von Landesgrenzen[22]

Grenzen einer Stadt

Mit Hilfe der Zirkel-Methode kann auch die Grenzlinie einer Stadt untersucht werden, wie sie etwa durch die Bebauungsdichte, durch die Bevölkerungsdichte, durch eine geographische Angabe mit soziologischen und wirtschaftlichen Kriterien oder durch politische Bezirke charakterisiert ist. Eine etwaige Veränderung der Beziehung zwischen Gesamtlänge L_i und dem Maßstab, das ist die Einheitslänge beziehungsweise der Zirkelradius r_i, gibt dann über die Konsequenzen von Entscheidungsebenen Aufschluss. Demzufolge können die Auswirkungen von überregionalen Planungen einiger weniger Entscheidungsträger, die einen größeren Maßstab aufweisen, auf den Verlauf der Grenzlinie mit jenen verglichen werden, die auf der regionalen Ebene erfolgen und daher in den Händen mehrerer Verantwortlicher liegen. Auch sind Gegenüberstellungen mit Daten von historischen Grenzlinien denkbar, um daraus Prognosen für eine künftige Entwicklung der Stadt geben zu können.

Entscheidend für die Ergebnisse ist jedenfalls die Definition des Verlaufs der Grenzlinie. In Anlehnung an eine frühere Berechnung soll exemplarisch der südwestlich der Donau liegende Teil von Wien betrachtet werden, mit Daten, die auf der Einwohnerdichte aus dem Jahr 2002 basieren (siehe *Abb.73*, *Seite 114*).[23] Für die Messung wurde die Länge des ersten Zirkelradius r_0 gleich dem Radius des Umkreises, die Anzahl der Schritte gleich Zwanzig und ein Reduktionsfaktor $s=75$ Prozent gewählt. Der Verlauf der Datenlinie im doppellogarithmischen Graphen zeigt dann einen annähernd konstanten Verlauf mit einer aus der Steigung der linearen Ersatzgeraden (Regressionsgeraden) errechneten Zirkel-Dimension $D_Z=0{,}31$ und einer fraktalen Dimension $D_F=1{,}31$ also ähnlich jener der Koch Kurve

Bevölkerungs-dichte Wiens

21 *http://www.diva-gis.org/gdata (8.12.2011)*

22 *Bovill C. (1996)*, Seite 35. C. Bovill gibt für die Küstenlinie des Vereinigten Königreichs ebenfalls eine Zirkel-Dimension D_Z von 0,28 an, allerdings für einen Bereich von 100 bis 25 Meilen, das entspricht 160 bis 40 Kilometern.

23 www.wien.gv.at/stadtentwicklung/05/03/04/11.htm (26.07.2002)

(vergleiche *Abb.74*). Dieser Wert weicht nur leicht von jenen 1,337 aus dem Jahr 2002 ab, obwohl die damalige Versuchsanordnung einen geringeren ersten Zirkelradius, einen Skalierungsfaktor s von 50 Prozent und aufgrund einer geringeren Anzahl von Schritten einen kleineren Bereich aufweist.[24]

Abb.73.: Wien Einwohnerdichte und 20 Ersatzpolygone

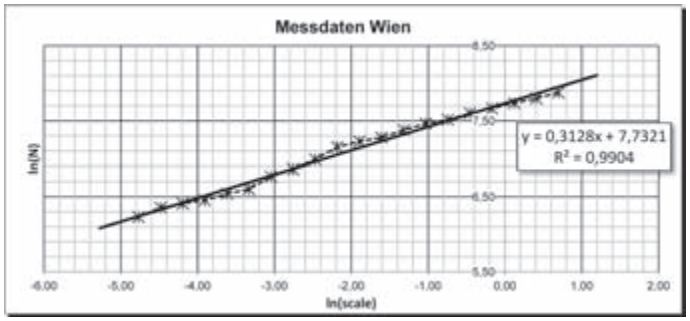


Abb.74.: Doppellogarithmischer Graph zur Messung der Zirkel-Dimension der Einwohnerdichte Wiens mit 20 Daten

G.2.3. Box-Counting- oder Gitterbox-Dimension D_B

Mit der Zirkel-Dimension D_Z können bei Küstenlinien allenfalls vorgelagerte Inseln nicht erfasst werden. Dasselbe gilt bei zwei-dimensionalen Ansichten von Gebäuden für jene Begrenzungen von Flächen, die innerhalb des Umrisses liegen und durch Vor- und Rücksprünge, den Wechsel des verwendeten Materials oder der Abtrennung verschiedener architektonischer Elemente charakterisiert sind. In diesem Fall, das heißt wenn eine Struktur aus mehreren Kurven oder Linien besteht, bietet die Box-Counting Methode eine geeignete Möglichkeit zur Charakterisierung. Sie berechnet die Box-Counting-Dimension D_B von digitalisierten Schwarz- Weiß-Bildern oder von Vektorgrafiken, unabhängig davon, ob es sich bei der Vorlage um ein Objekt mit oder ohne Selbstähnlichkeit handelt. Aus diesem Grund eignet sie sich auch als Messinstrument für die Architektur, weil ebendort, wie aus dem Kapitel *E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal* hervorgeht, eine unterschiedliche Ausprägung dieser fraktalen Eigenschaft anzutreffen ist.

Funktionsweise Box-Counting Methode

Grundlage der Box-Counting Methode ist das Bestreben, ein Objekt mit möglichst wenigen Boxen einer bestimmten Größe abzudecken.[25] Bei der für alle weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit verwendeten Untergruppe der Gitterbox-Methode erfolgt das vereinfacht über die Konstruktion eines regelmäßigen Gitternetzes mit einer bestimmten Maschenweite respektive Boxgröße. Der Maßstab beziehungsweise die Skalierung s_0 eines solchen Gitternetzes entspricht dem reziproken Wert der Anzahl der Boxen einer Reihe und ist somit durch die Gesamtbreite und die erste Maschenweite bestimmt. Im nächsten Schritt erfolgt die Ermittlung der Summe derjeniger Boxen N_0, die Teile des darunter liegenden Objekts beinhalten, das sind jene Stellen, bei denen es etwas zu sehen gibt. Solche signifikante Komponenten entsprechen bei einer Fassade unter anderem dem Umriss, der Tür- und Fensterlaibung, dem Gesimse oder dem Ornament, beziehungsweise bei einer Ansicht der adäquaten Darstellung in Form von Linien. Nach der Verkleinerung der Maschenweite, das heißt der Boxgröße werden, diesmal für die Skalierung s_1, erneut die relevanten Boxen N_1 gezählt. Die Box-Counting-Dimension D_B zwischen zwei Maßstäben errechnet sich dann aus dem Verhältnis der Differenzen von s_1 und s_2 beziehungsweise N_1 und N_2 gemäß dem Potenzgesetz:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{(N_2 - N_1)^{\frac{1}{D_{B\overline{12}}}}}$$

Die Umformung nach D_B lautet:

$$D_{B\overline{12}} = \frac{log(N_{s_2}) - log(N_{s_1})}{log\left(\frac{1}{s_2}\right) - log\left(\frac{1}{s_1}\right)}$$

beziehungsweise:

$$D_{B\overline{12}} = \frac{log\left(\frac{N_{s_2}}{N_{s_1}}\right)}{log\left(\frac{s_1}{s_2}\right)}$$

Bedingt durch die Versuchsanordnung existiert für das Ergebnis der Gitterbox-Methode sowohl ein unteres als auch ein oberes Limit, das etwa in der zweidimensionalen Ebene dem Wert Null beziehungsweise Zwei entspricht. Im ersten Fall gilt $N_i = N_{i-1}$, das heißt die Summe derjenigen Boxen, die Teile des zu messenden Objekts beinhalten ändert sich zwischen dem Gitternetz $i\text{-}1$ und jenem i der nächst kleineren Skalierung nicht. Im zweiten Fall gilt für

24 *Lorenz W. E. (2002)*, Seite 113.

25 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seite 218

das Gitternetz i innerhalb der in der vorangegangenen Skalierung von $i\text{-}1$ markierten Boxen, dass sämtliche neue Boxen wieder einen Teil des Objektes beinhalten, das heißt, die Struktur weist lokal keine Verfeinerung auf. Infolgedessen ist das Ergebnis der Zählung für i jeweils die maximale Anzahl jener aus $i\text{-}1$ resultierenden potenziellen Möglichkeiten.

Eine Kurve dessen Anzahl der Teilstrecken größer ist als das Quadrat der reziproken Skalierung, weist allerdings eine höhere Selbstähnlichkeitsdimension D_s als Zwei auf. Der Generator der Kurve in *Abb.75* besteht etwa aus elf Teilstrecken mit einem Skalierungsfaktor von einem Drittel, wodurch gilt:

$$D_s = \frac{\log(11)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = 2{,}18$$

Der Grund, warum das Ergebnis aus der Gitterbox-Methode mit $D_B=1{,}72$[26] diesen Wert nicht erreicht, liegt darin begründet, dass es nicht möglich ist, allfällige Überlappungen, wie sie im angeführten Beispiel vorkommen, zu erfassen, sondern jede Box nur einmal gezählt wird.[27]

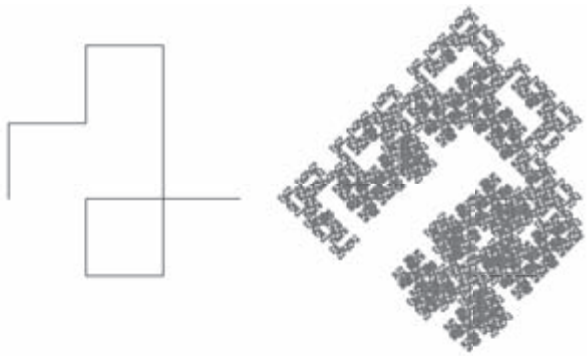


Abb.75.: Eine sich überlappende Kurve; 1. und 5. Iteration

Analog zur Zirkel-Dimension D_Z errechnet sich die durchschnittliche Box-Counting-Dimension D_B für verschiedene Maschenweiten als Steigung der linearen Ersatzgerade in einem doppellogarithmischen Graphen mit $\log(N_i)$ versus $\log(1/s_i)$ mit $i=[0 \text{ bis } n]$.[28] Von besonderer Bedeutung für die weiteren Betrachtungen ist dabei jener Bereich, in dem die Messdaten selbst einen geraden Verlauf beschreiben, das heißt, einem eindeutigen Trend folgen, der sich durch ein Potenzgesetz beschreiben lässt. In diesem Fall wächst eine relevante Größe wie die Länge einer Monster-Kurve im gleichen Maß von einem Schritt zum Nächsten, wodurch ein erster Hinweis auf das Vorliegen eines Fraktals besteht. Dennoch bedeutet ein solcher Zusammenhang nicht unmittelbar, dass es sich auch tatsächlich um ein Fraktal handelt. So ist eine Linie zwar selbstähnlich, nachdem sie aus einer wiederholten Verkleinerung einer Strecke konstruiert werden kann, sie weist dabei aber keinen Längenzuwachs von einem Schritt zum nächsten auf, das heißt die Steigung im doppellogarithmischen Graphen beträgt 45 Grad.[29] Im Fall einer Halbierung bedeutet das etwa die Aufteilung des Initiators in zwei gleich lange Teile, deren Summe aber wieder in der ursprünglichen Gesamtlänge resultiert.

Trend erkennbar

Als Ergebnis einer Messung kann auch jener Fall eintreten, dass für zwei oder mehr (sich wenig überschneidende) Intervalle ein jeweils voneinander unabhängiger eindeutiger Trend auszumachen ist und die fraktale Dimension entsprechend wechselt. Liegen dagegen starke Schwankungen bei den einzelnen Messdaten vor, so besteht für das betrachtete Objekt kein Zusammenhang zwischen der Maschenweite und jenen für diesen Maßstab signifikanten Elementen.

Zwei oder mehrere Massstäbe

Infolge einer Messserie mit verschiedenen Maschenweiten stehen zur weiteren Beurteilung grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum Einen betrifft das die Erstellung einer Reihe von Box-Counting-Dimensionen D_B, die jeweils aus dem Vergleich von zwei definitiven Boxgrößen resultieren, und zum Anderen die Berechnung des Durchschnitts aller Messdaten innerhalb eines bestimmten Skalenbereiches. Der ersten Fall entspricht mehreren Einzelmessungen, aus denen sich jeweils ablesen lässt, wie viel Zerklüftung in der nächst kleineren Stufe erhalten bleibt, beziehungsweise wie sich allgemein die Zerklüftung, charakterisiert durch D_B, infolge unterschiedlicher Maßstäbe verändert. Die Verkleinerung der Boxgrößen korrespondiert dabei mit der Annäherung an ein Gebäude, wodurch immer mehr Details der Fassade sichtbar werden und infolgedessen in die Berechnung einfließen.

direkter Vergleich

Im zweiten Fall werden die Messdaten in einem doppellogarithmischen Graphen, mit der Summe der gekennzeichneten Boxen N_i versus der reziproken Skalierung $1/s_i$ betrachtet. Weist dessen Verlauf annähernd eine

Maßstabs-bereich

26 Während die Länge eines Segments der fünften Iteration $l_5=1$ beträgt und jene der Strecke des Initiators $l_0=81$, reichen die Boxgrößen der gewählten Versuchsanordnung von 13,68 bis 1,71 bei einem Skalierungsfaktor von s=0,5. Das Bestimmtheitsmaß des Ergebnisses beträgt dann 0,9996.

27 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seite 214

28 Die Steigung der linearen Ersatzgeraden definiert demnach die durchschnittliche Box-Counting-Dimension D_B über alle Datenpunkte (d.h. über alle Ergebnisse der Messung). *Peak D. et al. (1995)*, Seiten 99f

29 *Peitgen H.-O. et al. (2004)*, Seite 193

Gerade auf, das heißt, ist das Bestimmtheitsmaß nahe Eins und besteht dadurch eine starke Korrelation, so deutet das wiederum auf eine ähnliche Zerklüftung des Objekts in diesem Bereich hin. Wenn eine Angabe zum Maßstabsbereich, dem Bestimmtheitsmaß und der Höhe von D_B erfolgt, lassen sich auf diese Weise verschiedene Objekte miteinander vergleichen. In der Architektur existieren davon unabhängig jedenfalls eine obere und eine untere Schranke für die Messung. Während die obere durch die Kubatur gegeben ist, entspricht die untere etwa jener eines Ornaments.

Analog zu den Messungen der Zirkel-Dimension D_Z sind in der *Tab.G.3* die Messergebnisse für einige Grenzlinien angeführt, diesmal allerdings unter Berücksichtigung allfälliger vorgelagerter Inseln. Während Österreich als Binnenland eine geringe Abweichung zwischen den Messergebnissen aufweist, macht sich der hohe Anteil an kleineren Inseln vor der Westküste Norwegens beziehungsweise im Süd-Westen Finnlands stark bemerkbar.

Österreich	$D_Z+1=1{,}128$	$D_B=1{,}139$
Finnland	$D_Z+1=1{,}154$	$D_B=1{,}25$
Australien	$D_Z+1=1{,}184$	$D_B=1{,}197$
Deutschland	$D_Z+1=1{,}185$	$D_B=1{,}193$
United Kingdom	$D_Z+1=1{,}282$	$D_B=1{,}321$
Irland	$D_Z+1=1{,}313$	$D_B=1{,}347$
Norwegen	$D_Z+1=1{,}340$	$D_B=1{,}448$

Tab.G.3.: Gegenüberstellung von D_Z und D_B verschiedener Landesgrenzen für einen ähnlichen Maßstabsbereich der Längeneinheiten, wobei D_B allfällige Inseln berücksichtigt

Massstabsbereich und Information

Jeder Maßstabsbereich eines Gebäudes weist eine Reihe von architektonischen Elementen auf, die sich durch eine gewisse Anzahl von Wörtern oder durch Zahlen und Formeln beschreiben beziehungsweise durch Striche in einem Plan darstellen lassen. Für das Ganze ist dann eine solche Zeichenkette gemäß der notwendigen Erklärung umso länger, je weniger Bezug die einzelnen Teile zueinander aufweisen. Des weiteren kann davon ausgegangen werden, dass bei jenen Gebäuden, die über mehrere Maßstabsebenen hinweg einem Leitmotiv folgen, diese Länge für die unterschiedlichen Bereiche gleich bleibt. Formal drückt sich dieser Umstand in einer ähnlichen Dichte von Strichen, die zur eindeutigen Darstellung der tatsächlich wahrgenommen Einzelheiten benötigt wird, aus.[30] Die Box-Counting Methode misst nun diese Dichte der Striche in Abhängigkeit zum Abstand des Betrachters, das heißt in Abhängigkeit von der Darstellung am Plan. Infolge der Messdaten können dann zwei Aussagen getroffen werden:

(1) Die Steigung der linearen Ersatzgeraden im doppellogarithmischen Graphen definiert zunächst den Grad der Zerklüftung einer Ansicht für den gesamten betrachteten Maßstabsbereich (beziehungsweise für die Datenpunkte der gewählten Boxgrößen). Dabei gilt, je geringer die Box-Counting-Dimension D_B desto geringer ist auch die Dichte der voneinander unterscheidbaren Merkmale.

(2) Durch die einzelnen Messdaten lässt sich wiederum die Entwicklung der Komplexität über mehrere Maßstabsebenen hinweg analysieren. Eine geringe Standardabweichung deutet dabei auf eine Kontinuität vom Großen zum Kleinen hin, das heißt, die Zunahme der Anzahl der architektonischen Elemente steht im Zusammenhang mit der Verkleinerung ihrer Dimension.

G.2.4. Rescaled-Range-Analysis & Range-Analysis

Rescaled-Range-Analysis

Zu Beginn der 1950er Jahre entwickelte der britische Hydrologe Harold Edwin Hurst (1880-1978) im Zuge seiner Untersuchungen über die periodischen Überschwemmungen des Nils und die Auswirkungen des Assuan Staudamms die *Rescaled-Range-Analysis* (R/S Analysis)[31][32], um die optimalen Kapazitäten von Wasser-Reservoirs zu ermitteln.[33] Bei dieser Methode werden Zeitreihen, oder, wie von C. Bovill demonstriert, der Rhythmus in einem Plan[34], auf ein chaotisches Verhalten hin überprüft. Die Grundlage hierfür bildet die Betrachtung der maximalen Fluktuation einer Variablen, etwa die Höhe des Wasserstandes oder der Abstand zwischen den Achsen in einem Grundriss, in Bezug auf unterschiedliche Zeitspannen Δt_i. In jedem einzelnen Schritt i erfolgt zunächst die Halbierung der vorangegangenen Zeitspanne Δt_{i-1}, wodurch sich die Anzahl der einzelnen Perioden N_i jeweils verdoppelt. Für jedes $k_i=[1 \text{ bis } N_i]$, das als Index der Periode innerhalb eines bestimmten i dient, wird in weiterer Folge

30 Eine Fuge, die erst in drei Metern Entfernung als solche wahrgenommen wird, fließt demnach auch erst ab diesem Zeitpunkt in die Beschreibung mit ein.

31 *Hurst H.E. (1951)*

32 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 406f

33 *Hurst, H. et al. (1965)*

34 *Bovill C. (1996)*, Seite 89

die größte Differenz des Ausschlags $\Delta r_{i,k}$ ermittelt und daraus der Durchschnitt Φr_i gebildet:

$$\Phi r_i = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \Delta r_{i,k}$$

Am Anfang der Folge von Messungen, das heißt, wenn $i=0$, beträgt die Anzahl der Perioden N_0 gleich Eins und die Differenz des Ausschlags $\Delta r_{0,1}=\Phi r_0$. Im nächsten Schritt $i=1$ wird Δt_0 halbiert, wodurch zwei Abschnitte $N_1=2$ mit jeweils einer maximalen Differenz des Ausschlags $\Delta r_{1,1}$ und $\Delta r_{1,2}$ entstehen, aus denen sich der Durchschnitt Φr_1 errechnet. Eine Teilung in vier Abschnitte $N=4$ resultiert wiederum in Φr_2 und so fort.

Abgeleitet aus den Ergebnissen der *Rescaled-Range-Analysis* für die jährlichen Schwankungen des Nils definierte H. E. Hurst schließlich ein Potenzgesetz, dessen Exponent H als Hurst-Exponent bekannt wurde. Zur Standardisierung erfolgt noch die Division von R_i mit der Standardabweichung S_i der Zeitreihe, wobei sich der angepasste Wertebereich R_i für eine bestimmte Auflösung der Zeitspanne oder Feinheitsgrad i aus der Differenz zwischen dem Maximum und Minimum der kumulierten Abweichung von $\Delta r_{i,k}$ über N, das ist

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\Delta r_{i,k} - \Phi r_i\right)$$

wie folgt errechnet:

$$R_i = max \sum_{k=1}^{N} (\Delta r_{i,k} - \Phi r_i) - min \sum_{k=1}^{N} (\Delta r_{i,k} - \Phi r_i)$$

Die Beziehung ist dann gegeben durch:

$$\frac{R_i}{S_i} = \left(\frac{N_i}{2}\right)^H$$

beziehungsweise

$$H = \frac{\log\left(\frac{R_i}{S_i}\right)}{\log\left(\frac{N_i}{2}\right)}$$

In einem doppellogarithmischen Graphen mit der Verteilung $\log(R_i/S_i)$ versus der Anzahl der Perioden $\log(N_i/2)$ dient erneut die Steigung der linearen Ersatzgerade als Abschätzung des Hurst-Exponent H für eine Folge von Schritten. Aus diesem Ergebnis lässt sich dann ablesen, wie die Varianz von der Auflösung der Zeit, gegeben durch die Anzahl der Perioden, abhängt.[35] Im wesentlichen dient H zur Beurteilung, ob eine Zeitreihe oder ein Rhythmus

(1) abrupte Änderungen zeigt,

(2) einem ausgeprägten Trend folgt oder

(3) einen vollkommen zufälligen *White Noise* Prozess darstellt.

Hurst-Exponent

Liegt der Hurst-Exponent zwischen Null und ein Halb, so handelt es sich um eine antipersistente Zeitreihe, bei der auf eine Aufwärtsbewegung mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Abwärtsbewegung folgt und umgekehrt, womit eine negative Korrelation vorliegt. Ein Wert zwischen ein Halb und Eins bedeutet dagegen eine persistente Zeitreihe und es ist ein Trend auszumachen, das heißt, es liegt ein Zufallsprozess mit Gedächtnis vor, bei dem ein vergangenes Ereignis mit einem zukünftigen positiv korreliert. Beträgt $H=0{,}5$, handelt es sich schließlich um einen unabhängigen Zufallsprozess, entsprechend der gewöhnlichen Brownschen Bewegung ohne Korrelation.[36]

Range-Analysis eines Rhythmus im Grundriss

Grundriss und Rhythmus

Erfahrbar sind Wände vor allem als Begrenzungen von Räumen, nicht aber ihr Inhalt, der massiv oder wie im Fall von Leichtbauwänden auch leer sein kann. Die sich daraus ergebende Frage nach der für die Messung durch die Box-Counting Methode korrekte Darstellung im Plan hat wiederum Auswirkungen auf das Ergebnis, nachdem solche nicht betretbare Flächen entweder durchgefärbt oder mittels zwei paralleler Linien abgebildet werden können. Dementsprechend fließt dann in die Berechnung eine der Stärke der Wand entsprechende Fläche oder aber zwei parallele dünne Linien. Aufgrund dieser Problematik der Interpretation beziehungsweise in weiterer Folge der Darstellung von Wänden scheint die Box-Counting Methode zur Berechnung der fraktalen Dimension von Grundriss-Plänen im Gegensatz zu Ansichten weniger geeignet zu sein. Darüber hinaus wird ein Grundriss nicht in der gleichen Form wie eine Fassade durch Näherkommen wahrgenommen, sondern vor allem infolge des Durchschreitens von Räumen mit bestimmten Proportionen. Diese sind wiederum durch den Rhythmus als Abfolge von Wänden beziehungsweise deren Achsen definiert. Während die Achsen selbst als Linien durch die Euklidische Dimension gleich Eins hinreichend charakterisiert werden, trifft das auf die unterschiedlichen Abstände dazwischen nicht zu.

35 *Maassen B. (2010)*, Seite 204

36 Der Zusammenhang zwischen H und D_F besteht in $D_F=1/H$. *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 266, 268

C. Bovill demonstrierte bereits 1996 anhand von Robie-House, wie für einen Rhythmus in einem Grundriss der charakteristische Wert der fraktalen Dimension durch die *Range Analysis*, diesmal ohne Standardisierung, berechnet werden kann.[37]

Hurst-Exponent eines Rhythmus

Dabei erfolgt zunächst die Ermittlung des Hurst-Exponenten, indem die einzelnen Achsabstände als Höhen in einer Treppenfunktion, beginnend von links nach rechts und anschließend von oben nach unten, dargestellt werden. Aus der maximalen Differenz $\Delta r_{0,1}$ der minimalen und maximalen Höhe errechnet sich der erste Durchschnittswert Φr_0. Im nächsten Schritt $i+1$ erfolgt die Halbierung der Treppenfunktion und die Berechnung des Durchschnitts Φr_1 aus den maximalen Differenzen $\Delta r_{1,1}$ und $\Delta r_{1,2}$ der beiden Hälften. Diese werden im nächsten Schritt neuerlich geteilt, der Durchschnitt aller vier Teile berechnet und so fort. Der Hurst-Exponent zwischen zwei Schritten entspricht dann:[38]

$$H = \frac{log(\Phi r_i) - log(\Phi r_{i+1})}{log\left(\frac{1}{N_i}\right) - log\left(\frac{1}{N_{i+1}}\right)}$$

$$H = \frac{log\frac{\Phi r_i}{\Phi r_{i+1}}}{log\frac{N_{i+1}}{N_i}}$$

Die Steigung in einem doppellogarithmischen Graphen mit dem Durchschnitt der maximalen Differenz der Ausschläge $\log(\Phi r_i)$ und dem Kehrwert der Anzahl der Teilungen $\log(1/N_i)$ ergibt wiederum eine Abschätzung des Hurst-Exponenten H für einen Bereich von Feinheitsgraden, das heißt, für verschiedene Schritte i. Der Zusammenhang zwischen H und der fraktalen Dimension D_F ist in diesem Fall gegeben durch:[39]

$$D_F = 2 - H$$

G.2.5. Fraktale Dimension Zusammenfassung

Verschiedene Mess-Methoden führen prinzipiell zu gleichen Ergebnissen. Demnach besteht kein Unterschied, ob die fraktale Dimension einer Kurve, etwa die einer Küstenlinie, mit der Zirkel-Methode oder mit der Box-Counting Methode gemessen wird. Generell gilt:

- Die fraktale Dimension zeigt an, wie schnell eine Dimension, etwa die Länge eines Fraktals von einer Iteration zur Nächsten beziehungsweise ins Unendliche anwächst.[40]
- Die fraktale Dimension ermöglicht die quantitative Messung der Mischung von Ordnung und Überraschung in einer Struktur.[41]
- Die fraktale Dimension eröffnet die Möglichkeit topologisch gleiche Objekte weiter zu unterscheiden.[42]
- Die fraktale Dimension kann als Dimension der Selbstähnlichkeit eines Objektes verstanden werden.[43]
- Über die fraktale Dimension kann die reale Welt mit Ergebnissen aus dem Labor verglichen werden. Wenn die berechneten fraktalen Dimensionen übereinstimmen, dann entspricht der gefundene Algorithmus der realen Welt.

G.3. Box-Counting in der Architektur

Der Sehwinkel des menschlichen Auges, der Prozess der Wahrnehmung, die Entfernung zum betrachteten Objekt, die im Plan dargestellten Details und die Maschenweite der Box-Counting Methode hängen unmittelbar miteinander zusammen. Für eine normierte Versuchsanordnung müssen demnach sämtliche Komponenten aufeinander abgestimmt sein. Erst dann besteht etwa die Möglichkeit, Gebäude über die jeweilige Box-Counting-Dimension miteinander zu vergleichen oder im Fall eines geplanten Gebäudes die Übereinstimmung der Charakteristik mit jener seiner gebauten oder natürlichen Umgebung zu überprüfen.

G.3.1. Die Fassade

Bei Fassaden misst die Box-Counting Methode im Wesentlichen das Verhältnis zwischen markanten Übergängen, die als Linien im Plan dargestellt werden und dazwischen liegenden *leeren* Flächen. Nähert sich nun der Betrachter einem Gebäude, so ist es vor allem von der jeweiligen Entfernung abhängig, welche architektonischen Elemente erkennbar sind und infolge der bewussten Wahrnehmung bei der Messung berücksichtigt werden. Eine sich daraus ergebende Abfolge des Detailierungsgrades reicht dann etwa vom gesamten Gebäude über die Fensteröffnungen, die Türrahmen, die Türklinken bis hin zur Holzmaserung oder den Fugen eines Sichtziegelmauerwerks beziehungsweise der Gestaltung der Leuchten im Inneren. Der Betrachter erwirbt somit im Zuge seiner Annäherung immer mehr Informationen über das Gebäude, wobei jedes Element einem bestimmten

Annäherung

37 *Bovill C. (1996)*, Seiten 89f

38 *Bovill C. (2000)*, Seite 74

39 *Bovill C. (1996)*, Seite 84

40 *Bovill C. (1996)*, Seite 27

41 *Bovill C. (1996)*, Seite 3

42 *Mandelbrot B. B. (1991)*, Seiten 29, 42
Küstenlinien sind topologisch identisch mit Kreisen.

43 *Deussen O. (2003)*, Seite 33

Abstands- beziehungsweise Maßstabsbereich angehört. Dementsprechend wird im Zuge der Messung ein Detail das im Großen nicht wahrgenommen werden konnte, erst in einem nachfolgenden Schritt, das heißt, bei einer kleineren Maschenweite berücksichtigt.

Eine Annäherung erfolgt allerdings in der Regel nicht orthogonal sondern schräg (dem Straßenverlauf folgend), wodurch eine Folge von perspektivischen Bildern der Fassade entsteht.[44] Aufgrund der Verfügbarkeit und der einfacheren Handhabung, aber auch weil im Zentrum der Betrachtung das Design selbst (etwa das Verhältnis der architektonischen Elemente zueinander) steht, werden für die nachfolgenden Analysen dennoch weiterhin frontale Darstellungen (Ansichten) verwendet.

G.3.2. Wechselwirkung mit der Umgebung

Eine ähnliche Charakteristik zwischen einem Gebäude und seiner Umgebung entsteht etwa durch das Aufgreifen beziehungsweise den bewussten Einsatz der in der Nachbarschaft vorherrschenden fraktalen Eigenschaften. Auf diese Weise stellt sich ein ähnlicher Grad an Zerklüftung ein, der wiederum durch eine bestimmte fraktale Dimension ausgedrückt wird. Eine glatte Umgebung mit wenigen Erhebungen und einer geringen Irregularität der Umgrenzungslinien spiegelt sich demnach in Fassaden wider, die ihrerseits glatt sind, das heißt, eine von der Weite bis zur Nähe des kleinsten Details konstant niedrigere fraktale Dimension aufweisen. Demgegenüber entsprechen Fassaden mit beständig höheren Werten einer stark zerklüfteten Nachbarschaft.

Unabhängig von der Integration in das Umfeld besteht wiederum bei kurzen Planungsphasen im Siedlungsbau oder bei Bauaufgaben mit großem Volumen die Gefahr, dass infolge einer projektierten seriellen Produktion Entwürfe ohne strukturelle Tiefe entstehen, die im wesentlichen auf einer glatten euklidischen Geometrie basieren. In diesem Fall kann der bewusste Einsatz ganz unterschiedlicher Grade an Zerklüftung eine Varianz erreichen, die ansonsten nur eine langsame Veränderung infolge von Zeit oder mehrere parallel agierende Entscheidungsträger hervorrufen.

Das Gebäude und seine Umgebung

Gebäude, Gebirgskette und Wald

Unter Verwendung der Box-Counting Methode besteht nicht nur die Möglichkeit, Abbildungen einer Fassade zu messen, sondern auch jene eines Lageplans, eines Gebirgskamms oder eines Waldes. Diesen Umstand nutzte etwa C. Bovill beim Vergleich von Gebäuden in Amasya/Türkei aus der Ottoman Periode, deren Grundmuster bereits aus dem 3. Jahrhundert vor Christus stammen, mit der in dieser Gegend dominierenden Bergkette, indem er die Box-Counting-Dimensionen zwischen verschiedenen Maschenweiten berechnete.[45]

Nachdem ähnlich einem Gebäude auch bei der Messung der Umgebung das reale Objekt zunächst in eine Strichgrafik übersetzt wird, ist für das Ergebnis die Auswahl der relevanten Teile von entscheidender Bedeutung, das heißt der Grad der Abstraktion beziehungsweise die Definition des Verlaufs von Waldgrenzen, von Flüssen oder von markanten Felsformationen. Eine solche Auswahl erfolgt genauso wie die Festlegung des Bereiches in Abhängigkeit eines bestimmten Abstands des Betrachters zum Objekt und muss dabei jener der Häuserfront entsprechen. Soll etwa ein Fensterrahmen des Gebäudes in die Beurteilung einbezogen werden, so muss das adäquate Detail am Berg gefunden und dargestellt werden, und umgekehrt. Das kann für die gewählte Abstraktion wiederum bedeuten, dass bei der Darstellung über den Umriss eines Waldes hinaus auch einzelne Bäume berücksichtigt werden beziehungsweise kleinere Felsen und Bäche. Aus dem Vergleich der Ergebnisse von Fassaden zur Umgebung zeigt sich schließlich, ob der Charakter der Umgebung, das heißt, deren Rauheit oder Zerklüftung, in den Entwurf übernommen wurde.

Outlook – Einheimische traditionelle Architektur

Vergleiche mit der Umgebung

Nachdem das Resultat aus der Box-Counting Methode als Äquivalent zur fraktalen Dimension die Möglichkeit eröffnet, ähnliche Charakteristiken unterschiedlicher Strukturen zu beschreiben, kann diese Methode zur Überprüfung der Annahme herangezogen werden, wonach sich eine traditionelle einheimische Architektur ihrer jeweiligen Umgebung sehr gut anpasst.[46] Konkret ist eine solche Überprüfung an Bauernhäusern und deren Umgebung denkbar, indem diese hinsichtlich Rauheit beziehungsweise Zerklüftung analysiert und infolgedessen miteinander in Beziehung gesetzt werden. Besteht nun ein Zusammenhang, so hat das zur Folge, dass flache Gebiete tendenziell glattere Fassaden aufweisen, während Bauernhäuser im Hochgebirge die schroffe Umgebung in sich aufnehmen und widerspiegeln. Ansätze zur Überprüfung einer derartigen Vermutung finden sich in der *Master Thesis* des Autors, bei der Fassaden gemessen und analysiert wurden, die aus dem Buch *Bauernhäuser in den Dolomiten* von Eduardo Gellner stammen.[47][48] Die Analysen

44 *Ostwald M. J. et al. (2007a)*

45 *Bovill C. (1996)*, Seiten 144-149

46 *Bovill C. (1996)*, Seite 144

47 *Lorenz W. E. (2002)*, Seiten 128-139

48 *Gellner E. (1989)*

zeigen einen Zusammenhang dergestalt, dass die resultierenden Box-Counting-Dimensionen umso höher sind, je kleingliedriger sich das Gebäude präsentiert und je mehr Höhenstaffelungen es aufweist. Dabei haben der Steilheitsgrad der abfallenden Hänge und der Wechsel in der Orientierung des Gefälles sowohl Einfluss auf die Staffelung und Ausrichtung der Häuser eines Dorfes als auch auf die einzelnen Objekte selbst, die durch mehr oder weniger stark gegliederte Fassaden geprägt sind.

Es liegt nun die Vermutung nahe, dass abgesehen von der Topografie auch die Verwendung lokal verfügbarer Materialien die Charakteristik eines Gebäudes beeinflusst und auf diese Weise mit der umgebenden Landschaft in Verbindung bringt. Diesem Gedanken folgend würde etwa eine felsige, steile Umgebung zu schroffen Gebäuden aus geschichtetem Naturstein unterschiedlichen Formats führen und große Baumbestände sich in Blockhäusern oder Verkleidungen aus Holz widerspiegeln. In beiden Fällen kann eine Charakterisierung sowohl durch eine bestimmte Höhe der Box-Counting-Dimension als auch durch den Verlauf vom Überblick bis zum Detail erfolgen. Eine diesbezügliche Analyse wurde vom Autor noch nicht vorgenommen sondern stellt ein künftiges Feld der Forschung dar.

G.4. Entfernung und Sehfeld

Wenn der Grad der Detaillierung und die Boxgrößen entsprechend dem Sehfeld und dem Abstand des Betrachters zum Objekt gewählt werden, besteht schließlich die Möglichkeit, die Gebäude aufgrund ihre Kantendichte miteinander zu vergleichen. Die Kantendichte ist dabei gegeben durch die Anzahl der signifikanten Unterscheidungsmerkmale einer Fassade pro Flächeneinheit und entspricht einer spezifischen Box-Counting-Dimension.

Abhängig von seiner Dimensionierung ist jedem architektonischen Element ein bestimmter Maßstabsbereich inhärent, in dem es vom Betrachter zur Kenntnis genommen wird beziehungsweise ins Auge fällt. Dieser Bereich beginnt bei einem Standort der ersten Wahrnehmung, die abhängig vom Sehvermögen und damit von Mensch zu Mensch verschieden ist, und reicht bis zur Überlagerung oder Verdrängung durch andere Teilelemente. Aufgrund der mannigfaltigen Elemente unterschiedlicher Größe bedarf es schließlich verschiedener Entfernungen, das heißt Standorte, um ein Gebäude vollständig zu erfassen.

G.4.1. Boxgrössen und das menschliche Auge

Voraussetzung für den Prozess des Sehens sind Lichtstrahlen, die von einer Quelle ausgesandt werden und auf ein Objekt treffen, das wiederum einen Teil davon absorbiert und einen anderen reflektiert.[49] Jene elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich zwischen 380 nm und 780 nm, die infolge der Reflektion auf das menschliche Auge trifft und den optischen Apparat des Auges durchdringt, erzeugt schließlich auf der Netzhaut (*Retina*) ein seitenverkehrtes und auf dem Kopf stehendes Abbild des betrachteten Gegenstandes. Über die lichtempfindlichen Rezeptoren der Netzhaut und die Nervenbahnen gelangt die Information dann zum Gehirn, wo die Erregungsmuster im visuellen Cortex zur optischen Wahrnehmung verarbeitet werden.

Sehen

Jene auf der Netzhaut befindlichen Sinneszellen die für das farbige Sehen verantwortlich sind heißen Zapfen und weisen ein geringeres Gesichtsfeld auf als die für das Schwarz-Weiß-Sehen zuständigen Stäbchen.[50] Solche Sinneszellen bedecken zwar den größten Teil der Netzhaut, dennoch ist für das Scharfsehen nur der sogenannte gelbe Fleck, die *Macula lutea*, entscheidend. Im Zentrum dieses gelben Flecks befindet sich wiederum die *Fovea centralis*, die nur Zapfen zur Farbwahrnehmung enthält und als Ort des schärfsten Sehens gilt. Ein Objekt wird nun so abgetastet, dass durch kleinste Bewegungen der Augen immer andere Teile vor die *Fovea* geschoben werden. Die restliche Fläche der Netzhaut ist dabei für das sekundäre oder periphere Sehen verantwortlich, wodurch der Betrachter einen Gesamteindruck gewinnt. Während das binokulare (beidäugige) Gesichtsfeld, also jener Ausschnitt, den das unbewegte Auge bei fixiertem Kopf sieht, etwa 170 Grad in horizontaler und 110 Grad vertikaler Richtung abdeckt, entspricht die Sehschärfe zur Beurteilung des Sehvermögens nur einer Winkelminute 0°1'.[51]

Der Abstand und das Detail

Auswahl Details

Den optimalen Standort zur Betrachtung eines Gebäudes beschreibt H. Märtens in seinem Buch *Der optische Maßstab* als jenen Punkt, der aus einem vertikalen Blickfeld entsprechend dem Augenaufschlagswinkel von 27 Grad unter Einschluss der gesamten Höhe des Gebäudes resultiert.[52] Einen sekundären Standort leitet er wiederum aus der Höhe und einem 45 Grad Winkel ab, bei dem nicht mehr das Gebäude im Vordergrund steht,

49 *Arnheim R. (1978)*, Seiten 20f

50 *Silbernagl S. (1991)*, Seiten 304, 310

51 *Silbernagl S. (1991)*, Seite 304, 310. 1' entspricht 1/60 Grad.

52 *Märtens, H. (1884)*

sondern dessen Details. Wenn die Umgebung mit in die Betrachtung einbezogen werden soll, so ergibt sich wiederum ein tertiärer Standort infolge von 18-20 Grad.[53] Demnach existieren wie in *Abb.76* dargestellt drei Abstände mit unterschiedlichem Fokus:

(1) Der Abstand a_0 dient dem Überblick über das Gebäude unter Einbeziehung der Umgebung.

(2) Beim Abstand a_1 kann sich der Betrachter einen Gesamteindruck des Gebäudes verschaffen.

(3) Der Abstand a_2 stellt schließlich die Einzelheiten am Gebäude in den Vordergrund.

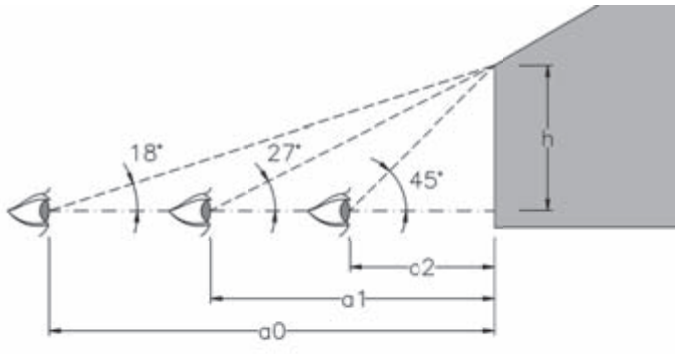


Abb.76.: Verschiedene Abstände a in Abhängigkeit von der Höhe h und dem Winkel α

Die Höhe h eines Objekts ist infolge einer trigonometrischen Funktion durch den Abstand a und den Winkel α bestimmt:

$$\tan\alpha = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot \tan\alpha$$

Wird diese Formel entsprechend umgeformt, können die gesuchten Abstände $a_{0\text{-}2}$ aus einer gegebenen Gebäudehöhe h und den drei Winkeln $\alpha_{0\text{-}2}$ berechnet werden:

$$a = \frac{h}{\tan\alpha}$$

Im folgenden Beispiel sei die Höhe h gleich zehn Meter und α_0=18°, α_1=27° beziehungsweise α_2=45°:

$$a_0 = \frac{10}{\tan 18°} = 30{,}8m$$

$$a_1 = \frac{10}{\tan 27°} = 19{,}6m$$

$$a_2 = \frac{10}{\tan 45°} = 10{,}0m$$

Die Auswahl jener für die Box-Counting Methode relevanten architektonischen Elemente eines Gebäudes beziehungsweise deren Darstellung auf einem Plan erfolgt abhängig von dem, was ein Betrachter aufgrund seines gewählten Abstands a tatsächlich sieht, das heißt welche Kanten und Linien er voneinander unterscheiden kann. Während die Region des genauen Sehens einem Umkreis von einem Winkelgrad 1°0' entspricht, umfasst das scharfe Sehen lediglich eine Winkelminute 0°1'.[54] Letzteres dient zur Beurteilung des Sehvermögens, nachdem bei diesem Winkel und guten Lichtverhältnissen genaue Unterschiede, etwa zwei nebeneinander liegende Punkte, von einem gesunden Auge gerade noch getrennt als solche erfassbar sind.[55][56] Aus der Winkelminute und dem Abstand a zum Gebäude leitet sich dann gemäß der vorhergehenden Formel die Auswahl eines Details beziehungsweise deren Darstellung im Plan ab, indem der minimale Abstand h zwischen zwei gerade noch unterscheidbaren Kanten eines architektonischen Elements bestimmt wird.

$$Objektgröße \geq Abstand \cdot \tan\alpha$$

Bei einem Abstand von 42 Metern beträgt demnach der Mindestabstand in Abhängigkeit des scharfen Sehens 1,22 cm, was wiederum in etwa der Lagerfugendicke in einem Verband aus Normalformatziegeln entspricht.[57] Das bedeutet umgekehrt, dass sich ein Betrachter näher als 42 Meter vom Sichtziegelmauerwerk entfernt befinden muss, um die Fuge tatsächlich erkennen zu können.

Festlegung der Boxgrössen nach C. Bovill

Auswahl Boxgröße

C. Bovill definiert jene für die Messung der Box-Counting-Dimension von Fassaden notwendigen Maschenweiten sowohl in Abhängigkeit von verschiedenen Standorten des Betrachters in Bezug auf das Gebäude als auch aufgrund diverser Sehwinkel, die sich aus der Natur der visuellen Wahrnehmung ergeben.[58] Die angeführten Abstände und exemplarisch ihre Entsprechungen bei Robie House lauten demnach:[59]

- 80 Fuß (ca. 24,38 Meter): entspricht bei Robie House etwa der Betrachtung von der gegenüberliegenden Straßenseite aus
- 40 Fuß (ca. 12,19 Meter)

53 *Märtens, H. (1884)*, Seiten 36ff

54 *Märtens, H. (1884)*, Seite 4

55 Bei Neufert bezeichnet die Winkelminute das Lesefeld. *Neufert P. (2000)*, Seite 38

56 *Silbernagl S. (1991)*, Seite 304

57 *Pfeifer G. (2001)*, Seite 76. Die Lagerfugendicke bei einem Normalformat und unter Verwendung eines Normalmörtels wird mit 12,3 mm angegeben.

58 *Bovill C. (1996)*, Seite 118

59 *Bovill C. (1996)*, Seite 119

- 20 Fuß (ca. 6,10 Meter): entspricht einer Position auf dem Bürgersteig unmittelbar vor dem Gebäude mit Blick über die parallel zur Straßenfassade verlaufende niedrige Gartenmauer (die den Garten vor dem Billardraum und dem Spielezimmer umfasst)
- 10 Fuß (ca. 3,05 Meter)
- 5 Fuß (ca. 1,52 Meter): entspricht einer Position innerhalb des Gebäudes

Die minimale Boxgröße für eine bestimmte Entfernung leitet C. Bovill dann von jenem Bereich ab, in dem sich feine Details unterscheiden lassen, und definiert diesen im Umkreis von 2 Grad. Weitere Boxgrößen resultieren wiederum aus 5, 10, 15 und 20 Grad, nachdem dort zumindest gröbere Details erkannt werden. Die Boxgröße errechnet sich nun aus dem jeweiligen Abstand a zum Gebäude multipliziert mit dem Tangens der diversen Sehwinkel. Eine Entfernung von 24,4 Metern und 10 Grad ergibt dann etwa eine Boxgröße von 4,30 Metern, jene von 5 Grad 2,13 Meter. In der *Tab.G.4* sind die minimalen Detailgrößen und einige Maschenweiten (nach C. Bovill) in Abhängigkeit von verschiedenen Abständen aufgelistet.

Abstand ($a*\tan\alpha$)	24,38 m	12,19 m	3,05 m
	80 Fuß	40 Fuß	10 Fuß
	minimale Detailgröße		
1/60°	0,71 cm	0,35 cm	0,09 cm
1°	42,56 cm	21,28 cm	5,32 cm
	Maschenweiten		
2°	0,85 m	0,43 m	10,64 cm
5°	2,13 m	1,07 m	26,67 cm
10°	4,30 m	2,15 m	53,74 cm
15°	6,53 m	3,27 m	81,67 cm
20°	8,88 m	4,44 m	110,94 cm

Tab.G.4.: Minimale Detailgrößen und die jeweiligen Maschenweiten nach C. Bovill in Abhängigkeit von drei unterschiedlichen Distanzen zum Gebäude[60][61]

Die in der *Tab.G.4* angeführten Werte werden im anschließenden Kapitel über die *Einflüsse auf die Messergebnisse* im Zusammenhang mit der Boxgröße noch einmal näher betrachtet.

G.5. Einflüsse auf die Messergebnisse

Bisherige Analysen von Gebäuden bestätigen die Annahme, dass verschieden stark zerklüftete Fassaden tatsächlich zu unterschiedlichen Box-Counting-Dimensionen führen.[62] Im Zuge dieser Messungen konnte aber auch die Beeinflussung der Ergebnisse durch bestimmte Parameter festgestellt werden. Um schließlich die Box-Counting-Dimension als Charakteristikum beziehungsweise als Vergleichswert von Gebäuden einsetzen zu können, bedarf es dementsprechend zunächst der Festlegung bestimmter Rahmenbedingungen.

Planaufbereitung

Fassade und Planaufbereitung

Grundlage für die Box-Counting Methode ist nicht die Fassade selbst sondern vielmehr ihre Abbildung auf einem Plan. Aus diesem Grund beeinflusst vor allem dessen Inhalt, der wiederum durch den Maßstab charakterisiert wird, beziehungsweise die Auswahl der entsprechenden architektonischen Elemente das Ergebnis der Messung. Eine solche Auswahl und die Darstellungsweise der Details erfolgt, wie zuvor unter *Der Abstand und das Detail* beschrieben, in Abhängigkeit der Wahrnehmung und des vom Betrachter gewählten Standorts. Konsequenterweise ist eine Handlungsvorschrift zur einheitlichen und einander entsprechenden Darstellung von Fassaden Voraussetzung für eine mögliche Gegenüberstellung beziehungsweise deren Vergleichbarkeit. Das Verfahren umschließt im Wesentlichen folgende Punkte:

- Zunächst wird der Standort definiert.
- Im nächsten Schritt erfolgt die Festlegung der am Plan darzustellenden architektonischen Elemente durch die Berechnung der Mindestgröße *h* der Kantenabstände. Diese ergibt sich infolge eines Sehwinkels zwischen 0°1‘ und 1°0‘.

Liegen hingegen bereits Ansichtspläne mit einer bestimmten Auswahl vor, wird umgekehrt der jeweilige Standort vom Inhalt abgeleitet.

- Bei gedruckten Plänen umfasst die Aufbereitung auch den Scanvorgang mit der Festlegung der Auflösung und den Vorgang der Vektorisierung.

Um eine Vergleichbarkeit der unter *G. Messergebnisse* angeführten Berechnungen gewährleisten zu können, wurde infolgedessen auf einige wenige Quellen zurückgegriffen und diese entsprechend angeführt. Die gedruckten Pläne wurden etwa aus *Kurrent F. et al. (1997)* und *Kurrent F. (1998)* entnommen und in gleicher Weise

60 *Bovill C. (1996)*. Seite 119

61 1 Fuß = 30,48 Zentimeter

62 *Lorenz W. E. (2002)*

gescannt und vektorisiert, während die digitalen Pläne aus *Weston, R. (2004)* stammen.[63]

Boxgrössen, Planmassstab und Abstand

Wie im Abschnitt über die *Festlegung der Boxgrößen nach C. Bovill* erwähnt, erfolgt die Wahl des Maßstabs des Gitternetzes ähnlich der Ermittlung der am Plan dargestellten architektonischen Elemente in Abhängigkeit vom Abstand des Betrachters zum Gebäude. Für die erste Maschenweite wird in der Literatur häufig ein Wert von einem Viertel der kleineren Seite l_s des zu messenden Objekts als angemessen angeführt, das im Fall von $l_s=h$ einem Sehwinkel von 7,26 Grad (7°16‘) entspricht.[64] Für weniger komplexe Kompositionen empfiehlt sich dagegen eine Boxgröße von einem Drittel, was in etwa mit dem Sehwinkel von 10 Grad (bei $l_s=h$) übereinstimmt, und für detailreichere ein kleinerer Wert (etwa 1/4).

empfohlene Werte

Die kleinste Maschenweite ist wiederum vom kleinsten dargestellten Detail des Planes abhängig. Wird für den minimalen Abstand *h* zwischen zwei Kanten ein Sehwinkel von 0,10 Grad (0°6‘) angenommen und für die minimale Boxgröße infolge der Region genauen Sehens eine Winkelminute, so entspricht das einem Verhältnis von 6:1. Dadurch wird gewährleistet, dass nicht die Linien selbst, sondern die Komposition gemessen wird. Ein Zehntel Grad (0°6‘) erscheint dem Autor gegenüber einer Winkelminute deshalb als angemessener, weil demnach eine Lagerfuge von 1,22 cm nicht bereits bei 42 Metern Abstand in den Vordergrund rückt, sondern erst bei 7 Metern. Das entspricht dann vielmehr den Erfahrungswerten, sofern vom Einfluss der Farbe der Fuge abgesehen wird. Die kleinste Boxgröße lässt sich schließlich im doppellogarithmischen Graphen erkennen, nachdem sich die Kurve ab einem bestimmten Maßstab immer weiter einer Steigung von 45 Grad annähert. Eine Steigung von 45 Grad ist der Hinweis darauf, dass ein Punkt erreicht ist an dem nur mehr die eindimensionalen Linien, aus denen die Komposition zusammengesetzt ist, gemessen werden.[65]

Aus den beschriebenen Sehwinkeln leitet der Autor schließlich die empfohlenen minimalen Detailgrößen beziehungsweise den Bereich der Maschenweiten ab. Die entsprechenden Werte sind in *Tab.G.5* abhängig von der Gebäudehöhe h und der schmäleren Seite l_s aufgelistet.

Sehwinkel:	18°	27°	45°
Abstand:	3,18*h	2,12*h	1,27*h
	minimale Detailgröße		
1/10°	0,0056*l_s	0,0037*l_s	0,0022*l_s
	Maschenweiten		
1°	0,06*l_s	0,04*l_s	0,02*l_s
7°26‘	0,41*l_s	0,27*l_s	0,16*l_s
10°	0,56*l_s	0,37*l_s	0,22*l_s

Tab.G.5.: Die vom Autor empfohlenen minimalen Detail- und entsprechenden Maschenweiten. h...Höhe, l_s...Länge der kleineren Seite

Relative Position der Boxen zum Objekt

Anhand verschiedener Analysen von Fassaden lässt sich im doppellogarithmischen Graphen mit $\log(1/s)$ und $\log(N)$ ablesen, dass die Datenpunkte im Bereich sehr großer Maschenweiten die Tendenz aufweisen stärker zu variieren als jene im darauf folgenden Bereich feinerer Maschenweiten. Das ist zunächst auf den kennzeichnenden Charakter einer Komposition zurückzuführen, der in einem bestimmten Maßstabsbereich auftritt und daher auch bei der Messung nur innerhalb einer solchen Begrenzung eindeutig in Erscheinung tritt. Ein weiterer Grund besteht in der Ermittlung der minimalen Anzahl N von Boxen einer betrachteten Maschenweite, die notwendig ist, um ein Objekt vollständig abzudecken. Diese erfolgt etwa durch die Veränderung der Startposition des jeweiligen Gitternetzes in Relation zum Objekt. Wenn dabei die Abstände einer jeden Versetzung in x- und/oder y-Richtung für alle Maschenweiten konstant bleiben, nimmt die Anzahl der Möglichkeiten mit der Boxgröße zu, wie sich anhand einer gerasterten Graphik und einer Distanz von einem Pixel demonstrieren lässt. In diesem Fall ist die Anzahl an möglichen Startpositionen für eine Boxgröße von 1X1 Pixel gleich eins, während es bei 2X2 Pixel bereits vier und bei 3X3 Pixel neun sind. In dem vom Autor entwickelten Computer-Programm wird schließlich für verschiedene Startpositionen die jeweils geringste Anzahl der Boxen berechnet und in einem doppellogarithmischen Graphen zusammengefasst, wobei die Steigung der Regressionsgerade nun die durchschnittliche und bereinigte Box-Counting-Dimension der Fassade definiert. Neben der Verschiebung der Startposition in x- und y-Richtung kann zur Ermittlung der minimalen Anzahl auch das Gitternetz gedreht werden. Diese Möglichkeit wurde allerdings im Programm nicht umgesetzt.

Verkleinerungsfaktor

Der Verkleinerungsfaktor von einer Maschenweite zur nächsten steht wiederum im Zusammenhang mit der Geschwindigkeit der Annäherung eines Betrachters an das Gebäude. Die Verwendung des in der Literatur häufig zitierten Faktors von ein Halb würde demnach große

63 *Kurrent F. et al. (1997)*, *Kurrent F. (1998)* und *Weston, R. (2004)*

64 *Foroutan-pour K. et al. (2000)*, Seite 195

65 *Foroutan-pour K. et al. (2000)*, Seite 205

Sprünge bedeuten, während tatsächlich ein stufenloses Näherkommen erfolgt.[66] Aus diesem Grund besteht im Programm die Möglichkeit den Verkleinerungsfaktor frei zu wählen. Unabhängig vom gewählten Verkleinerungsfaktor gilt:

- Bei einem Vergleich unterschiedlicher Gebäude sollte für die jeweilige Messung ein ähnlicher Verkleinerungsfaktor gewählt werden.

G.6. VBA Box-Counting

Das vom Autor entwickelte Computer-Programm zur Berechnung der Box-Counting-Dimension in AutoCAD (kurz *B50*) berücksichtigt jene im vorangegangenen Kapitel ***Einflüsse auf die Messergebnisse*** beschriebenen Faktoren, indem die für das Ergebnis der Messung relevanten Einstellungen vom Anwender selbst verändert werden können. Dadurch besteht nicht nur die Möglichkeit, die Konfiguration – etwa durch die Festlegung des Wertebereichs – auf die zu untersuchende Zeichnung individuell abzustimmen, sondern auch, den Grad der Veränderung in Abhängigkeit der einzelnen Parameter zu untersuchen. Die Eingabe erfolgt dabei über ein Formular (vergleiche ***Abb.77***), das entsprechend dem Ablauf des Computer-Programms in drei Registerseiten unterteilt ist. Diese umfassen die Auswahl des zu messenden Bereiches (*Points*), die eigentliche Analyse (*Specifications*) und eine etwaige abschließende Visualisierung der vorgenommen Auswahl (*Layout*).

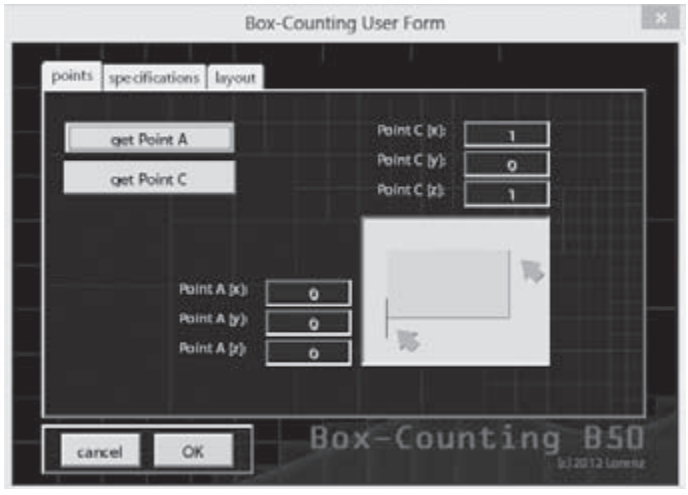


Abb.77.: Eingabemaske für die Auswahl des zu messenden Bereichs (*B50*)

66 *Bovill C. (1996)*

Auswahl (Points)

(1) Für die Messung selbst ist jener rechteckige Ausschnitt einer Abbildung mit zur x- beziehungsweise y-Achse parallelen Seiten relevant, der durch zwei einander diagonal gegenüber angeordnete Eckpunkte (***S1_pointA*** und ***S1_pointC***, vergleiche ***Abb.77*** und ***Abb.78***) definiert ist, die in der Standardeinstellung ein Quadrat vom Ursprung (0,0) bis zum Punkt (1,1) aufspannen. Um die beiden Eckpunkte entsprechend der Vorlage anzupassen, besteht die Möglichkeit, diese über zwei im Reiter *points* befindliche Buttons direkt in der AutoCAD-Zeichnung auszuwählen (siehe ***Abb.77***).

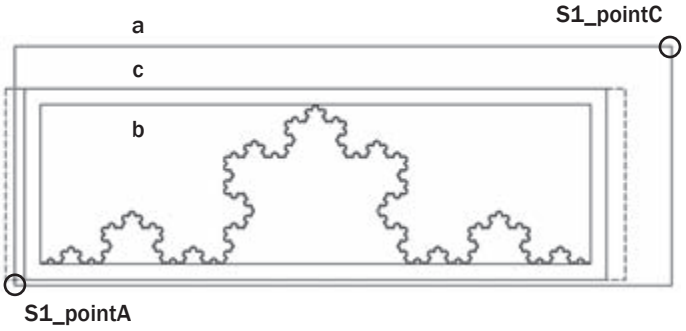


Abb.78.: Der *ausgewählte Bereich a* (S1_pointA und S1_pointC), die *minimale Umgrenzung b* (S2_pointA und S2_pointC) und das für die Messung *maßgebliche Feld c* (*S3_pointA* und *S3_pointC*)

Aufgrund der Lage des rechteckigen Ausschnitts in Relation zur betrachteten Vektorgrafik kommt es in weiterer Folge zur Unterscheidung von drei Fällen:

- Im ersten Fall enthält das Auswahlrechteck kein Objekt der Zeichnung und das Computer-Programm wird, nachdem es nichts zu berechnen gibt, mit einem entsprechenden Hinweis abgebrochen.
- Der zweite Fall tritt dann ein, wenn das Auswahlrechteck den zu analysierenden Teil der Zeichnung, etwa eine Fassade, zur Gänze einschließt. Für die weitere Betrachtung ist allerdings die maximale Ausdehnung ohne einen möglichen leeren Rahmen relevant, weshalb das Programm automatisch die kleinste äußerste Begrenzung ermittelt. Dabei werden sämtliche Objekte innerhalb der Auswahl erfasst und die minimalen beziehungsweise maximalen x- und y-Werte gesucht. Die beiden Punkte (***S2_pointA*** und ***S2_pointC***, siehe ***Abb.78***) des auf diese Weise adaptierten Ausschnitts bilden dann die Grundlage für die anschließende Berechnung.
- Im dritten Fall schneidet das Auswahlrechteck an allen vier Seiten die Vektorgrafik, wodurch jene zur weiteren Berechnung verwendeten Punkte (***S2_pointA*** und ***S2_pointC***) mit den Eingabepunkten (***S1_pointA*** und ***S1_***

pointC) zusammenfallen (vergleiche *Abb.79*). Wird allerdings nur ein Teil überdeckt, kommt es gemäß der Suche nach der minimalen Umgrenzung zu einer Kombination aus dem zweiten und dritten Fall.

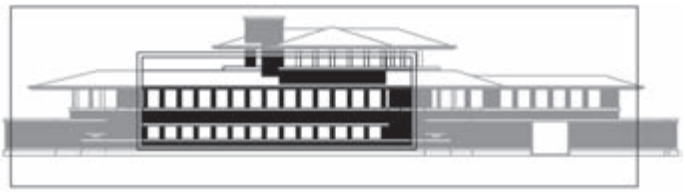


Abb.79.: Der *ausgewählte Bereich a, die minimale Umgrenzung b* und das für die Messung *maßgebliche Feld c* bei einer Überschneidung des Auswahlrechtecks mit dem Objekt (F.L. Wright: Robie House, nahe Chicago 1906-1909; *Vorlage: Weston, R. (2004)*)

Berechnung (Specifications)

(1) Die *Iteration* i lässt sich über einen entsprechend gekennzeichneten Schieber unter dem Reiter *specifications* einstellen und legt fest, wie oft die Maschenweite des Gitternetzes verkleinert wird (siehe *Abb.80*). Das heißt, dieser Wert definiert die Anzahl an Wiederholungen jenes Algorithmus, der für eine bestimmte Boxgröße die Summe N der Boxen, die einen relevanten Teil der zu untersuchenden Zeichnung enthalten, ermittelt.

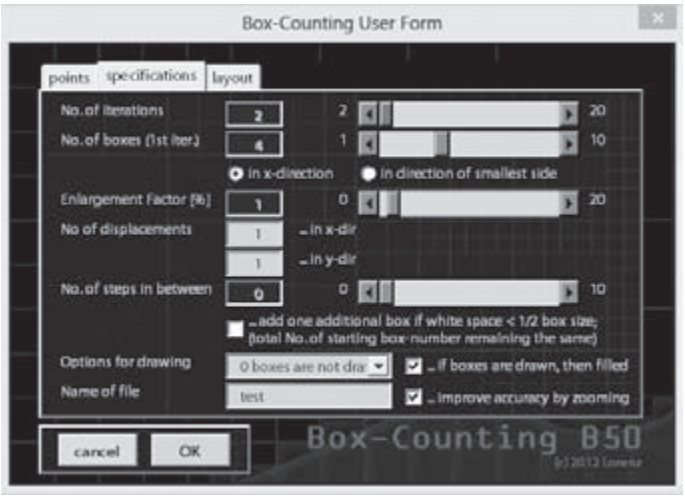


Abb.80.: Eingabemaske zur Spezifizierung der verschiedenen Parameter (*B50*)

(2) Der *Enlargement Factor* (*Multiplication Factor*) bestimmt durch die Angabe in Prozent der kürzeren Seitenlänge des angepassten Auswahlrechtecks (*S2_pointA* und *S2_pointC*) jenen Bereich, der dem Begrenzungsrechteck, das ist die minimale Umgrenzung, als leere Fläche hinzugefügt wird. Der entsprechende Code zur Längenänderung der schmäleren Seite lautet:

```
Dim enlargement As Double
If  Abs(S2_pointC(0) - S2_pointA(0)) <
    Abs(S2_pointC(0) - S2_pointA(0)) Then
    enlargement = MultiplicationFactor *
        Abs(S2_pointC(0) - S2_pointA(0))
Else
    enlargement = MultiplicationFactor *
        Abs(S2_pointC(1) - S2_pointA(1))
End If
```

Wenn es sich bei der Analyse um einen Teilbereich einer Zeichnung handelt, ist es darüber hinaus empfehlenswert diesen automatisch kopieren und auf einen eigenen Layer legen zu lassen. Eine solche Maßnahme gewährleistet, dass in weiterer Folge tatsächlich nur der ausgewählte Inhalt gemessen wird. Andernfalls erfassen jene über den Ausschnitt ragenden Boxen auch etwaige Teile, die sich außerhalb dieser minimalen Umgrenzung (*S2_pointA* und *S2_pointC*) befinden. Die Möglichkeit, eine solche Einstellung vorzunehmen, besteht unter dem Reiter *Layout*.

(3) Durch den Reduktionsfaktor, der in der vorliegenden Version des VBA Box-Counting Programmes (*B50*) 50 Prozent beträgt und nicht regelbar ist, wird die Verkleinerung der Maschenweite von einem Iterationsschritt zum nächsten bestimmt. Eine Halbierung der Boxgröße weist dabei jenen Vorteil auf, dass die äußere Umgrenzung einer Box unverändert bleibt und es lediglich zu einer verfeinerten Aufteilung der inneren Fläche kommt. Wenn demzufolge eine Box keinen relevanten Teil der Zeichnung beinhaltet, dann gilt das konsequenterweise auch für alle darin befindlichen Zellen des neuen Gitternetzes. Infolgedessen verkürzt sich die Dauer des Messvorgangs, nachdem nur jene Boxen weiter untersucht werden müssen, in denen es etwas zu sehen gibt. Bei einem von 50 Prozent abweichenden Verkleinerungsfaktor überschneiden sich dagegen die Boxen verschiedener Iterationsschritte und es bedarf einer Kontrolle jeder einzelnen Zelle (oder zumindest jener im näheren Umfeld der im vorangegangenen Schritt als belegt gekennzeichneten Teilbereiche). Um dennoch feinere Unterteilungen für die Berechnung zu ermöglichen, können Zwischenschritte eingefügt werden. Dabei startet der Algorithmus jeweils erneut, allerdings mit einer entsprechend geänderten Anfangsboxgröße.

```
Dim cur_step As Integer
For cur_step = 0 To NoOfStepsInBetween
    ...
Next cur_step
```

(4) Die erste (quadratische) Maschenweite resultiert aus der Division jener um den *Enlargement Factor* gestreckten schmäleren Seitenlänge des angepassten Auswahlrechtecks mit der dafür bestimmten Anzahl von

Boxen (*No. Boxes smaller side*). Gegebenenfalls erfolgt im Anschluss daran die Erweiterung der zweiten, längeren Seite, sofern sich diese nicht ganzzahlig durch die ermittelte Boxgröße teilen lässt. Das Ergebnis entspricht schließlich dem für die weitere Messung maßgeblichen Feld (*S3_pointA* und *S3_pointC*, siehe *Abb.78*).

(5) Für eine bestimmte Maschenweite fordert der Algorithmus zur Berechnung der Box-Counting-Dimension die minimale Anzahl an Boxen, die notwendig ist, um die zu untersuchende Zeichnung vollständig abzudecken.[67] Beim Box-Counting Programm *B50* wird hingegen standardmäßig lediglich dasjenige Gitternetz untersucht, das sich aus einer mittigen Anordnung des für die Messung maßgeblichen Feldes (*S3_pointA* und *S3_pointC*) ergibt. Für dieses Gitternetz besteht jedoch zusätzlich die Möglichkeit, sowohl in x- als auch in y-Richtung mehrere Verschiebungen, das heißt eine bestimmte Reihe voneinander unterschiedlicher Positionen, anzugeben. Der maximal mögliche Versatz in negativer beziehungsweise in positiver x- und/oder y-Richtung resultiert dabei aus der Forderung, dass die betrachtete Zeichnung in jedem Fall vollständig innerhalb des verschobenen Feldes liegen muss. Gewährleistet wird diese Vorgabe durch eine Positionierung des Gitternetzes am linken oder rechten beziehungsweise oberen oder unteren Rand der Abbildung. Sofern mehr als eine zusätzliche Verschiebung erfolgen soll, ergibt sich die dazwischen liegende Distanz aus der Division der Differenz der x- beziehungsweise y-Werte einer Ecke dieser Extreme mit der jeweiligen für eine Richtung gewählten und um Eins reduzierten Anzahl. Der Umstand, dass bei größeren Boxen eine stärkere Beeinflussung stattfindet als bei kleineren, wird in weiterer Folge allerdings nicht berücksichtigt (siehe auch *Relative Position der Boxen zum Objekt*).

(6) Nach der Bestimmung des Begrenzungsrechtecks einer zu messenden Zeichnung resultiert jener Rahmen, der dieser minimalen Umgrenzung als leere Fläche hinzugefügt wird, aus dem unter Punkt Zwei beschriebenen Enlargement Factor. Um davon unabhängig dennoch einen Mindestabstand von einer halben Boxgröße zu gewährleisten, steht zusätzlich die Auswahl einer entsprechenden Option zur Verfügung. In diesem Fall wird der minimalen Umgrenzung zunächst die Breite einer Box hinzugefügt, ehe die neuerliche Berechnung der Maschenweite des ersten Gitternetzes unter Beibehaltung der ausgewählten Anzahl (*No. Boxes smaller side*) erfolgt.

(7) Zur abschließenden Visualisierung des durchgeführten Messvorgangs stehen drei unterschiedliche Detailierungsgrade zur Verfügung:

- Mit den Grundeinstellungen veranschaulicht die finale Darstellung, wie in *Abb.78* ersichtlich, lediglich die ursprünglich vorgenommene Auswahl (*S1_pointA* und *S1_pointC*), die minimale Umgrenzung (*S2_pointA* und *S2_pointC*) und das eigentliche Messfeld (*S3_pointA* und *S3_pointC*).
- Die zweite Alternative umfasst eine zusätzliche grafische Wiedergabe des Ergebnisses der größten und der kleinsten Maschenweite unter Einschluss aller etwaigen Verschiebungen (Versatz). Infolgedessen bleiben sowohl die Positionen der einzelnen Gitternetze als auch der durch die verschiedenen Maschenweiten abgedeckte Bereich nachvollziehbar (siehe *Abb.81*).

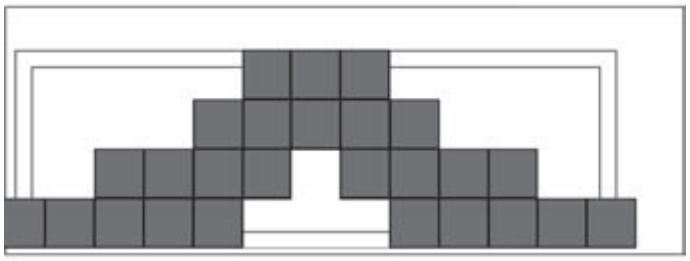


Abb.81.: Ergebnis für die größte Maschenweite der in *Abb.78* angeführten Koch Kurve

- Die dritte Option stellt schließlich die Ergebnisse für sämtliche Iterationen (inklusive Versatz) dar.

(8) Kommt es zu einer Visualisierung der Ergebnisse, liegen jene Boxen, die Teile der Zeichnung beinhalten, auf einem eigenen Layer. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, diese besetzten Boxen mit einer flächigen Füllung zu versehen und alle leeren auszuklammern. Dadurch lässt sich die Charakteristik des analysierten Objektes deutlicher hervorheben (siehe *Abb.81*).

(9) Am Ende des Messvorgangs werden die Daten als Textfile exportiert und stehen auf diese Weise für eine spätere Analyse in einem Kalkulationsprogramm zur Verfügung. Dabei bleiben die individuell vorgenommen Einstellungen infolge der automatischen Ergänzung des eingegebenen Dateinamens durch entsprechende Abkürzungen nachvollziehbar, ohne dass es einer Öffnung des Files bedarf.

Aufbereitung der Vorlage (Layout)

(1) Unter dem Reiter *layout* stehen verschiedene Einstellungen für die Aufbereitung der Vorlage selbst, das heißt, der zu analysierenden Zeichnung, zur Verfügung (siehe *Abb.82*, *Seite 127*):

- Um jenen für die Berechnung ausgewählten Bereich einer Zeichnung hervorzuheben, kann dieser optional kopiert und einem eigenen Layer mit dem Namen *Objects_Inside* zugeordnet werden.

67 *Peitgen H.-O. et al. (1992)*, Seite 218

- Umfasst der Ausschnitt im Besonderen nur einen Teil innerhalb einer Zeichnung, besteht außerdem die Möglichkeit, nur den entsprechend getrimmten Ausschnitt auf einem eigenen Layer abzubilden.
- Die dritte Funktion dient schließlich dazu, eventuell vorhandene AutoCAD Objekte des Typs *Text* oder *Schraffur* von der Berechnung auszuklammern.

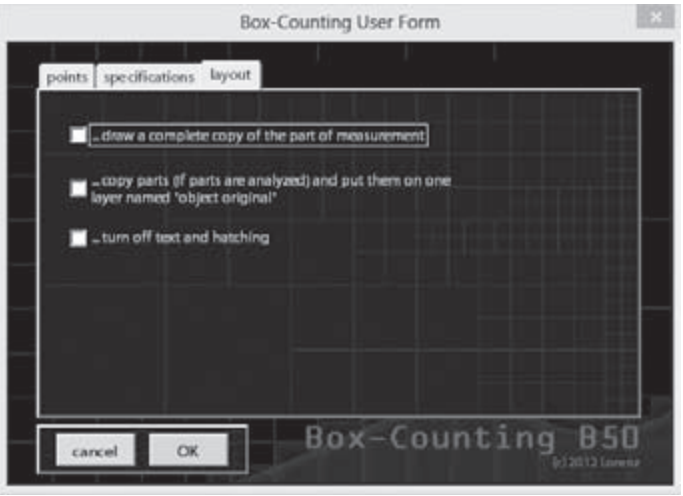


Abb.82.: Eingabemaske für die Festlegung des Erscheinungsbildes der Berechnung (*B50*)

Automatisch vorgenommene Einstellungen

(1) Um zu gewährleisten, dass die Messung tatsächlich nur denjenigen Bereich berücksichtigt, der sich innerhalb der Auswahl befindet, werden alle außerhalb liegenden Objekte der Zeichnung unabhängig von der unter ***Aufbereitung der Vorlage (Layout)*** vorgenommenen Einstellung entweder durch den AutoCAD Befehl *trim* (stutzen) an der minimalen Umgrenzung abgeschnitten oder ausgeblendet. Der Befehl zum Trimmen ist allerdings kein integraler Bestandteil der VBA Bibliothek, weshalb dieser über *sendCommand* aufgerufen wird:

```
For Each acadObjTrimCopy In SSetB50
    ThisDrawing.SendCommand „_trim“ & vbCr &
    rectanglePoly.Handle & vbCr & vbCr & „Zaun“ &
    vbCr & FencePoints1 & vbCr & FencePoints2 & vbCr &
    FencePoints3 & vbCr & FencePoints4 & vbCr &
    FencePoints1 & vbCr & vbCr & vbCr
Next
```

(2) Nachdem das *Stutzen* bei AutoCAD Objekten des Typs *Face* und *Solid* ohne Resultat bleibt und diese dennoch bei der Berechnung berücksichtigt werden sollen, findet zunächst deren Umwandlung in Polygone statt.

(3) Die Ausgangsposition des ersten Gitternetzes leitet sich von einer zentrierten Anordnung über dem zu messenden Ausschnitt ab. Demnach bleibt der Mittelpunkt des für die Messung maßgeblichen Feldes (***S3_pointA*** und ***S3_pointC***) deckungsgleich mit jenem des Begrenzungsrechtecks (die *Bounding-Box*).

(4) Desweiteren wird sowohl die benötigte Zeit für die Aufbereitung der Vorlage als auch jene für die Berechnung der Daten als Start- beziehungsweise Endzeit festgehalten.

G.6.1. Datenauswertung

Eine Messung mit dem Box-Counting Programm *B50* schließt mit der automatischen Ausgabe des Ergebnisses als Textdatei ab. Zu den darin enthaltenen allgemeinen Angaben zählen unter anderem:

Datenaufbereitung

- die Koordinaten der Punkte des ausgewählten, des ‚*reduzierten*‘ und des um einen Faktor erweiterten Bereiches (siehe ***G. VBA Box-Counting/Auswahl (Points)***),
- die Dauer vom Start der Datenaufbereitung bis zur Ausgabe der Datei, getrennt nach Stunden, Minuten und Sekunden,
- die Anzahl der Boxen des ersten Gitternetzes in x- und y-Richtung,
- die Anzahl der Rekursionsschritte und
- die Anzahl der Zwischenschritte.

Anschließend an diese generellen Informationen folgt eine zeilenweise Auflistung der Ergebnisse jeder einzelnen vorgenommenen Untersuchung innerhalb einer Messung mit Angaben über

- die jeweilige Iteration,
- den aktuellen Versatz in x- und y-Richtung sowohl als relative als auch als absolute Position,
- den Maßstab des Gitternetzes samt dessen Logarithmus,
- die Anzahl an Boxen einer Zeile (beziehungsweise den Maßstab als dessen Reziprokwert) und
- die Anzahl der Boxen, die eine Information beinhalten, ebenfalls samt deren Logarithmus.

Darüber hinaus werden bereits bei der Erstellung des Textfiles (das einem Datenblatt entspricht) die minimalen, die maximalen und die durchschnittlichen Werte ermittelt und getrennt voneinander angeführt.[68] Die Analyse der Daten selbst erfolgt schließlich in einem Tabellenkalkulationsprogramm, wobei dort verschiedene Arbeitsmappen für Vergleichszwecke aus mehreren Datenblättern bestehen können. Um gleiche Voraussetzungen bei der Aufbereitung der Daten zu schaffen, übernimmt diese Aufgabe ein

68 Wird das Gitternetz bei gleichbleibender Boxgröße über das betrachtete Objekt verschoben, gibt es also einen Versatz in x- und/oder y-Richtung, entspricht das Minimum dem jeweils geringsten Wert einer solchen Messserie. Äquivalentes gilt für das jeweilige Maximum und den Durchschnitt.

ebenfalls vom Autor geschriebenes Skript, das für den vorangestellten Import des jeweiligen Datenblattes in die aktuelle Arbeitsmappe lediglich der Angabe des absoluten Dateipfades und des Namens der zu untersuchenden Textdatei bedarf (siehe *Abb.83*). Allerdings wird ein Textfile als neues Tabellenblatt in die aktuelle Arbeitsmappe nur dann importiert, wenn dieses darin noch nicht enthalten ist, anderenfalls erscheint eine entsprechende Meldung.

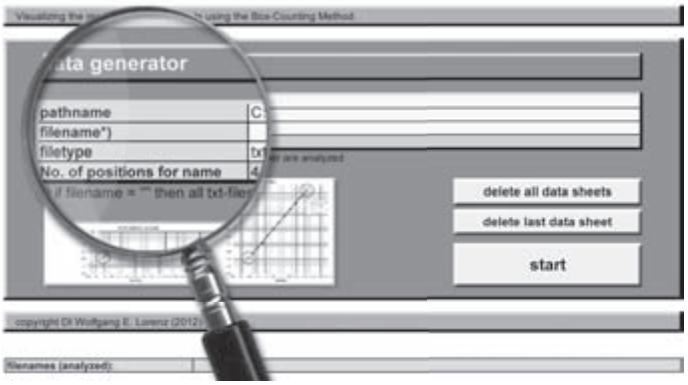


Abb.83.: Eingabemaske für das Einlesen der Daten

Das einzelne Datenblatt

Wenn ein Import des Textfiles beziehungsweise der darin enthaltenen Daten durch das Hinzufügen als neues Tabellenblatt zur aktuellen Arbeitsmappe erfolgt ist, werden die einzelnen Messergebnisse jeweils innerhalb der vier Serien bestehend aus der minimalen, der maximalen, der durchschnittlichen und der gesamten Anzahl an gezählter Boxen (das sind die Messwerte) jeweils nach der Boxgröße absteigend sortiert und doppelte Werte eliminiert. Letzteres tritt allerdings nur dann auf, wenn die gewählte Anzahl der Zwischenschritte, vor allem bei kleineren Maschenweiten, zu einer geringen Veränderung der Boxgröße führt und es infolgedessen bei gleicher relativer Position des Gitternetzes zu keiner Veränderung der Daten kommt. Für die Serie der minimalen Werte ermittelt danach ein Algorithmus – beginnend bei den größeren Boxen – einen möglichst langen Abschnitt geringer Varianz, die durch ein minimales Bestimmtheitsmaß von 0,998 charakterisiert wird.[69] Sowohl die obere als auch die untere Grenze dieses Bereiches werden als Nummer derjenigen Zeile, in der sich die Daten der ermittelten Boxgröße befinden, in dafür vorgesehene Zellen des Tabellenblattes eingetragen und stehen somit für eine spätere manuelle Anpassung zur Verfügung.[70]

Ein automatisch generierter doppellogarithmischer Graph visualisiert schließlich das Ergebnis und beinhaltet neben den minimalen Werten und deren Trendlinie auch die Werte des ‚*reduzierten*' Bereiches, ebenfalls mit einer entsprechenden Trendlinie. Zusätzlich geben die Formeln samt Bestimmtheitsmaß für beide linearen Ersatzgeraden einen Überblick über die Höhe der Box-Counting-Dimension und der Varianz (siehe *Abb.84*).

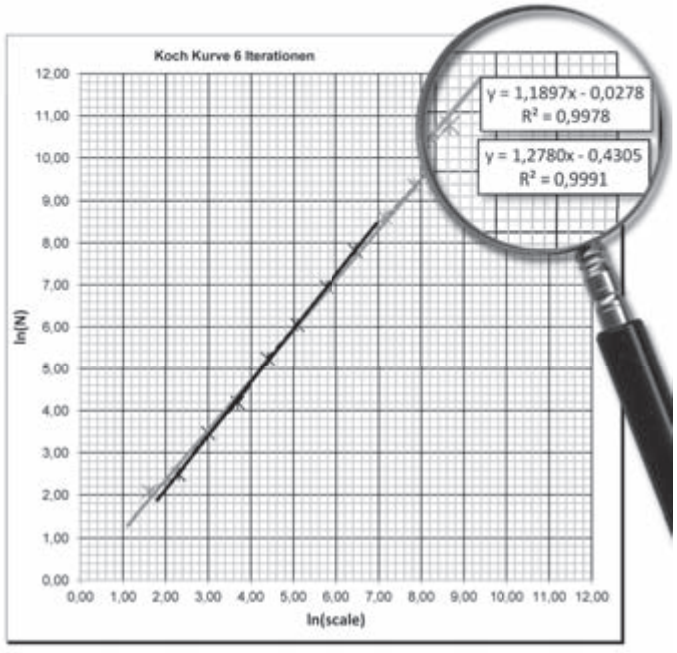


Abb.84.: Doppellogarithmischer Graph einer Messung der Koch Kurve (6 Iterationen) mit 12 Datenpunkten

Das Übersichtsblatt *overview*

Abb.84 zeigt das Ergebnis einer Messung der sechsten Iteration einer Koch Kurve unter Verwendung eines Verkleinerungsfaktors von 0,5 und einer Größe des ersten Gitternetzes von 1/5 des erweiterten Auswahlrechtecks, dargestellt als doppellogarithmischer Graph. Während unter Einbeziehung sämtlicher der insgesamt 12 Datenpunkte die Steigung der linearen Ersatzgerade 1,19 und das Bestimmtheitsmaß 0,9978 beträgt, resultiert der ‚*reduzierte*' Bereich vom zweiten bis zum achten Datenpunkt in einer Box-Counting-Dimension D_B gleich 1,28 mit einem Bestimmtheitsmaß von 0,9991. Die berechnete Selbstähnlichkeitsdimension D_s für die Koch Kurve ist wiederum gleich 1,262 (siehe *B.1. Einführung/ Koch-Kurve*), womit sich im ersten Fall eine Abweichung von über +6 Prozent ergibt, während es im zweiten Fall nur -1,26 Prozent sind. Diese Ergebnisse werden durch das Skript ebenfalls automatisch in einem eigenen Tabellenblatt mit der Bezeichnung *overview* spaltenweise für jedes Datenblatt zusammengefasst (siehe *Abb.85*, *Seite 129*). Die in diesem Datenblatt angeführte Referenzdimension bezieht sich entweder auf einen errechneten Wert – etwa die Selbstähnlichkeitsdimension D_s – oder auf den Median im *Box-Whisker-Plot* (siehe nächster Abschnitt

69 Der perfekte lineare Zusammenhang ist bei einem Bestimmtheitsmaß von 1,0 gegeben.

70 Durch Eintrag einer anderen Zeilennummer ändert sich somit auch der ‚*reduzierte*' Bereich.

Box-Whisker-Plot). Darüber hinaus sind im Tabellenblatt *overview* noch folgende Angaben enthalten:

- der Name des referenzierten Tabellenblattes und dessen Kürzel,
- optional der Name des Gebäudes,
- die Anzahl der Rekursionsschritte bei der Messung,
- der Vergrößerungsfaktor des Auswahlrechtecks,
- die Anzahl der größten Boxen in x- und y-Richtung (das entspricht dem ersten Gitternetz),
- die Anzahl der Zwischenschritte,
- die Anzahl der Verschiebungen in x- und y-Richtung für jede Boxgröße,
- die Angabe, ob eine Box bei Unterschreitung eines Grenzwertes hinzugefügt wird,
- optional die Gesamtlänge der Fassade,
- die absoluten Maße der kleinsten und größten Boxgröße für alle Messwerte (gegebenenfalls in Metern),
- die absoluten Maße der kleinsten und größten Boxgröße für den Abschnitt geringer Varianz (gegebenenfalls in Metern) und
- das Bestimmtheitsmaß, die Box-Counting-Dimension und der y-Achsenabschnitt jeweils für alle Werte und für den Abschnitt geringer Varianz.

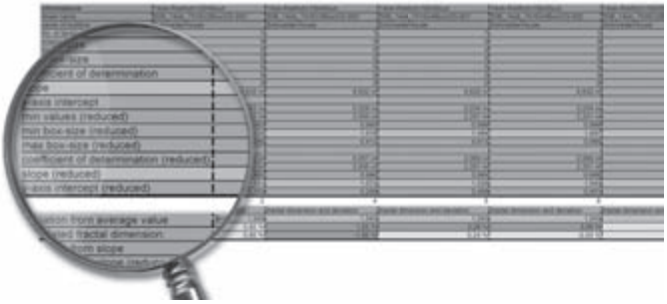


Abb.85.: Ergebnisse im Übersichtsblatt *overview*

Um zu den Originaldaten, das heißt, zum referenzierten Datenblatt zu gelangen, steht am Ende jeder Spalte ein entsprechender Button zur Verfügung. Werden dann im Datenblatt selbst Änderungen vorgenommenen, etwa bei der Definition des Abschnitts geringer Varianz, erscheinen diese umgehend in den referenzierten Zellen der verschiedenen Übersichtsblätter, zu dem auch das Tabellenblatt *overview* zählt.

Das Übersichtsblatt *sizesPlan* mit Angaben zum Objekt

Spezifische Angaben zum Objekt selbst, die per default auf Null gesetzt sind, können wiederum zeilenweise im Tabellenblatt *sizesPlan* vorgenommen werden. Diese umfassen:

- die Eingabe eines repräsentativen Namens zur Identifikation,
- den Namen des Architekten
- den Namen des Gebäudes,
- das Jahr der Fertigstellung,
- den Namen des Orts,
- die Richtung der Ansicht,
- die Länge der Ansicht auf einem Plan,
- den Umrechnungsfaktor zwischen Plan und realem Objekt zur Ermittlung des Maßstabs (falls ein solcher der Messung zugrunde liegt) und
- die Länge der realen Fassade.

Werden einzelne dieser Angaben verändert, hat das gleichermaßen Auswirkungen auf die darauf referenzierenden Zellen der jeweiligen Datenblätter beziehungsweise der anderen Übersichtsblätter, in denen diese Information verwendet wird.

Box-Whisker-Plot

Zur Überprüfung der Funktionsweise des Box-Counting Programmes *B50* und der daraus resultierenden Ergebnisse eignen sich – wie schon bei der Methode zur Ermittlung der Zirkel-Dimension D_Z (siehe ***G.2.2. Zirkel-Dimension DZ***) – fraktale Kurven, deren jeweilige Selbstähnlichkeitsdimension D_s bekannt ist. Dabei zeigt sich, dass die Resultate aus verschiedenen Messungen von diesen rechnerisch ermittelten Werten nur geringfügig abweichen, das heißt, die Ergebnisse lediglich eine geringe Streuung aufweisen und somit eine hohe Resistenz des Programmes gegenüber Einflüssen aus diversen Parametern vorliegt (siehe *Tab.G.6*).

fraktale Kurven

Name:	Koch Kurve	Minkowski K.	Sierpinski D.
Iterationen:	8 Iterationen	7 Iterationen	8 Iterationen
Maximum	1,294	1,511	1,587
3. Quartil	1,286	1,495	1,583
Median	1,271	1,481	1,572
1. Quartil	1,248	1,461	1,561
Minimum	1,243	1,450	1,545
D_s	1,262	1,500	1,585
Abweichung	0,69 %	-1,30 %	-0,85 %

Tab.G.6.: Ergebnisse verschiedener fraktaler Kurven

Box-Counting-Dimension und Boxgrössen

In den beiden Übersichtsblättern *boxplotDim* und *boxplotMeter* sind verschiedene Informationen zusammengefasst, die als Grundlage für eine auf der Box-Counting-Dimension basierenden Bewertung

finale Auswertung

derjenigen Objekte (Fassaden) oder Ausschnitte dienen, deren Messungen mit dem Box-Counting Programm *B50* als Datenblätter in die aktuelle Arbeitsmappe aufgenommen wurden. Dabei erfolgt die Zuordnung eines spezifischen Datenblattes zu einer bestimmten Fassade oder einem Teilbereich über die manuell eingegebene Bezeichnung, die auch Bestandteil des finalen Namens der exportierten Textdatei ist.[71] Dadurch können für ein und dieselbe Vorlage mehrere Messungen mit unterschiedlichen Einstellungen der Parameter zu einer Messserie zusammengefasst werden und auf diese Weise gleichermaßen in die finale Auswertung einfließen. Während das Übersichtsblatt *boxplotDim* alle für die Box-Counting-Dimension relevanten Informationen beinhaltet, sind es beim Übersichtsblatt *boxplotMeter* die entsprechenden Boxgrößen. In beiden Fällen befinden sich im oberen Blattbereich die Resultate der einzelnen Serien nach Spalten getrennt, inklusive einem Hinweis auf die Anzahl der mit einbezogenen Datenblätter. Darunter schließen separiert nach Zeilen die Informationen aus den einzelnen Messungen an, auf die über den Namen des Tabellenblattes referenziert wird.

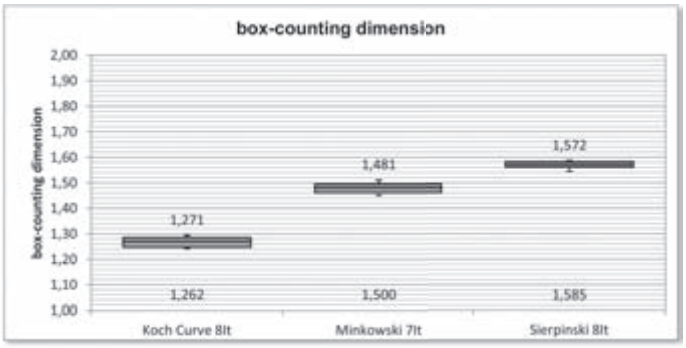


Abb.86.: *Box-Whisker-Plot* der Koch Kurve (8 Iterationen) Minkowski Kurve (7 Iterationen) und des Sierpinski Dreiecks (8 Iterationen)

Das spezifische Resultat einer Messserie im Tabellenblatt *BoxplotDim* enthält neben der maximalen und minimalen Box-Counting-Dimension des jeweiligen Abschnitts geringer Varianz auch das erste Quartil, den Median und das dritte Quartil. Während der Median (Zentralwert einer Datenreihe) sämtliche Datenwerte genau in zwei Hälften teilt, bezeichnet das erste (untere) und dritte (obere) Quartil den Grenzwert innerhalb dessen sich ein Viertel beziehungsweise drei Viertel der Datenwerte befinden. Darüber hinaus besteht für jede Vorlage die Möglichkeit, manuell eine Referenzdimension (etwa die Selbstähnlichkeitsdimension D_s) einzugeben, von der gegebenenfalls die Abweichung des Median in Prozent errechnet wird. So beträgt beispielsweise der Median einer Datenreihe aus 16 Einzelmessungen der 8. Iteration der Koch Kurve etwa 1,27 und weicht somit von der Selbstähnlichkeitsdimension $D_s=1{,}262$ lediglich um +0,69 Prozent ab (siehe ***Abb.86***). Das Ergebnis dieser Messserie und von weiteren fraktalen Kurven ist in ***Tab.G.6*** aufgelistet.

BoxplotDim

Einen Überblick über die Objekte einer aktuellen Arbeitsmappe gibt schließlich der ebenfalls dem Tabellenblatt *BoxplotDim* automatisch hinzugefügte *Box-Whisker-Plot* (siehe ***Abb.87***). Dieser illustriert die Verteilung der Daten durch die Fünf-Punkte-Zusammenfassung mit den beiden Extremwerten, der unteren und oberen Quartil und dem Median. Während die grau gefärbte Box des Diagramms 50 Prozent aller Daten beinhaltet und durch die untere beziehungsweise obere Quartil begrenzt wird, kennzeichnet der darin befindliche mittlere horizontale Strich den Median.[72] Auf diese Weise lässt sich die Streuung der Daten, das heißt, die Varianz, erkennen, die bei den in ***Tab.G.6*** aufgelisteten fraktalen Kurven gering ausfällt (siehe ***Abb.87***). So beträgt etwa für die Koch Kurve die Größe der Box als Maß der Streuung 0,04 oder 3% von $D_s=1{,}262$, für die Minkowski Kurve 0,03 oder 2,3% von $D_s=1{,}5$ und das Sierpinksi Dreieck 0,02 oder 1,4% von $D_s=1{,}585$. Vervollständigt wird das Diagramm durch die sogenannten Antennen, die nach unten beziehungsweise oben durch Querstriche begrenzt sind und die beiden Extremwerte markieren.

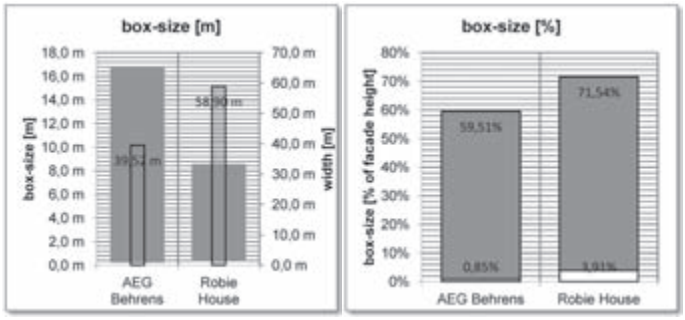


Abb.87.: Darstellung der minimalen und maximalen Boxgröße als Absolutmaße (links) und als Verhältnis zur jeweiligen Gebäudehöhe (rechts)

Getrennt von den Box-Counting-Dimensionen werden im Tabellenblatt *boxplotMeter* die zugehörigen Boxgrößen des jeweiligen Abschnitts geringer Varianz einer Messserie angeführt und ebenfalls als Diagramm dargestellt (siehe ***Abb.87***). Vor allem für die Analyse von Fassaden ist eine solche Visualisierung zusammen mit der Breite/Höhe der Fassade von Bedeutung, weil dadurch die Größe der Bereiche, das heißt, die Tiefe innerhalb der ein Trend zu verzeichnen ist, miteinander

BoxplotMeter

71 Der Name wird im Skript aus dem Filenamen extrahiert.

72 Der Bereich innerhalb der Box umfasst den sogenannten Interquartilsabstand.

verglichen und in Relation zum Ganzen gestellt wird. Sind dabei im Tabellenblatt *sizesPlan* die Maße in Metern angegeben, erfolgt analog die Umrechnung der Boxgrößen in dieselbe Einheit. Die ***Abb.87*** zeigt zwei unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten der minimalen und maximalen Boxgröße: zum Einen als Absolutmaße und zum Anderen als Verhältnis zur jeweiligen Gebäudehöhe.

G.6.2. Messergebnisse

Als Referenzobjekte zur Beurteilung der Anwendbarkeit des Box-Counting Programmes *B50* in Bezug auf Fassaden dienen neben den fraktalen Kurven aus ***G.6.1. Datenauswertung/ Box-Whisker-Plot*** nunmehr auch *Robie House* von F.L. Wright und die *Villa Savoye* von Le Corbusier. Die spezifische Auswahl gerade dieser beiden Gebäude liegt zum Einen darin begründet, dass es sich um Beispiele mit einer unterschiedlich ausgeprägten Detailtiefe handelt und zum Anderen, weil in beiden Fällen bereits Vergleichsdaten vorliegen, etwa von C. Bovill – dessen Analysen sich allerdings auf jeweils eine Berechnung mit wenigen Maßstabsebenen beschränken – und von M. Ostwald.[73][74]

Vergleichsdaten Fassaden

Den Ausgangspunkt der nachfolgenden Untersuchungen bildet im wesentlichen die Annahme, dass bei Robie House jener Bereich, in dem die Anzahl der belegten Boxen und die Maschenweiten einen Zusammenhang aufweisen, infolge einer größeren Detailtiefe deutlicher ausgeprägt ist, das heißt über mehr Maßstäbe andauert, als es bei der Villa Savoye der Fall ist. Ein solcher Unterschied lässt sich im doppellogarithmischen Graphen durch die Länge des geraden Verlaufs der jeweiligen Datenkurve vor dem Übergang in eine 45-Grad Steigung ablesen. Dabei ist zu beachten, dass im Fall von Robie House die spezifische Charakteristik bis zum Glasdesign der Fenster reicht (siehe ***E.3.2. Beispiele/Frederick C. Robie House***), diese Details allerdings erst von Plänen mit einem kleineren Maßstab erfasst werden. Aus diesem Grund erfolgt eine Überprüfung der Kontinuität auch anhand eines entsprechenden Ausschnitts der Fassade.[75] Eine zweite Annahme betrifft die Steigung der Regressionsgeraden selbst (für den Bereich eines linearen Zusammenhangs), wonach diese bei der Villa Savoye infolge des insgesamt glatteren Erscheinungsbildes flacher ausfällt und die charakterisierende Box-Counting-Dimension D_B folglich geringer ist.

Villa Savoye

Die von C. Bovill in seinem Buch *Fractal Geometry in Architecture and Design* aus dem Jahr 1996 veröffentlichten Analysen der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye basiert auf einer noch händisch durchgeführten Box-Counting Methode unter der Anwendung von lediglich drei unterschiedlichen Maschenweiten (siehe ***Tab.G.7***).[76] Bei einem Reduktionsfaktor von 50 Prozent reichen die absoluten Boxgrößen in diesem Fall von 2,45 bis 0,60 Meter oder anders ausgedrückt von zirka 13 bis 3 Prozent der Gesamthöhe der Fassade. Für drei weitere an diesen Bereich anschließende feinere Maschenweiten mit einer Größe zwischen 0,60 und 0,15 Meter – was einem näheren Standort des Betrachters entspricht – liegt für die Berechnung nicht mehr der Plan der gesamten Fassade zugrunde, sondern lediglich ein Ausschnitt des im ersten Obergeschoss befindlichen Fensterbandes. Während die von C. Bovill errechneten Werte für die Ansicht noch 1,422 und 1,333 betragen, sind es für das Detail nur mehr 1,229 und 1,0. Demnach offenbart die Villa Savoye in einem größeren Maßstab noch eine stärkere Zerklüftung beziehungsweise Rauheit, die allerdings bei Reduktion der Distanz schnell verflacht und sich schließlich einer ein-dimensionalen Linie angleicht. Das lässt den Schluss zu, dass glatte Flächen, einfache Geometrien und der Verzicht auf Ornamente – als Merkmale einer Ausprägung der *modernen Architektur* zu der die Villa Savoye zählt – nicht notwendigerweise den allgemeinen ganzheitlichen Charakter beeinflussen, sondern vor allem in der näheren Betrachtung (entsprechend einem näheren Standort) zum Tragen kommen.[77]

C. Bovill's Ergebnisse

D_B	Boxgröße	
	von	bis
Übersicht		
1,422	2,44 m	1,22 m
1,333	1,22 m	0,61 m
Ausschnitt (Fensterband)		
1,229	0,61 m	0,31 m
1,000	0,31 m	0,15 m

Tab.G.7.: Messwerte der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye laut C. Bovill (1996)

73 *Bovill C. (1996)*, Seiten 121 und 141

74 *Ostwald M. J. et al. (2008b)*

75 vgl. Bovill C. (1996), Seite 127

76 *Bovill C. (1996)*, Seiten 141-142

77 *Joedicke J. (1990)*, Seiten 26, 28. Die Dachaufbauten der Villa Savoye zeigen allerdings im Gegensatz zum Quader des Hauptgeschosses keine einfache geometrische Struktur, sondern sind frei geschwungen.

Die Ergebnisse aus den Messungen der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye von C. Bovill drücken im Wesentlichen einen Wechsel der Rauheit während einer Annäherung des Betrachters aus, die einer dem Purismus entsprechenden industriellen Verwendung der Materialien zu verdanken ist.[78] Mehrere vom Autor mit dem Box-Counting Programm *B50* durchgeführte Messungen bestätigen grundsätzlich eine solche Tendenz. Verdeutlicht wird diese Veränderung durch den Verlauf der Datenkurve im doppellogarithmischen Graphen, indem die Datenpunkte keinen eindeutigen Trend beschreiben – der sich als jener Abschnitt manifestiert, in dem die einzelnen Datenpunkte von der Ersatzgeraden nur eine geringe Abweichung aufweisen –, sondern zwei deutlich voneinander getrennte und aufeinander folgende Bereiche ausbilden (der Pfeil in *Abb.88* kennzeichnet die Stelle, an der es zu einem Knick in der Datenkurve kommt).[79]

Messserie 1
Villa Savoye

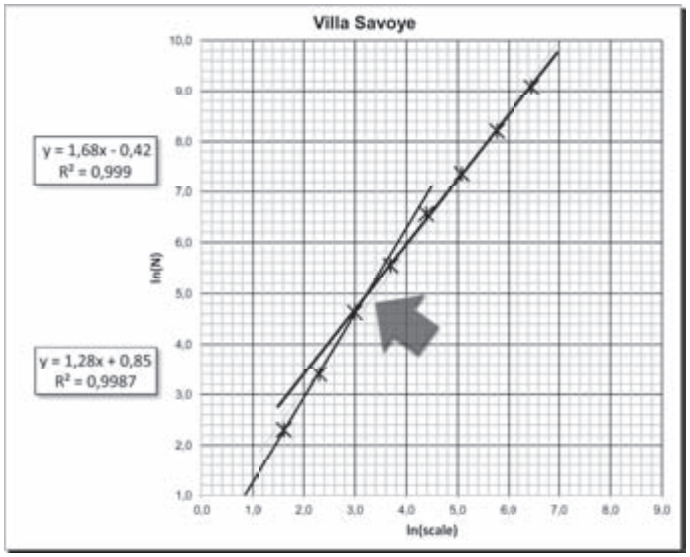


Abb.88.: Ergebnis einer Messung der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye mit den beiden Trendlinien

Hinsichtlich der ersten aus 7 Einzelmessungen bestehenden Messserie der in *Abb.89* dargestellten Vorlage weist der Median für die großen Maschenweiten – die von 4,50 bis 0,56 Meter reichen – mit 1,660 noch einen relativ hohen Wert auf, während dieser für den nachfolgenden Bereich von 0,96 bis 0,03 Meter nur mehr 1,254 beträgt (siehe *Tab.G.8*). Der Grund für den anfänglich höheren Wert ist die augenscheinlich stärkere Zerklüftung der Villa Savoye bei größerer Entfernung infolge der komplexen Komposition der großmaßstäblichen Elemente: Kubische Elemente wechseln sich mit zurückgesetzten geschwungenen Elementen genauso ab, wie geschlossene mit offenen (siehe *E.1.2. Nähe zur euklidischen/fraktalen Geometrie* und *Abb.89*).[80] Die wesentlich flachere Steigung der Datenkurve im kleineren Maßstab resultiert wiederum aus dem Umstand, dass im Detail der näheren Betrachtung die Anzahl der Elemente in diesem Bereich nicht entsprechend zunimmt (wenn sie dort überhaupt zu finden sind). Das bestätigt schließlich die von B. Mandelbrot beschriebene Charakterisierung der modernen Architektur als skalenbeschränkt (*scalebound*, siehe auch *A.2.1. Beschreibung der Architektur*).[81] Eine solche Beschränkung betrifft jenen Bereich, in dem sich der Betrachter einen Überblick über das Gebäude verschafft. Dieser Bereich fällt bei der Villa Savoye geringer aus als etwa bei Robie House von F.L. Wright (vergleiche *G.6.2. Messergebnisse/Robie House*).

scalebound

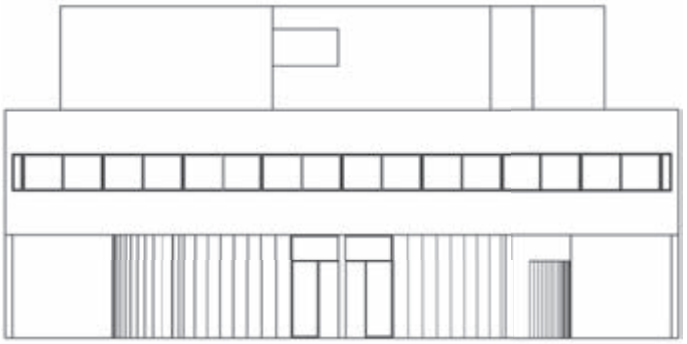


Abb.89.: Le Corbusier: Villa Savoye 1928-1931;
Süd-Ost Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)

Zur Beurteilung der in *Tab.G.8* zusammengefassten Resultate einer ersten mit dem Box-Counting Programm *B50* vorgenommenen Analyse der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye dient eine weitere vom Autor durchgeführte Messserie, die geteilt jeweils einen der beiden sich überschneidenden aber voneinander getrennten Intervalle betrachtet. Der nähere dieser beiden Standorte umfasst nunmehr 46 Einzelmessungen und schließt Boxgrößen zwischen 0,60 und 0,14 Metern mit ein. Dieser Bereich, innerhalb dessen es zu einer geringfügigen Abweichung der einzelnen Datenpunkte von der Ersatzkurve kommt, unterscheidet sich somit von jenem der ersten Messserie (0,96 bis 0,03 Meter). Die Verschiebung der Grenzwerte ist eine Folge der Verfeinerung der Daten durch eine wesentlich größere Anzahl an Einzelmessungen, wodurch sich der Zusammenhang zwischen Boxgröße und Maßstab des Gitters deutlicher manifestiert. Dennoch divergiert der resultierende Median mit 1,277 nur minimal

weitere Messserien
Villa Savoye

78 *Bovill C. (1996)*, Seite 143

79 Die Steigung dieser Ersatzgeraden entspricht der charakteristischen Box-Counting-Dimension D_B der Fassade.

80 *Sbriglio, J. (1999)*, Seiten 40ff

81 Siehe *A.2.1. Beschreibung der Architektur*

von dem zuvor berechneten Wert (1,254; siehe *Tab.G.9* und *Abb.90*).

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,660	4,80 m	0,56 m	7	1,636-1,669
1,254	0,96 m	0,03 m	7	1,250-1,262

Tab.G.8.: Messserie 1 der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye[82]

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,599	4,52 m	0,56 m	46	1,540-1,642
1,277	0,60 m	0,15 m	46	1,244-1,313

Tab.G.9.: Messserie 2 der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye

Der weiter entfernte Standort besteht bei der zweiten Messserie ebenfalls aus 46 Einzelmessungen und weicht mit Boxgrößen zwischen 4,52 und 0,56 Metern nur bezüglich des oberen Grenzwerts von jenem in *Tab.G.8* angeführten entsprechenden Bereich geringer Varianz ab. Ein Interquartilsabstand von 5,12 Prozent zeugt zunächst von einer stärkeren Schwankung der Einzelergebnisse. Der Median liegt schließlich mit 1,599 unter dem zuvor berechneten Vergleichswert von 1,66 (siehe *Tab.G.9* und *Abb.90*). Im wesentlichen verdeutlicht das Ergebnis – wie schon bei der ersten Messserie – vor allem, dass die Fassade im kleineren Maßstab eine geringere Zerklüftung aufweist als in der Übersicht.

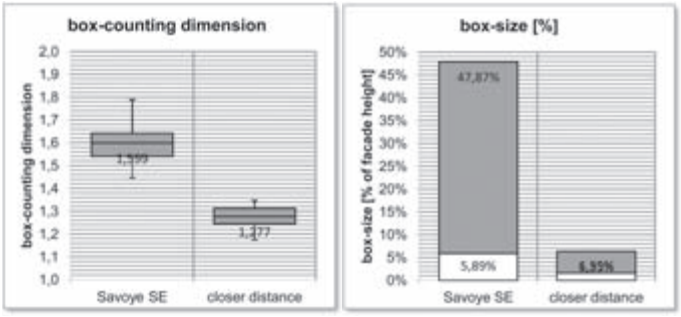


Abb.90.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Messserie 2: Vergleich zwischen zwei unterschiedlichen Intervallen der Villa Savoye.

Aufgrund der in *G.5. Einflüsse auf die Messergebnisse* beschriebenen Faktoren und der Wahl des jeweils betrachteten Intervalls kann es zu Unterschieden in den Ergebnissen kommen. Daraus folgt:

Vergleich von Messserien

- Eine Messserie lässt lediglich eine Tendenz der Rauheit erkennen.
- Eine Fassade kann nicht durch einen einzelnen Wert beschrieben werden.

Dementsprechend bedarf es für die Charakterisierung einer Fassade (beziehungsweise deren zweidimensionalen Ansicht) infolge einer Messserie neben der Angabe zum Grad der Zerklüftung und der Tiefe, in welcher diese vorliegt, auch der Anzahl der Messungen und des Interquartilsabstandes (siehe *Tab.G.8* und *Tab.G.9*).[83] Die Tiefe umfasst hierbei jene Maßstabsebenen, in denen sich der spezifische Charakter, der etwa dem Ganzen zu eigen ist, im Detail fortsetzt. Für Vergleichszwecke sind die Boxgrößen nicht in absoluten Zahlen angegeben sondern als Prozente in Relation zur Gesamthöhe der jeweiligen Fassade (Die Höhe ist der Breite vorzuziehen, nachdem die Boxgrößen aus dieser durch die Distanz des Betrachters und unterschiedlichen Winkel resultieren). Somit lassen sich auch Gebäude unterschiedlicher Größe miteinander vergleichen. In der linken Illustration der *Abb.90* sind jeweils für die beiden sich überlappenden Bereiche der zweiten Messserie die Extremwerte als Antennen, der Median als horizontaler Strich und der Interquartilsabstand als grauer Balken zwischen der ersten und dritten Quartil dargestellt. Die dazugehörigen minimalen und maximalen Boxgrößen sind wiederum in der rechten Darstellung als Prozent der Gesamthöhe der Fassade visualisiert.

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,600	2,64 m	0,25 m	46	1,570-1,646
1,168	1,30 m	0,05 m	46	1,143-1,198

Tab.G.10.: Erd- und Obergeschoss der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye

Obwohl die beiden kleinsten Maschenweiten bei C. Bovill mit Größen zwischen 30 und 15 Zentimeter jeweils innerhalb des zweiten Bereiches der vom Autor durchgeführten Messserien liegen – also in jenem Abschnitt des doppellogarithmischen Graphen der eine flachere Steigung aufweist – differiert die von C. Bovill händisch ermittelte Box-Counting-Dimension mit einem Ergebnis von 1,0 deutlich von den beiden in *Tab.G.8* und *Tab.G.9* angeführten Medianen (1,254 und 1,277). Der Grund liegt darin, dass C. Bovill für diesen Bereich lediglich Rechtecke als Detail der im ersten Obergeschoss befindlichen Fensterbänder untersucht, während die beiden Messserien jeweils das gesamte Gebäude berücksichtigen. Bei der Villa Savoye hebt sich aber gerade der einfache kubische Körper des ersten Obergeschosses vom

Vergleich der Ergebnisse mit C. Bovill

82 *Lorenz, W. E. (2012)*

83 Anstelle eines einzelnen Wertes wird der Interquartilsabstand in den Tabellen als Bereich von der ersten bis zur dritten Quartil angeführt.

Erdgeschoss, das aus Stützen und der gläsernen Eingangshalle besteht, ebenso ab, wie vom Dachgeschoss mit den geschwungenen Wänden des Windschutzes (vgl. *E.2. Euklidisch-nahe Architektur*). Demnach liegt also keine rigorose Reduktion auf lediglich eine simple euklidische Form vor, was wiederum bedeutet, dass eine Einschränkung auf einen bestimmten Ausschnitt auch nur einen Teilaspekt des Gebäudes dokumentiert. Verdeutlicht wird dieser Unterschied zwischen den Teilbereichen durch getrennte Analysen des Erd- beziehungsweise Obergeschosses. Letzteres weist bei größeren Maschenweiten zunächst eine starke Varianz mit Werten zwischen Eins und Zwei auf, ehe sich eine starke Korrelation zwischen 1,30 und 0,05 Metern einstellt. In diesem Bereich beträgt der Median für die 46 Einzelmessungen schließlich 1,168 und liegt somit unter den Ergebnissen für den jeweils näheren Standort der beiden Messserien der gesamten Ansicht (1,254-1,277). Das bedeutet nicht nur eine Annäherung des kubischen Teils des Gebäudes an eine eindimensionalen Linie und somit an die Ergebnisse von C. Bovill, sondern auch dass sich im Vergleich zu den vorangegangenen Analysen die glatte Charakteristik schon in einem etwas größeren Maßstab manifestiert. Der konstante Bereich des Erdgeschosses dagegen beginnt bereits bei 2,64 Metern und reicht bis 0,25 Meter. Dabei beträgt der Median 1,60, worin sich die stärkere Zerklüftung, die aus den Rahmen der gebogenen Glaswand, den Stützen und den Eingängen resultiert, widerspiegelt (siehe *Abb.89* und *Tab.G.10*).

Zwischen den Ergebnissen aus den beiden zuvor beschriebenen gesamtheitlichen Betrachtungen der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye (erste und zweite Messserie) und den entsprechenden Berechnungen durch C. Bovill für einen ähnlich entfernt gewählten Standort kommt es erneut zu Abweichungen. Die Mediane des jeweils ersten Abschnitts der Graphen – also jenes Bereiches, der aus den größeren Maschenweiten hervorgeht – fallen dabei mit 1,660 beziehungsweise 1,599 gegenüber den beiden von C. Bovill im Jahr 1996 veröffentlichten Werten (1,422 und 1,333) deutlich höher aus.[84][85] Obzwar der größere Interquartilsabstand der zweiten Messserie auf starke Unterschiede in den Einzelergebnissen hinweist, bestätigt der Median im Wesentlichen das Ergebnis der ersten Messserie. Daraus lässt sich ableiten, dass jener Wert, der die Fassade hinsichtlich ihrer Rauheit beschreibt, für den ersten Abschnitt tendenziell höher anzusetzen ist, als von C. Bovill angenommen. Eine mögliche Ursache für die starken Schwankungen im ersten Abschnitt der zweiten Messserie könnte in den wenigen in diesem Intervall vorhandenen Datenpunkten liegen – nachdem es dort aufgrund des Verkleinerungsfaktors von 50 Prozent zunächst zu größeren Maßstabssprüngen kommt. Infolgedessen hat der Autor eine Variante des Computer-Programms entwickelt, die diesem Umstand Rechnung trägt und die Sprünge zwischen den größeren Boxen reduziert (vergleiche Kapitel *G.7. Variante des Programmes*).

Das Ergebnis für einen näher zum Gebäude gewählten Standort weist wiederum deutlich mehr Datenpunkte bei einem gleichzeitig geringeren Interquartilsabstand auf. Die Differenz zwischen erster und dritter Quartil beträgt dabei für die erste Messserie lediglich 0,012 oder 0,6 Prozent und für die zweite 0,068 oder 3,41 Prozent (vergleiche dazu die linke und rechte Darstellung des Diagramms *box-counting dimension* der *Abb.90*).[86] Das deutet seinerseits auf eine ausgeprägte Konstanz hin und unterstreicht die vom Autor ermittelten Ergebnisse (1,254 und 1,277). Demnach ist die *Verflachung* weniger stark ausgeprägt wie von C. Bovill beschrieben (mit 1,23 und 1,0), dessen letzter errechneter Wert sogar jenem einer eindimensionalen Linie entspricht.

Robie House

Der Verlauf, den die von C. Bovill publizierten Messwerte der Villa Savoye in Poissy beschreiben, unterscheidet sich vor allem im Maßstab des Details von jenen ebenfalls per Hand ermittelten Resultaten der Straßenfassade von *Robie House* in Chicago (siehe *Abb.91*).

Ergebnisse von C. Bovill *Robie House*

Abb.91.: F.L. Wright: Robie House, nahe Chicago 1906-1909; *Vorlage: Weston, R. (2004)*

Die Maschenweiten zur Untersuchung der gesamte Fassade liegen nunmehr zwischen 7,3 und 0,9 Metern und ergeben bei einem Reduktionsfaktor von 50 Prozent drei Box-Counting-Dimensionen, die sich auf 1,644, 1,485 und 1,441 belaufen (siehe *Tab.G.11*). Dabei reicht der letzte Wert mit 1,441 für Boxgrößen zwischen 1,83 und 0,91 Meter nahe an C. Bovills erstes Ergebnis für die Süd-Ost Fassade der Villa Savoye heran, die für einen Bereich zwischen 2,44 und 1,22 Meter einen Wert von 1,422 aufweist. Eine derartige Ähnlichkeit deutet auf eine vergleichbare Zerklüftung der

84 *Bovill C. (1996)*, Seiten 141-142

85 Eine von M. Ostwald et al. durchgeführte Analyse der Süd (Ost) Ansicht der Villa Savoye bestätigt mit einem errechneten Wert von 1,52 die tendenziell höheren Ergebnisse der Messserien, allerdings weicht das untersuchte Intervall von jenem des Autors ab. *Ostwald M. J. et al. (2011)*, Seite 500

86 Die Angabe in Prozent bezieht sich auf eine Spanne zwischen Null und der vollständig ausgefüllten Fläche, die einen Wert von Zwei aufweist.

beiden Fassaden in diesem spezifischen Maßstab, das heißt, um 1,5 Meter, hin. Das bestätigt im Wesentlichen auch eine mit dem Box-Counting Programm *B50* durchgeführte und aus 30 Einzelmessungen bestehende Messserie, in welcher der Median mit 1,680 für Maschenweiten zwischen 8,58 und 0,47 Meter im Bereich jener der ersten und zweiten Messserie der Villa Savoye liegt (1,660 und 1,599). Die größere erste Maschenweite von 8,58 Metern für Robie House gegenüber 4,80 beziehungsweise 4,52 Metern für die Villa Savoye ist dabei auf die insgesamt breitere Fassade zurückzuführen (siehe *Abb.92* rechts).

D_B	Boxgröße	
	von	bis
1,644	7,32 m	3,66 m
1,485	3,66 m	1,83 m
1,441	1,83 m	0,91 m

Tab.G.11.: Messwerte der Straßenfassade des Robie House laut C. Bovill (1996), erster Abschnitt

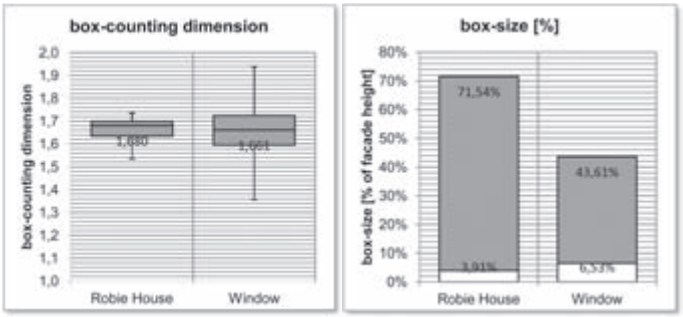


Abb.92.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Straßenfassade und dem Fensterdesign des Robie House.

Die gegenwärtig beschriebene Messserie von Robie House unterscheidet sich von C. Bovills Berechnungen zunächst in der Höhe des Medians, nachdem dieser mit 1,680 sämtliche der drei in *Tab.G.11* aufgelisteten Box-Counting-Dimensionen, von denen zwei sogar einen Wert unter 1,5 aufweisen, deutlich übersteigt (vgl. *Tab.G.13*).[87] Gleichzeitig bestätigt der geringe im Box-Plot Diagramm der *Abb.92* eingetragene Interquartilsabstand (0,066 oder 3,30 Prozent) die Konstanz des Ergebnisses für die gesamte Fassade von Robie House und bekundet damit – wie schon bei der Villa Savoye – einen wesentlich homogeneren Verlauf, als es die Untersuchungen von C. Bovill vermuten lassen (siehe *Abb.92*). Zudem weist das Ergebnis der Analyse eine starke Ähnlichkeit mit dem jeweils ersten Abschnitt der beiden Messserien der Villa Savoye auf, während C. Bovill für diese Fassade tendenziell niedrigere Kennzahlen anführt (vgl. *Tab.G.7* und *Tab.G.11*).[88] Nachdem der geringe Interquartilsabstand wie zuvor beschrieben ein Hinweis auf die Akkuranz der Messserie selbst ist, deutet er letztendlich seinerseits darauf hin, dass die Fassade im Maßstab zwischen 8,58 und 0,47 Metern tatsächlich am ehesten durch einen Bereich zwischen der ersten und dritten Quartil, das heißt durch Werte zwischen 1,634 und 1,700 charakterisiert werden kann.

Das Glasdesign als Detail

Analog zur Villa Savoye analysiert C. Bovill im Anschluss an die Übersicht der gesamten Fassade als Detail des Gebäudes ein einzelnes Fenster, das bei Robie House im Speziellen durch dessen Glasdesign die Fortsetzung des Charakters, der sich aus dem Ganzen erschließt, bedeutet (vgl. *E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal/Frederick C. Robie House*). Bei einem Reduktionsfaktor von 50 Prozent und Maschenweiten zwischen 15,24 und 3,81 Zentimetern belaufen sich die beiden errechneten Box-Counting-Dimensionen auf 1,718 beziehungsweise 1,627 und liegen somit im Gegensatz zu den stark abflachenden Resultaten für das Fensterband der Villa Savoye im Bereich des ersten Ergebnisses für die gesamte Fassade (vgl. *Tab.G.11* und *Tab.G.12*).[89] C. Bovill schließt daraus, dass die Fassade von Robie House eine wesentlich länger anhaltende konstante Zerklüftung aufweist, als es bei dem Gebäude in Poissy von Le Corbusier der Fall ist. Diese Vermutung wird durch eine Messserie (45 Einzelmessungen) des Glasdesigns bestätigt, in der der Median für Maschenweiten zwischen 68 und 10 Zentimetern mit einem Wert von 1,661 nahezu identisch ist mit dem Median für die gesamte Fassade, der 1,680 beträgt (siehe *Tab.G.14*).

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,680	8,58 m	0,47 m	30	1,634-1,700

Tab.G.12.: Messserie der Straßenfassade des Robie House

D_B	Boxgröße	
	von	bis
1,718	15,24 cm	7,62 cm
1,627	7,62 cm	3,81 cm

Tab.G.13.: Messwerte eines Fensterdesigns des Robie House laut C. Bovill (1996)

87 Ein ähnliches Resultat ergibt eine mit dem Programm Archimage im Jahr 2009 durchgeführte Analyse von Vaug und Ost. Dort beträgt der Wert 1,689. *Vaughan J. (2010)*

88 *Bovill C. (1996)*, Seite 141

89 *Bovill C. (1996)*, Seiten 123ff

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,661	0,68 m	0,10 m	45	1,595-1,724

Tab.G.14.: Messserie eines Fensterdesigns des Robie House

AEG Turbinenhalle

Das Ergebnis aus einer Messserie der von Peter Behrens geplanten und im Jahr 1909 fertig gestellten *Turbinenhalle der AEG* in Berlin-Moabit (siehe ***Abb.93***) weist Parallelen zu jener unter ***G.6.2. Messergebnisse/Robie House*** beschriebenen und gleichfalls mit dem Box-Counting Programm *B50* durchgeführten Analyse der Straßenansicht des fast zeitgleich entstandenen Robie House von Frank Lloyd Wright auf (vergleiche ***Tab.G.12*** und ***Tab.G.15***). Erneut besteht über eine große Anzahl von Maßstäben ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Boxgröße und der Anzahl jener Boxen, die notwendig sind, um die Linien der jeweiligen Ansicht vollständig abzudecken.

Robie House und *AEG Turbinenhalle*

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,705	16,80 m	0,24 m	46	1,691-1,731

Tab.G.15.: Messserie der Turbinenhalle der AEG in Berlin-Moabit

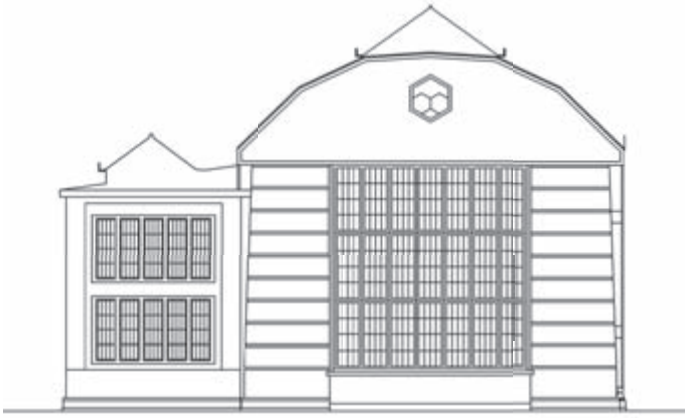


Abb.93.: P. Behrens: AEG Turbinenhalle Berlin-Moabit 1908/09; *Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Entsprechend der Resultate aus den jeweiligen Messserien liegt der Median für die Turbinenhalle der AEG mit 1,705 lediglich um 1,24 Prozent[90] höher als jener für die Straßenfassade von Robie House (1,680). Darüber hinaus ist in beiden Fällen die Varianz der Einzelergebnisse, gemessen am Interquartilsabstand, mit 2,00 beziehungsweise 3,30 Prozent gering. Zu stärkeren Abweichungen kommt es hingegen bei der Größe des konstanten Bereichs. Während die kleinsten Maschenweiten mit 0,24 Metern und 0,47 Metern noch nahe beieinander liegen, übersteigt schließlich die obere Grenze der Turbinenhalle (16,80 Meter) jene des Robie House (8,58 Meter) deutlich. Dieser Umstand ist den Proportionen der beiden Ansichten zu verdanken. Im Gegensatz zur langgestreckten geduckten Straßenansicht von Robie House, dessen Motiv der Weite der Prärie folgt, nähert sich die Ansicht der Turbinenhalle einem Verhältnis von 3:4 an. Werden nun die Maschenweiten nicht als absolute Maße angegeben, sondern gemäß ***G.4.1. Boxgrößen und das menschliche Auge*** relativ zur jeweiligen Gebäudehöhe, so verringert sich die Divergenz der oberen Grenzwerte. Im Fall der Turbinenhalle der AEG umfasst dann der Bereich geringer Varianz 59,51 bis 0,85 Prozent und jener des Robie House 71,54 bis 3,91 Prozent (siehe ***Abb.94***).

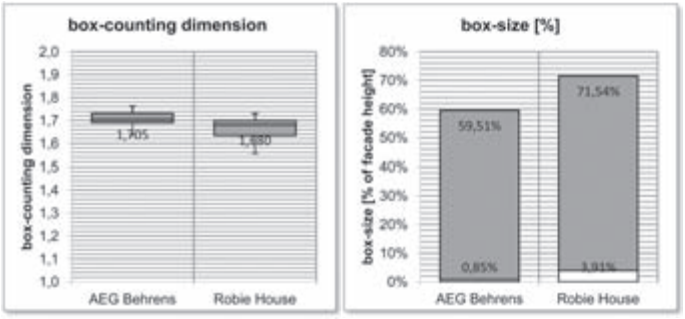


Abb.94.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Turbinenhalle der AEG und der Straßenfassade des Robie House.

Aus dem geringen Unterschied der Mediane lässt sich schließlich ableiten, dass trotz einer augenscheinlich unterschiedlichen formalen Umsetzung der beiden Gebäude (eine im Hauptteil symmetrische Fassade mit einer großen Öffnung bei der Turbinenhalle gegenüber einer der flachen Prärie zu verdankenden horizontal orientierten Fassade mit einer Aneinanderreihung von Fensteröffnungen bei Robie House) dennoch von einer ähnlichen Charakteristik gesprochen werden kann, die sich als ähnliche Zerklüftung ausdrückt. Diese Affinität liegt vor allem darin begründet, dass beide Ansichten ein analoges Verhältnis zwischen den glatten Bereichen (die sich bei Robie House erst aus der Nähe betrachtet als Sichtziegelmauerwerk offenbaren) und den stärker gestalteten aufweisen. In diesem Zusammenhang wurde der Auswahl, d.h. der Entscheidung, welche Bestandteile der Fassade schließlich in die zweidimensionale Ansicht aufgenommen werden, und somit der Beeinflussung durch die Verschiebung eines realen Objektes in eine Abbildung durch die Wahl derselben

90 Die Prozentangabe bezieht sich auf einen Bereich der Box-Counting Dimension zwischen 0 und 2 und nicht zwischen 1 und 2.

Quelle als Vorlagen für die Messungen der Turbinenhalle der AEG als auch des Robie House Rechnung getragen.[91]

Haus Steiner

Hinsichtlich der Gartenansicht des *Haus Steiner* von Adolf Loos aus dem Jahr 1910 (siehe ***Abb.95***, ***Seite 137***) weist das Ergebnis einer aus 43 Einzelmessungen bestehenden Messserie einige Analogien zur Süd-Ost Fassade der Villa Savoye von Le Corbusier auf. So kennzeichnet im jeweiligen doppellogarithmischen Graphen der einzelnen Messungen in beiden Fällen ein deutlich ausgeprägter Knickpunkt den Wechsel zwischen einem steileren und einem flacheren Anstieg der Datenkurve (vergleiche ***Abb.88***). Daraus resultiert wiederum zu Beginn eines jeden Graphen, d.h. im Bereich der größeren Maßstäbe, eine Regressionskurve mit einem entsprechend steileren Steigungswinkel, gefolgt von einer zweiten flacher verlaufenden für die kleineren Maschenweiten. Der Median des ersten Abschnitts der Messserie beträgt für die Gartenansicht des Haus Steiner 1,679 (bei einem Interquartilsabstand von 6,13 Prozent) und liegt somit im Bereich der Ergebnisse für die Süd-Ost Fassade der Villa Savoye (1,660-1,599). Ähnliches gilt für einen näher gewählten Standort mit einem Median von 1,243 (bei einem Interquartilsabstand von 1,17 Prozent), der sich ebenfalls nur geringfügig von jenen in ***Tab.G.16*** und ***Tab.G.9*** angeführten Werten 1,253-1,277 der Villa Savoye unterscheidet.

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,679	7,98 m	0,87 m	43	1,611-1,734
1,243	0,87 m	0,10 m	43	1,232-1,255

Tab.G.16.: Messserie der Garten-Ansicht des Haus Steiner

Sowohl das Ergebnis aus der Analyse der Garten-Ansicht des Haus Steiner als auch jenes für die Süd-Ost Ansicht der Villa Savoye lassen darauf schließen, dass die jeweilige Fassade aus einer größeren Entfernung betrachtet eine stärke Zerklüftung aufweist, sich allerdings bei einem kleineren Maßstab als glatt erweist. Dieser Unterschied resultiert, wie aus der ***Abb.95*** ersichtlich, aus dem Wechsel von einer Dominanz der Fensteröffnungen zu einer in der Nähe glatt verputzten Fassade. Während der Maßstab, bei dem ein solcher Übergang zwischen den unterschiedlichen Bereichen erfolgt, im Fall des Haus Steiner einer Boxgröße von zirka 90 Zentimeter entspricht (siehe ***Tab.G.16***) sind es bei der Villa Savoye mit einer etwas breiteren Fassade nahezu 60 Zentimeter (siehe ***Tab.G.9***).

Abb.95.: Adolf Loos: Haus Steiner 1910; Garten-*Ansicht entnommen aus: TU München Hrsg. (1999)*

Haus Schröder-Schräder

Das *Haus Schröder-Schräder* in Utrecht von Gerrit Thomas Rietveld aus dem Jahr 1924 weist, wie im Kapitel ***E. Fraktal-nahe Architektur/Haus Schröder-Schräder*** beschrieben, eine selbstähnliche Charakteristik auf. Diese ist einer ähnlichen Struktur von einander nicht berührender Wandscheiben mit akzentuierenden horizontalen und vertikalen Linien zu verdanken, die konsequent vom Ganzen bis zum Detail der Inneneinrichtung fortgeführt wird (siehe ***Abb.96*** und ***Abb.97***, ***Seite 138***).

zwei Fassaden, gleiches Ergebnis

Abb.96.: G.T. Rietveld: Haus Schröder-Schräder, Utrecht 1924; *Süd-Ost Ansicht aus: Weston, R. (2004)*

Eine solche visuelle Konsistenz lässt als Resultat einer Analyse mit der Box-Counting Methode einen konstanten Verlauf der Datenkurve im doppellogarithmischen Graphen vermuten, was bedeutet, dass die einzelnen Datenpunkte über mehrere Maßstäbe hinweg nur eine geringe Varianz aufweisen. Diese Vermutung wird durch eine Messserie der Süd-Ost Ansicht bestehend aus 51 Einzelmessungen bestätigt. Demnach reicht der konstante Bereich von 3,46 Metern bis 0,10 Meter beziehungsweise von 60,0 bis

91 *Weston, R. (2004).*
Der Hauptunterschied in der Darstellung der beiden Fassaden betrifft den Detailierungsgrad der Fenster. Während die Ansicht der Turbinenhalle die Sprossenteilung beinhaltet, fehlt bei Robie House die Darstellung des spezifischen Fensterdesigns. Dieses wird als Detail betrachtet, das erst in einem kleineren Maßstab, d.h. bei einem näheren Standort in die Berechnung mit einfließt.

1,77 Prozent der Fassadenhöhe. Ein ähnliches Resultat ergeben gleichfalls 51 Einzelmessungen für die Süd-West Ansicht. In diesem Fall reicht der Bereich geringer Varianz von 3,16 Metern bis ebenfalls 0,10 Meter beziehungsweise von 54,94 bis 1,80 Prozent der Höhe (siehe *Abb.98*). Darüber hinaus weisen beide Fassaden infolge eines konsistenten Entwurfes auch eine ähnliche Charakteristik auf, was sich schließlich in einer ähnlichen Höhe der Mediane der beiden Messserien manifestiert. Für die Süd-Ost Ansicht beläuft sich dieser auf 1,588 (bei einem Interquartilsabstand von 2,76 Prozent) und jener für die Süd-West Fassade auf 1,551 (bei einem Interquartilsabstand von 4,08 Prozent – siehe *Tab.G.17*).

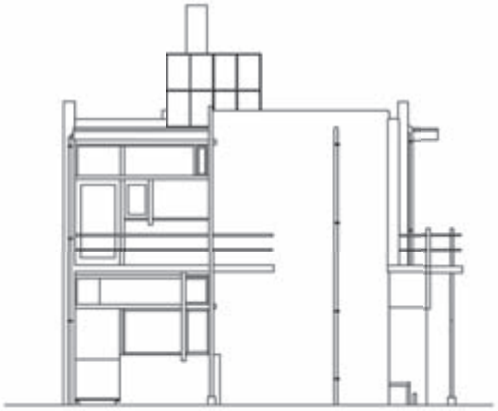


Abb.97.: G.T. Rietveld: Haus Schröder-Schräder, Utrecht 1924; *Süd-West Ansicht aus: Weston, R. (2004)*

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,588	3,46 m	0,10 m	51	1,565-1,620
1,551	3,16 m	0,10 m	51	1,520-1,602

Tab.G.17.: Messserie von der Süd-Ost Fassade (oben) und von der Süd-West Fassade (unten) des Haus Schröder-Schräder[92]

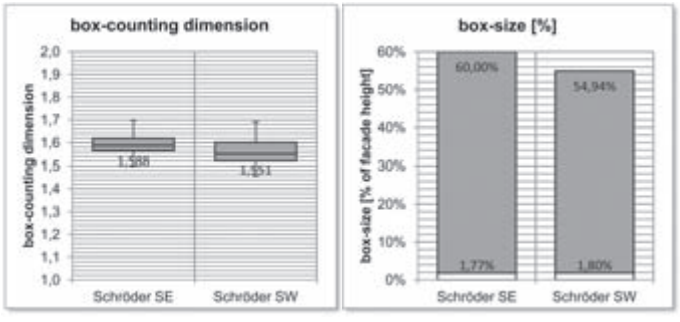


Abb.98.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Süd-Ost und der Süd-West Ansicht des Haus Schröder-Schräder.

92 *Lorenz, W. E. (2012)*

Aus den Ergebnissen lässt sich schließlich ableiten, dass es mit Hilfe der Box-Counting Methode möglich ist, verschiedene Fassaden ein und desselben Gebäudes hinsichtlich einer einheitlichen Charakteristik zu analysieren. Die im Kapitel *E. Fraktal-nahe Architektur/ Haus Schröder-Schräder* zunächst visuell beschriebene Charakterisierung des Gebäudes findet so gleichfalls eine quantitative Bestätigung.

Villa Tugendhat

Eine Analyse der Süd (Garten) Ansicht der im Jahr 1930 fertig gestellten *Villa Tugendhat* von Mies van der Rohe (siehe *Abb.99*) zeigt im doppellogarithmischen Graphen einen konstanten Verlauf der Datenpunkte für Maschenweiten zwischen 2,19 und 0,05 Metern. Das entspricht einem Bereich von 22,08 bis 0,52 Prozent der Fassadenhöhe (vergleiche *Tab.G.18*). Für diese Spanne beträgt der Median 1,38 – bei einem Interquartilsabstand von lediglich 1,40 Prozent – und weist somit im Vergleich zu Robie House oder zu Haus Schröder-Schräder auf eine über weite Strecken geringere Zerklüftung hin.

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,375	2,19 m	0,05 m	46	1,364-1,392

Tab.G.18.: Messserie von der Süd Ansicht der Villa Tugendhat

Abb.99.: Mies van der Rohe: Villa Tugendhat, Brünn 1928-1930; *Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)*

Generell handelt es sich bei der Gartenseite der Villa Tugendhat ähnlich der Villa Savoye und des Haus Steiner um eine glatte Fassade, die in den kleineren Maßstäben entgegen eines fraktalen Charakteristikums im Wesentlichen keine Zunahme an Details verzeichnet. Während jedoch das Haus Steiner selbst bei größeren Maschenweiten mit 5,52 Prozent einen geringen Interquartilsabstand aufweist, besteht bei der Villa Savoye (5,12 Prozent) eine ähnliche und bei der Villa Tugendhat (13,87 Prozent) eine stärkere Varianz bei den in der jeweiligen Messserie berücksichtigten Einzelergebnissen. In allen drei Fällen wiederum übersteigt der Median für die größeren Distanzen zum Gebäude den darauf folgenden Bereich kleinerer Maschenweiten. Allerdings setzt der zweite konstante Bereich geringerer Zerklüftung bei der

Glatt aber konsistent

Villa Tugendhat im Unterschied zum Haus Steiner und der Villa Savoye früher ein und zeugt somit von einem längeren konsistenten Verlauf einer bestimmtem Charakteristik. Eine mögliche Erklärung für die lange Spanne liegt in den vermehrten Vor- und Rücksprüngen der Fassade beziehungsweise in den unterschiedlichen Fensterformaten aber auch in den feingliedrigeren architektonischen Elementen wie den Abdeckungen der Rollläden, den Stufen der Freitreppe oder dem Treppengeländer (siehe *Abb.99*). Eine andere Ursache liegt im Verhältnis zwischen den glatten flächigen Fassadenteilen (exklusive der Glasflächen) und den als Linien gekennzeichneten signifikanten Teilen der Fassade, die sich von jener der Villa Savoye beziehungsweise vom Haus Steiner unterscheidet.

G.6.3. Zusammenhang Boxgrösse und Sehfeld

Für die Auswertung der Daten in Bezug auf die untersuchten Boxgrößen in Relation zum Sehfeld steht in einem Tabellenkalkulationsprogramm das Tabellenblatt *boxplotMeter* zur Verfügung, in dem ausgehend von der jeweiligen Gebäudehöhe gemäß der im Kapitel *G.5. Einflüsse auf die Messergebnisse/Boxgrößen, Planmaßstab und Abstand* angeführten Zusammenhänge sowohl die minimalen Detailgrößen als auch die entsprechenden Boxgrößen berechnet werden. Den Ausgangspunkt dafür bilden die drei unterschiedlichen Distanzen des Betrachters zum Gebäude, die aus der Höhe und einem Augenaufschlagwinkel von 18, 27 beziehungsweise 45 Grad hervorgehen. Die Entfernungen entsprechen dann einem Standort der

- einen Überblick über das Gebäude unter Einbeziehung der Umgebung gibt,
- einen Gesamteindruck des Gebäudes vermittelt beziehungsweise
- Einzelheiten am Gebäude in den Vordergrund stellt.

Ausgehend von diesen Standorten leitet sich dann jeweils die kleinste Maschenweite vom Bereich genauen Sehens ab, das einem Augenaufschlagwinkel von einem Grad gleichkommt. Die größte Maschenweite hängt wiederum von der Komplexität der Komposition selbst ab. Während bei komplexen Kompositionen die Obergrenze für Maschenweiten höchstens ein Viertel oder – sofern die Höhe h der kleineren Seitenlänge l_s entspricht – 7,26 Grad der Gebäudehöhe betragen soll, reicht für weniger komplexe Kompositionen ein Drittel oder 10 Grad (wenn $l_s = h$).[93] Somit resultieren aus den Winkeln 1 Grad, 7,26 Grad (7°16‘) und 10 Grad für jeden einzelnen der drei Standorte jeweils drei Referenzboxgrößen. Im Tabellenkalkulationsprogramm werden nicht nur diese Grenzwerte ermittelt sondern auch deren Über- beziehungsweise Unterschreiten angezeigt. Die minimalen Detailgrößen gehen schließlich aus einem Sehwinkel von 0,1 Grad hervor.

Robie House

Die Abhängigkeit zwischen dem Maßstab des Gitternetzes und jener Anzahl an Boxen, die notwendig ist, um die Komposition vollständig abzudecken, dient als Merkmal einer Fassade und wird durch das Bestimmtheitsmaß R^2 charakterisiert. Je näher dieser Wert bei Eins liegt, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Variablen besteht. Im konkreten Fall einer Einzelmessung wird nun umgekehrt aus einem definitiven Minimum für R^2 und unter der Prämisse, möglichst viele Maßstäbe beginnend bei den größten Maschenweiten abzudecken, der Bereich erhöhter Konsistenz ermittelt. In weiterer Folge resultiert aus sämtlichen gleichgestalteten Analysen einer Fassade die jeweils maximale und minimale Maschenweite einer konkreten Messserie. Im Fall von Robie House etwa betragen diese Grenzwerte infolge von 30 Einzelmessungen 8,58 Meter und 0,47 Meter (vergleiche *Tab.G.19*).

Bestimmt-heitsmaß

	distances:	overview with environment	overview building	single parts	
	eye angles:	18 °	27 °	45 °	
Robie House	distances [m]:	38,19 m	25,46 m	15,27 m	
	minimal size of details:	0,067 m	0,044 m	0,027 m	0,10 °
	box-sizes:	0,67 m	0,44 m	0,27 m	1,00 °
		4,86 m	3,24 m	1,95 m	7,26 °
		6,73 m	4,49 m	2,69 m	10,00 °
Window	distances [m]:	4,98 m	3,32 m	1,99 m	
	minimal size of details:	0,067 m	0,044 m	0,027 m	0,10 °
	box-sizes:	0,09 m	0,06 m	0,03 m	1,00 °
		0,63 m	0,42 m	0,25 m	7,26 °
		0,88 m	0,59 m	0,35 m	10,00 °

Tab.G.19.: Zusammenhang zwischen Entfernung, Maschenweiten und Detailgröße bei Robie House

Die beiden Grenzwerte für Robie House definieren ein Intervall das, wie aus *Tab.G.19* ersichtlich, nicht alle Referenzboxgrößen mit einschließt. Unberücksichtigt bleiben demnach die jeweils dem genauen Sehen entsprechenden Maschenweiten für die aus einem 27 beziehungsweise 45 Grad Augenaufschlagwinkel resultierenden Standorte. Nachdem die Abweichung im ersten Fall minimal ist, kommt es offenbar erst in jenem Bereich zu einer Verflachung der Daten, in dem Einzelheiten am Gebäude im Vordergrund stehen. In diesem spezifischen Maßstabsbereich wechselt der Fokus der Betrachtung vom Überblick des Gebäudes zum Detail der Fassade. Konsequenterweise ändert sich dadurch auch die Auswahl und Darstellung der architektonischen Elemente in dem zu messenden Plan, der nun dem Detailplan eines Fensters entspricht. Die beiden Grenzwerte betragen dann – infolge einer Messserie bestehend aus

93 *Foroutan-pour K. et al. (2000)*, Seite 195

45 Einzelmessungen – 0,68 und 0,10 Meter. Das bedeutet dass lediglich der erste Standort den Bereich genauen Sehens (annähernd) abgedeckt, während die beiden näheren diesen Grenzwert nicht inkludieren. Umgekehrt verhält es sich bei der oberen Grenze. Diese Maschenweite wird nur im Fall der beiden näheren Standorte berücksichtigt (siehe *Tab.G.19*).

Obwohl es sich bei Robie House um eine augenscheinlich komplexe Komposition handelt, übersteigt die maximale Maschenweite selbst wiederum die 10 Grad Grenze. Das ist auf den Umstand zurückzuführen, dass diese in Relation zur Gebäudehöhe steht und es sich bei Robie House um einen die Horizontale betonenden langgestreckten Baukörper handelt.

Analyse der Bereiche

homogener Verlauf

Um im Fall von Robie House sämtliche von der Gebäudehöhe abgeleiteten Maschenweiten abzudecken, kommt es infolge der Detailgröße des Fensterdesigns zu einem Wechsel im Maßstab des Plans (siehe *Tab.G.19*). Als Konsequenz werden zunächst die untersten Bereichsgrenzen ausgespart und erst im Maßstab des Detailplans mit eingeschlossen. Demgegenüber bekundet die Messserie der AEG Turbinenhalle einen homogenen Verlauf der Datenpunkte bis zu einer bereits im Übersichtsplan der Ansicht enthaltenen Detailtiefe (siehe *Tab.G.20*). Das weist auf eine Übereinstimmung des Planmaßstabs, der Detailgröße, der Gebäudehöhe und des zur Messung herangezogenen Bereichs der Maschenweiten (16,80 bis 0,24 Meter) hin. Es werden demnach die abgebildeten Informationen bei jedem der drei betrachteten Standorte jeweils vom Überblick bis zum genauen Sehen erfasst.

	distances:	overview with environment	overview building	single parts	
	eye angles:	18 °	27 °	45 °	
AEG Behrens	distances [m]:	89,85 m	59,90 m	35,94 m	
	minimal size of details:	0,157 m	0,105 m	0,063 m	0,10 °
	box-sizes:	1,57 m	1,05 m	0,63 m	1,00 °
		11,45 m	7,63 m	4,58 m	7,26 °
		15,84 m	10,56 m	6,34 m	10,00 °

Tab.G.20.:Zusammenhang zwischen Entfernung, Maschenweiten und Detailgröße bei der AEG Turbinenhalle

Divergenzen

Eine der AEG Turbinenhalle ähnliche Charakterisierung findet sich auch bei den beiden Fassaden des Haus Schröder-Schräder. Bezüglich der Süd-West Ansicht wird zwar die oberste Grenze des 18° Standortes nicht erreicht, die Differenz zwischen der größten bei der Analyse berücksichtigten Maschenweite, die einen Wert von 3,16 Metern aufweist, und der errechneten maximalen Maschenweite von 3,24 Metern fällt aber nur gering aus. Von dieser minimalen Divergenz abgesehen stimmen die in *Tab.G.21* aufgelisteten theoretischen Bereiche perfekt mit jenen der Messserien (3,46 bis 0,10 Meter beziehungsweise 3,16 bis 0,10 Meter) überein.

	distances:	overview with environment	overview building	single parts	
	eye angles:	18 °	27 °	45 °	
Schröder SE	distances [m]:	18,37 m	12,24 m	7,35 m	
	minimal size of details:	0,032 m	0,021 m	0,013 m	0,10 °
	box-sizes:	0,32 m	0,21 m	0,13 m	1,00 °
		2,34 m	1,56 m	0,94 m	7,26 °
		3,24 m	2,16 m	1,30 m	10,00 °
Schröder SW	distances [m]:	18,32 m	12,21 m	7,33 m	
	minimal size of details:	0,032 m	0,021 m	0,013 m	0,10 °
	box-sizes:	0,32 m	0,21 m	0,13 m	1,00 °
		2,34 m	1,56 m	0,94 m	7,26 °
		3,24 m	2,16 m	1,30 m	10,00 °

Tab.G.21.:Zusammenhang zwischen Entfernung, Maschenweiten und Detailgröße beim Haus Schröder-Schräder

Die Ergebnisse für die Villa Tugendhat, für die Villa Savoye und für das Haus Steiner dokumentieren ein anderes Verhalten. In jedem dieser Gebäude lassen sich beim Übersichtsplan der Ansicht zwei deutlich voneinander abgegrenzte Bereiche unterscheiden. Während die größeren Maschenweiten jeweils zu einer starken Varianz der Daten führen, weisen die aus den drei Standorten abgeleiteten Bereiche des genauen Sehens einen homogenen Verlauf auf. Im Fall des Haus Steiner betragen die Grenzwerte für die beiden Abschnitte 7,98 und 0,87 Meter beziehungsweise 0,87 und 0,10 Meter und teilen somit die berechneten Maschenweiten – für alle drei Standorte – bei einem Augenaufschlagwinkel zwischen 1° und 7,26° (vergleiche *Tab.G.22*).

	distances:	overview with environment	overview building	single parts	
	eye angles:	18 °	27 °	45 °	
Haus Steiner	distances [m]:	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
	minimal size of details:	0,070 m	0,047 m	0,028 m	0,10 °
	box-sizes:	0,70 m	0,47 m	0,28 m	1,00 °
		5,12 m	3,41 m	2,05 m	7,26 °
		7,08 m	4,72 m	2,83 m	10,00 °
closer distance	distances [m]:	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
	minimal size of details:	0,070 m	0,047 m	0,028 m	0,10 °
	box-sizes:	0,70 m	0,47 m	0,28 m	1,00 °
		5,12 m	3,41 m	2,05 m	7,26 °
		7,08 m	4,72 m	2,83 m	10,00 °

Tab.G.22.:Zusammenhang zwischen Entfernung, Maschenweiten und Detailgröße beim Haus Steiner

G.7. Variante des Programmes

In dem aus einer spezifischen Messung mit dem Box-Counting Programm *B50* hervorgehenden doppellogarithmischen Graphen nehmen die Abstände zwischen den einzelnen Datenpunkten in x-Richtung (das entspricht dem Maßstab des jeweiligen Gitternetzes) mit Verringerung der Maschenweiten ab. Die Ursache liegt darin, dass die Differenz der absoluten Größe zweier aufeinander folgender Maschenweiten bei den größeren Gittermaßstäben stärker ausgeprägt ist und somit in diesem Bereich auch zu stärkeren Lücken in den Daten führt. Diesem Umstand wird in einer Variante des Box-Counting Programmes (kurz *STEPS*) Rechnung getragen, wobei die Positionierung des Gitternetzes der ersten Maschenweite zunächst auf gleiche Weise erfolgt wie bisher (siehe *Abb.100*). Der Unterschied liegt in der Verkleinerung der Boxgrößen, die nicht mehr auf einem konstanten Reduktionsfaktor von 50 Prozent und der Verwendung von etwaigen Zwischenschritten basiert, sondern auf einer schrittweisen Addition von Boxen in einer Reihe bei gleichbleibender absoluter Breite des Gitternetzes. Das aus der *minimalen Umgrenzung* hervorgehende und für die Messung *maßgebliche Feld* bleibt somit für alle Boxgrößen gleich und es ändert sich lediglich der Maßstab des Gitternetzes, d.h. die Anzahl der Boxen einer Reihe.

Box-Counting Programm *STEPS*

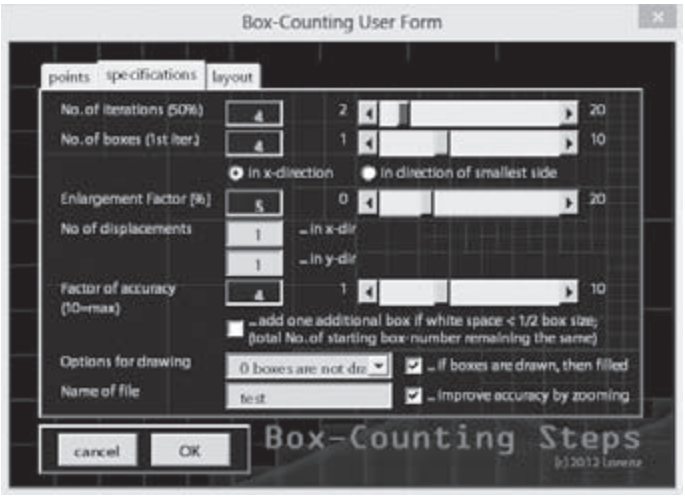


Abb.100.: Eingabemaske zur Spezifizierung der verschiedenen Parameter (*STEPS*)

Der Faktor, mit dem sich die Anzahl der Boxen einer Reihe von einem Maßstab zum nächsten erhöht, wird durch die Angabe der Präzision bestimmt. Diese reicht von 1 (sehr hoch) bis 10 (niedrig). Beträgt die Anzahl an Iterationen beim bisher vorgestellten Programm etwa 7, so sind es für dasselbe Intervall bei einer Präzision von Eins immerhin 49.

Villa Savoye

Die Untersuchungen mit dem Box-Counting Programm *B50* haben für die Villa Savoye zwei deutlich voneinander getrennte Bereiche ergeben (vergleiche *G.6.2. Messergebnisse/Villa Savoye*). Eine Reduktion des Verkleinerungsfaktors zwischen den einzelnen Boxgrößen unterschiedlicher Gittermaßstäbe unter Anwendung des Box-Counting Programmes *STEPS* bestätigen dieses Resultat und zeigen eine annähernde Übereinstimmung der jeweiligen Grenzwerte. So erstreckt sich nunmehr der erste Bereich von 4,15 Metern bis 0,56 Meter, während es bei einem Reduktionsfaktor von 50 Prozent 4,52 und 0,52 Meter sind (vergleiche zweite Messserie *G.6.2. Messergebnisse/Villa Savoye*). Im Fall des zweiten Bereichs stimmen die Grenzwerte mit jeweils 0,60 bis 0,15 Meter sogar vollständig überein. Auch die Mediane sind ähnlich, so betragen diese für den ersten Bereich 1,605 beziehungsweise 1,599 und für den zweiten 1,312 beziehungsweise 1,277 (siehe *Abb.101*).

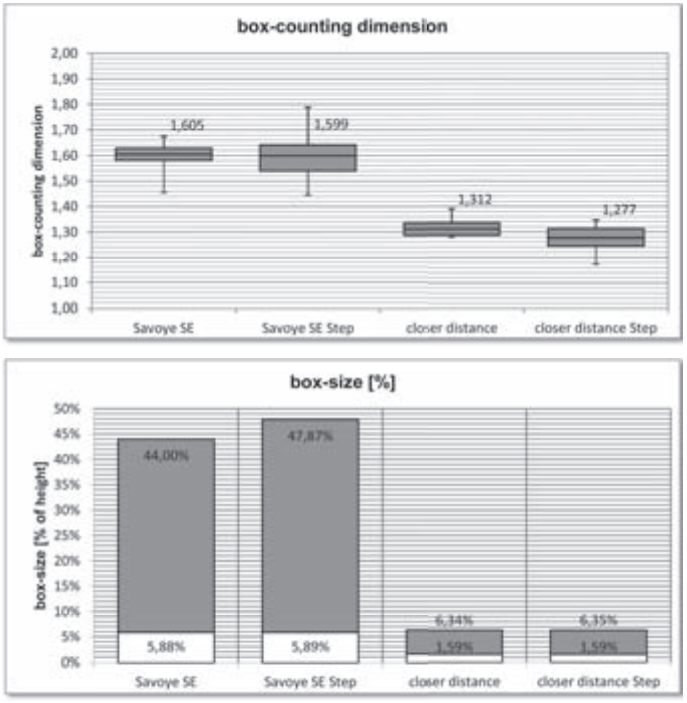


Abb.101.: Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem VBA Box-Counting Programm *B50* (jeweils erster Wert) und *STEPS* (jeweils zweiter Wert) der beiden Intervalle der Villa Savoye;
oben: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen
unten: Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe).

Robie House

Infolge einer feineren Maßstabsänderung zwischen den unterschiedlichen Gitternetzen einer Messserie, die durch eine schrittweise Zunahme der Anzahl an Boxen der untersten Reihe erreicht wird, beträgt der minimale Interquartilsabstand – als Maß der

Robie House mit *STEPS*

Streuung der Datenpunkte – 0,008 (0,41%) und liegt somit deutlich unter 0,066 (3,30%), was jenem Wert entspricht,der aus einem Reduktionsfaktor gleich 50 Prozent resultiert. Folglich weisen die Box-Counting Dimensionen aus den einzelnen Messungen nunmehr eine geringere Varianz auf. Gleichzeitig steigt das minimale Bestimmtheitsmaß von 0,995 auf 0,998, was seinerseits auf eine insgesamt geringere Varianz der Datenpunkte innerhalb der einzelnen Messungen hindeutet. Der Unterschied zwischen den Medianen der beiden Serien fällt wiederum mit 1,35 Prozent gering aus. Dabei beträgt jener infolge einer Messserie mit dem Box-Counting Programm *B50* 1,680 und jener als Resultat aus dem Box-Counting Programm *STEPS* 1,707 (siehe *Tab.G.23* und *Abb.102*, *Seite 142*).

Median (D_B)	Boxgröße		Anzahl der Messungen	Interquartils-abstand
	von	bis		
1,680	8,58 m	0,47 m	30	1,634-1,700
1,707	8,58 m	0,45 m	14	1,703-1,712

Tab.G.23.: Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem Box-Counting Programm *B50* (oben) und *STEPS* (unten) anhand der Straßenfassade des Robie House

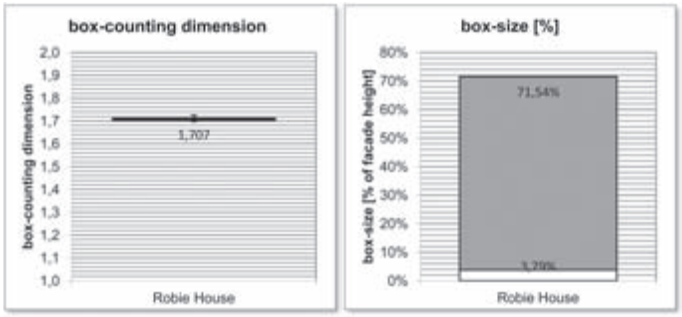


Abb.102.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) unter Verwendung von *STEPS* für die Straßenfassade des Robie House.

G.7.1. Standorte

Eine Analyse der Daten getrennt nach den drei in *G.4. Entfernung und Sehfeld/Der Abstand und das Detail* beschriebenen Entfernungen zum Gebäude geben einen weiteren Aufschluss über die Kohärenz der architektonischen Elemente einer Fassade. Dabei werden für jeden Standort sämtliche Augenaufschlagwinkel betrachtet, die vom genauen Sehen bis zum gerade noch Erkennbaren reichen (vergleiche *Tab.G.19*).

Betrachtung infolge der Distanzen

Robie House und Haus Schröder-Schräder

Eine nach den drei Standorten getrennte und mit dem Box-Counting Programm *STEPS*, das heißt der Variante des Box-Counting Programmes *B50*, durchgeführte Analyse von Robie House weist für die ersten beiden die Übersicht betreffenden Distanzen ein ähnliches Resultat auf. Tatsächlich unterscheiden sich die Mediane mit 1,72 beziehungsweise 1,69 lediglich um 1,45 Prozent (siehe *Abb.103*).[94] Bei der dritten und geringsten Distanz zum Gebäude sinkt der Median schließlich auf 1,62, was den Übergang auf den Detailplan des Fensters signalisiert. Ein ähnliches Bild bietet sich auch bei der Süd-Ost Fassade des Haus Schröder-Schräder. Erneut liegen die ersten beiden Mediane mit 1,65 und 1,62 über dem am nächsten gelegenen Standort, der einen Wert von 1,54 aufweist.

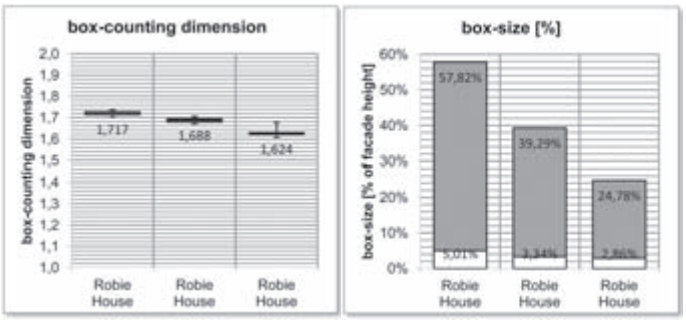


Abb.103.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich verschiedener Standorte für Robie House.

Die mit der Verkleinerung der Distanz abnehmenden Mediane spiegeln den Aufbau der analysierten Pläne wider. Diese bestehen bei genauer Betrachtung aus einzelnen eindimensionalen Kurven. Konsequenterweise werden ab einer bestimmten, dem Maßstab des Gitternetzes entsprechenden Auflösung auch nicht mehr die Repräsentation der architektonischen Elemente sondern die Linien, aus denen sich deren Darstellung am Plan zusammensetzt, analysiert. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Mediane dem Wert Eins annähern, ist somit ein Indikator dafür, wie lange die architektonischen Elemente im Vordergrund stehen, beziehungsweise zu welchem Zeitpunkt die Linien des Planes als solche wahrgenommen werden.

94 Die Basis für die Berechnung beträgt 2, nachdem die analysierte Struktur zwischen 0 und 2 liegen kann.

G.8. Conclusio

Bei der Betrachtung eines Gebäudes unter dem Blickwinkel der fraktalen Geometrie handelt es sich um dessen Untersuchung in Hinblick auf den Einklang zwischen dem Ganzen und seiner Bestandteile. Die fraktale Eigenschaft der Selbstähnlichkeit ist dabei das Produkt aus der Kontinuität eines zugrunde liegenden Konzepts, das sowohl die Fassade als auch die Raumfolge umfasst und sich von den größeren architektonischen Elementen bis zum kleinsten Detail fortsetzt. Als Messinstrument einer solchen Charakteristik eignet sich speziell für Ansichten die sogenannte Box-Counting Methode, die allerdings nicht die Selbstähnlichkeit misst, sondern als Ergebnis den Grad der Zerklüftung angibt. Der Verlauf der Datenpunkte im doppellogarithmischen Graphen lässt wiederum Rückschlüsse auf die Konstanz (über verschiedene Maßstabsebenen) dieser Zerklüftung zu. Als Ergänzung dient die *Range-Analysis* zur Analyse eines Planungsrhythmus, wie er etwa bei Grundrissen anzutreffen ist.

Methoden zur Messung

G.8.1. Die Analyse von Fassaden

Für die Messung einer Fassade mittels der Box-Counting Methode wird zunächst ein Plan herangezogen, auf dem gemäß einem ersten Überblick lediglich die bestimmenden Elemente, wie Umriss, Öffnungen und markante Vor- und Rücksprünge dargestellt sind. Analog einer Annäherung an das betrachtete Gebäude, wonach immer kleinere Details hervortreten, ändert sich dann abhängig vom Standpunkt nicht nur die Boxgröße sondern auch der Inhalt des Planes durch die Berücksichtigung immer feinerer Einzelheiten, die bis zur Türklinke reichen (siehe Fensterdetail im Fall von Robie House).

Eine Ausgewogenheit der Charakteristik im Sinne einer ähnlichen Komplexität von einem Maßstab der Betrachtung zum nächsten lässt sich als Ergebnis der Box-Counting Methode durch jenen Bereich des doppellogarithmischen Graphen mit $\log(N)$ versus $\log(1/s)$ erkennen, in dem die Datenpunkte einem Trend folgen, das heißt, im Wesentlichen auf einer Linie liegen. Ein solcher Zusammenhang zwischen den relevanten Teilen einer Fassade, ausgedrückt durch die Summe jener Boxen N, die diese abdecken, und der reziproken Skalierung $1/s$, resultiert aus der Präsenz von architektonischen Elementen unterschiedlicher Größenordnung, die darüber hinaus eine ähnliche Komplexität aufweisen. Die kleinste Skalierung als untere Schranke des als konsistent bezeichneten Bereiches ist dabei durch jenen Punkt gekennzeichnet, an dem der Feinheitsgrad der eindimensionalen Linien eines Planes überwiegt und sich folglich die Datenkurve einer Steigung von 45 Grad annähert. Aus der Höhe der Box-Counting-Dimension, als Steigung der Regressionsgeraden, folgt wiederum der Grad der Komplexität des betrachteten Bereichs. Dieser ist für die Kohärenz eines Gebäudes aber nicht ausschlaggebend, sondern lediglich die Kontinuität vom Großen zum Kleinen.

die Bewertung des Graphen

G.8.2. Die Auswertung der Daten

Konsequenz der Form

Verschiedene Messungen von Fassaden verdeutlichen, dass jener Bereich, der Kohärenz signalisiert, bei Beispielen des *International Styles* auf wenige Schritte beschränkt bleibt oder einen Knickpunkt aufweist, während er bei der sogenannten organischen Architektur eines Frank Lloyd Wright bis zum Maßstab der Glasfenster reicht. In diesem Zusammenhang gilt:

- Je geringer die Datenpunkte von der Regressionsgeraden (linearen Ersatzgeraden) abweichen, desto konsistenter ist die charakteristische Zerklüftung. Als Maß der Kohärenz dient dabei die Standardabweichung.
- Der lineare Verlauf der Datenkurve geht aus einer statistischen oder strikten Selbst-Ähnlichkeit mit einer hierarchischen Verzweigung der Einzelteile (siehe *Abb.104*) hervor und bleibt bei Fassaden auf einen bestimmten Maßstabsbereich beschränkt.

Abb.104.: Koch Kurve nach drei Iterationen mit hierarchischer Verzweigung der Teile jeder Iteration

- Aus dem doppellogarithmischen Graphen lässt sich ablesen, über wie viele Maßstäbe ein linearer Zusammenhang zwischen N und $1/s$ besteht, und daraus abgeleitet, für welches Intervall die Anzahl der architektonischen Elemente mit Verringerung des Maßstabs (als Ausdruck der Verteilung der Linien auf einem Plan) zunimmt. In den beiden Grafiken der *Abb.105* (*Seite 144*), die aus einer Messung eines Kreises beziehungsweise aus der Ansicht des AEG Turbinenhaus resultieren, ist ein solcher Abschnitt entsprechend hervorgehoben. Bei den Graphen handelt es sich jeweils um das Ergebnis aus einer einzelnen

Messung. Die Steigung der Regressionsgeraden ergibt für den Kreis $D_B=1{,}00$ und für die Ansicht $D_B=1{,}67$.

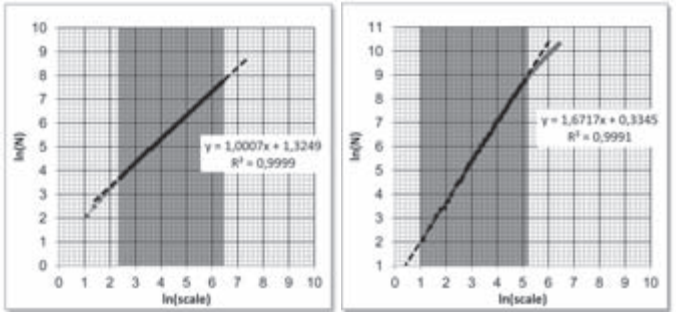


Abb.105.: Gegenüberstellung der doppellogarithmischen Graphen als Ergebnis der Messung eines Kreises (links) und der Ansicht der AEG Turbinenhalle (rechts)

- Besteht die Selbst-Ähnlichkeit von der Übersicht bis zum kleinsten Detail, so bleibt das Gebäude bei der Annäherung des Betrachters über mehrere Ebenen interessant, sofern die einzelnen architektonischen Elemente durch eine gemeinsame Idee, das *Leitmotiv* miteinander verbunden sind. Andernfalls kommt es zur Konfusion.
- In der Architektur liegt die Herausforderung in der Ausgewogenheit zwischen Glätte, Komplexität und Überraschung, deren Maß sich aus dem Verlauf der Datenpunkte im doppellogarithmischen Graphen ablesen lässt (Höhe der Box-Counting-Dimension und Anzahl der Maßstabsebenen).
- Das Fehlen von architektonischen Elementen, die das Ganze im kleinen Maßstab widerspiegeln, führt zu einer schnelleren Annäherung der Datenkurve an eine Steigung von 45 Grad und damit zur Abnahme der Box-Counting-Dimension (Annäherung an den Wert 1).
- Die Höhe der Box-Counting-Dimension lässt keinen Rückschluss auf die Form oder die Qualität des betrachteten Gebäudes zu.

Der Vergleich von Fassaden

Bei einem Vergleich von Fassaden verschiedener Gebäude bedarf es schließlich neben der Angabe des Wertebereichs und der Box-Counting-Dimension (beziehungsweise des Medians der Messserie) auch des Hinweises auf das zur Messung herangezogene Computer-Programm, die Anführung des Maßstabs und, davon abhängig, die Definition des dargestellten Inhalts des Planes, die Bekanntgabe der Quelle und die Auflistung der für die Messung relevanten Parameter, etwa dem Bereich der Maschenweiten und dem Reduktionsfaktor.

Infolge der Box-Counting Methode lassen sich schließlich die analysierten Fassaden im Wesentlichen drei Gruppen zuordnen:

- Existiert eine ähnliche Komplexität vom Ganzen bis zum kleinsten Bestandteil, so zeigt sich im doppellogarithmischen Graphen ein über mehrere Maßstäbe anhaltender Trend und es besteht infolge einer selbstähnlichen Charakteristik der Zerklüftung eine Affinität zur fraktalen Geometrie.
- Nähert sich hingegen die Datenkurve bereits nach wenigen Iterationen einer Steigung von 45 Grad an, das heißt, strebt die Box-Counting-Dimension rasch gegen Eins, existiert vielmehr eine Verwandtschaft zur glatten euklidischen Geometrie.
- Die dritte Gruppe umfasst schließlich jene Gebäude, bei denen die Datenpunkte deutlich von der Regressionskurve abweichen und infolgedessen in ihrer Komplexität starke Maßstabssprünge verzeichnen.

Anhang

Ergebnisse der Messserien

Referenzobjekte

	50B	*50B*	*50B*
name	Koch Kurve 8 Iterations	Minkowski Kurve 7 Iterations	Sierpinski Dreieck 8 Iterations
number of files	16	13	10
max	1,294	1,511	1,587
3rd quartile	1,286	1,495	1,583
median	1,271	1,481	1,572
1st quartile	1,248	1,461	1,561
min	1,243	1,450	1,545
calculated D_S	1,262	1,500	1,585
deviation [%] (average/median)	0,69 %	-1,30 %	-0,85 %

Anhang 1.: Ergebnisse der Messungen von Referenzobjekten mit bekannten Selbstähnlichkeitsdimensionen

Messergebnisse der analysierten Ansichten

Auf den nachfolgenden Seiten werden der Übersicht halber sämtliche in diesem Kapitel angeführten Beispiele nochmals in Form von Datenblättern aufgelistet. Die jeweils erste Tabelle gibt einen Überblick über die Messergebnisse (das ist im wesentlichen der minimale und maximale Wert, die erste und die dritte Quartil und der Median), während die beiden folgenden Tabellen die Abhängigkeit zwischen Augenaufschlagswinkel, Distanz und Maschenweite jeweils für das Box-Counting Programm *B50* und *STEPS* aufzeigen (dabei sind jene Maschenweiten, die durch den Bereich hoher Konstanz nicht abgedeckt werden, mit einer dunkleren Zellenfärbung versehen). Die Ergebnisse werden schließlich in den Abbildungen als Box-Plot Diagramme beziehungsweise als Blockdiagramme grafisch dargestellt.

Villa Savoye, Süd-Ost Ansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	Savoye SE		closer distance	
number of files	46	14	46	14
max	1,730	1,680	1,381	1,399
3rd quartile	1,642	1,629	1,313	1,336
median	1,599	1,605	1,277	1,312
1st quartile	1,540	1,580	1,244	1,287
min	1,479	1,503	1,142	1,242
elevation width	19,2 m	19,2 m	19,2 m	19,2 m
average values	1,598	1,606	1,281	1,313
deviation [%] (average/median)	0,07 %	-0,06 %	-0,36 %	-0,04 %
average 'R²'	0,993	0,995	0,991	0,992
min 'R²'	0,980	0,994	0,948	0,980

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

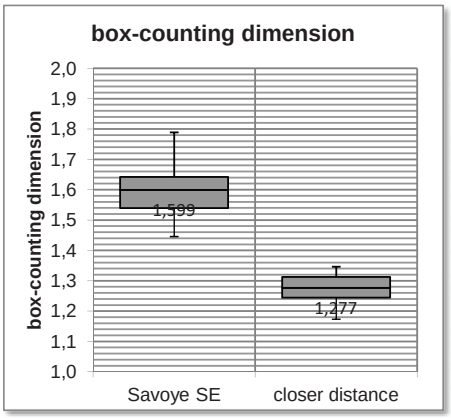
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

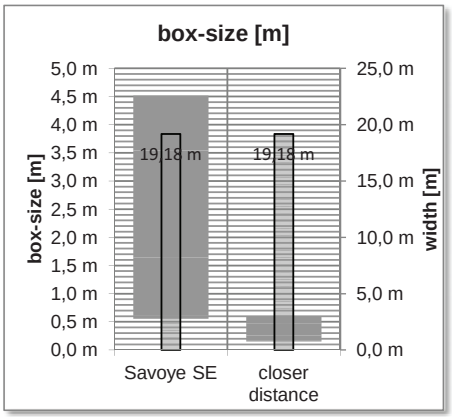
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

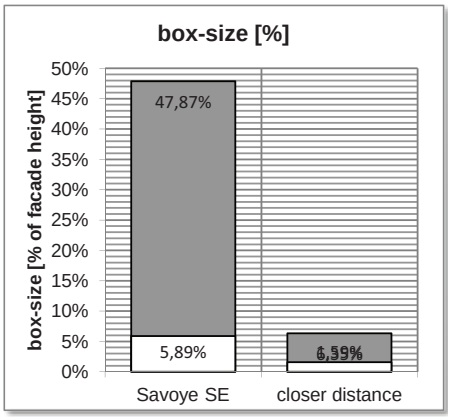
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

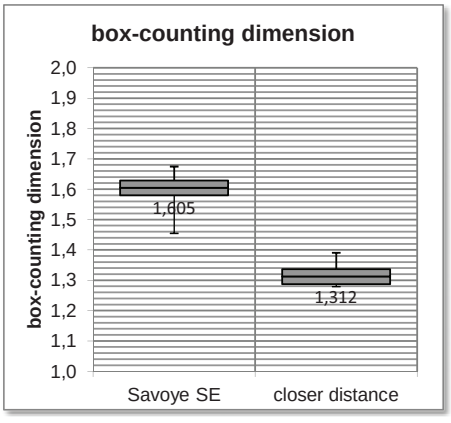
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,44 m
	Savoye SE			
distances	30,04 m	20,02 m	12,01 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	4,52 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,56 m
	closer distance			
distances	30,04 m	20,02 m	12,01 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	0,60 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,15 m

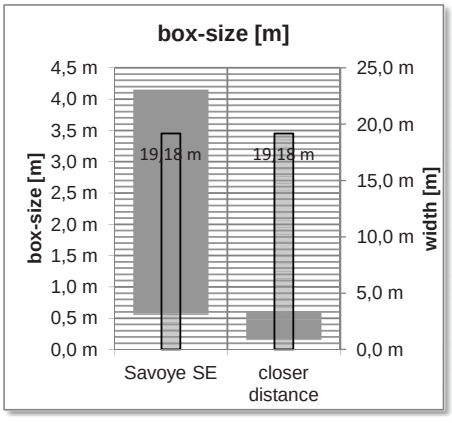
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,44 m
	Savoye SE			
distances	30,04 m	20,02 m	12,01 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	4,15 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,56 m
	closer distance			
distances	30,04 m	20,02 m	12,01 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	0,60 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,15 m

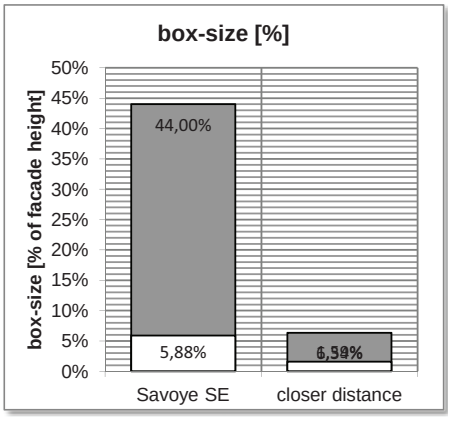












Villa Savoye, Süd-Ost Ansicht, Erd- und Obergeschoss

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	ground floor		upper floor	
number of files	46	14	46	14
max	1,800	1,628	1,302	1,236
3rd quartile	1,646	1,612	1,198	1,224
median	1,600	1,606	1,168	1,192
1st quartile	1,570	1,594	1,143	1,177
min	1,497	1,540	1,113	1,170
elevation width	19,2 m	19,2 m	19,2 m	19,2 m
average values	1,615	1,599	1,177	1,198
deviation [%] (average/median)	-0,94 %	0,44 %	-0,73 %	-0,50 %
average 'R^2'	0,990	0,994	0,994	0,989
min 'R^2'	0,955	0,990	0,971	0,964

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

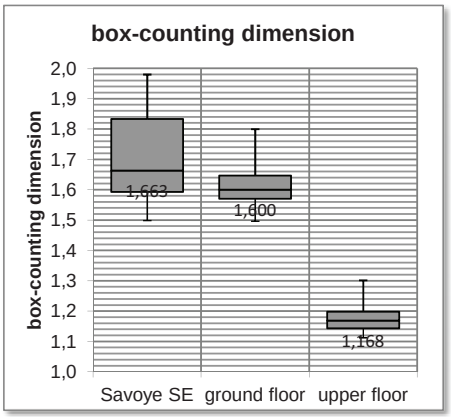
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

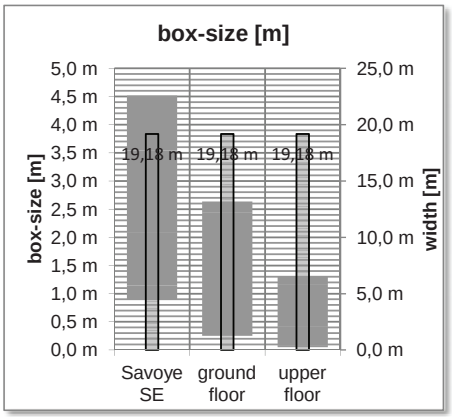
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

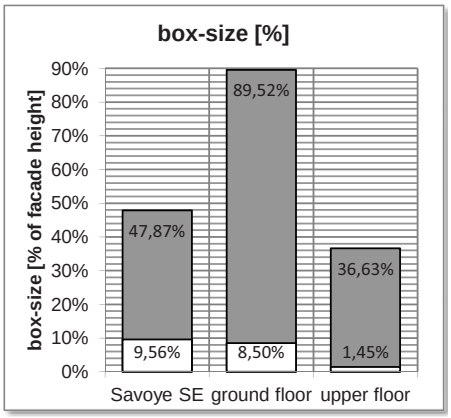
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

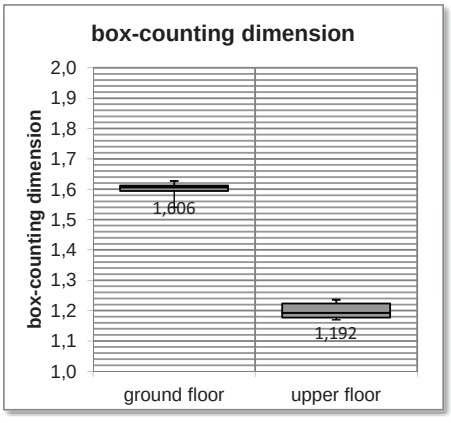
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,44 m
	ground floor			
distances	9,38 m	6,25 m	3,75 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	2,64 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,25 m
	upper floor			
distances	11,28 m	7,52 m	4,51 m	
min. size of details	0,052 m	0,035 m	0,021 m	box-sizes from
box-sizes	0,52 m	0,35 m	0,21 m	1,30 m
	3,83 m	2,55 m	1,53 m	to
	5,30 m	3,53 m	2,12 m	0,05 m

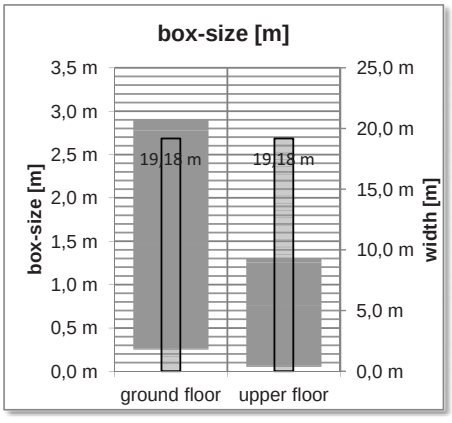
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,44 m
	ground floor			
distances	9,38 m	6,25 m	3,75 m	
min. size of details	0,016 m	0,011 m	0,007 m	box-sizes from
box-sizes	0,16 m	0,11 m	0,07 m	2,90 m
	1,19 m	0,80 m	0,48 m	to
	1,65 m	1,10 m	0,66 m	0,25 m
	upper floor			
distances	11,28 m	7,52 m	4,51 m	
min. size of details	0,016 m	0,011 m	0,007 m	box-sizes from
box-sizes	0,16 m	0,11 m	0,07 m	1,30 m
	1,19 m	0,80 m	0,48 m	to
	1,65 m	1,10 m	0,66 m	0,05 m

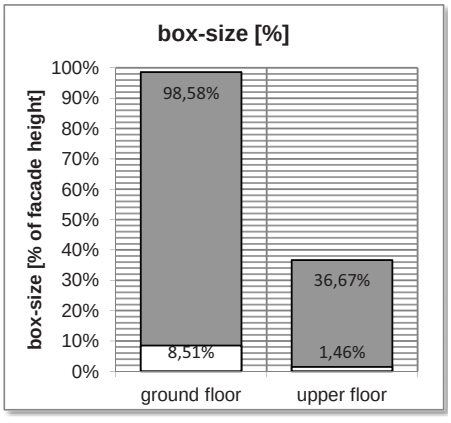












Robie House, Strassenansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	Robie House		Window	
number of files	30	14	45	14
max	1,736	1,725	1,939	1,806
3rd quartile	1,700	1,712	1,724	1,772
median	1,680	1,707	1,661	1,751
1st quartile	1,634	1,703	1,595	1,729
min	1,534	1,697	1,356	1,663
elevation width	58,9 m	58,9 m	1,1 m	1,1 m
average values	1,668	1,708	1,651	1,746
deviation [%] (average/median)	0,76 %	-0,06 %	0,59 %	0,27 %
average 'R²'	0,998	0,998	0,994	0,996
min 'R²'	0,995	0,998	0,957	0,992

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

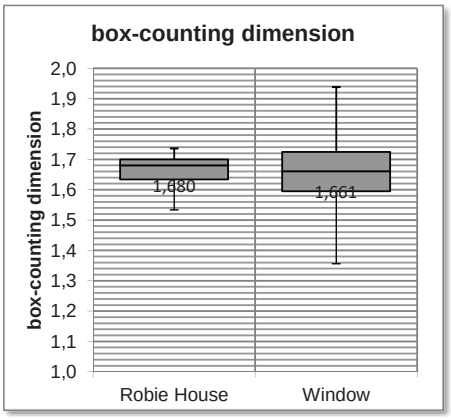
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

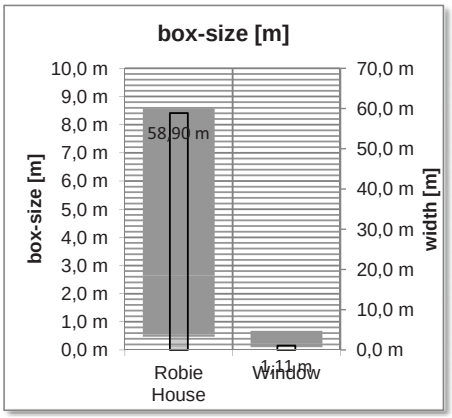
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

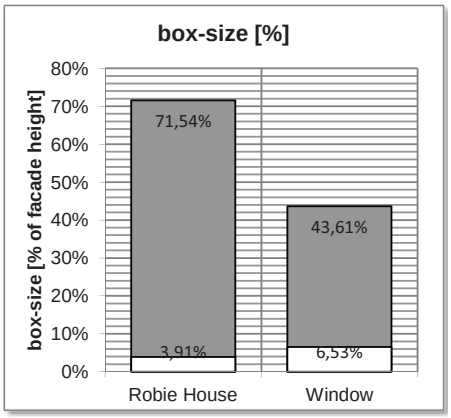
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

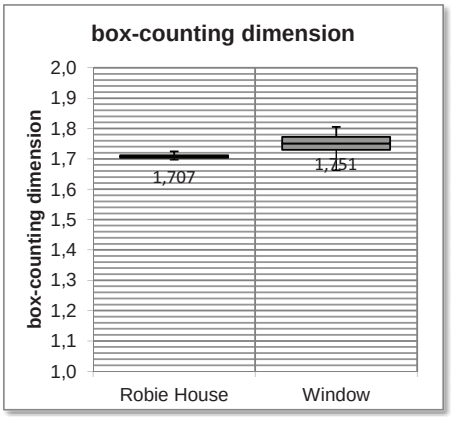
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	12,00 m
	Robie House			
distances	38,19 m	25,46 m	15,27 m	
min. size of details	0,067 m	0,044 m	0,027 m	box-sizes from
box-sizes	0,67 m	0,44 m	0,27 m	8,58 m
	4,86 m	3,24 m	1,95 m	to
	6,73 m	4,49 m	2,69 m	0,47 m
	Window			
distances	0,067 m	0,044 m	0,027 m	
min. size of details	0,67 m	0,44 m	0,27 m	box-sizes from
box-sizes	4,86 m	3,24 m	1,95 m	0,68 m
	6,73 m	4,49 m	2,69 m	to
	6,73 m	4,49 m	2,69 m	0,10 m

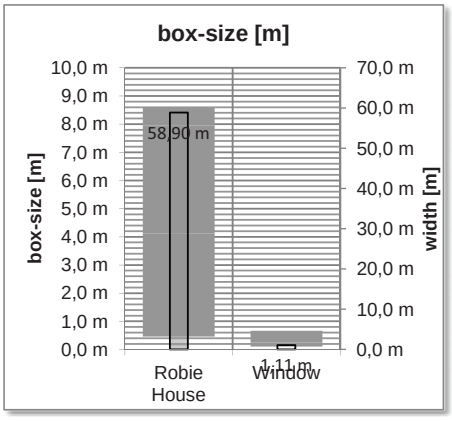
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	12,00 m
	Robie House			
distances	38,19 m	25,46 m	15,27 m	
min. size of details	0,067 m	0,044 m	0,027 m	box-sizes from
box-sizes	0,67 m	0,44 m	0,27 m	8,58 m
	4,86 m	3,24 m	1,95 m	to
	6,73 m	4,49 m	2,69 m	0,45 m
	Window			
distances	4,98 m	3,32 m	1,99 m	
min. size of details	0,067 m	0,044 m	0,027 m	box-sizes from
box-sizes	0,67 m	0,44 m	0,27 m	0,67 m
	4,86 m	3,24 m	1,95 m	to
	6,73 m	4,49 m	2,69 m	0,10 m

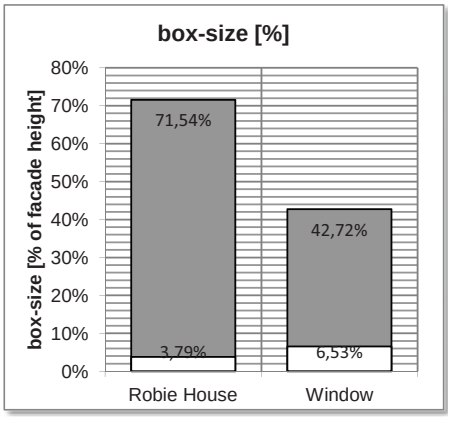












Robie House, Strassenansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	AEG Behrens			
number of files	46	14		
max	1,762	1,718		
3rd quartile	1,731	1,715		
median	1,705	1,691		
1st quartile	1,691	1,676		
min	1,637	1,664		
elevation width	39,5 m	39,5 m		
average values	1,708	1,694		
deviation [%] (average/median)	-0,14 %	-0,16 %		
average 'R²'	0,998	0,999		
min 'R²'	0,989	0,999		

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

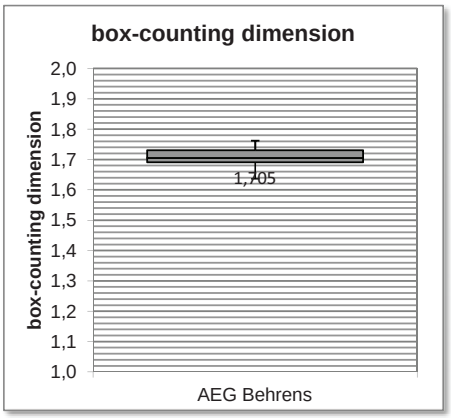
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

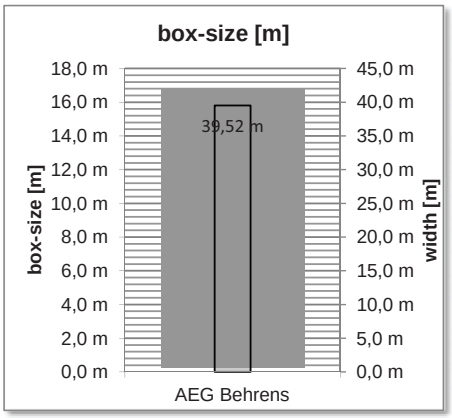
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

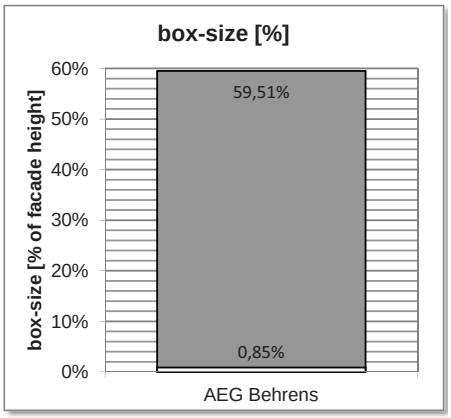
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

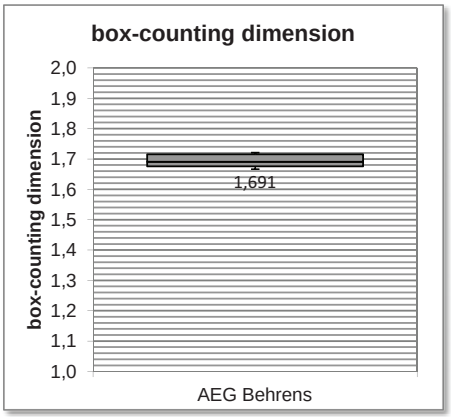
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	28,23 m
	AEG Behrens			
distances	89,85 m	59,90 m	35,94 m	
min. size of details	0,157 m	0,105 m	0,063 m	box-sizes from
box-sizes	1,57 m	1,05 m	0,63 m	16,80 m
	11,45 m	7,63 m	4,58 m	to
	15,84 m	10,56 m	6,34 m	0,24 m

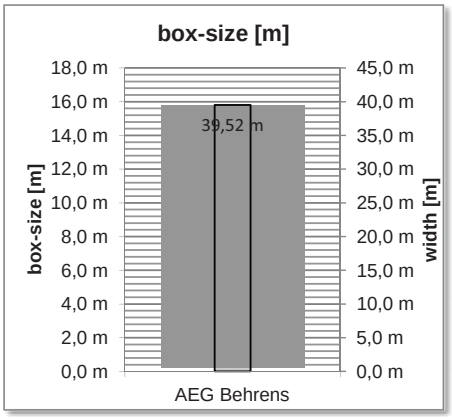
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	28,23 m
	AEG Behrens			
distances	89,85 m	59,90 m	35,94 m	
min. size of details	0,157 m	0,105 m	0,063 m	box-sizes from
box-sizes	1,57 m	1,05 m	0,63 m	15,81 m
	11,45 m	7,63 m	4,58 m	to
	15,84 m	10,56 m	6,34 m	0,25 m

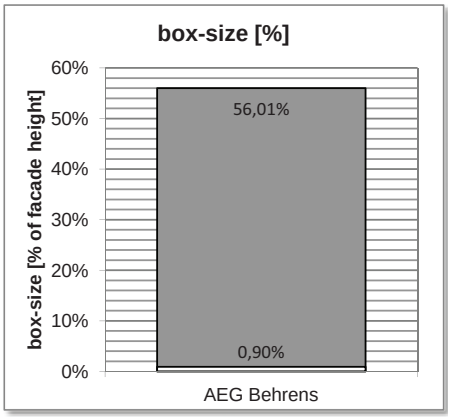












Haus Steiner, Garten-Ansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	Haus Steiner		closer distance	
number of files	43	14	43	14
max	1,804	1,749	1,292	1,266
3rd quartile	1,734	1,705	1,255	1,257
median	1,679	1,693	1,243	1,250
1st quartile	1,611	1,679	1,232	1,245
min	1,546	1,647	1,175	1,217
elevation width	14,5 m	14,5 m	14,5 m	14,5 m
average values	1,674	1,693	1,242	1,247
deviation [%] (average/median)	0,27 %	0,00 %	0,06 %	0,23 %
average 'R²'	0,993	0,996	0,994	0,998
min 'R²'	0,970	0,994	0,973	0,995

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

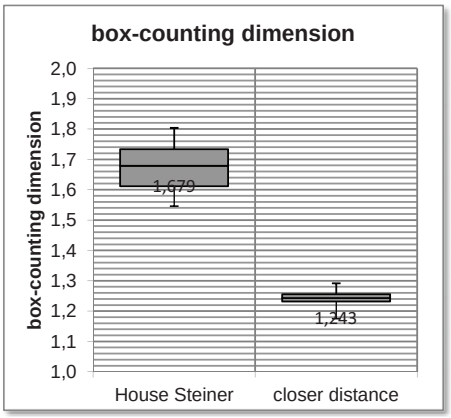
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

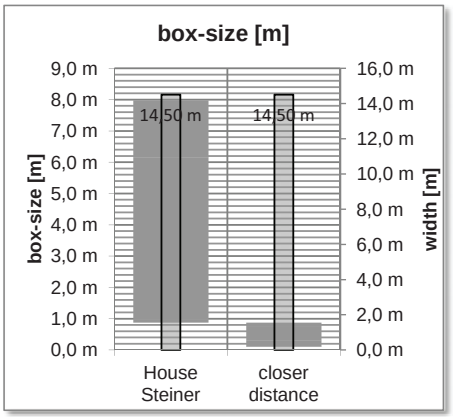
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

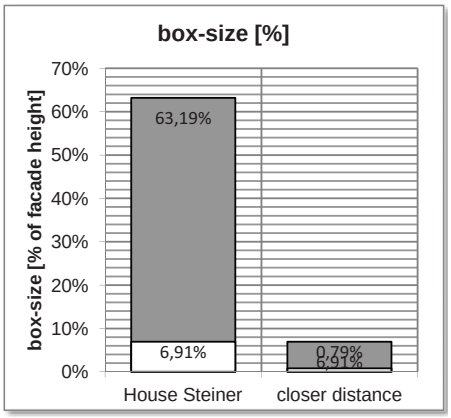
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

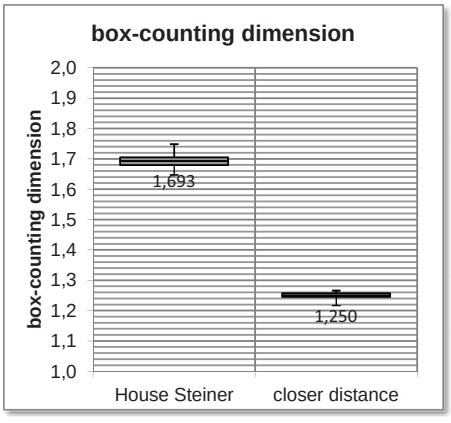
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	12,62 m
	Haus Steiner			
distances	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
min. size of details	0,070 m	0,047 m	0,028 m	box-sizes from
box-sizes	0,70 m	0,47 m	0,28 m	7,98 m
	5,12 m	3,41 m	2,05 m	to
	7,08 m	4,72 m	2,83 m	0,87 m
	closer distance			
distances	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
min. size of details	0,070 m	0,047 m	0,028 m	box-sizes from
box-sizes	0,70 m	0,47 m	0,28 m	0,87 m
	5,12 m	3,41 m	2,05 m	to
	7,08 m	4,72 m	2,83 m	0,10 m

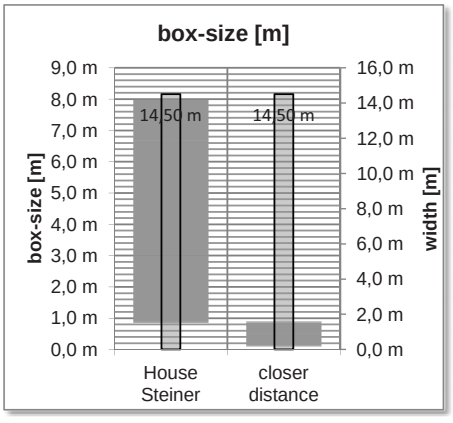
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	12,62 m
	Haus Steiner			
distances	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
min. size of details	0,070 m	0,047 m	0,028 m	box-sizes from
box-sizes	0,70 m	0,47 m	0,28 m	7,98 m
	5,12 m	3,41 m	2,05 m	to
	7,08 m	4,72 m	2,83 m	0,85 m
	closer distance			
distances	40,17 m	26,78 m	16,07 m	
min. size of details	0,070 m	0,047 m	0,028 m	box-sizes from
box-sizes	0,70 m	0,47 m	0,28 m	0,90 m
	5,12 m	3,41 m	2,05 m	to
	7,08 m	4,72 m	2,83 m	0,10 m

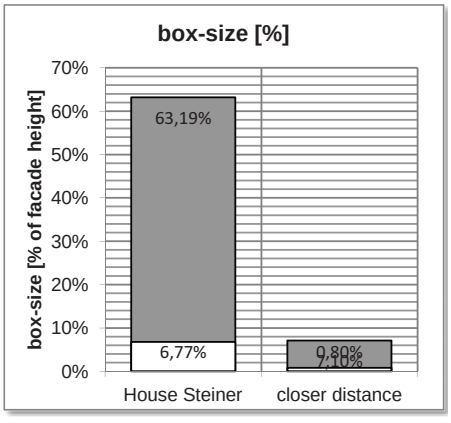












Haus Schröder-Schräder, Süd-Ost und Süd-West Ansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	Haus Schröder SE		Haus Schröder SW	
number of files	51	14	51	14
max	1,698	1,637	1,692	1,628
3rd quartile	1,620	1,600	1,602	1,589
median	1,588	1,579	1,551	1,571
1st quartile	1,565	1,569	1,520	1,544
min	1,498	1,522	1,457	1,485
elevation width	8,6 m	8,6 m	5,7 m	5,7 m
average values	1,594	1,582	1,569	1,563
deviation [%] (average/median)	-0,36 %	-0,23 %	-1,13 %	0,50 %
average 'R^2'	0,997	0,998	0,997	0,997
min 'R^2'	0,989	0,997	0,993	0,995

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

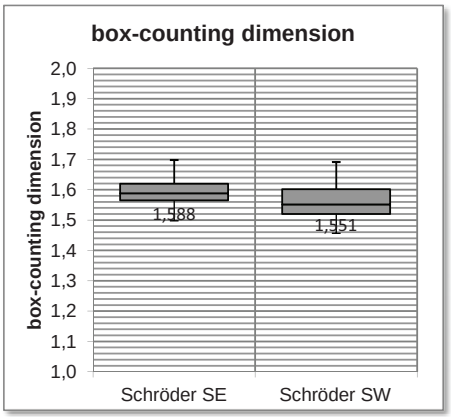
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

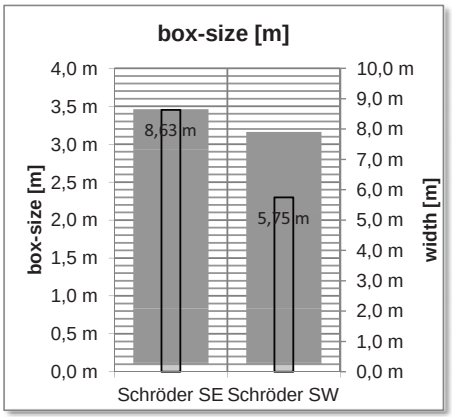
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

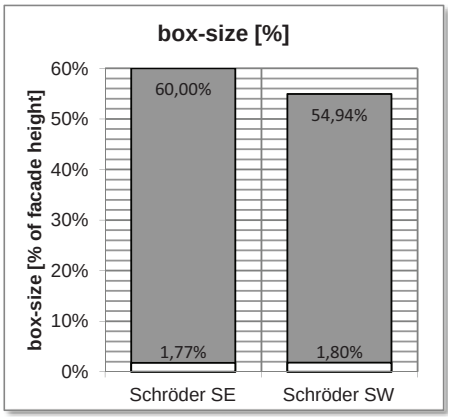
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

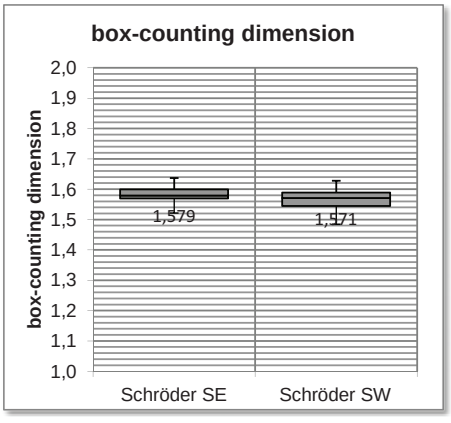
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	5,77 m
	Haus Schröder SE			
distances	18,37 m	12,24 m	7,35 m	
min. size of details	0,032 m	0,021 m	0,013 m	box-sizes from
box-sizes	0,32 m	0,21 m	0,13 m	3,46 m
	2,34 m	1,56 m	0,94 m	to
	3,24 m	2,16 m	1,30 m	0,10 m
	Haus Schröder SW			
distances	18,32 m	12,21 m	7,33 m	
min. size of details	0,032 m	0,021 m	0,013 m	box-sizes from
box-sizes	0,32 m	0,21 m	0,13 m	3,16 m
	2,34 m	1,56 m	0,94 m	to
	3,24 m	2,16 m	1,30 m	0,10 m

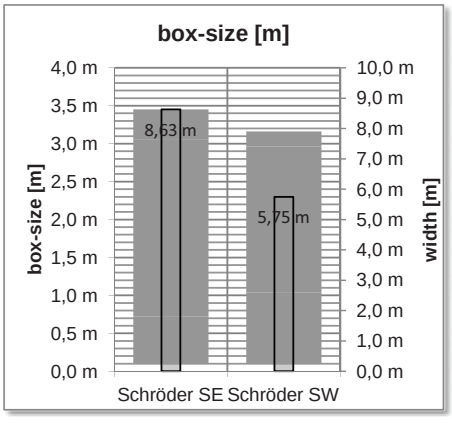
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	5,77 m
	Haus Schröder SE			
distances	18,37 m	12,24 m	7,35 m	
min. size of details	0,032 m	0,021 m	0,013 m	box-sizes from
box-sizes	0,32 m	0,21 m	0,13 m	3,45 m
	2,34 m	1,56 m	0,94 m	to
	3,24 m	2,16 m	1,30 m	0,10 m
	Haus Schröder SW			
distances	18,32 m	12,21 m	7,33 m	
min. size of details	0,032 m	0,021 m	0,013 m	box-sizes from
box-sizes	0,32 m	0,21 m	0,13 m	3,16 m
	2,34 m	1,56 m	0,94 m	to
	3,24 m	2,16 m	1,30 m	0,10 m

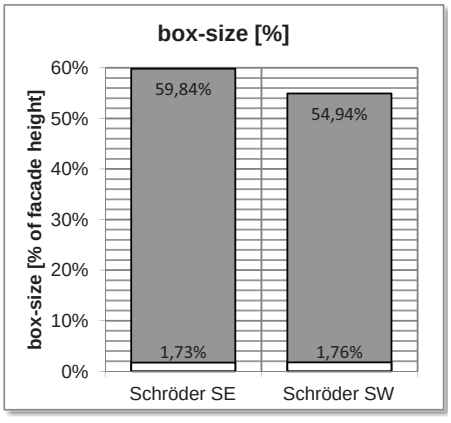












Villa Tugendhat, Süd Ansicht

	50B	*STEPS*	*50B*	*STEPS*
name	Tugendhat South		closer distance	
number of files	38	14	46	14
max	2,235	1,823	1,464	1,405
3rd quartile	1,920	1,764	1,392	1,384
median	1,855	1,729	1,375	1,369
1st quartile	1,643	1,655	1,364	1,365
min	1,564	1,557	1,340	1,348
elevation width	32,9 m	32,9 m	32,9 m	32,9 m
average values	1,818	1,708	1,383	1,375
deviation [%] (average/median)	2,02 %	1,24 %	-0,60 %	-0,43 %
average 'R²'	0,979	0,983	0,997	0,998
min 'R²'	0,718	0,967	0,979	0,991

Anhang 1.: links: Ergebnisse der Messserien für *50B* und *STEPS*

Anhang 2.: links Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *50B*

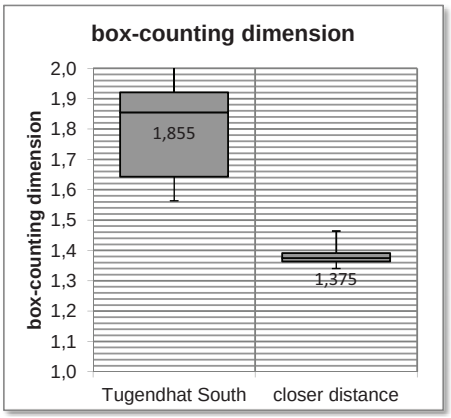
Anhang 3.: rechts Mitte: Zusammenhang zwischen Maschenweiten und Distanzen für *STEPS*

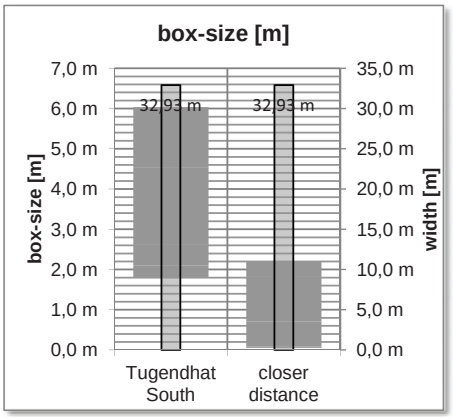
Anhang 4.: unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramme für *50B*

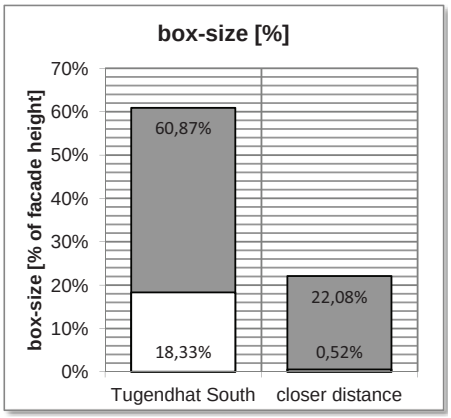
Anhang 5.: ganz unten: Messergebnisse als Box-Plot Diagramme und Maßstabsbereiche als Blockdiagramm für *STEPS*

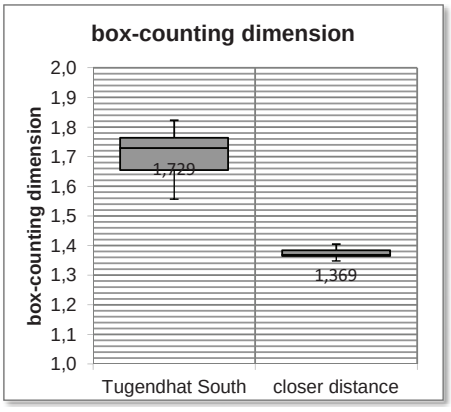
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,92 m
	Tugendhat South			
distances	31,57 m	21,05 m	12,63 m	
min. size of details	0,055 m	0,037 m	0,022 m	box-sizes from
box-sizes	0,55 m	0,37 m	0,22 m	6,04 m
	4,02 m	2,68 m	1,61 m	to
	5,57 m	3,71 m	2,23 m	1,82 m
	closer distance			
distances	31,57 m	21,05 m	12,63 m	
min. size of details	0,055 m	0,037 m	0,022 m	box-sizes from
box-sizes	0,55 m	0,37 m	0,22 m	2,19 m
	4,02 m	2,68 m	1,61 m	to
	5,57 m	3,71 m	2,23 m	0,05 m

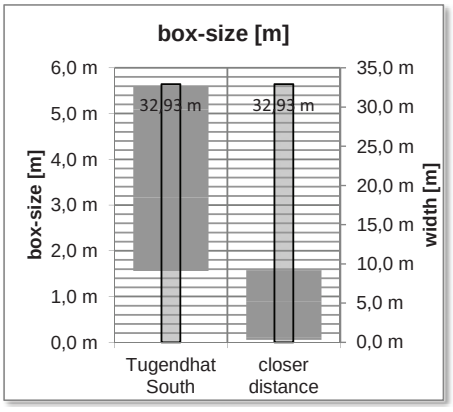
	overview with environment	*overview building*	*single parts*	building height
eye angles	18 °	27 °	45 °	9,92 m
	Tugendhat South			
distances	31,57 m	21,05 m	12,63 m	
min. size of details	0,055 m	0,037 m	0,022 m	box-sizes from
box-sizes	0,55 m	0,37 m	0,22 m	5,60 m
	4,02 m	2,68 m	1,61 m	to
	5,57 m	3,71 m	2,23 m	1,56 m
	closer distance			
distances	31,57 m	21,05 m	12,63 m	
min. size of details	0,055 m	0,037 m	0,022 m	box-sizes from
box-sizes	0,55 m	0,37 m	0,22 m	1,60 m
	4,02 m	2,68 m	1,61 m	to
	5,57 m	3,71 m	2,23 m	0,05 m

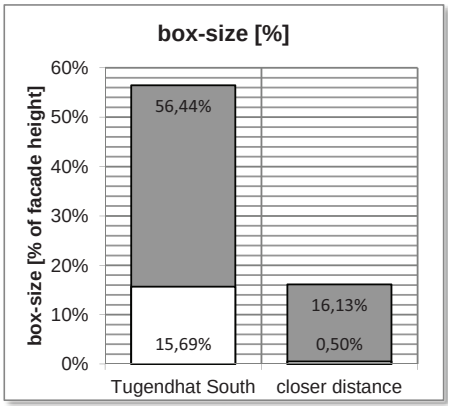












CONCLUSIO / OUTLOOK

H. Conclusio / Outlook

H.1. Conclusio

H.1.1. Besitzt Architektur fraktale Eigenschaften?

Als Fraktal werden künstliche oder natürliche Strukturen bezeichnet, die über bestimmte Eigenschaften verfügen (siehe *C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition*). Zu diesen zählen Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz, Entstehung durch Iterationen, Zerklüftung und im weiteren Sinn Gemeinsamkeit mit der Natur. Ein weiteres Kriterium – und bisweilen als (wenn auch nicht kritiklose) Definition eines Fraktals angeführt – bezieht sich auf die Hausdorff-Besicovitch-Dimension, die bei einem fraktalen Objekt dessen topologische Dimension jedenfalls übersteigt.[01] Jenes Teilgebiet der Mathematik, das sich mit den geometrischen Eigenschaften von Fraktalen beschäftigt, wird schließlich als fraktale Geometrie bezeichnet.[02]

Architektur mit fraktalen Eigenschaften

Im Kapitel *E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal* wurde die Begrifflichkeit der fraktalen Geometrie zur Charakterisierung von Architektur eingeführt. Infolgedessen hat sich gezeigt, dass Gebäude entweder eine Affinität zur Euklidischen Geometrie aufweisen – das gilt etwa gemäß ihrer Charakteristiken für Beispiele des *International Style* –, oder fraktale Eigenschaften erkennen lassen – etwa bei F.L. Wrights *Robie House*. Wesentlich dabei ist, dass die Architektur ähnlich der Natur, aufgrund der Grenzen menschlicher Wahrnehmung und konstruktiver Restriktionen, nicht im gleichen Maße fraktal ist wie jene aus der Mathematik bekannten Strukturen. Es konnte dennoch nachgewiesen werden, dass die fraktale Geometrie eine qualitative Beschreibung visueller Charakteristika ermöglicht (etwa durch die im Kapitel *F. Computer-Programme* beschriebenen Modelle architektonischer Formen).

H.1.2. Kann fraktal-ähnliche Architektur gemessen werden?

Wie im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* dokumentiert, erlaubt es die Box-Counting Methode, Gebäude unter verschiedenen Blickwinkeln zu analysieren. Neben dem Standort als Vergleich der Komplexität des betrachteten Objekts mit seiner gebauten oder natürlichen Umgebung, ist auch eine historische Betrachtung möglich, bei der der Zeitpunkt der Errichtung als Referenz dient. Dadurch lässt sich unter anderem feststellen, ob es zu einer Abnahme der Box-Counting-Dimension von der *Gotik* bis zur Gegenwart kommt. Eine solche Untersuchung bedingt jedoch die Unterscheidung sowohl nach der Bauaufgabe, das heißt nach der geplanten Nutzung des Gebäudes, als auch nach der physischen Größe. Obwohl weitere Forschungen auf diesem Gebiet notwendig sind, lässt sich infolge der vorliegenden Arbeit für bestimmte Aufgaben und Epochen bereits zum jetzigen Zeitpunkt eine eindeutige Aussage treffen. So weisen etwa Kathedralen der Gotik fraktale Eigenschaften und eine starke Komplexität auf (siehe Kapitel *F. Computer-Programme*) – ein Umstand der sich im Allgemeinen in einer höheren Box-Counting-Dimensionen widerspiegelt. Im Gegensatz dazu orientiert sich der International Style an der Euklidischen Geometrie – was sich in glatten Fassaden und einer propagierten Reduktion des Ornaments manifestiert – wodurch generell niedrigere Werte beziehungsweise ein kleinerer als konsistent bezeichneter Maßstabsbereich zu erwarten sind (vergleiche Ergebnisse aus dem Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität*).

Box-Counting als Methode der Analyse

Im Kapitel *G. Fraktale Dimension und Architektur – ein Weg zur Homogenität* konnte anhand von Analysen unterschiedlicher Gebäude aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts gezeigt werden, dass sich Box-Counting als quantitative Methode zur Beschreibung der Komplexität eignet. Aus einem konsistenten Verlauf architektonischer Elemente vom Ganzen zum kleinsten wahrnehmbaren Detail resultiert ein kontinuierlicher Verlauf der Datenkurve im doppellogarithmischen Graphen (mit Maßstab des Gitternetzes versus der Anzahl der zur vollständigen Abdeckung notwendigen Boxen). Diese Konsequenz kann als Reflexion für die Zunahme der Anzahl der Elemente bei gleichzeitiger Abnahme ihrer physischen Größe interpretiert und somit als ein Hinweis auf Selbstähnlichkeit angesehen werden. In Ermangelung einer Beschreibung der Form selbst, leitet sich daraus ein zwangsläufiger Zusammenhang aber dennoch nicht ab.

H.1.3. Welche Schlussfolgerung kann aus den Ergebnissen gezogen werden?

Zur Beschreibung von Architektur eignet sich eine fraktale Begrifflichkeit insofern, als dadurch eine Unterscheidung zwischen Gebäuden, die einer Euklidischen Geometrie nahestehen, und jenen, die Eigenschaften einer fraktalen Geometrie in sich tragen, getroffen werden kann (siehe *E. Architektur zwischen Euklid und Fraktal*). Letztere

01 Definition und Kritik daran siehe Mandelbrot B. B. (1981), Seite 373

02 Wycisk Ch. (2009), Seite 78

weisen eine Affinität zur Natur auf, indem Selbstähnlichkeit und Zerklüftung über verschiedene Maßstabsebenen vorliegen.

Fraktale Eigenschaften in der Architektur führen zu Strukturen, die aufgrund ihrer Selbstähnlichkeit vom Großen bis zum Kleinen interessant bleiben. Infolgedessen stellt sich die Frage nach einer Planung, die bewusst der fraktalen Geometrie folgt. Inwiefern dabei fraktale Methoden zur Entwicklung von Design zum Einsatz kommen können, war nicht Gegenstand dieser Untersuchung, sehr wohl aber die Beschreibung der einzelnen Methoden als Implementierung in ein CAAD Programm, um die Möglichkeiten im Werkzeug des Architekten aufzuzeigen (siehe Kapitel *D. Einteilung – Fraktale Methoden*).

Messung der visuellen Komplexität

H.2. Weitere Computer-Programme

Rhythmus

Die Box-Counting Methode zur Analyse der Komplexität von 2D Grafiken innerhalb eines definierten Wertebereichs eignet sich im Zusammenhang mit Gebäuden vor allem für Fassaden. Demgegenüber dient als Grundlage für eine ähnliche Charakterisierung von Grundrissen weniger die Abbildung auf einem Plan sondern vielmehr ein Rhythmus, wie er sich unter anderem infolge der Verteilung von Wänden manifestiert (vergleiche ***G.2.4. Rescaled-Range-Analysis & Range-Analysis/Range-Analysis eines Rhythmus im Grundriss***). Der aus der *Range Analysis* resultierende Hurst-Exponent trägt dann zusammen mit den Ergebnissen aus der Box-Counting Methode für die Ansichten zu einer umfassenderen Betrachtung des Gebäudes bei. Infolgedessen beruht ein künftiges Augenmerk auf der Weiterentwicklung der Beta Version eines gleichfalls in VBA für AutoCAD geschriebenen Computer-Programmes des Autors zur Berechnung des Hurst-Exponenten beziehungsweise auf der Verknüpfung der Auswertungen mit jenen der Box-Counting Methode.

3D Box-Counting Methode

Die bislang erwähnten Methoden zur Beschreibung der Komplexität eines Gebäudes beziehen sich auf eine separate Analyse des Grundrisses (*Range Analysis*) und der Ansicht (*2D Box-Counting*). Eine derartige Betrachtungsweise lässt sich in weiterer Folge durch eine entsprechende Umformung der Computer-Programme *B50/STEPS* um eine ganzheitliche Erfassung der dritten Dimension ergänzen, indem nicht ein Gitternetz aus Quadraten über einem zweidimensionalen Plan positioniert wird, sondern ein Gitter aus Würfeln über einem dreidimensionalen digitalen Gebäudemodell. Die Ergebnisse der verschiedenen Methoden dokumentieren dann den Grad der Komplexität für den Grundriss und die Ansicht aber auch in Bezug auf die Fläche und den Raum.

Erkennen von Selbstähnlichkeit

Ein entscheidender Faktor für die Affinität von Gebäuden zur fraktalen Geometrie ist die Präsenz entsprechender Eigenschaften wie Zerklüftung, gebrochener Dimension, Selbstähnlichkeit und die Entstehung durch Iteration. Folglich deckt eine Analyse von Fassaden durch die Box-Counting Methode mit ihrem Fokus auf die Identifizierung einer konsequenten Umsetzung der Komplexität in einem bestimmten Maßstabsereich beziehungsweise die Untersuchung von Planungsrhythmen durch die Range Analysis lediglich einen Teilbereich ab. In diesem Zusammenhang bietet ein Computer-Programm, das beispielsweise direkt die Selbstähnlichkeit von Kompositionen durch die Erkennung ähnlich proportionierter Rechtecke analysiert, eine weitere Ergänzung zur Charakterisierung von Gebäuden unter dem Blickwinkel der fraktalen Geometrie.

ANHANG

Abbildungsverzeichnis

Abb.1.: Vereinfachtes Modell einer Lunge nach *Peak D. et al. (1995)*, Seite 107 15

Abb.2.: *skalenbeschränkt*
Mies van der Rohe: Farnsworth House 1945-1951; *Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 16

Abb.3.: *skaleninvariant*
F.L. Wright: *Robie House*, nahe Chicago 1906-1909; *Schnitt entnommen aus: Weston, R. (2004)* 16

Abb.4.: Koch-Kurve 22

Abb.5.: Koch-Insel: Ausgangsobjekt, 1. und 4. Iteration 24

Abb.6.: Koch-Insel mit dem Faktor Zufall 25

Abb.7.: Minkowski-Kurve; Initiator (links unten), Generator (links oben), 4. Iteration (rechts) 26

Abb.8.: Peano-Kurve; Initiator, Generator, 3. Iteration 27

Abb.9.: Triadischer Cantor-Stab; Initiator, Generator, 2., 3. und 4. Iteration 28

Abb.10.: Dreieckiger Staub 29

Abb.11.: Ähnliche Dreiecke 31

Abb.12.: Sierpinski-Dreieck: Generator und 8. Iteration 33

Abb.13.: Goldene Spirale 36

Abb.14.: Spiralen nach 300 Wiederholungen mit unterschiedlichen Winkeln: 137,5°, 45° und 136° 37

Abb.15.: Prinzip der Rückkoppelung 38

Abb.16.: Mandelbrot-Menge mit ca. 120.000 Bildpunkten und dem Grad an Divergenz als Zylinderhöhe 39

Abb.17.: Koch-Kurve nach 6 Iterationen und mit Zufall 43

Abb.18.: Erweitertes Sierpinski Dreieck und IFS mit nur einer affinen Transformation 45

Abb.19.: Sierpinski-Dreieck: 1., 4. und 6. Iteration mit einem Kreis als Ausgangsobjekt 46

Abb.20.: Rotation (α=45°), Skalierung (s_x=0,5), Transvektion 47

Abb.21.: Zwei Ergebnisse unterschiedlicher Reihenfolge linearer Abbildungen 47

Abb.22.: Sierpinski-Dreieck nach 6 Iterationen; Ausgangsobjekte: Kreis, gleichseitiges Dreieck und Rechteck 48

Abb.23.: Deterministisches IFS: Punktmenge der Koch-Kurve nach 4 Iterationen 49

Abb.24.: Chaos-Game: Punktmenge der Koch-Kurve [0,1], 6 Iterationen, Startpunkt P_1(14,2|0,6), n=100, i=3.000 49

Abb.25.: L-System: Plant 2D, 1-6. Iteration; Axiom: X; Winkel: 27,7°; Startwinkel: 90°; Längen F=1; X=0 51

Abb.26.: Parabel f(x)=ax²+bx+c; a= 0,02, b=c=0; 52

Abb.27.: Midpoint-Displacement: H_0=30% der Länge P_0Q_0; ω=0,616; 53

Abb.28.: Midpoint-Displacement: H_0=10% der Länge P_0Q_0; tendiert gegen: a) D=1,6781; b) D=1,301; c) D=1,0286; 54

Abb.29.: Midpoint-Displacement ohne Gausssche Zufallszahl 55

Abb.30.: Links eine Anordnung mit 2/3 besetzten Feldern; rechts Curdling mit der Wahrscheinlichkeit von 66% 57

Abb.31.: Zwei Beispiele von DLA, mit der als Kreis gekennzeichneten maximalen Ausdehnung um die Start-Zelle 58

Abb.32.: Le Corbusier: *Villa Savoye* 1928-1931; *Süd-Ost Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 63

Abb.33.: Adolf Loos: *Haus Steiner* 1910; Garten-*Ansicht entnommen aus: TU München Hrsg. (1999)* 66

Abb.34.: P. Behrens: *AEG Turbinenhalle* Berlin-Moabit; 1908/09; *Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 67

Abb.35.: W. Gropius: Bauhaus Dessau 1925-1926; *Nord Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 68

Abb.36.: Mies van der Rohe: *Villa Tugendhat*, Brünn 1928-1930; *Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 70

Abb.37.: Vereinfachte Darstellung eines gotischen Portals 71

Abb.38.: Lärmschutzwand: Rhythmische- und Gleich-Verteilung 72

Abb.39.: Mandelbrot-Menge (*C.3.2. Fraktale Geometrie*); links: X=-1,5/-2,5 Y=-1,5/1,5 und rechts: X=-1,8/-1,7 Y=-0,0375/0,0375 72

Abb.40.: Helikoid, Hyperbolisches Paraboloid, Hyperboloid 76

Abb.41.: Links und rechts: Verlauf einer Parabel (innen), einer Kettenlinie (mittig) und einer Kettenlinie aus Ziegelsteinen gleicher Formate (aussen) 77

Abb.42.: F.L. Wright: *Robie House*, nahe Chicago 1906-1909; *Schnitt u. Grundriss entnommen aus: Weston, R. (2004)* 80

Abb.43.: F.L. Wright: Falling Water, Bear Run 1935-1939; *Schnitt entnommen aus: Weston, R. (2004)* 81

Abb.44.: Le Corbusier: Ozenfant's studio, Paris 1922; *Vorlage entnommen aus: Kurrent F. et al. (1997)* 81

Abb.45.: G.T. Rietveld: *Haus Schröder-Schräder*, Utrecht 1924; *Süd-Ost Ansicht aus: Weston, R. (2004)* 82

Abb.46.: Logarithmische Kurve; *Steigungswinkel = 10°* 84

Abb.47.: Menger Schwamm, 1. Iteration und 4. Iteration 85

Abb.48.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 89 Grad; L = 12,84 * initL 91

Abb.49.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 30 Grad; L = 1,39 * initL 92

Abb.50.: Koch-Kurve als L-System nach 5 Schritten mit einem Konstruktionswinkel von 60 Grad; L = 1,78 * initL 92

Abb.51.: Baumartige Verzweigung als L-System nach 6 Schritten 93

Abb.52.: Koch-Insel mit N=5 und N=8; Der Umriss nähert sich langsam einem Kreis an 93

Abb.53.: Peano-Kurve mit abgeschrägten Ecken nach 1, 2 und 3 Schritten 94

Abb.54.: Julia-Menge der Funktion F=SIN(Z)+C mit C=1,25+1,25I für das Intervall [-6 bis -2; -0,6 bis 1,3] 94

Abb.55.: Ausschnitt der Mandelbrot-Menge [-0,6 bis 0,6; 0 bis 0,8] mit der Folge für C=0,2+0,5I; rechts: Darstellung einer Folge und deren Konvergenz 95

Abb.56.: Eine Variante des *Castel del Monte* Fraktals, mit x_1=0,795, x_2=0,205, x_3=0,59 und N=12 nach 1, 2 und 4 Iterationen 96

Abb.57.: Das *Castel del Monte* Fraktal, mit x_1=0,844, x_2=0,156, x_3=0,779; links und Mitte mit N=8 Ecken, rechts mit N=3 Ecken; links nach 1, Mitte und rechts nach 3 Iterationen 97

Abb.58.: Eine weitere Variante des *Castel del Monte* Fraktals, mit und ohne eingefrorene(n) Resultate(n) für a) x_1=0,16, x_2=0,78 und N=8 (1 und 3 Iterationen) b) x_1=0,5, x_2=1,0 und N=4 (4 Iterationen) 97

Abb.59.: ‚*Shikhara Fraktal*' nach Vorlage des Shikhara eines Jaina Tempels auf Mount Girnar; Grundform, Ersetzungsregel, 3. und 4. Schritt 98

Abb.60.: ‚*Shikhara Fraktal*' mit verschiedenen Parametern; 4. Schritt 98

Abb.61.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gleichseitiger Spitzbogen; Initiator, Generator und 2.-4. Schritt 99

Abb.62.: Spitzbögen: a) gleichseitiger Spitzbogen; b) gedrückter Spitzbogen; c) überhöhter Spitzbogen 100

Abb.63.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gleichseitiger Spitzbogen mit unterschiedlichen Parametern; 2. Schritt 100

Abb.64.: ‚*Gotisches Fenster Fraktal*' als gedrungener, gleichseitiger und überhöhter Spitzbogen. 3 Schritte 100

Abb.65.: Varianten eines *Turm Fraktals* ohne und mit zufälliger Auswahl der Höhen; rechts eine weitere Variante mit Kuppeln; 4 Schritte 102

Abb.66.: Menger Schwamm und Varianten; 3 und 4 Schritte 103

Abb.67.: Sierpinski Teppich: 1-4 Schritte 103

Abb.68.: Curdling mit einer Wahrscheinlichkeit von je zweimal 25, 50 und 75% ; 1-4 Schritte 103

Abb.69.: Goldene Rechtecke und Goldene Spirale 104

Abb.70.: Gegebene Rechtecke und jeweils 7 Iterationen 106

Abb.71.: Koch Kurve mit 8 Iterationen und 5 Ersatzpolygonen 112

Abb.72.: Doppellogarithmischer Graph zur Messung der Zirkel-Dimension verschiedener Küstenlinien 113

Abb.73.: Wien Einwohnerdichte und 20 Ersatzpolygone 114

Abb.74.: Doppellogarithmischer Graph zur Messung der Zirkel-Dimension der Einwohnerdichte Wiens mit 20 Daten 114

Abb.75.: Eine sich überlappende Kurve; 1. und 5. Iteration 115

Abb.76.: Verschiedene Abstände A in Abhängigkeit von der Höhe H und dem Winkel A 121

Abb.77.: Eingabemaske für die Auswahl des zu messenden Bereichs (*B50*) 124

Abb.78.: Der *ausgewählte Bereich a* (S1_pointA und S1_pointC), die *minimale Umgrenzung b* (S2_pointA und S2_pointC) und das für die Messung *massgebliche Feld c* (S3_pointA und S3_pointC) 124

Abb.79.: Der *ausgewählte Bereich a, die minimale Umgrenzung b* und das für die Messung *massgebliche Feld c* bei einer Überschneidung des Auswahlrechtecks mit dem Objekt (F.L. Wright: Robie House, nahe Chicago 1906-1909; *Vorlage: Weston, R. (2004))* 125

Abb.80.: Eingabemaske zur Spezifizierung der verschiedenen Parameter (*B50*) 125

Abb.81.: Ergebnis für die grösste Maschenweite der in *Abb.78* angeführten Koch Kurve 126

Abb.82.: Eingabemaske für die Festlegung des Erscheinungsbildes der Berechnung (*B50*) 127

Abb.83.: Eingabemaske für das Einlesen der Daten 128

Abb.84.: Doppellogarithmischer Graph einer Messung der Koch Kurve (6 Iterationen) mit 12 Datenpunkten 128

Abb.85.: Ergebnisse im Übersichtsblatt *overview* 129

Abb.86.: *Box-Whisker-Plot* der Koch Kurve (8 Iterationen) Minkowski Kurve (7 Iterationen) und des Sierpinski Dreiecks (8 Iterationen) 130

Abb.87.: Darstellung der minimalen und maximalen Boxgrösse als Absolutmasse (links) und als Verhältnis zur jeweiligen Gebäudehöhe (rechts) 130

Abb.88.: Ergebnis einer Messung der Süd-Ost Fassade der Villa Savoye mit den beiden Trendlinien 132

Abb.89.: Le Corbusier: Villa Savoye 1928-1931; *Süd-Ost Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 132

Abb.90.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Messserie 2: Vergleich zwischen zwei unterschiedlichen Intervallen der Villa Savoye. 133

Abb.91.: F.L. Wright: Robie House, nahe Chicago 1906-1909; *Vorlage: Weston, R. (2004)* 134

Abb.92.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Strassenfassade und dem Fensterdesign des Robie House. 135

Abb.93.: P. Behrens: AEG Turbinenhalle Berlin-Moabit 1908/09; *Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 136

Abb.94.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Turbinenhalle der AEG und der Strassenfassade des Robie House. 136

Abb.95.: Adolf Loos: Haus Steiner 1910; Garten-*Ansicht entnommen aus: TU München Hrsg. (1999)* 137

Abb.96.: G.T. Rietveld: Haus Schröder-Schräder, Utrecht 1924; *Süd-Ost Ansicht aus: Weston, R. (2004)* 137

Abb.97.: G.T. Rietveld: Haus Schröder-Schräder, Utrecht 1924; *Süd-West Ansicht aus: Weston, R. (2004)* 138

Abb.98.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich zwischen der Süd-Ost und der Süd-West Ansicht des Haus Schröder-Schräder. 138

Abb.99.: Mies van der Rohe: Villa Tugendhat, Brünn 1928-1930; *Süd Ansicht entnommen aus: Weston, R. (2004)* 138

Abb.100.: Eingabemaske zur Spezifizierung der verschiedenen Parameter (*STEPS*) 141

Abb.101.: Vergleich zwischen den Ergebnissen aus dem VBA Box-Counting Programm *B50* (jeweils erster Wert) und *STEPS* (jeweils zweiter Wert) der beiden Intervalle der Villa Savoye; oben: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen unten: Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe). 141

Abb.102.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) unter Verwendung von *STEPS* für die Strassenfassade des Robie House. 142

Abb.103.: Box-Plot Diagramm der Box-Counting Dimensionen und Darstellung der Maschenweiten (als Prozent der Fassadenhöhe) – Vergleich verschiedener Standorte für Robie House. 142

Abb.104.: Koch Kurve nach drei Iterationen mit hierarchischer Verzweigung der Teile jeder Iteration 143

Abb.105.: Gegenüberstellung der doppellogarithmischen Graphen als Ergebnis der Messung eines Kreises (links) und der Ansicht der AEG Turbinenhalle (rechts) 144

TABELLENVERZEICHNIS

TAB.E.1.: VERGLEICH ZWISCHEN DER EUKLIDISCHEN UND DER FRAKTALEN GEOMETRIE 64

TAB.G.1.: FRAKTALE DIMENSION D_F BEKANNTER FRAKTALER KURVEN 113

TAB.G.2.: FRAKTALE DIMENSION D_F VON LANDESGRENZEN 113

TAB.G.3.: GEGENÜBERSTELLUNG VON D_Z UND D_B VERSCHIEDENER LANDESGRENZEN FÜR EINEN ÄHNLICHEN MASSSTABSBEREICH DER LÄNGENEINHEITEN, WOBEI D_B ALLFÄLLIGE INSELN BERÜCKSICHTIGT 116

TAB.G.4.: MINIMALE DETAILGRÖSSEN UND DIE JEWEILIGEN MASCHENWEITEN NACH C. BOVILL IN ABHÄNGIGKEIT VON DREI UNTERSCHIEDLICHEN DISTANZEN ZUM GEBÄUDE 122

TAB.G.5.: DIE VOM AUTOR EMPFOHLENEN MINIMALEN DETAIL- UND ENTSPRECHENDEN MASCHENWEITEN. H...HÖHE, L_S...LÄNGE DER KLEINEREN SEITE 123

TAB.G.6.: ERGEBNISSE VERSCHIEDENER FRAKTALER KURVEN 129

TAB.G.7.: MESSWERTE DER SÜD-OST FASSADE DER VILLA SAVOYE LAUT C. BOVILL (1996) 131

TAB.G.8.: MESSSERIE 1 DER SÜD-OST FASSADE DER VILLA SAVOYE 133

TAB.G.9.: MESSSERIE 2 DER SÜD-OST FASSADE DER VILLA SAVOYE 133

TAB.G.10.: ERD- UND OBERGESCHOSS DER SÜD-OST FASSADE DER VILLA SAVOYE 133

TAB.G.11.: MESSWERTE DER STRASSENFASSADE DES ROBIE HOUSE LAUT C. BOVILL (1996), ERSTER ABSCHNITT 135

TAB.G.12.: MESSSERIE DER STRASSENFASSADE DES ROBIE HOUSE 135

TAB.G.13.: MESSWERTE EINES FENSTERDESIGNS DES ROBIE HOUSE LAUT C. BOVILL (1996) 135

TAB.G.14.: MESSSERIE EINES FENSTERDESIGNS DES ROBIE HOUSE 136

TAB.G.15.: MESSSERIE DER TURBINENHALLE DER AEG IN BERLIN-MOABIT 136

TAB.G.16.: MESSSERIE DER GARTEN-ANSICHT DES HAUS STEINER 137

TAB.G.17.: MESSSERIE VON DER SÜD-OST FASSADE (OBEN) UND VON DER SÜD-WEST FASSADE (UNTEN) DES HAUS SCHRÖDER-SCHRÄDER 138

TAB.G.18.: MESSSERIE VON DER SÜD ANSICHT DER VILLA TUGENDHAT 138

TAB.G.19.: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ENTFERNUNG, MASCHENWEITEN UND DETAILGRÖSSE BEI ROBIE HOUSE 139

TAB.G.20.: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ENTFERNUNG, MASCHENWEITEN UND DETAILGRÖSSE BEI DER AEG TURBINENHALLE 140

TAB.G.21.: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ENTFERNUNG, MASCHENWEITEN UND DETAILGRÖSSE BEIM HAUS SCHRÖDER-SCHRÄDER 140

TAB.G.22.: ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ENTFERNUNG, MASCHENWEITEN UND DETAILGRÖSSE BEI HAUS STEINER 140

TAB.G.23.: VERGLEICH ZWISCHEN DEN ERGEBNISSEN AUS DEM BOX-COUNTING PROGRAMM *B50* (OBEN) UND *STEPS* (UNTEN) ANHAND DER STRASSENFASSADE DES ROBIE HOUSE 142

Literatur

» Arnheim R. (1978)
Arnheim Rudolf: *Kunst und Sehen: eine Psychologie des schöpferischen Auges* (de Gruyter, Berlin, 1978)

» Ball P. (2009)
Ball Philip: *Nature's patterns: a tapestry in three parts, Teil 3* (Oxford University Press, New York, 2009)

» Barnes J. (2010)
Barnes John: Gems of Geometry (Springer, Berlin Heidelberg, 2010)

» Barnsley M. (1993)
Barnsley Michael: *Fractals everywhere* (Academic Press Professional, Cambridge, 1993)

» Batty et al. (1994)
Batty and Longley: *Fractal Cities* (Academic Press Inc., 1994)

» Bax M. (2001)
Bax Marty: *Complete Mondrian* (V+K Publishing, Blaricum, 2001)

» Beutelspacher A. et al. (1996)
Beutelspacher Albrecht, Petri Bernhard: *Der goldene Schnitt* (Spektrum Akademischer Verlag, 1996)

» Binding G. (2006)
Binding Günther: Was ist Gotik?: Eine Analyse der gotischen Kirchen in Frankreich, England und Deutschland 1140-1350 (Primus Verlag; Auflage: 2, Darmstadt, 2006)

» Borcherdt H. (1988)
Borcherdt Helmut: *Architekten. Begegnungen 1956-1986* (Langen Müller, München, 1988)

» Bovill C. (1997)
Bovill Carl: *Fractal Calculations in Vernacular Design*, in IASTE, Traditional Dwellings and Settlements: Working Paper Series, Vol. 97: Critical Methodologies in the Study of Traditional Environments (University of California at Berkeley, Centre for Environmental Design, Berkeley, 1997), Seiten 35-51

» Bovill C. (1996)
Bovill Carl: *Fractal Geometry in Architecture and Design* (Birkhäuser, Bosten, 1996)

» Bovill C. (2000)
Bovill Carl: *Fractal Geometry as Design Aid* in Journal for Geometry and Graphics, Volume 4, No. 1 (2000), Seiten 71-78

» Briggs J.et al. (1999)
Briggs John, Peat F. David: *Die Entdeckung des Chaos: Eine Reise durch die Chaos-Theorie* (Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1999)

» Bronstein I. N. et al. (2005)
Bronstein Ilja N., Semendjajew Konstantin A. und Musiol Gerhard: Taschenbuch der Mathematik (Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005)

» Burry, M. (2007)
Burry, Mark: *Gaudi Unseen: Die Vollendung der Sagrada Família* (Jovis, Berlin, 2007)

» Cook J. (1978)
Cook Jeffrey: *The architecture of Bruce Goff* (Harper & Row, New York, 1978)

» Czeike F. (2008)
Czeike Felix: *DuMont Kunst Reiseführer Wien* (DuMont Reiseverlag, Ostfildern, 2008)

» Deussen O. (2003)
Deussen Oliver: *Computergenerierte Pflanzen* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2003)

» Ditzinger T. (2006)
Ditzinger Thomas: *Illusion des Sehens* (Elsevier, München, 2006)

» Donald H. (1984)
Donald Hoffmann: *Frank Lloyd Wright´s Robie House* (1984)

» Duden (2001)
Duden: *das Fremdwörterbuch* (Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim, 2001)

» Duden (2003)
Duden: *Basiswissen Schule – Mathematik* (Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Mannheim, 2003)

» Eglash, R. (1999)
Eglash, Ron: *African Fractals: Modern Computing and Indigenous Design* (Rutgers University Press, 1999)

» Evers B. (2006)
Evers Bernd: *Architekturtheorie: Von der Renaissance bis zur Gegenwart*; *Sonderausgabe* (Taschen Verlag, Köln, 2006)

» Fournier A. et al. (1982)
Fournier Alain, Fussell Don, Carpenter Loren: *Computer Rendering of Stochastic Models*. Communications of the ACM, (1982)

» Foroutan-pour K. et al. (2000)
Foroutan-pour K., Dutilleul P. und Smith D. L.: *Advances in the implementation of the box-counting method of fractal dimension estimation*, in Applied Mathematics and Computation, Volume 105, Issue 2-3 (2000), Seiten 195-210

» Frame M. (2003)
Frame Michael und Mandelbrot Benoit B.: *Introduction to Fractal Geometry* (Yale University, August 2000); classes.yale.edu/99-00/math190a/welcome.html (19.05.2003)

» Franck, G. et al. (2008)
Franck, Georg und Franck, D.: *Architektonische Qualität* (Hanser, München, 2008)

» Gausa M. (2003)
Gausa Manuel: *The Metapolis dictionary of advanced architecture*. (Actar, Barcelona, 2003)

» Gawne E. et al. (2004)
Gawne Eleanor und Snodin Michael: *Exploring Architecture* (2004)

» Gellner E. (1989)
Gellner Edoardo: *Alte Bauernhäuser in den Dolomiten – Die ländliche Architektur der venetianischen Alpen* (Callwey Verlag, München 1989)

» Giedion S. (1996)
Giedion Sigfried: *Raum, Zeit, Architektur* (Springer, 1996)

» Goff B. (1995)
Goff Bruce, Saliga Pauline [Hrsg.], Woolever Mary [Hrsg.]: Exhibition The Architecture of Bruce Goff, 1904 - 1982, Design for the Continuous Present (1995, Chicago)*: The architecture of Bruce Goff.* (Prestel, München, 1995)

» Goff B. (1988)
Goff Bruce, DeLong David Gilson: *Bruce Goff: toward absolute architecture* (MIT Pr., Cambridge, 1988)

» Gössel P. et al. (1994)
Gössel Peter, Leuthäuser Gabriele: Architektur des 20. Jahrhunderts (Benedikt Taschen Verlag, Köln, 1994)

» Gropius, W. (2. Aufl. 1927)
Gropius, Walter: *Internationale Architektur* (Langen, München, 1927)

» Güell, X. (1987)
Güell, Xavier: *Antoni Gaudí* (Artemis & Winkler Verlag, Zürich und München, 1987)

» Hachenberger Dirk (2008)
Hachenberger Dirk : *Mathematik für Informatiker* (Pearson Studium, München, 2008)

» Hausdorff F. (1919)
Hausdorff Felix: *Dimension und äußeres Maß*, in Mathematische Annalen Nr. 79 (1919), Seiten 157-179

» Hitchcock H.-R. (1932)
Hitchcock Henry-Russell: *The International Style: Architecture Since 1922* (W.W. Norton & Co, 1932)

» Hitchcock H.-R. (1951)
Hitchcock Henry-Russell: *The International Style Twenty Years After, in Architectural Record, 110/2* (1951) Seiten 89-97

» Hitchcock H.-R. (1994)
Hitchcock Henry-Russell: *Die Architektur des 19. und 20. Jahrhunderts* (Aries Verlag, München, 1994)

» Hoffmann D. (1984)
Hoffmann Donald: *Frank Lloyd Wright's Robie House* (Dover Publications, Inc., 1984)

» Holl S. (2002)
Holl Steven: *Architektur-Zentrum Wien: Steven Holl - Idee und Phänomen* (Müller, Baden, Schweiz, 2002)

» Holl S. (2003)
Holl Steven: *Steven Holl 1986-2003; in search of a poetry of specifics ; thought, matter and experience* (El croquis ed., Madrid, 2003)

» Hurst H.E. (1951)
Hurst H.E., *Long Term Storage Capacity of Reservoirs* in Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116 (1951), Seiten 770-799.

» Hurst, H. et al. (1965)
Hurst Harold Edwin, Black R.P., Simaika Y.M., *Long-term storage: an experimental study* (Constable, London, 1965)

» Hutchinson, J. (1981)
Hutchinson, John E.: *Fractals and self similarity* in Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 30 (1981), Seiten 713–747

» Jakob, G. (1870)
Jakob, Georg: Die Kunst im Dienste der Kirche. Ein Handbuch für Freunde der kirchlichen Kunst (J. Thomann, Landshut, 1870)

» Jaxtheimer B. W. (1990)
Jaxtheimer Bodo W.: *Die Baukunst. Stilkunde Gotik.* (Bechtermünz, Eltville am Rhein, 1990)

» Jencks C. (1995)
Jencks Charles: *The Architecture of the Jumping Universe* (Academy Editions, 1995)

» Jencks C. (1998)
Jencks Charles: *Die Architektur des springenden Universums*, in ARCH+ Vol 141 (ARCH+, Aachen, 1998), Seiten 24-113

» Joedicke J. (1990)
Joedicke Jürgen: *Architekturgeschichte des 20. Jahrhunderts: Von 1950 bis zur Gegenwart* (Karl Krämer, Zürich, 1990)

» Khan, H.-U. (1998)
Khan, Hasan-Uddin: *Taschens Weltarchitektur: International Style – Architektur der Moderne von 1925 bis 1965* (Benedikt Taschen Verlag, Köln, 1998)

» Knerr R. (1977)
Knerr Richard: *Lexikon der Mathematik* (Lexikographisches Institut, München, 1977)

» Koch H. (1904)
Koch Helge: *Sur une courbe continue sans tangente obtenne par use construction géometrique élémentaire*, in Arkiv för Matematik 1 (1904)

» Koch W. (1991)
Koch Wilfried: *Baustilkunde – Das große Standardwerk zur europäischen Baukunst von der Antike bis zur Gegenwart* (Mosaik, München, 1991)

» Koepf H. (1990)
Koepf Hans: *Baukunst in fünf Jahrtausenden* (Kohlhammer, Stuttgart, 1990)

» Kruft H.-W. (1995)
Kruft, Hanno-Walter: Geschichte der Architekturtheorie. Studienausgabe: Von der Antike bis zur Gegenwart (C.H.Beck, München, 1995)

» Küper M. (1992)
Küper Marijke: *Gerrit Th. Rietveld, the complete works, 1888 - 1964* (Centraal Museum, Utrecht, 1992)

» Le Corbusier (1993)
Le Corbusier: *1922. Ausblick auf eine Architektur* (Vieweg Friedr. & Sohn, Wiesbaden, 1993)

» Lemoine B. (1988)
Lemoine Bertrand: *Gustave Eiffel* (Birkhäuser, Basel, 1988)

» Levine, N. (1996)
Levine, Neil: *The architecture of Frank Lloyd Wright* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1996)

» Lindenmayer A. (1968)
Lindenmayer Aristid: *Mathematical models for cellular interaction in development*. In: J. Theoret. Biology. 18. (1968), Seiten 280–315.

» Lochtefeld J. (2001)
Lochtefeld James: *The Illustrated Encyclopedia of Hinduism, Vol. 2: N-Z* (Rosen Pub Group, 2001)

» Loos, A. (1908a in 1997)
Loos, Adolf: *Ornament und Verbrechen (1908) in: Trotzdem* (Georg Prachner, Wien, 1997), Seiten 78-88

» Loos, A. (1908b in 1997)
Loos, Adolf: *Die Überflüssigen: Deutscher Werkbund (1908) in: Trotzdem* (Georg Prachner, Wien, 1997), Seiten 71-73

» Loos, A. (1909 in 1997)
Loos, Adolf: *Architektur (1909) in: Trotzdem* (Georg Prachner, Wien, 1997), Seiten 90-104

» Loos, A. (1924 in 1997)
Loos, Adolf: *Ornament und Erziehung (1924) in: Trotzdem* (Georg Prachner, Wien, 1997), Seiten 173-179

» Lorenz W. E. (2002)
Lorenz Wolfgang E.: *Diplomarbeit – Fractals and Fractal Architecture* (2002); www.iemar.tuwien.ac.at/fractals

» Lorenz, W. E. (2004)
Lorenz Wolfgang E.: *Fractal Geometry and Architectonic Quality*, in First International Conference on Fractal Foundations for 21st Century Architecture and Environmental Design (Madrid 2004)

» Lorenz, W. E. (2009)
Lorenz Wolfgang E.: *Fractal Geometry of Architecture – Implementation of the Box-Counting Method in a CAD-Software*, in Computation: The New Realm of Architectural Design, eCAADe 27 (2009), Seiten 697-704

» Lorenz, W. E. (2011)
Lorenz Wolfgang E.: *Fractal Geometry of Architecture – Fractal Dimension as a Connection between Fractal Geometry and Architecture*, in Biomimetics – Materials, Structures and Processes: Examples, Ideas and Case Studies (2011), Seiten 179-200

» Lorenz, W. E. (2012)
Lorenz Wolfgang E.: , eCAADe 30 (2012),

» Lynn G. (1999)
Lynn Greg: *Animate Form*, (Princeton Architectural Press, New York, 1999)

» Lynn G. (1995)
Lynn Greg: *Das erneuerte Neu der Symmetrie*, in ARCH+ Vol 128 (ARCH+, Aachen, 1995), Seiten 24-113

» Maassen B. (2010)
Maassen Ben, Lieshout Pascal van: *Speech Motor Control, New developments in basic and applied research* (Oxford Univ Press, 2010)

» Mandelbrot B. B. (1967)
Mandelbrot Benoît B.: *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, in ‚Science Journal' Vol. 156, (1967), Seiten 636-638

» Mandelbrot B. B. (1975)
Mandelbrot Benoît B.: *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* (Flammarion, Paris, 1975, 2. Auflage 1984)

» Mandelbrot B. B. (1977)
Mandelbrot Benoît B.: *Fractals: Form, Chance and Dimension* (Freeman, New York, 1977)

» Mandelbrot B. B. (1981)
Mandelbrot Benoît B.: *Scalebound or scaling shapes: A useful distinction in the visual arts and in the natural sciences*, in Leonardo 14 (1981), Seiten 45-47

» Mandelbrot B. B. (1991)
Mandelbrot Benoît B., Dr. Zähle Ulrich (Herausgeber der deutschen Ausgabe): *Die fraktale Geometrie der Natur* (einmalige Sonderausgabe, Birkhäuser Verlag, Berlin, 1991)

» Märtens, H. (1884)
Märtens, H.: *Der optische Maßstab* (Verlag von Ernst Wasmuth, 2. Aufl., Berlin, 1884)

» Martinell, C. (1975)
Martinell, Cesar: *Gaudi: His life, his theories, his work* (Editorial Blume, Barcelona, 1975)

» Merkel J. (2005)
Merkel Jayne: *Eero Saarinen* (Phaidon Press, New York, 2005)

» Müller-Fonfara R. et al. (2004)
Müller-Fonfara Robert und Scholl Wolfgang: *Mathematik verständlich: Arithmetik und lineare Algebra* (Bassermann Verlag, 2004)

» Nemetschke N. (2000)
Nemetschke Nina, Kugler Georg J., Müller-Kaspar Ulrike: *Lexikon der Wiener Kunst und Kultur* (Ueberreuter Carl, Wien, 2000)

» Neufert P. (2000)
Neufert Peter und Neff Ludwig: *Bauentwurfslehre* (Friedr. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000)

» Neumeyer F. (2002)
Neumeyer Fritz: *Quellentexte zur Architekturtheorie. Bauen beim Wort genommen* (Prestel, München, Berlin, London, New York, 2002)

» Oechslin, W. (1999)
Oechslin, Werner: Moderne entwerfen – Architektur und Kulturgeschichte (Werner Oechslin, Köln, 1999)

» Ostwald M. J. (2007)
Ostwald Michael J. und Tucker C.: *Measuring architecture: Questioning the application of non-linear mathematics in the analysis of historic buildings*, in Techniques and Technologies: Transfer and Transformation: IVth International Conference of the Association of Architecture Schools of Australasia 2007, (2007), Seiten 183-189

» Ostwald M. J. et al. (2007a)
Ostwald Michael J. und Tucker C.: *Calculating Characteristic Visual Complexity in the Built Environment* in Building Across Borders: CIB W092 Procurement Systems, (Newcastle, CIB, 2007) Seiten 305-314

» Ostwald M. J. et al. (2008a)
Ostwald Michael J., Vaughan Josephine und Chalup Stephan: *A Computational Analysis of Fractal Dimensions in the Archtecture of Eileen Gray*, in Biological Process and Computation (2008), Seiten 256-263

» Ostwald M. J. et al. (2008b)
Ostwald Michael J., Vaughan Josephine und Tucker C.: *Characteristic Visual Complexity: Fractal Dimensions in the Architecture of Frank Lloyd Wright and Le Corbusier*, in Nexus: Architecture and Mathematics, 7 (2008), Seiten 217-232

» Ostwald M. J. et al. (2011)
Ostwald Michael J., Vaughan Josephine und Chalup Stephan K.: *Data flow and processing in the computational fractal analysis method*, in Circuit Bending, Breaking and Mending, CAADRIA (2011), Seite 493-502

» Padovan R. (2002)
Padovan Richard: *Towards Universality: Le Corbusier, Mies, and de Stijl* (Routledge, London, 2002)

» Pahl J. (1999)
Pahl Jürgen: *Architekturtheorie des 20. Jahrhunderts: Zeit-Räume* (Prestel, München, 1999)

» Peak D. et al. (1995)
Peak David und Frame Michael: *Komplexität – das gezähmte Chaos* (Birkhäuser, Berlin, 1995)

» Peitgen H.-O. et al. (1988)
Peitgen Heinz-Otto und Saupe Dietmar: *The science of fractal images* (Springer Verlag, New York, 1988)

» Peitgen H.-O. et al. (1989)
Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: *Fraktale - eine neue Sprache für komplexe Strukturen*, in Spektrum der Wissenschaft (9/1989)

» Peitgen H.-O. et al. (1992)
Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: *Chaos and Fractals – New Frontiers of Science* (Springer Verlag, New York, 1992)

» Peitgen H.-O. et al. (1998a)
Peitgen H.-O., Jürgens H. und Saupe D.: *Bausteine des Chaos: Fraktale*. (Rowohlt Verlag, Hamburg, 1998)

» Peitgen H.-O. et al. (1998b)
Peitgen H.-O., Jürgens H. und Saupe D.: *Chaos: Bausteine der Ordnung*. (Rowohlt Verlag, Hamburg, 1998)

» Peitgen H.-O. et al. (2004)
Peitgen Heinz-Otto, Jürgens Hartmut und Saupe Dietmar: *Chaos and Fractals – New Frontiers of Science,* 2. Auflage (Springer Verlag, New York, 2004)

» Pevsner N. et al. (1992)
Pevsner Nikolaus, Honour Hugh, Fleming John: *Lexikon der Weltarchitektur* (Prestel, München, 1992)

» Pfeifer G. (2001)
Pfeifer Günter, Ramcke Rolf u.a.: *Mauerwerksatlas* (Birkhäuser, 2001)

» Portoghesi, P. (2000)
Portoghesi Paolo: *Nature and Architecture* (Skira, 2000)

» Richardson L.F. (1961)
Richardson L.F.: *The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels*, in General Systems Yearbook 6, (1961), Seiten 139-187

» Roman A. (2003)
Roman Antonio: *Eero Saarinen: An Architecture of Multiplicity* (Princeton Architectural Press, New York, 2003)

» Saarinen E. (1968)
Saarinen Eero: *Eero Saarinen on His Work* (Yale University Press, Yale, 1968)

» Salingaros N. (2006)
Salingaros Nikos A.: *A theory of architecture* (Nikos A. Salingaros & Umbau Verlag, Solingen, 2006)

» Sbriglio, J. (1999)
Sbriglio, Jacques: *Le Corbusier – La Villa Savoye* (Birkhäuser, Basel u.a., 1999)

» Schezen R. (1996)
Schezen Roberto, Frampton Kenneth, Rosa Joseph: (Monacelli, New York, 1996)

» Schott D. (2004)
Schott Dieter: *Ingenieurmathematik mit MATLAB: Algebra und Analysis für Ingenieure* (Hanser Fachbuchverlag, 2004)

» Silbernagl S. (1991)
Silbernagl Stefan: *Taschenatlas der Physiologie* (Georg Thieme Verlag, Stuttgart, 1991)

» Smith P. F. (2003)
Smith, Peter F.: *The Dynamics of Delight: Architecture and Aesthetics* (Routledge, London, 2003)

» Spinadel V. de (2004)
Spinadel Vera de: *From the Golden Mean to Chaos* (Nobuko,Buenos Aires, 2004)

» Storrer W. A. (1993)
William Allin Storrer: *The Frank Lloyd Wright Companion* (University of Chicago Press, Chicago, 1993)

» Sullivan L.H. (1896)
Sullivan Louis Henry: *Das Bürohochhaus, unter künstlerischen Gesichtspunkten*, in: Lampugnani Vittorio Magnago [Hrsg.] et al.: Architekturtheorie 20. Jahrhundert (Hatje Cantz, Ostfildern-Ruit, 2004), Seiten 22-24

» Takayasu H. (1990)
Takayasu Hideki: Fractals in the Physical Sciences – Nonlinear Science (Manchester University Press, 1990)

» TU München Hrsg. (1999)
TU München Hrsg. (1999): Adolf Loos 1870-1933: 40 Wohnhäuser, Bauten Und Projekte von Adolf Loos, Studienarbeiten an der Technischen Universität München (Verlag A. Pustet, Salzburg, 1999)

» Thurm-Nemeth V. et al. (1998)
Thurm-Nemeth Volker, Engelhardt-Krajanek Margarethe, Plakolm-Forsthuber Sabine, Winko Ulrich: *Konstruktion zwischen Werkbund und Bauhaus: Wissenschaft - Architektur - Wiener Kreis* (öbvhpt, 1998)

» Ungers L. (2002)
Ungers Liselotte: *Über Architekten* (Dumont Literatur und Kunst Verlag, Köln, 2002)

» Vaughan J. (2009)
Vaughan Josephine und Ostwald Michael J.: *Refining the Computational Method for the Evaluation of Visual Complexity in Architectural Images – Significant Lines in the Early Architecture of Le Corbusier*, in Computation: The New Realm of Architectural Design, eCAADe 27 (2009), Seiten 686-696

» Vaughan J. (2010)
Vaughan Josephine und Ostwald Michael J.: *Refining a Computational fractal Method of Analysis*, Proceedings of the 15th International Conference on Computer-Aided Architectural Design Research in Asia CAADRIA (2010), Seiten 29-38

» Voigt A. (2005)
Voigt Anette: *Die Natur des Organischen – ‚Leben' als kulturelle Idee der Moderne*, in Geiger Annette [Hrsg.] et al.: Spielarten des Organischen: In Architektur, Design und Kunst (Dietrich Reimer, 2005) Seiten 36-49

» Voß H. (1994)
Voß Herbert: *Chaos und Fraktale – selbst programmieren* (Franzis-Verlag, Poing, 1994)

» Weston, R. (2004)
Weston, Richard: *Plans, Sections and Elevations - Key buildings of the twentieth century* (Laurence King Publishing Ltd, London, 2004)

» Windsor A. (1985)
Windsor Alan: *Peter Behrens. Architekt und Designer* (Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1985)s

» Witten Th. (1981)
Witten Thomas, Sander Leonard: *Diffusion limited aggregation – a kinetic critical phenomenon, in Physical Review Letters, Bd. 47* (1981), Seiten 1400-1403

» Wright F.L. (1966)
Wright Frank LLoyd: *Die Zukunft der Architektur* (Langen/Müller, München, 1966)

» Wycisk Ch. (2009)
Wycisk Christine: *Flexibilität Durch Selbststeuerung in Logistischen Systemen: Entwicklung* (Gabler, Wiesbaden, 2009)

» Zeitler H. et al. (2000)
Zeitler Herbert und Pagon Dusan: *Fraktale Geometrie – Eine Einführung* (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000)

» Zerbst R. (1993)
Zerbst Rainer: *Antoni Gaudí* (Benedikt Taschen Verlag GmbH, 1993)

Internetseiten

» http://www.autodesk.de/ (29.04.2012)
Informationen zu VBA in AutoCAD: http://www.autodesk.de/adsk/servlet/ps/dl/item?siteID=403786&id=16895661&linkID=16890270

Internetseiten für die Analyse

» www.wien.gv.at/stadtentwicklung/05/03/04/11.htm (26.07.2002)
Datenmodell Bevölkerungsdichte Stand 2002.

» http://www.diva-gis.org/gdata (8.12.2011)
GIS Daten Landesgrenzen als freier Download.

Literatur: Empfehlungen

» Architektur Zentrum Wien
Architektur Zentrum Wien: *Architektur im 20. Jahrhundert - Österreich* (Prestel, München, 1995)

» Kurrent F. et al. (1997)
Kurrent Friedrich, Nerdinger Winfried, Wimmer Franz: *Le Corbusier 1887-1965. 40 Wohnhäuser. Bauten und Projekte von Le Corbusier. Studienarbeiten an der Technischen Universität München* (Pustet, Salzburg, 1997)

» Kurrent F. (1998)
Kurrent, Friedrich: *Adolf Loos 1870 - 1933, 40 Wohnhäuser : Bauten und Projekte von Adolf Loos ; Studienarbeiten an der Technischen Universität München* (Pustet, Salzburg, 1998)

» Levine, Neil (1996)
Levine Neil: *The Architecture of Frank Lloyd Wright* (Princeton Univ Pr, Princeton, 1996)

Begriffe

- ***Algorithmus*** (griech. arithmós, *Zahl*)
  Ein Algorithmus ist ein aus endlich vielen Schritten und eindeutig festgelegten Anweisungen bestehendes formales Verfahren (z.B. Rechenvorschrift), das zur Lösung eines Problems führt.

  deterministischer Algorithmus
  Ein deterministischer Algorithmus ist ein Algorithmus, bei dem aus derselben Eingabe (Parameter) immer dieselbe Ausgabe resultiert. Dabei werden auch immer die gleichen Zustände durchlaufen.
- ***Charakter*** (griech. charaktér, ursprünglich *eingegrabenes oder eingeprägtes (Schrift) Zeichen*, später *Kennzeichen, Merkmal*)
  Als Charakter wird ein individuelles Erkennungsmerkmal bezeichnet, das sich als Besonderheit oder Eigenart ausdrückt.
- ***Determinismus*** (lat. determinare, *begrenzen, bestimmen*)
  Determinismus bezeichnet die Vorhersagbarkeit des Ergebnisses für eine bekannte Ausgangssituation.
- ***Divergente Folge***
  Eine divergente Folge liegt vor, wenn die Folge keinen Grenzwert besitzt. Das heißt, sie nähert sich mit steigendem Index keiner bestimmten Zahl an.
- ***Fraktal*** (lat. fractus, *gebrochen, irregulär*)
  siehe ***C. Fraktale Eigenschaften – Eine Definition***
- ***Fraktale Methode***
  Eine fraktale Methode dient der Erzeugung von Fraktalen, wobei je nach Art des Fraktals unterschiedliche Algorithmen zum Einsatz kommen.
- ***Fraktale Dimension***
  siehe ***G.2. Fraktale Dimension: Mess-Methoden***
  Die fraktale Dimension ist ein Maß für die Zerklüftung (Irregularität einer Kurve oder einer Textur).
- ***Generator*** (lat. generator, *Erzeuger*)
  Generator bezeichnet einen Erzeuger, etwa eine grafische Anweisung.
- ***Geometrische Form***
  Eine geometrische Form (Fläche oder Körper) liegt dann vor, wenn sie mit mathematischen Mitteln exakt definiert werden kann.
- ***Geometrischer Körper***
  Ein Körper wird als geometrisch bezeichnet, wenn er sowohl ein Volumen als auch eine Oberfläche aufweist, das heißt, allseitig von einer oder mehreren Ebenen oder gekrümmten Flächen begrenzt ist.
- ***Harmonie*** (griech. harmonia, *Ebenmaß, Einklang*; griech. harmoi, *Gefüge*)
  Harmonie ist der Ausdruck einer Einheit, die durch Übereinstimmung von Merkmalen hervorgerufen wird. Diese Einheit bezieht sich etwa auf das Ganze und seine Bestandteile, bei der Spannungen (hervorgerufen durch Ungleichheit oder Dissonanz) vermieden werden.
- ***Initiator*** (lat. initiare, *einführen*)
  Der Initiator entspricht einer Anfangsnäherung, die sich durch wiederholte Anwendung der durch den Generator definierten Anweisung dem Resultat annähert. Ein Initiator ist etwa das Ausgangs- beziehungsweise Startobjekt in einem grafischen Ersetzungsverfahren.
- *International Style* (*Internationale Moderne*)
  Die Bezeichnung *International Style* lässt sich auf das im Jahr 1932 im Zuge der gleichnamigen Ausstellung erschienene Buch ***The*** *International Style:* ***Architecture Since 1922***[01] von den Kunsthistorikern H.-R. Hitchcock und P. Johnson zurückführen. Im Katalog zur Ausstellung werden die wesentlichen Merkmale in drei Prinzipien zusammengefasst, wobei H.-R. Hitchcock selbst bereits im Jahr 1951 seine Kriterien hinterfragt. Die in der Ausstellung präsentierten Gebäude zeichnen sich durch Schlichtheit, Klarheit der Volumina und den Verzicht auf Dekoration aus.
- ***Iteration*** (lat. iteratio, *Wiederholung*)
  Als Iteration wird eine Methode zur schrittweisen Annäherung an die Lösung eines Rechenproblems durch wiederholte Anwendung eines Rechenverfahrens bezeichnet.
- ***Konvergente Folge***
  Eine konvergente Folge liegt vor, wenn die Folge einen Grenzwert besitzt. Das heißt, sie nähert sich mit steigendem Index einer bestimmten Zahl an.

01 *Hitchcock H.-R. (1932)*
Kruft H.-W. (1995), Seiten 419f

- ***Komplexität*** (lat. complexus, *Zusammenfassung, Verknüpfung*)
  Komplexität ist die Eigenschaft eines Systems, die durch die Vielfalt von Merkmalen (Unterschiedlichkeiten der Elemente) hervorgerufen wird. Sie steigt mit der Anzahl der Elemente und mit dem Grad der Unabhängigkeit zwischen den Elementen.
- ***Rekursion*** (lat. recursare *zurücklaufen*)
  Rekursion bezeichnet den wiederholten Aufruf einer Funktion aus sich selbst oder einen gegenseitig wechselnden Aufruf mehrerer Funktionen.
- ***Selbstähnlichkeit***
  siehe ***C.1.1. Selbstähnlichkeit***
  Selbstähnlichkeit liegt dann vor, wenn alle Teilmengen verkleinerte Kopien des Ganzen sind.
- ***Skaleninvarianz***
  siehe ***C.1.2. Skaleninvarianz***
  Die Eigenschaft der Skaleninvarianz liegt dann vor, wenn die signifikanten Werte eines Objektes oder eines Zustandes unabhängig von der zur Betrachtung gewählten Vergrößerung im Wesentlichen gleich bleiben.
- ***Struktur*** (lat. structura, *Bau, Zusammenfügung*)
  Eine Struktur ist ein Gefüge, das sich aus voneinander abhängen Einzelteilen zusammensetzt.
- ***Unterschied zwischen Rekursion und Iteration***
  In der Programmierung liegt der Unterschied zwischen Rekursion und Iteration in der Umsetzung der Wiederholung. Bei der Rekursion ruft sich die Funktion mit entsprechend veränderten Werten selbst erneut auf, während sich im Fall einer Iteration die Werte innerhalb von Schleifen verändern. Im ersteren Fall erfolgt die Wiederholung durch Ineinanderschachteln und im zweiten Fall durch Aneinanderreihen.
- ***zerklüftet***
  Zerklüftet bezeichnet eine gebrochene und unregelmäßige Oberfläche (z.B. eine durch Furchen und Spalten durchzogene Landschaft).

Nomenklatur

A	Abbildungsmatrix
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlenebene
D_B	Box-Counting-Dimension
D_F	Fraktale Dimension
D_H	Hausdorff-Besicovitch-Dimension
D_S	Selbstähnlichkeitsdimension
D_T	Topologische Dimension
D_Z	Zirkel-Dimension
ε	Einheitslänge
$f_c(z)$	Die vom komplexen Parameter c abhängige Abbildung f_c
F	Lineare Abbildung
F	Menge der Funktionen $F = \{g_1, g_2, \dots g_n\}$
F_i	Flächeninhalt nach der i-ten Iteration
$g_{i(x,y)}$	Funktion
H	Hurst-Exponent
$\Delta r_{i,j}$	Maximalen Differenz des Ausschlags der i-ten Iteration an der j-ten Periode (Anzahl der Perioden = N_i)
l_i	Teillänge (Abschnittslänge) der i-ten Iteration
K	Kompakte Menge $K \in \mathbb{R}^d$
K	Grenzfigur
L_i	Gesamtlänge nach der i-ten Iteration
λ	Skalar
N_i	Anzahl der Elemente der i-ten Iteration
O_i	Oberfläche nach der i-ten Iteration
P	Produktionsregel $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ der L-Systeme
Φr_i	Durchschnittliche Differenz des Ausschlags der i-ten Iteration
R^2	Bestimmtheitsmaß
s	Reduktionsfaktor, Skalierungsfaktor
S	Endliche Anzahl kontrahierender Abbildungen $S = \{S_1, S_2, \dots S_n\}$
S_i	Standardabweichung der Zeitreihe (*Rescaled-Range-Analysis* – R/S Analysis)
v	Translationsvektor (Verschiebevektor)
V_i	Anzahl der Varianten einer bestimmten Iteration i
V_i	Volumen nach der i-ten Iteration
W	Hutchinson Operator
ω	Verkleinerungsfaktor bei der Mittelpunktverlagerung
z	komplexe Zahl der Form $a + bi$.

LEBENSLAUF

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Vienna, November 19th, 2013

Curriculum Vitae

Name	Dipl.Ing. (Arch.) Wolfgang E. Lorenz
Organisation	Institute of Architectural Sciences Digital Architecture and Planning
Address	A-1040 Vienna; Treitlstraße 3/1
Telephone	+43(1)58801/27223
Email	lorenz (at) iemar.tuwien.ac.at
Website	www.iemar.tuwien.ac.at

Date of Birth	August 30th, 1972	
Place of Birth	Vienna	
Education	1990	High school degree.
	1997	B.A., Architecture, Vienna University of Technology.
	2003	M.A., Architecture, at the same university; Thesis: *Fractals and Fractal Architecture*.
Experience	1993-2002	Architecture offices, architectural technical drawing agency, local construction management, electric company, steel-construction company.
	since 1998	Advertising graphic designer.
	since 2006	Service provider for information technology.
Academic Career	2004-2008	Scientific research associate at the Vienna University of Technology, Institute of Architectural Sciences, Digital Architecture and Planning.
	since 2008	University Lecturer and Researcher at the same department.
Research Areas	focusing on	The investigation and elaboration of applying the concept of fractal geometry to architecture; Agent-based simulation in early-stage design.
Lecture Topics	selected	Fractal geometry and architecture; Visual Basic for Application: (computer) programming for architects; Simulations in NetLogo.
Selected Workshops	2010	W.E. Lorenz, G. Wurzer: *Build the Code – Programming for Architects* (Workshop); in: *Setting the Stage for the Build the Code Workshop 2010*; ITÜ, Istanbul; 28 pages.
	2011	G. Wurzer, W.E. Lorenz: *Agents In Archeology 2011 – NetLogo* (Workshop); in: *Agents In Archeology '11 - website*; Vienna; 86 pages.
	2012	G. Wurzer, W.E. Lorenz: *Build The Code Workshop 2012, Bialystok* (Workshop); Bialystok, Poland.
Journal Articles	2003	W.E. Lorenz: *Die Pfarre Maria Lourdes (in German);* Meidling Blätter des Bezirksmuseums, No. 58; Vienna; 64 pages.

Keynote Lecture

2005 W.E. Lorenz, T. Elezkurtaj: *Evolutionary Algorithms and Fractal Geometry in Architectural Design* (Talk); University of East London.

2008 W.E. Lorenz: *Die Architektur der Pfarrkirche Maria Lourdes;* Hauptvortrag zum 50 Jahr-Jubiläum der Pfarrkirche Maria Lourdes, 1120 Wien;

Book Contributions

2010 W.E. Lorenz: *Die Fraktale Dimension als Verbindung zwischen Fraktaler Geometrie und Architektur (in German);* in: *Bionik – Innovation und Qualifikation*; BMVIT [ed.]; Vienna; page 92.

2011 W.E. Lorenz: *Fractal Geometry of Architecture: Fractal Dimension as a Connection Between Fractal Geometry and Architecture*; in *Biomimetics – Materials, Structures and Processes. Examples, Ideas and Case Studies; Series: Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering*; Series Editor Claus Ascheron; Springer; Heidelberg Dordrecht London New York; pages 179-200.

Selected Publications

2003 W.E. Lorenz: *Fractals and Fractal Architecture* (Talk); in: *archdiploma 2003*; Kunsthalle Project Space; Vienna; pages 94/95.

2004 W.E. Lorenz: *Fractal Geometry and Architectural Quality* (Talk); in: *First International Conference on Fractal Foundations for 21st Century Architecture and Environmental Design*; Madrid; CD-Rom, 3 pages.

2005 W.E. Lorenz, T. Elezkurtaj: Aedas: *Evolutionary Algorithms and Fractal Geometry in Architectural Design* (Talk); Aedas Architects, London.

2009 W.E. Lorenz: *Fractal Geometry of Architecture: Implementation of the Box-Counting Method in a CAD-Software* (Talk); in: *Computation: The new realm of architectural design*; 27*th* eCAADe; Istanbul; pages 697-704.

2010 W.E. Lorenz: *Fractal Architecture* (Talk); ITÜ, Istanbul.

2011 G. Wurzer, S. Alacam, W.E. Lorenz: *How to Teach Architects (Computer) Programming* (Talk); in: *Proceedings of eCAADe 2011*; Ljubljana; pages 51-56.

2012 G. Wurzer, W.E. Lorenz, M. Pferzinger: *Pre-Tender Hospital Simulation Using Naive Diagrams As Models*; in: *Proceedings of the International Workshop on Innovative Simulation for Health Care 2012*; Vienna; 6 pages.

2012 W.E. Lorenz: *Estimating the Fractal Dimension of Architecture: Using two Measurement Methods implemented in AutoCAD by VBA* (Talk); in: *Proceedings of eCAADe 2012 – Digital Physicality | Physical digitality*; Prague; pages 505-513.

2012 G. Wurzer, W.E. Lorenz, N. Popov: *Meeting Simulation Needs of Early-Stage Design through Agent-Based Simulation*; in: *Proceedings of eCAADe 2012 - Digital Physicality | Physical digitality*; Prague; pages 613-620.

2013 G. Wurzer, W Lorenz: *From Quantities to Qualities in Early-Stage Hospital Simulation*; in: *Proceedings of the International Workshop on Innovative Simulation for Health Care 2013*; Athens; 6 pages.

2013 W Lorenz: *Combining complexity and harmony by the box-counting method - A comparison between entrance façades of the Pantheon in Rome and Il Redentore by Palladio* (Talk); in: *Proceedings of eCAADe 2013 – Computation and Performance*; Delft; pages 667 - 676.