Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN

Heft 35

Lokale Schwerfeldmodellierung unter Berücksichtigung spektraler Methoden zur Geländereduktion

von
R. WEBER

Veröffentlichung des Institutes für Theoretische Geodäsie u. Geophysik
Abt. Geodäsie

Geowiss. Mitt.
35, 1990

Wien, im März 1990

Studienrichtung Vermessungswesen
Technische Universität Wien

GEOWISSENSCHAFTLICHE
MITTEILUNGEN

Heft 35

Lokale Schwerfeldmodellierung unter Berücksichtigung spektraler Methoden zur Geländereduktion

von
R. WEBER

Veröffentlichung des Institutes für Theoretische Geodäsie u. Geophysik
Abt. Geodäsie

Geowiss. Mitt.
35, 1990

Wien, im März 1990

Herausgeber und Verleger: o.Prof.Dipl.Ing.Dr.techn. K.Bretterbauer
Leiter der Abteilung für Geodäsie
des Instituts für Theoretische Geodäsie und Geophysik
der Technischen Universität Wien
A-1040 Wien, Gußhausstraße 27-29

Die Kosten für den Druck wurden aus der ordentlichen Dotation des Institutes für Theoretische Geodäsie und Geophysik der TU-Wien getragen.

Druck: HTU- Wirtschaftsbetriebe Ges.mbH
1040 Wien
Auflage: 150 Stück

KURZFASSUNG

Das vorrangige Ziel dieser Arbeit lag in der Erstellung einer möglichst detaillierten Störfeldstudie im Raume Nordtirols. Die im Zuge dieser Aufgabenstellung auftretenden Problembereiche wie die präzise Erfassung der Terrainkorrektur im Hochgebirge und das stochastische Verhalten des Schwerefeldes bei Vorgabe eines einzigen Typs von Funktionalen desselben wurden zu zentralen Themen der vorliegenden Untersuchung.

Es werden vorerst die in den letzten Jahren stark favorisierten spektralen Methoden (FFT) zur raschen Ermittlung des Geländeeinflusses auf gemessene Restfeldgrößen diskutiert. Umfassende Testrechnungen in topographisch stark bewegten Regionen mit engmaschigen Höhenmodellen (25m bis 1km) zeigen die Gleichwertigkeit der Ergebnisse mit jenen der herkömmlichen Prismenintegration bei extremer Rechenzeiteinsparung. Als Basis einer wirtschaftlichen Berechnung der Terrainkorrekturgrößen für Ingenieurprojekte (Tunnelnetze, Überwachungsnetze, etc; mit $\sigma_{\text{Richtung}} < 1''$) sollte im gebirgigen Gelände ein Höhenraster mit einer Maschenweite von 250m bis 500m dienen. Die Berücksichtigung der erweiterten Kondensationslösung (Approximation 3.Ordnung) wird bei geforderten Genauigkeiten von besser als 0.5" (ohne detailliertes Dichtemodell) für Lotabweichungskomponenten empfohlen.

Ein weiterer Schwerpunkt liegt in der näheren Behandlung zweier wohlbekannter Kovarianzmodelle (Reilly, Tscherning-Rapp) als stochastische Grundlage der häufig in Verwendung stehenden Interpolationstechniken wie Prädiktion und Kollokation. Die Anpassung dieser Modelle zur Beschreibung des terrainkorrigierten Störfeldes gelingt sowohl im lokalen Bereich eines 4500 km^2 großen Gebiets der Tiroler Alpen, wie auch regional für das gesamte Bundesgebiet. Abschließend wird ausgehend von den einzig auf Lotabweichungsdaten basierenden obengenannten lokalen Kovarianzfunktionen (KF) jene der Schwereanomalien hergeleitet und mit der empirischen Funktion einer g-Meßwertreihe verglichen. Die praktisch identen Ergebnisse bestätigen diesen schon bei der Berechnung des österreichischen Geoids eingeschlagenen Lösungsweg und ermutigen zum Einsatz in kleinräumigen Projekten bei Vorlage des weitgehend flächendeckenden österreichischen Lotabweichungsnetzes.

Abstract:

The main object of the present investigation was to study the local gravity field in the northern part of Tyrol. The occurring major problems like a precise computation of the terrain correction in extremly rugged topography and the stochastic behaviour of functionals of the disturbing potential were discussed in detail.

Two chapters deal with the well known spectral methods (FFT) ,as outlined by R.Forsberg et al.,to calculate the terrain effects on measured deflections of the vertical and on gravity values. Various test computations in mountainous regions using dense height grids (25m to 1km spacing) show the identity of the results obtained either from the very time consuming conventional prism integration or from FFT. An economic calculation of the correction terms used in control networks e.g. deformation analysis ($\sigma_{dir} < \pm 1''$) should be based on digital height models with a grid width from 250m to 500m .In order to obtain an accuracy higher than 0.5" for deflection components in hilly areas (without detailed density information) the use of the extended condensation solution (third order approximation) is recommended.

Further, a closer view is taken on two covariance functions (Reilly, Tscherning-Rapp) to describe the stochastic behaviour of the disturbing potential in the prediction or collocation model. The parameters of these two covariance models ,mentioned above, are selected by means of an iteration process to fit the empirically determined functions.The covariance function for Δg-values in the northern part of Tyrol was derived solely based on vertical deflections and compared with an empirical model of gravimetric measurements. The good agreement of the results show that on basis of the well distributed Austrian vertical deflection net this way of covariance determination is well suited both for fixing the whole Austrian geoid and for describing the local behaviour of the gravity field.

Danksagung

An dieser Stelle sei allen jenen gedankt, durch deren Mithilfe diese Arbeit entstehen konnte.

Prof. Dipl.Ing. Dr. K. Bretterbauer danke ich für die stete Unterstützung und seinen Zuspruch die Arbeit zügig voranzutreiben.Prof. Dipl.Ing. Dr.H.Schmid sei für die Übernahme des Koreferates herzlich gedankt*. Besonderen Dank habe ich speziell an Prof. Dr. G.W. Hein (München) zu richten, der einerseits für die Anregung zu dieser Arbeit sorgte und andererseits mit Kommentaren und konstruktiver Kritik anläßlich des diesjährigen Besuchs in Wien sein reges Interesse am Fortgang bekundete. Meinen Kollegen bin ich ebenso für Diskussionen und Hinweise zu Dank verpflichtet,wie der Abteilung K2 (Grundlagenmessung) des Bundesamtes f. Eich- und Vermessungswesen (Dr. Ruess) für die Bereitstellung eines ausgewählten Schweredatensatzes.

* Diese Arbeit ist eine approbierte Dissertation, welche bei der Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Wien zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften eingereicht wurde.

INHALTSVERZEICHNIS

A. Grundlagen

A.a	Überblick	1
A.b	Geoid oder Telluroid	1
A.c	Parameter des Störfeldes	6
A.d	Interpolationstechniken	15

B. Lokale Kovarianzmodelle

B.a	Überblick	20
B.b	Das Tscherning-Rapp Modell	22
B.c	Die Funktion von Reilly	26

C. Die Fouriertransformation

C.a	Überblick	31
C.b	Das Fourierintegral	31
C.c	Die diskrete Fouriertransformation	32
C.d	Eigenschaften der Fouriertransformation	37
C.e	Faltung und Korrelation	43
C.f	Die schnelle Fouriertransformation (FFT)	46
C.g	Randeffekte	48
C.h	Rasterschachtelung	52

D. Topographische Korrektur

D.a	Überblick	55
D.b	Die Terrainkorrektur mittels FFT	57
D.c	Die Lotabweichungskorrektur	59
D.d	Höhenkorrekturfaktor	60
D.e	Approximation höherer Ordnung	61
D.f	Bikubische Splines	63

E. Lokale Studie Tirol

E.a	Die Meßkampagne	65
E.b	Terrainkorrektur im Hochgebirge (FFT oder Prismenintegration?)	67
E.c	Analyse der Filterfunktionen	75

E.d CPU-Zeitvergleich 77
E.e Kovarianzfunktion - Modellanpassung 78
E.f Statistische Betrachtungen des österreichischen Lotabweichungsfeldes 93

F. Zusammenfassung und Ausblick 96

Anhang A Reilly - Modell 98
Auto- und Kreuzkovarianzen
Anhang B Unterprogramm "EDGE" 100

Literaturverzeichnis

A. Grundlagen

a) Überblick

Die Bestimmung der Figur, sowie des Schwerefeldes der Erde sind die zentralen Anliegen im weiten Spektrum geodätischer Fragestellungen. Dabei bewegen sich die auf rein geometrischen Wege lösbaren Vermessungsaufgaben entweder in zwar hochpräzisen aber sehr kleinräumigen Netzen oder benötigen auf Grund geringer Genauigkeitsanforderungen keine zusätzlichen physikalischen Parameter ihres Bezugssystems. Die überwiegende Zahl geodätischer Beobachtungen ist jedoch untrennbar an das Schwerefeld gebunden. Somit ist die Kenntnis desselben nicht rein von wissenschaftlichen Interesse, sondern eine unabdingbare Notwendigkeit zur Abbildung von Meßgrößen (Horizontalrichtungen, Zenitdistanzen, orthometrische Korrektur des Nivellements etc.) in analytisch einfach handhabbare Systeme.Die zusätzlich in immer stärkerem Maße Eingang findenden Satellitenverfahren (GPS) wären großräumig ohne Modell des Schwerefeldes und der damit verbundenen Möglichkeit Satellitenbahnen mit geeigneter Präzision festzulegen von geringerer Bedeutung.Desweiteren sind Transformationen zwischen den unterschiedlichen Bezugssystemen geodätischer Messungen ohne Kenntnis bestimmender Größen des Erdschwerefeldes größtenteils undenkbar. Es sei hier als Beispiel nur an die Umwandlung der direkt aus Satellitenbeobachtungen gewonnenen ellipsoidischen Höhen in orthometrische Höhen bzw. in Normalhöhen gedacht. Last not least wäre noch der Aspekt des Schwerefeldes als Teil der Schnittstelle zu anderen Geowissenschaften (Geophysik, Geologie,..) und der damit verbundene permanente Informationsaustausch zu erwähnen, der für alle beteiligten Forschungszweige nur von Vorteil sein kann.

b) Geoid oder Telluroid

Die Festlegung des Geoidverlaufs, also nach Gauß jener Potentialfläche des Erdkörpers, welche der mittleren Meeresoberfläche entspricht, verhilft uns leider weder zu einer analytisch darstellbaren Referenzfigur noch ist sie im Erdinneren voraussetzungsfrei möglich. Somit läßt sich das innere Schwerefeld nur indirekt durch Reduktion der Schwere bei Kenntnis des Gesteinsdichtemodells ableiten. Daß trotzdem in letzter Zeit wieder vermehrt Anstrengungen unternommen werden,diese spezielle Potentialfläche lokal auf

($\approx 10^{-6}$; cm/10km) und regional auf ($\approx 5 \cdot 10^{-7}$; 5cm/100km) festzulegen liegt z.B im Zusammenhang zwischen den durch trigonometrisches Nivellement gewonnenen Höhendifferenzen und den geometrischen Höhenunterschieden, welche durch Undulationsdifferenzen miteinander verknüpft sind. Ebenso dienen die Geoidhöhen über dem Bezugsellipsoid zur exakten Reduktion von Meßgrößen auf das Ellipsoid oder sind zur Beschreibung geodynamischer Vorgänge von Interesse.

Molodensky versuchte die Schwierigkeiten bei der Annahme eines Dichtegesetzes im Erdinneren entlang der Lotlinie zu umgehen und definierte das Quasigeoid als Bezugsfläche seiner Normalhöhen bzw. das Telluroid, dessen Abstand vom Oberflächenpunkt als Höhenanomalie bezeichnet wird (Abb. 1). Im Gegensatz zum Geoid sind das Quasigeoid, welches durch Auftragen der Höhenanomalie über dem Ellipsoid gewonnen wird, und das Telluroid natürlich keine Niveauflächen und haben auch sonst keine physikalische Bedeutung. Heute ergänzen sich die Theorien von Gauß, Helmert, Bruns oder Molodensky und sind aus augenblicklicher Sicht gleich aktuell. (Abb.1)

Die Beschreibung des Schwerefeldes in nur wenigen km^2 großen Gebieten bis hin zu Bereichen von maximaler Ausdehnung in der Größenordnung des österreichischen Staatsgebiets zählt zu den zentralen Anliegen dieser Arbeit. Dabei werden wir uns im wesentlichen mit einem Restfeld des Gravitationspotentials , dem Störpotential T und seinen ersten Ableitungen im Aufpunkt P sowie den Abständen der Höhenreferenzflächen vom Bezugsellipsoid (N ... Geoidundulation, ζ ... Höhenanomalie) beschäftigen.

In der klassischen Bestimmung wird das Geoid (Niveaufläche $W = W_o$) durch seine Abweichung zum Bezugsellipsoid (Niveaufläche $U = U_o$) festgelegt, die wir mit N bezeichnen. Setzt man , wie üblich, W_o und U_o ident, so entspricht nach Bruns

$$N = \left(\frac{T}{\gamma}\right)_{Q_o} \qquad (A.1)$$

wobei γ die ellipsoidische Normalschwere und

$$T = W - U \qquad (A.2)$$

das Störpotential bezeichnen.

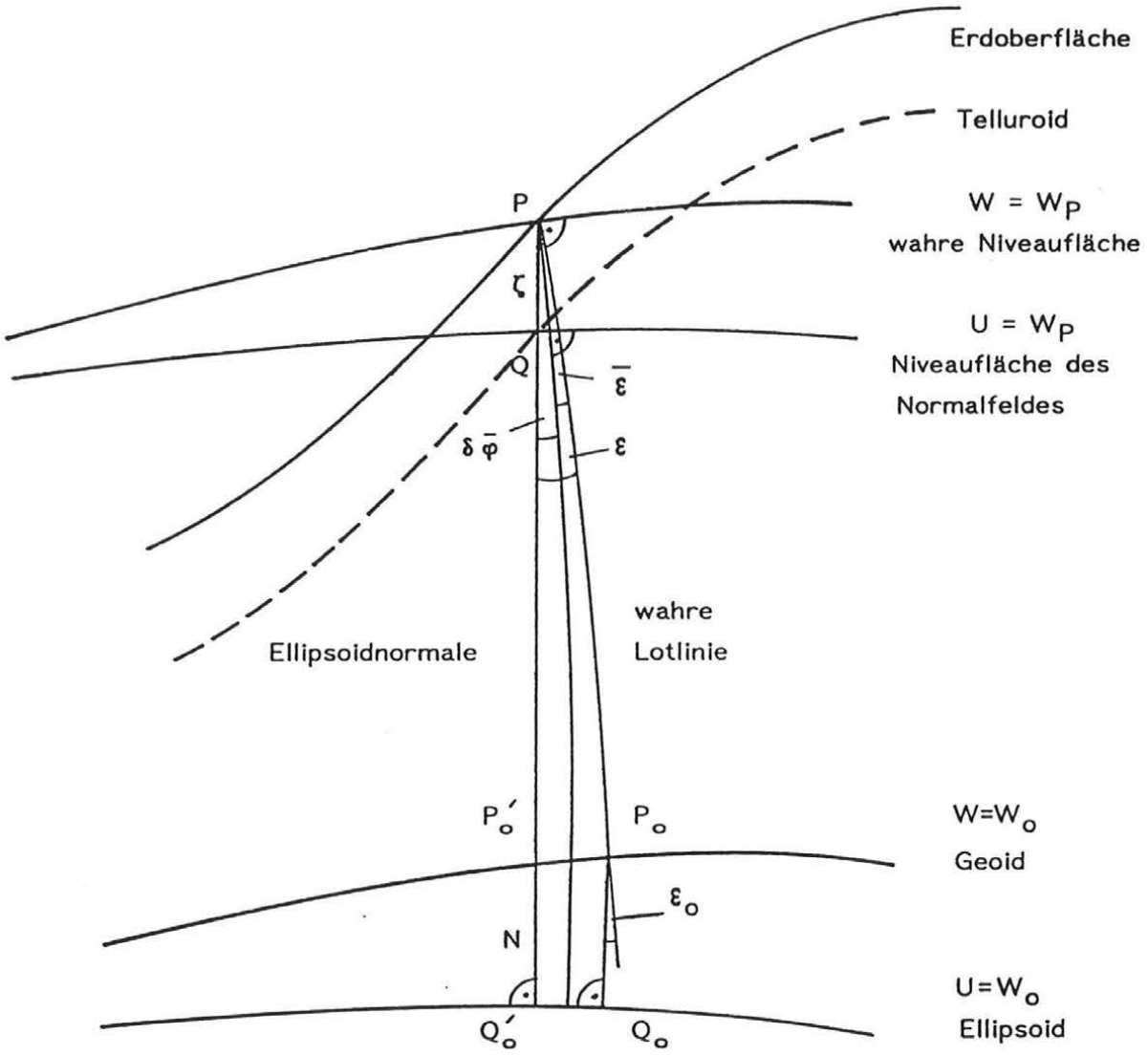


Abb. 1

Als Schwereanomalie im klassischen Sinn ist Δg_o im Meeresniveau durch

$$\Delta g_o = g(P_o) - \gamma(Q_o) \qquad (A.3)$$

definiert, wobei natürlich das Problem auftritt, den Oberflächenschwerewert rechnerisch mittels Massenverlagerungen in die Höhe Null zu reduzieren. Bilden wir den Winkel zwischen der Ellipsoidnormalen und der natürlichen Lotlinie im Oberflächenpunkt, so folgen aus (A.4) die Oberflächenlotabweichungskomponenten.

$$\xi = \varphi - B \qquad \eta = (\lambda - L)\cos B \qquad (A.4)$$

B,L ... ellipsoidische Koordinaten von P

φ,λ ... astronomische Koordinaten von P

Analog gilt für die Werte am Geoid (Index $_o$)

$$\xi_o = \varphi_o - B \qquad \eta_o = (\lambda_o - L)\cos B \qquad (A.5)$$

wobei über die wahre Lotkrümmung $d\varphi, d\lambda$ als Differenz

$$d\varphi = \varphi_o - \varphi \qquad d\lambda = \lambda_o - \lambda \qquad (A.6)$$

auf Grund von Massenunregelmäßigkeiten ohne umfassende Dichteinformation keine exakte Aussage getroffen werden kann. Sei ε_o die Lotabweichung im Azimut α

$$\varepsilon_o = \xi_o \cos\alpha + \eta_o \sin\alpha \qquad (A.7)$$

so liefert die bekannte Beziehung

$$dN = -\varepsilon_o \, ds \qquad (A.8)$$

Undulationdifferenzen. Arbeiten wir mit den Oberflächenwerten ε,

$$dN = -\varepsilon \, ds - OK \qquad (A.9)$$

so ist die orthometrische Korrektur OK entlang des betrachteten Profils zu berücksichtigen. Die differentielle Beziehung für OK ausführlich angeschrieben und in (A.9) eingesetzt ergibt

$$dN = -\varepsilon \, ds + \frac{H}{\bar{g}} d\bar{g} - \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} dH \qquad (A.10)$$

Hier liegt einer der Ansatzpunkte für die Arbeiten Molodenskys. Die Größe $\bar{g}$ entspricht dem integralen Mittelwert der Schwere in der Lotlinie und ist demnach nicht hypothesenfrei zu bestimmen. Molodensky führt die Höhenanomalie ζ als Abstand des Oberflächenpunktes zum Telluroid ein.

$$\zeta = \left(\frac{T}{\gamma}\right)_Q \qquad (A.11)$$

Die Analogie zur Geoidundulation zeigt sich jedoch noch stärker, wenn wir ζ vom Ellipsoid aus auftragen und die neu gewonnene Fläche als Quasigeoid bezeichnen. Das Gegenstück zur orthometrischen Höhe H bei Helmert liefert nun die Normalhöhe NH und es gilt für die ellipsoidische Höhe h des Ober-

flächenpunkts P

$$h = N + H = \zeta + NH \qquad (A.12)$$

Die Schwereanomalie Δg bildet Molodensky nach

$$\Delta g = g(P) - \gamma(Q) \qquad (A.13)$$

wobei γ vorerst vom Ellipsoid in die Höhe des Punktes Q zu transferieren ist. Desweiteren führen wir analog zu (A.6) anstelle der wahren Lotkrümmung die normale Lotkrümmung $d\bar{\varphi}$, $d\bar{\lambda}$ ein.

$$d\bar{\varphi} = B - \bar{\varphi} \qquad d\bar{\lambda} = L - \bar{\lambda} \qquad (A.14)$$

Die normale Lotlinie ist eine regelmäßig gekrümmte Kurve, die in jedem ihrer Punkte den normalen Schwerevektor γ als Tangente besitzt. Somit sind $d\bar{\varphi}$, $d\bar{\lambda}$ problemlos aus der analytischen Fortsetzung der Schwereformel des Bezugsellipsoids für die Höhe h zu errechnen

$$d\bar{\varphi} = 0.17'' \, h_{km} \sin 2\varphi \qquad (A.15)$$

und wegen der Rotationssymmetrie des Ellipsoids gilt $d\bar{\lambda} = 0$. Mit (A.4) und (A.14) läßt sich der Zusammenhang zwischen den dynamischen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und den geometrischen Lotabweichungskomponenten ξ, η herstellen (MORITZ, 1983).

$$\bar{\xi} = \varphi - \bar{\varphi} = \xi + d\bar{\varphi}$$

$$\bar{\eta} = (\lambda - \bar{\lambda}) \cos\varphi = (\lambda - L) \cos\varphi = \eta \qquad (A.16)$$

und

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\xi} \cos\alpha + \bar{\eta} \sin\alpha$$

Eine der Beziehung (A.9) entsprechende Gleichung für die Höhenanomalie gewinnt man aus (Abb. 2)

$$d\zeta = \frac{d\zeta}{ds} \, ds + \frac{d\zeta}{dh} \, dh \qquad (A.17)$$

mit

$$\frac{d\zeta}{ds} = -\bar{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{dh} = -\frac{g - \gamma}{\gamma} \qquad (A.18)$$

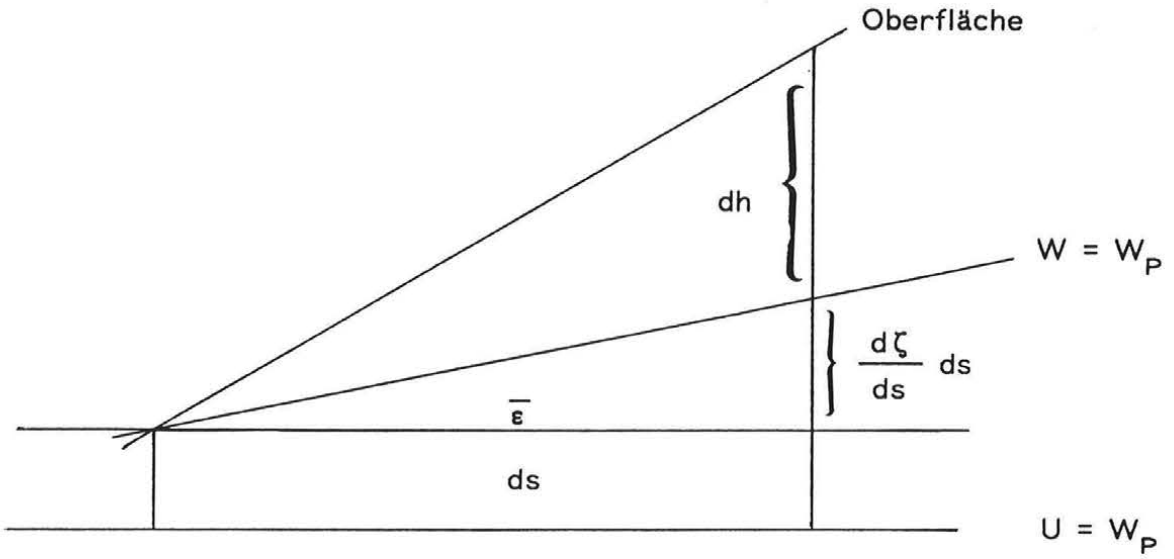


Abb.2

Somit wird (A.17) zu

$$d\zeta = -\bar{\varepsilon}\, ds - \frac{g-\gamma}{\gamma}\, dh \qquad (A.19)$$

und wir haben eine zu Gleichung (A.10) korrespondierende Beziehung gefunden,die nur gemessene bzw. voraussetzungsfrei berechenbare Größen enthält.

c) Parameter des Störfeldes

Die Möglichkeiten der Beschreibung lokaler bzw. regionaler Gegebenheiten des Schwerefeldes sind weit gestreut und damit unter Abschätzung des Aufwandes der jeweiligen Problemstellung anzupassen. In der überwiegenden Anzahl von Fällen wird wohl versucht ein dichtes Netz von Funktionalen des Störpotentials anzulegen und darin bei Bedarf zu interpolieren. Als Parameter kommen daher in Frage :

— **W , T** ... das Potential bzw. Störpotential
Geopotentielle Koten sind bislang in Österreich nur für Punkte der Hauptnivellementstrecken erhältlich. Mit dem Übergang auf das System orthometrischer Höhen wird sich dieser Zustand verbessern, wenngleich eine befriedigende Flächendekkung dieser Kombination aus Nivellement und Messung der Schwerebeschleunigung kurzfristig nicht zu erwarten ist.

— **Δg** ... die Freiluftanomalie

Durch sphärische Näherung der Differentialgleichung der physikalischen Geodäsie (HEISKANEN,MORITZ;1967)

$$\Delta g = \frac{dT}{dn} + \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dn} T \qquad (A.20)$$

(Fehler in der Größenordnung der Abplattung $\approx 1/300$) erhalten wir

$$\Delta g = - \frac{dT}{dr} - \frac{2}{R} T \qquad (A.21)$$

Zwischen den Freiluftanomalien und der zugehörigen Punkthöhe besteht ein ausgeprägter linearer Zusammenhang, dessen Ursache vor allem in der Nichtberücksichtigung topographischer Verhältnisse liegt. Auch bei diesen Schwereanomalien kann im österreichischen Bundesgebiet keineswegs von einer flächenhaften Verteilung gesprochen werden. Somit kommt eine einfache lineare Interpolation im Feld der vorhandenen Werte gerade bei den extremen topographischen Verhältnissen unseres Landes nicht in Betracht.

— **N,ζ** ... Geoidundulation , Höhenanomalie

Das Netz oder ein Schichtenplan der Geoidundulationen bzw. der Höhenanomalien des Arbeitsgebietes stellt normalerweise ein Endprodukt in der Schwerefeldbestimmung dar. Sie legen sowohl die Höhenreferenzfläche als auch den Betrag des Störpotentials für jeden Oberflächenpunkt fest. Das Theorem von Bruns

$$N = \frac{T_{Po}}{\gamma_{Qo}} \qquad (A.22)$$

liefert Geoidhöhen im Meeresniveau (ohne Berücksichtigung des indirekten Effekts Kogeoidhöhen —> siehe Topographie) bzw. Höhenanomalien an der Erdoberfläche. ζ errechnet sich aus der Reihe

$$\zeta = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad \text{mit} \quad T_P = T_{Po} + T_1 + \ldots \qquad (A.23)$$

Es stehen mehrere Möglichkeiten zur Beschaffung der N,ζ- Werte offen. Einerseits das astrogeodätische Nivellement, wobei für N

über die Lotabweichungen in Meereshöhe zu integrieren ist (A.7) und man ζ aus dem Integral der Oberflächenlotabweichung (A.19) erhält. Die Werte sind Relativhöhen, da Lotabweichungen blind in Bezug auf eine additive Konstante sind. Eine Berechnung mittels Kollokation liefert abhängig von den Eingabedaten entweder Relativwerte oder unter Berücksichtigung von a priori Höheninformation bezogen auf ein mittleres Erdellipsoid auch Absolutwerte für N und ζ . Der im Modell geforderte funktionale Zusammenhang zum Störpotential ist durch das Brun'sche Theorem (A.22) gegeben.

Absolute Geoidundulationen, bezogen auf ein mittleres Erdellipsoid gewinnt man aus dem Stoke' schen Integral,

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\alpha\,\psi} \Delta g \; S(\psi) \; d\psi \; d\alpha \qquad \text{(A.24)}$$

mit der Stoke'schen Funktion $S(\psi)$

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin(\psi/2) + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln(\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)) \qquad \text{(A.25)}$$

Es sind allerdings eine Reihe von einschränkenden Annahmen zu treffen.

1) Als Grenzfläche für das Geoid dient eine Kugel (geometrisch).

2) Zur Bestimmung einer einzigen Undulation sind über die gesamte Erdoberfläche verteilte Schwereanomalien (reduziert auf die Kugel) notwendig. Ihr Einfluß sinkt jedoch mit steigender Entfernung zum Aufpunkt.

3) Massen über dem Geoid müssen vorab durch Reduktion entfernt werden.

4) Das Potential des Referenzellipsoids U_o entspricht dem Potential des Geoids W_o

5) Die Masse des Referenzellipsoids = Erdmasse

6) Das Zentrum des Referenzellipsoids = Erdgravitationszentrum

Obwohl Formel (A.24) eine sphärische Näherung darstellt, ist bei der Berechnung der Schwereanomalie die theoretische Schwere in aller Strenge für das Referenzellipsoid zu bilden.
Es existieren eine Reihe von Arbeiten, deren Ziel es ist durch Veränderung der Stoke'schen Funktion einerseits die Unstetigkeitsstelle bei $\psi=0$ zu unterdrücken und andererseits den bestimmenden Einflußbereich der Δg-Werte (Kugelkappe um den Aufpunkt P; Radius ψ_0) möglichst klein zu halten. Hier sei unter anderem auf die Methoden von Meissl (MEISSL,1971) und Sjöberg (SJÖBERG,1986) verwiesen.

Folgen wir den Überlegungen Molodenskys, können die Stokes- Undulationen als eine 1.Approximation (ζ_0) der Höhenanomalie verstanden werden, wobei die Δg allerdings für den Oberflächenpunkt gelten und hypothesenfrei zu bilden sind.

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 + \ldots\ldots =$$

$$= \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\alpha\psi} \Delta g\, S(\psi)\, d\psi\, d\alpha + \qquad \text{(A.26)}$$

$$\frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\alpha\psi} G_1\, S(\psi)\, d\psi\, d\alpha + \ldots..$$

G_1 ist hierin eine Funktion der Geländeneigung $(h-h_p)/l = \tan\alpha$ der folgenden Gestalt

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\alpha\psi} \frac{h-h_p}{l^3} \left(\Delta g + \frac{3\gamma}{2R}\zeta_0\right) d\psi\, d\alpha \qquad \text{(A.27)}$$

Glieder höherer Ordnung können im allgemeinen unberücksichtigt bleiben.

Seit 1987 besitzt Österreich eine das gesamte Bundesgebiet abdekkende Geoidkarte (RINNER;1987). Die angebotene Lösung besitzt ≈Dezimetergenauigkeit und stützt sich im wesentlichen auf einen Satz von über 700 Lotabweichungsmessungen. Da einzelne Projekte (z.B unter Einbeziehung von GPS-Messungen) höhere Anforderungen an die Relativgenaugkeit (± 1 cm) von Geoidhöhen stellen, sind

weiterhin Bestrebungen im Gange durch Einbeziehung zusätzlichen Datenmaterials (Schwereanomalien) und eines hochauflösenden Geländemodells der geforderten Präzision nahezukommen.

— **ξ, η ...** die Lotabweichungskomponenten
Sie charakterisieren als erste Ableitungen des Störpotentials

$$\xi = \frac{1}{\gamma R} \frac{dT}{d\varphi} \qquad \eta = \frac{1}{\gamma R \cos\varphi} \frac{dT}{d\lambda} \tag{A.28}$$

die Neigung der Niveauflächen gegen das Referenzellipsoid, gehen unmittelbar in die Reduktion von Meßgrößen ein und sind zudem vielfältig bestimmbar. Besonderes Augenmerk ist jedoch der jeweils verwendeten Bezugsfläche zu schenken.

1) Gravimetrische Lotabweichungen gewinnt man durch Differentiation der Stoke'schen Funktion (A.25) nach ψ.

$$\frac{dS}{d\psi} = -\frac{\cos(\psi/2)}{2\sin^2(\psi/2)} + 8\sin\psi - 6\cos(\psi/2) - 3\frac{1-\sin(\psi/2)}{\sin\psi} + 3\sin\psi \ln[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)] \tag{A.29}$$

(A.29) eingesetzt in (A.24) liefert die Funktion von Veining-Meinesz

$$\begin{Bmatrix} \xi_g \\ \eta_g \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi,\alpha) \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \frac{dS}{d\psi} \sin\psi \, d\psi \, d\alpha \tag{A.30}$$

Für ξ, η gelten ebenfalls die im vorigen Abschnitt gemachten Einschränkungen 1)-6). (A.30) stellt trotz der zu Beginn stehenden sphärischen Näherung die absolute Lotabweichung gegen ein mit der Erde massengleiches Referenzellipsoid dar. Geometrisch setzt (A.30) eine kugelförmige Erde ohne Topographie voraus.

2) Nach Molodensky sind die ξ, η an der Erdoberfläche unter Berücksichtigung der Topographie in Anlehnung an (A.26) durch folgende Reihe zu bilden.

$$\xi_p = \xi_o + \xi_1 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n$$

$$\eta_P = \eta_o + \eta_1 + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n$$

ξ_o, η_o erhält man aus (A.30) und ξ_1, η_1 nach

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{Bmatrix} = - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\alpha\psi} \frac{d\Delta g}{dr} (h-h_P) \frac{dS}{d\psi} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} d\psi \, d\alpha \qquad (A.31)$$

wobei für $\frac{d\Delta g}{dr}$ in 1.Näherung gilt:

$$\frac{d\Delta g}{dr} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\alpha\psi} \frac{\Delta g(Q) - \Delta g(P)}{|P - Q|^3} \, d\psi \, d\alpha \qquad (A.32)$$

3) Arbeitet man im Gegensatz dazu mit astrogeodätischen Lotabweichungen , beziehen sich diese meist auf ein willkürlich gewähltes Referenzellipsoid, das der jeweiligen Landesvermessung zu Grunde liegt, in Österreich also auf das Besselellipsoid. Ist die Lage dieses Bezugskörpers relativ zum Massenzentrum der Erde bekannt, können die relativen in absolute Lotabweichungen transformiert werden, deren Referenzkörper nun das mittlere Erdellipsoid ist. Ihr Vergleich mit den gravimetrischen Lotabweichungen läßt interessante Schlüsse über die Lagerung des Erdellipsoids zu und deckt systematische Fehler auf.Das österreichische Bundesgebiet wurde in den vergangenen Jahren mit einem oben angesprochenen Netz von etwa 700 Lotabweichungen mit einem mittleren Punktabstand von ca. 15km überzogen (RINNER,1987).In naher Zukunft ist geplant ein noch wesentlich engmaschigeres Netz auf der Grundlage eines hochauflösenden Höhenmodells zu erstellen,in dem einfach für jeden Punkt des Staatsgebietes interpoliert werden kann.Die folgenden Kapitel sollen zeigen,wie schon heute mit möglichst sparsamen Aufwand an Rechnerleistung und Eingangsdatenmaterial Lotabweichungskomponenten flächendeckend mit einer Genauigkeit von 0.5" ermittelt werden können.

– $T_{\varphi\lambda h}$ ...Tensor der 2.Ableitungen der Kräftefunktion(Schweregradienten) Die sechs unabhängigen Komponenten des Gradiententensors (Marussi-Tensor,Eötvös-Tensor) sind bislang nur terrestrisch durch aufwendige Drehwaagenmessungen zu bestimmen (HEIN,1981).

Versuche, die Gradienten aus gemessenen Schwerediffferenzenquotienten zu approximieren, führen wiederum nur zu relativen Genauigkeiten von einigen Eötvös (1E = 10^{-9} s^{-2}). Ein nach Grafarend (GRAFAREND; 1973) für differentialgeometrische Anwendungen, für die er eine Präzision von 10^{-2} E fordert, unbefriedigendes Ergebnis.

In den letzten Jahren wird verstärkt an der Entwicklung dynamischer Gradiometer gearbeitet, die in Satelliten wie in erdgebundenen Fahrzeugen Verwendung finden sollen. Alle Systeme beruhen auf der Beschleunigungsmessung von Prüfmassen, deren Anordnung allerdings von Gerät zu Gerät verschieden ist.Bislang konnte jedoch das Problem der Trennung von Eigenbeschleunigung des Fahrzeugs und jener des Erdschwerefelds nicht optimal gelöst werden. Zudem sei auf die extrem ortsgebundene Bedeutung des Gradiententensors hingewiesen. Bei bewegter Topographie ändern sich seine Komponenten derartig rasch, daß er aus heutiger Sicht kaum zur Beschreibung selbst sehr kleinräumiger Felder dient. Dies kann sich jedoch beim zukünftigen Einsatz mobiler und hochpräziser Gradiometer schlagartig ändern.

— Statistische Parameter

Die einerseits endliche Anzahl und andererseits räumlich regellose Verteilung von gemessenen Feldgrößen zwingt uns Algorithmen zu suchen,die eine mit möglichst geringen Fehlern behaftete Interpolation (Prädiktion) gestatten. Um dieses Problem mit statistischen Methoden lösen zu können, wird das Schwerefeld als stationärer stochastischer Prozeß auf der Kugel betrachtet. Damit setzt man einerseits voraus, daß die Anomalien (Abweichungen vom Normalfeld) über die ganze Erde im Mittel verschwinden und andererseits, daß die statistische Korrelation zwischen zwei Feldgrößen durch eine entfernungsabhängige Gesetzmäßigkeit, nämlich der Kovarianzfunktion,festgelegt ist. Die Kovarianz repräsentiert den durchschnittlichen Wert des Produktes zweier Anomalien im Abstand ψ.

$$\mathrm{cov}\ (\Delta a)_\psi = M\ (\Delta a\ \Delta a^*)_\psi \qquad M \ldots \text{Mittelwertoperator} \qquad (A.33)$$

$$K(\Delta a)_{\psi=0} = C\ (\Delta a) \quad = M\ (\Delta a^2) \qquad (A.34)$$

Die überragende Bedeutung der Kovarianzfunktion K ist nun darin

begründet, daß sie als Gesetzmäßigkeit nicht nur für einen Typ von Feldgrößen Gültigkeit besitzt, sondern nach gewissen Modifizierungen auf alle mit der Grundgröße a durch Funktionale L verbundenen Größen b,c,... anwendbar ist. (MORITZ, 1980)

Aus $b = L_1\, a(P)$

$c = L_2\, a(P)$

und $cov(b,a) = M(L_1\, a(P) * a(Q)) = L_1 M(a(P) * a(Q)) =$

$= L_1 K(P,Q)$

$cov(c,a) = L_2 K(P,Q)$

folgt

$$cov(b,c) = L_1 L_2\, K(P,Q) = L_1 L_2\, K(\psi_{PQ}) \qquad (A.35)$$

Demgemäß sprechen wir in (A.33) von Autokovarianz, in (A.35) von Kreuzkovarianz. Verschiedenste Funktionen wurden bislang auf ihre Brauchbarkeit als Kovarianzfunktion untersucht. Dabei wird vorerst zwischen globalen Modellen (Tscherning-Rapp) oder lokalen Modellen (Hirvonen, Gauß-Markoff, Reilly , Jordan u. Heller) unterschieden. Um das am besten geeignete Modell für einen speziellen Anwendungsfall herauszusuchen bedarf es genauso viel Fingerspitzengefühl und Erfahrung wie bei der nachfolgenden Parameteranpassung an die zuallererst nur empirisch gegebene Kovarianzfunktion. Wie wir noch ausführlich in Kapitel B sehen, spielen jedoch 2 Parameter, nämlich die schon bekannte Varianz C und die Halbwertsbreite ζ (Korrelationslänge; jener Abstand ψ in dem $C(\psi) = C(0)/2$ gilt) in allen Modellen eine wesentliche Rolle. In speziellen Fällen steht schon aus älteren Arbeiten ein Netz von Kovarianzen zur Verfügung, in dem äußerst zeitsparend interpoliert werden kann.

— Topographie

Die Frage, ob ein Modell der Topographie zu den beschreibenden Parametern einer Schwerefeldstudie gehört, wird wohl nicht einheitlich zu beantworten sein. Nach Meinung des Autors ist die

umfassende Höheninformation (vorzugsweise in Kombination mit einem detailierten Dichtemodell) z.B. in Form eines digitalen Rasters, ebenso wertvoll wie der Satz der gemessenen Feldgrößen. Geländemodelle dienen in erster Linie zur Glättung und Reduktion der Meßwerte, also zur Elimination hochfrequenter Anteile, die eine gesicherte Interpolation im Feld der Oberflächengrößen verhindern. Die nach Berücksichtigung der Geländewirkung neu geschaffenen ruhigen Interpolationsflächen (z.B.Cogeoid) entsprechen allerdings nicht immer wahren physikalischen Grenzflächen. Deshalb ist man bemüht nach erfolgreicher Prädiktion den Geländeeinfluß in umgekehrter Weise wieder in Rechnung zu stellen. Ausdehnung und Maschenweite des verwendeten Höhenrasters sind dem Anwendungsfall und den geforderten Genauigkeitsansprüchen anzupassen. So ermittelt Gerstbach (GERSTBACH; 1988) auf der Grundlage der Höheninformation der österreichischen Karte 1:500 000 Lotabweichungskomponenten auf $\pm 1"-2"$, indem er die Topographie durch geeignete Regelkörper (z.B. Prismen) ersetzt.

Verfahren wie die Quaderintegration oder die in Kapitel C vorgestellten spektralen Reduktionsmethoden arbeiten mit wesentlich engmaschigeren Netzen in Aufpunktnähe (Rasterweite von 25m-500m). Die durch große zu verarbeitende Datenmengen erkauften Genauigkeiten liegen im Bereich einiger Zehntelbogensekunden für ξ- und η-Komponenten und bei ± 1 mgal für Δg, wobei die verbleibenden Restfehler meist auf Unsicherheiten in der Dichteinformation und auf systematische Höhenfehler zurückzuführen sind.

In Österreich liegt Höheninformation in 11 Rasterweiten für das gesamte Bundesgebiet vor. Der gröbste Raster R11 teilt eine Fläche von 1x1 Grad im Verhältnis 3:5 (20' x 12'). Ein Element im feinsten Raster R1 entspricht einer Größe von ca. 22m x 24m, womit auch im extremen Hochgebirge das Auslangen gefunden wird (RUESS; 1986).

d) Interpolationstechniken

Ziel der Interpolationsrechnung ist im allgemeinen die Verdichtung von Funktionswerten bei bestmöglicher Darstellung des vorhandenen Datenmaterials. Trennen wir begriffsmäßig Approximation von Interpolation,so sei unter Approximation die Näherung z für die gegebene Funktion f mit Berücksichtigung einer Minimumsnorm, z.B.

$$\| \int_a^b [\, f(x) - z(x) \,]^2 \, dx \, \| = \min \qquad \text{(A.36)}$$

(least-square Approximation)
verstanden, unter Interpolation die möglichst realistische Darstellung des Funktionsverlaufs zwischen zwei oder mehreren Stützpunkten. So vielseitig die Probleme der Einschaltung von Funktionswerten sind, so reichhaltig wurden auch Verfahren ersonnen, um sie zu lösen. Ausgehend von der linearen Interpolation über Chebyshev-Polynome, Approximation durch Potenzreihen oder mittels finiter Elemente, über n-dimensionale Splines und Prädiktion (Interpolation nach kleinsten Quadraten) bis zur Kollokation reicht ohne Anspruch auf Vollständigkeit der weite Bogen der in der Geodäsie eingesetzten Verfahren. Ein allgemein bester Algorithmus kann nicht angegeben werden. Vielmehr ist der aktuellen Problemstellung angepaßt eine Auswahl zu treffen.
Häufig läßt sich der Funktionsverlauf sehr realistisch durch kubische Splines beschreiben. Sie stellen sich als stückweise Aneinanderreihung 2-mal stetig differenzierbarer kubischer Polynome dar, wobei die ersten beiden Ableitungen an den Nahtpunkten benachbarter Polynome ident gesetzt wird. Kubische Splines sind für ihren glatten Verlauf und stabiles Verhalten bekannt (kein extremes Ausschwingen wie es bei der Polynominterpolation auftritt). Sie sind zudem keineswegs nur an eindimensionale Interpolationsaufgaben gebunden. Bildet man das Produkt zweier in den ebenen Hauptachsenrichtungen definierten Polynome S(x) und S(y), so erhält man einen bikubischen Spline S(x,y) der eine flächenhafte Interpolation gestattet. (Kap. D.f)

Im folgenden wollen wir uns etwas näher mit dem im letzten Jahrzehnt in der Geodäsie, vor allem im Bereich der Schwerefeldbestimmung, am meisten eingesetzten Ausgleichs- und Interpolationsverfahren, nämlich der Kollokation beschäftigen. Man geht von der Funktion f(x, y, z,T, ...) = f(P) aus , die durch eine Linearkombination z(P) der Basisfunktionen $z_K(P)$ zu approximieren sei, wobei die zugehörigen Koeffizienten a_K eine Minimumsbedingung erfüllen sollen.

$$z(P) = \sum_{k=1}^{n} a_K \; z_K(P) \qquad (A.37)$$

Im Falle der Interpolation wird diese Bedingung durch den Zwang ersetzt die vorgegebenen Funktionswerte f_i zu reproduzieren.

$$z(P_i) = \sum_{k=1}^{n} a_K \; z_K(P_i) = f_i \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (A.38)$$

n = Anzahl der Stützstellen

In der Matrixnotatation $z_k(P_i) = \underline{Z}_{ik}$ bekommt (A.38) die Gestalt

$$\underline{Z}\;\underline{a} = \underline{f} \qquad (A.39)$$

und der gesuchte Koeffizientenvektor $\underline{a}$ ergibt sich unter der Vorraussetzung Rang $\underline{Z} = n$ zu

$$\underline{a} = \underline{Z}^{-1}\;\underline{f} \qquad (A.40)$$

Im Fall der Kollokation stellt sich uns ein ähnliches Problem. Diesmal sind Funktionale L_i von f(P) wiederzugeben.

$$l_i = L_i\; f \qquad i= 1,2,\ldots,n \qquad (A.41)$$

Somit folgt aus (A.38)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \; L_i \; z_k = l_i \qquad (A.42)$$

und in Matrixnotation $L_i\; z_k = \underline{Z}_{ik}$ erhalten wir wieder die Lösung (A.40).

$$\underline{Z}\;\underline{a} = \underline{l} \quad \text{---->} \quad \underline{a} = \underline{Z}^{-1}\;\underline{l} \qquad (A.43)$$

Man sieht, die Interpolation ist nur ein Spezialfall der Kollokation.

Bislang wurde noch keine nähere Spezifikation der Basisfunktionen z getroffen. Wählt man sie in der Form

$$z_k(P) = K(P,P_k) \qquad (A.44)$$

wobei K eine symmetrische positiv definite Funktion (Kernfunktion) der Punkte P und Q, oder besser gesagt, des Abstands $s_{\overline{PQ}}$ der beiden Punkte darstellt: $K = K(s_{\overline{PQ}}) = K(P,Q)$

Somit ist auch die $n \times n$ Matrix $\underline{K} = \underline{K}_{ik}$ positiv-definit und in (A.43) ist $\underline{Z}$ durch $\underline{K}$ zu ersetzen.

$$\underline{K}\,\underline{a} = \underline{l} \quad \longrightarrow \quad \underline{a} = \underline{K}^{-1}\,\underline{l} \tag{A.45}$$

(A.44) eingesetzt in die Ausgangsbeziehung (A.37) liefert

$$z(Q) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, K(Q,P_k) \tag{A.46}$$

und mit (A.45)

$$z(Q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} K_{ik}^{-1}\, l_i\, K(Q,P_k) \tag{A.47}$$

Hierin steht Q für den neu zu interpolierenden Punkt, P_k für die Altpunkte. Schreiben wir (A.47) nochmals ausführlich an

$$z(Q) = [K(Q,P_1),\ldots,K(Q,P_n)] \begin{bmatrix} K(P_1,P_1) & \ldots\ldots & K(P_1,P_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K(P_n,P_1) & \ldots\ldots & K(P_n,P_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \tag{A.48}$$

und halten fest:

(A.48) beschreibt genau dann die Interpolation nach kleinsten Quadraten (Prädiktion), wenn K die Kovarianz der Beobachtungen gleichen Typs f ist. Ist K im erweiterten Fall die Kovarianz der Funktionale L=L(f) so stellt (A.48) das Minimalmodell der Kollokation nach kleinsten Quadraten dar. Zu beachten ist ,daß diese Herleitung ohne Minimumsnorm oder Überlegungen zum statistischen Verhalten der einzelnen Größen gelang. Diese sind jedoch in der Wahl von K als Kovarianzfunktion inkludiert. Im allgemeinen Kollokationsmodell

$$\underline{l} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{R}\,\underline{s} + \underline{n} \tag{A.49}$$

treten zu den soeben behandelten Funktionalen $\underline{R}\,\underline{s}$ (Funktionale des Störpotentials; oft als Signale $\underline{s}$ bezeichnet) noch die Trendparameter $\underline{x}$ (Form-

matrix $\underline{A}$) und der Vektor der Meßfehler $\underline{n}$. $\underline{A}\underline{x}$ definiert den systematischen (nicht stochastischen) Teil der Beobachtungen $\underline{l}$, während $\underline{n}$ eine stochastische Größe darstellt, jedoch nicht im Sinn der Signale $\underline{s}$. Mehrfache Beobachtungen der gleichen Größe liefern zwar jeweils den selben s-Wert,jedoch im Rahmen der Meßgenauigkeit laufend verschiedene Meßfehler n. Für den Erwartungswert E(s) gilt also

$$E(s) = s \tag{A.50}$$

während für n per Definition

$$E(n) = 0 \tag{A.51}$$

gilt. Der Erwartungswert E für das globale Mittel M(s) bzw. M(n) ist jedoch in beiden Fällen Null. (M=Mittelwertoperator;homogen,isotrop,global)

$$EM(s) = 0 \qquad EM(n) = 0 \tag{A.52}$$

Das heißt, daß im lokalen Bereich die Signale vor Eingang in das Kollokationsmodell jedenfalls zu zentrieren sind!
Unter Berücksichtigung der Minimumsbedingung

$$n^T K_{nn}^{-1} n + s^T K_{ss}^{-1} s = \min \tag{A.53}$$

K_{nn} ... Kovarianzmatrix der Meßfehler
K_{ss} ... Kovarianzmatrix der Signale

erhält man die wohlbekannte Kollokationslösung für die Trendparameter $\underline{x}$

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \bar{\underline{K}}^{-1} \underline{A})^{-1} \; \underline{A}^T \bar{\underline{K}}^{-1} \underline{l} \tag{A.54}$$

und die Signale $\underline{s}$

$$\underline{s} = \underline{K}_{ss} \underline{R}^T \bar{\underline{K}}^{-1} (\underline{l} - \underline{A}\underline{x}) \tag{A.55}$$

mit $\bar{\underline{K}}$ als Summe der Kovarianzmatrizen.

$$\bar{\underline{K}} = \underline{K}_{nn} + \underline{R}\,\underline{K}_{ss}\,\underline{R}^T \tag{A.56}$$

Die Interpolation eines Funktionals t an beliebiger Stelle Q im Gebiet erfolgt durch

$$t_Q = \underline{k}_{st}\, \underline{R}^T\, \bar{\underline{K}}^{-1}\, (\underline{l} - \underline{A}\,\underline{x}) \qquad (A.57)$$

$\underline{k}_{st}$ ... Kovarianzvektor zwischen Q und den Altpunkten

Zur Genauigkeitsabschätzung der Parameter $\underline{x}$ und $\underline{s}$ benötigt man zudem die Fehlermatrizen $\underline{E}_{xx}$ und $\underline{E}_{ss}$

$$\underline{E}_{xx} = (\underline{A}^T\, \bar{\underline{K}}^{-1}\, \underline{A}^T)^{-1}$$

$$\underline{E}_{ss} = \underline{K}_{ss} - \underline{K}_{st}\underline{R}^T\, \bar{\underline{K}}^{-1}\, [\underline{I} - \underline{A}\,(\underline{A}^T \bar{\underline{K}}^{-1} \underline{A})^{-1} \underline{A}^T \underline{K}^{-1}]\underline{R}\,\underline{K}_{ts} \qquad (A.58)$$

Abschließend sei noch eine Abwägung der Vor- und Nachteile der Kollokationsmethode gestattet. Bei allen Problemen mit verschiedenartigen Eingangsdatentypen, in denen Genauigkeitsabschätzungen der Ergebnisse genauso gefordert werden wie die Möglichkeit, gleichzeitig für Neu- und Altpunkte verschiedenste Funktionale der Grundgröße zu interpolieren, wird sie mit Vorteil anzuwenden sein. Sind hingegen ein- bzw. zweidimensionale Funktionen über einem gleichmäßigen Raster gegeben und ist in diesem zu interpolieren, so geschieht dies wesentlich vorteilhafter mit bikubischen Splinefunktionen. Der Hauptnachteil der Kollokationslösung liegt wohl darin, daß abhängig von der Anzahl der Beobachtungen große lineare Gleichungssysteme aufzulösen sind. Zudem ist vorerst die Kernfunktion mit hoher Sorgfalt empirisch zu bestimmen und eine möglichst einfache analytische Approximation für sie zu finden. Mit dieser Problematik beschäftigt sich das folgende Kapitel.

Zum ausführlichen Studium der Kollokation nach den kleinsten Quadraten sei auf (MORITZ,1980) verwiesen.

B. Lokale Kovarianzmodelle

a) Überblick

Der Erstellung möglichst realitätsnaher Korrelationsmatrizen zwischen Funktionalen des Störpotentiales kommt im Falle der Prädiktion nach kleinsten Quadraten entscheidende Bedeutung zu. Der vorerst aus vereinzelten Meßwerten bestimmten empirischen Kovarianzfunktion (KF) ist ein analytisches Modell möglichst gut anzupassen. Ein globales homogenes und isotropes Kovarianzmodell des Störpotentials T hat die Form (MORITZ;1976)

$$K(P,Q) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{l+1} P_l(t) \qquad (B.1)$$

mit σ_l ... Gradvarianzen des Störpotentials

R_B ... Radius der "Bjerhammar-Kugel"

r ... die geozentrischen Radien der Punkte P,Q

t ... = cos ψ (ψ = sphärischer Abstand $\overline{PQ}$)

Im allgemeinen liegen jedoch für die empirische Funktion nicht die T-Werte, sondern Schwereanomalien in den Aufpunkten vor. In sphärischer Näherung ist der Zusammenhang zwischen T und Δg durch die bekannte Beziehung

$$\Delta g = - \frac{dT}{dr} - \frac{2}{R} T \qquad (B.2)$$

gegeben. Vereinfachen wir

$$s = \frac{R_B^2}{r_P r_Q} = \left(\frac{R_B}{R} \right)^2$$

R ... mittlerer Erdradius

und setzen in (B.1) ein, so folgt für K(T,T)

$$K(T_P, T_Q) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \, s^{l+1} \, P_l(t) \qquad (B.3)$$

für C(Δg,Δg)

$$C(\Delta g, \Delta g) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \, s^{l+2} \, P_l(t) \qquad (B.4)$$

Der Zusammenhang der Anomalie-Grad-Varianzen c_l mit den zugehörigen σ_l läßt sich aus

$$T_l = \frac{R}{l-1}\,\Delta g_l$$

herleiten. (HEISKANEN,MORITZ;1967)

$$\sigma_l = M(T_l^2) = \frac{R^2}{(l-1)^2}\,M(\Delta g_l^2)$$

$$\sigma_l = \frac{R^2}{(l-1)^2}\,c_l \qquad (B.5)$$

Vor der Auswertung der Summe (B.4) in geschlossener Form ist nun ein geeignetes, numerisch möglichst einfaches Modell für die Varianzen c_l zu finden. Wählt man nach (TSCHERNING,RAPP; 1974)

$$c_l = A\,\frac{l-1}{(l-2)(l+B)} \qquad (B.6)$$

so erhält (B.4) die allgemeine Gestalt

$$C(\psi) = A \sum_{l=0}^{\infty} c_l\, s^{l+2}\, P_l(t) \qquad (B.7)$$

Eine Untersuchung weltweit verteilter g-Messungen durch Tscherning und Rapp erbrachte für die globale Varianz der Schwereanomalien einen Wert von

$$C_0 = 1795\ \text{mgal}^2$$

und Korrelationslängen zwischen 40 km und 80km. Die Anpassung des Modells an beobachtete Gradvarianzen (n <= 20) fixiert zugleich die Modellparameter B und A.

$$B = 24 \qquad A = 425.28\ \text{mgal}^2$$

Moritz (MORITZ;1980) zeigt auf, daß (B.6) für große l (kurzwellig, lokaler Bereich) dem Grenzwert 1/l zustrebt

$$c_l \underset{l\to\infty}{=} \frac{1-\frac{1}{l}}{l\,(1-\frac{2}{l})\,(1+\frac{B}{l})} \approx \frac{1}{l} = \gamma \qquad (B.8)$$

Dies impliziert für C ein einer logarithmischen Funktion ähnliches Verhalten. Er schlägt für C eine Linearkombination von (B.6) mit dem Modell (B.9) vor.

$$c_l = \frac{l-1}{l+A} \quad \longrightarrow \quad \gamma = 1 \qquad (B.9)$$

Diese Kombination führt zwar zu wesentlich realitätsbezogeneren Werten für die Varianz der Horizontalgradienten G_o, ist jedoch numerisch etwas aufwendiger, da 6 freie Parameter zu bestimmen sind . Wir werden uns im folgenden deshalb mit dem Tscherning-Rapp-Modell (B.6), (B.7) weiter beschäftigen.

b) Das Tscherning-Rapp Modell

Geodätische Projekte beziehen sich im allgemeinen auf räumlich relativ eng begrenzte Bereiche. Staumauerüberwachungs- und Tunnelbaunetze bewegen sich in ihrer Ausdehnung in Gebieten von einigen km bis zu wenigen 10km Seitenlänge. Detaillierte lokale Geoidstudien als Feldinformation zusätzlich zu terrestrischen oder GPS-Messungen betreffen größtenteils ebenfalls Bereiche von höchstens einigen 100 km^2 Ausdehnung. Für diese Zwecke ist nur der hochfrequente Anteil der Kovarianzfunktion zu betrachten. Dies geschieht durch Nichtberücksichtigung von außerhalb des Arbeitsgebiets gelegener Feldinformation und Mittelwertreduktion der Meßwerte zur Abspaltung langwelliger Anteile.

Trennt man (B.3) in zwei Teilsummen

$$K(T,T) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l(t) - \sum_{l=0}^{n} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l(t) \qquad (B.10)$$

so verbleibt als lokale Kovarianzfunktion der Ordnung n des Störpotentials

$$K_n(T,T) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l(t) \qquad (B.11)$$

Nach dem Gesetz über die Fortpflanzung der Kovarianzen folgt die analoge Beziehung für die Schwereanomalien

$$C_n(\Delta g,\Delta g) = \sum_{l=n+1}^{\infty} c_l(\Delta g,\Delta g)\, s^{l+2}\, P_l(t) \qquad (B.12)$$

Ähnliche Reihenentwicklungen finden sich natürlich für die lokalen Kovarianzen aller Störfeldgrößen, z.B. für die LA-Komponenten ξ und η. Ausgehend von der sphärischen Approximation

$$\xi = -\frac{1}{\gamma r}\,\frac{dT}{d\varphi}$$

$$\eta = -\frac{1}{\cos\varphi\ \gamma\ r}\,\frac{dT}{d\lambda} \qquad (B.13)$$

erhalten wir

$$C(\xi,\xi) = d\varphi\, d\varphi' K / (\gamma'\gamma\, r' r) = d^2_{\varphi\varphi'} K/(\gamma'\gamma\, r' r)$$

$$C(\eta,\eta) = = d^2_{\lambda\lambda'} K/(\gamma'\gamma\, r' r \cos\varphi \cos\varphi') \qquad (B.14)$$

$$C(\xi,\eta) = = d^2_{\varphi\lambda'} K/(\gamma'\gamma\, r' r \cos\varphi')$$

mit $K = K(T,T)$ und

$$d_\varphi = \frac{d}{d\varphi} \qquad d_\lambda = \frac{d}{d\lambda} \qquad d^2_{\varphi\lambda} = \frac{d^2}{d\varphi\, d\lambda}$$

Arbeitet man ausschließlich mit isotropen Kovarianzfunktionen, so darf K nur eine Funktion des gegenseitigen Punktabstands ψ sein. ($K = K(\psi)$)

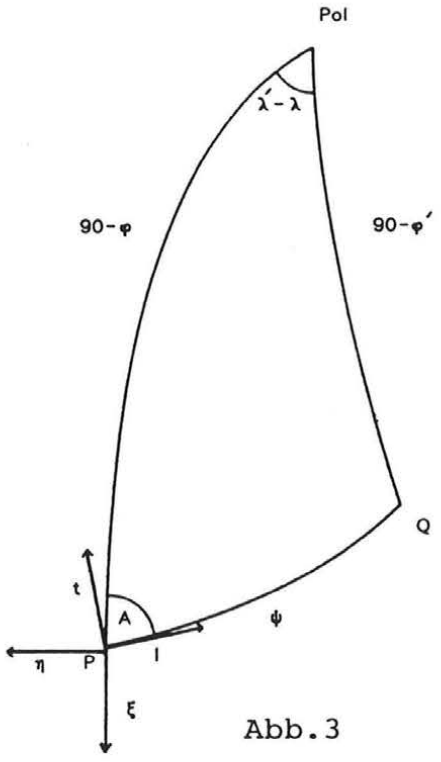


Abb. 3

$$\cos\psi = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Setzt man wieder unter Verwendung obiger Notation

$$t = \cos\psi \qquad d_t K = K' \qquad d^2_t K = K''$$

so gilt

$$d\varphi\, K = d_\varphi t\; K'$$
$$d\lambda\, K = d_\lambda t\; K' \qquad (B.15)$$

und

$$d^2_{\varphi\varphi}\cdot K = d_\varphi t\; d_\varphi\cdot t\; K'' + d^2_{\varphi\varphi}\cdot t\; K'$$
$$d^2_{\lambda\lambda}\cdot K = d_\lambda t\; d_\lambda\cdot t\; K'' + d^2_{\lambda\lambda}\cdot t\; K' \qquad (B.16)$$
$$d^2_{\varphi\lambda}\cdot K = d_\varphi t\; d_\lambda\cdot t\; K'' + d^2_{\varphi\lambda}\cdot t\; K'$$

Die ersten partiellen Ableitungen von t nach Länge und Breite

$$d_\varphi t = \cos\varphi\, \sin\varphi' - \sin\varphi\, \cos\varphi' \cos(\lambda' - \lambda) = \sin\psi \cos\alpha$$
$$d_\lambda t = \cos\varphi\, \cos\varphi' \sin(\lambda' - \lambda) = \cos\varphi \sin\psi \sin\alpha \qquad (B.17)$$

in (B.14) eingesetzt zeigen, daß einerseits

$$C(\xi,\xi)\ ,\ C(\xi,\eta)\ ,\ C(\eta,\eta) \quad = \quad \mathbf{f(\psi,\alpha)}$$

als Funktionen des Abstands und des Azimuts α nicht isotrop sind und andererseits Korrelationen zwischen ξ_P und η_Q , allein aus der gegenseitigen Punktlage stammend, bestehen.
(Abgesehen von den Sonderfällen $\varphi = \varphi'$ bzw. $\lambda = \lambda'$)

Aus diesen Gründen gehen wir besser auf transversale t und longitudonale l LA-Komponenten über. (siehe Abb. 3)

$$l_P = -\xi_P \cos\alpha - \eta_P \sin\alpha$$
$$t_P = -\xi_P \sin\alpha + \eta_P \cos\alpha \qquad (B.18)$$

Ihre empirisch zu bestimmenden Kreuz- und Autokovarianzfunktionen stehen mit jener des Störpotentials in folgender Beziehung

$$\text{cov}\,(l_P, l_Q) = -d^2_\psi K \,/\, (\gamma_P \gamma_Q r_P r_Q)$$

$$\text{cov}\,(t_P, t_Q) = -\frac{d_\psi K}{\sin\psi} \,/\, (\gamma_P \gamma_Q r_P r_Q) \qquad \text{(B.19)}$$

$$\text{cov}\,(l_P, t_Q) = \text{cov}\,(t_P, l_Q) = 0$$

Setzen wir nach (B.15) $t = \cos\psi$ als unabhängige Variable in (B.19) ein, (K', K'' ... Ableitungen nach t) so erhält man endgültig

$$\text{cov}\,(l_P, l_Q) = (K' \cos\psi - K'' \sin^2\psi) \,/\, (\gamma_P \gamma_Q r_P r_Q)$$

$$\text{cov}\,(t_P, t_Q) = K' \,/\, (\gamma_P \gamma_Q r_P r_Q) \qquad \text{(B.20)}$$

$$\text{cov}\,(l_P, t_Q) = \text{cov}\,(t_P, l_Q) = 0$$

Die Größe der Varianzen, also $\text{cov}(l_P, l_P)$ bzw. $\text{cov}(t_P, t_Q)$, ist im ersten Moment nicht klar erkennbar, da ein longitudonales bzw. transversales Azimut für den Abstand r=0 nicht definiert ist. Zu diesem Zweck bilden wir den integralen Mittelwert der Produkte der l_P- Komponenten.

$$M(l_P, l_P)_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi^2 \cos^2\alpha + \eta^2 \sin^2\alpha + \xi\eta \sin\alpha \cos\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\xi^2 \pi + \eta^2 \pi + 0) = \qquad \text{(B.21)}$$

$$= \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} = \vartheta^2 / 2$$

Die Integration für die t-Komponente liefert natürlich ein identes Ergebnis.

Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin den empirisch gewonnenen Funktionen (B.20) ein lokales Tscherning -Rapp-Modell anzupassen und mit den so gewonnenen Modellparametern auf die zugehörige Potentialkovarianz K zu schließen.
Nach (B.5) und (B.6) bilden wir vorerst die Gradvarianzen $\sigma_l(T,T)$

$$\sigma_l(T,T) = \frac{A R^2}{(l-1)(l-2)(l+B)} \qquad \text{(B.22)}$$

Diese in Gleichung (B.11) eingesetzt und gemäß (B.20) differenziert,

ergibt

$$\mathrm{cov}(l_P,l_Q) = \Big(t \sum_{l=n+1}^{\infty} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l'(t) - \sin^2\psi \sum_{l=n+1}^{\infty} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l''(t) \Big) / (\gamma'\gamma\, r'r) \qquad (B.23)$$

$$\mathrm{cov}(t_P,t_Q) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \sigma_l(T,T)\, s^{l+1}\, P_l'(t) \,/\, (\gamma'\gamma\, r'r)$$

für die lokalen Kovarianzfunktionen n-ter Ordnung der l ,t Komponenten. Durch Vorgabe der aus dem Datenmaterial berechneten 3 Parameter (C ... Varianz, ξ ... Korrelationlänge, G_o ... Varianz der Horizontalgradienten) für l bzw. t sind nach einer von Schwarz und Lachapelle (SCHWARZ, LACHAPELLE;1980) vorgeschlagenen Iteration die Größen A, s, n eruierbar. Das Verfahren wählt Näherungen für A bzw. n und paßt sodann das Verhältnis von C/G_o und ξ durch Variation von s den Vorgaben an. Durch Multiplikation mit dem Faktor C/A erhält die Funktion die empirische Varianz C (C und G_o sind von A linear abhängig; ξ ist unabhängig von A) und eine nachfolgende Variation der Grad-Varianzen liefert den vorgegebenen Wert für G_o.
Damit sind neben (B.11) auch alle abgeleiteten lokalen Kovarianzfunktionen der Störfeldfunktionale vollständig bestimmt.

c) Die Funktion von Reilly

Für lokale Studien, denen als Datenmaterial Schwereanomalien oder Lotabweichungen über der Grundebene zur Verfügung stehen (ebene Approximation), sei die isotrope Kovarianzfunktion eine Funktion der ebenen Punktdistanz r.
Hirvonen's Funktion

$$C(T_z,T_z) = \frac{C_o}{1+(r/d)^2} \qquad (B.24)$$

wird dieser Forderung genauso gerecht, wie z.B. die von Heiskanen und Moritz propagierte Variation

$$C(T_z,T_z) = C_o\, e^{-(r/d)^2/2} \qquad (B.25)$$

mit C_0 ... Varianz
d ... empirisch bestimmter Abstandsparameter

Als schwerwiegende Nachteile müssen jedoch folgende Eigenschaften angesehen werden. Weder (B.24) noch (B.25) erlauben negative Kovarianzwerte der Schwereanomalien für große r und zudem führen beide zu keiner einfachen Form für C(T,T).

Wegen der dagegen sehr eleganten Art der Kovarianzfortpflanzung wurde das von Reilly (REILLY;1979) publizierte Modell für die anschließenden Betrachtungen gewählt.

$$C(T_z,T_z) = C_0 \left[1-\frac{1}{2}(r/d)^2\right] e^{-(r/d)^2/2} = \tag{B.26}$$

$$= C_0 \frac{1}{2} d^4 \int_{\Theta=0}^{\infty} \Theta^3 e^{-\Theta^2 d^2/2} J_0(\Theta r)\, d\Theta$$

mit J_n ... Besselfunktion n-ter Ordnung

Die in (B.26) nach der Höhe abgeleitete Grund-KF des Störpotentials T muß demnach die Gestalt

$$C(T,T) = C_0 \frac{1}{2} d^2 e^{-(r/d)^2/2} = \tag{B.27}$$

$$= C_0 \frac{1}{2} d^4 \int_{\Theta=0}^{\infty} \Theta\, e^{-\Theta^2 d^2/2} J_0(\Theta r)\, d\Theta$$

für $z_1 = z_2 = 0$. (z_i ... Punkthöhe) besitzen.

Das Modell ist zudem für Punkte außerhalb der Grundebene ($z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$) erweiterbar und besitzt die allgemeine Form

$$C(T,T) = C_0 \frac{1}{2} d^4 \int_{\Theta=0}^{\infty} \Theta\, e^{-\Theta(z_1+z_2)} e^{-\Theta^2 d^2/2} J_0(\Theta r)\, d\Theta \tag{B.28}$$

Nun scheint es, daß wir die vergleichsweise einfachen Beziehungen (B.24), (B.25) gegen komplizierter auswertbare Ausdrücke eingetauscht haben. Dies läßt sich jedoch sofort widerlegen. Sieht man (B.28) formal als Funktion R von q (Potenz von Θ) und der Ordnung der Besselfunktion n, so bekommt (B.28)

die Gestalt

$$R(q,n) = C_0 \frac{1}{2} d^4 \int_{\Theta=0}^{\infty} \Theta^q \, e^{-\Theta(z_1+z_2)} \, e^{-\Theta^2 d^2/2} \, J_n(\Theta r) \, d\Theta \qquad (B.29)$$

also

$$C(T,T) = R(1,0) \qquad (B.30)$$

Die weiters einfache Form der Ableitung der Besselfunktion nach der vertikalen bzw. den beiden horizontalen Achsenrichtungen

$$\frac{d(R(q,n))}{dz} = -R(q+1,n)$$

$$\frac{d(R(q,n))}{dx} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = \pm \frac{1}{2} \left(R(q+1,n-1) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n-1)\alpha + R(q+1,n+1) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (n+1)\alpha\right) \qquad (B.31)$$

$$\frac{d(R(q,n))}{dy} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\alpha = \pm \frac{1}{2} \left(-R(q+1,n-1) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n-1)\alpha + R(q+1,n+1) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (n+1)\alpha\right)$$

(x, y, z) ... kartesisches Koordinatensystem (x-Achse nach Norden, y- Achse nach Osten)

α ... 90 - A (A... geodätisches Azimut)

versetzt uns in die Lage alle notwendigen Auto- und Kreuzkovarianzen von (B.28) zu bestimmen. Mit den sphärischen Näherungen (B.2) und (B.13) finden wir zusätzlich zu (B.30)

$$C(N,N) = \frac{1}{\gamma^2} R(1,0)$$

$$C(\Delta g,\Delta g) = R(3,0) - 2(2/r) R(2,0) + (2/r)^2 R(1,0)$$

$$C(\xi,\xi) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{2} R(3,0) + \frac{1}{2} R(3,2) \cos 2\alpha\right) \qquad (B.32)$$

$$C(\eta,\eta) = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{1}{2} R(3,0) - \frac{1}{2} R(3,2) \cos 2\alpha\right)$$

$$C(\xi,\eta) = \frac{1}{\gamma^2} \left(-\frac{1}{2} R(3,2) \sin 2\alpha\right)$$

$$C(T_{zz},T_{zz}) = R(5,0)$$

Eine entsprechende Übersicht der Ausdrücke für die Kreuzkovarianzen ist im Anhang A gegeben.

Der Übergang auf longitudonale bzw. transversale LA-komponenten unter Berücksichtigung der Beziehungen (B.18) führt zu

$$C(l,l) = C(\xi,\xi)\cos^2 A + 2\,C(\xi,\eta)\sin A\cos A + C(\eta,\eta)\sin^2 A$$
$$C(t,t) = C(\xi,\xi)\sin^2 A - 2\,C(\xi,\eta)\sin A\cos A + C(\eta,\eta)\cos^2 A \qquad \text{(B.33)}$$

Daß die somit neu gefundenen Auto- und Kreuzkovarianzen wirklich azimutunabhängig sind, läßt sich durch Einsetzen von (B.32) in (B.33) sofort beweisen.
Zur Vereinfachung setzen wir

$$R30 = R(3,0) \qquad R32 = R(3,2)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\gamma^2 C(l,l) &= \left(\tfrac{1}{2} R30 + \tfrac{1}{2} R32\cos 2\alpha\right)\cos^2 A \\
&\quad - R32\sin 2\alpha\sin A\cos A \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{2} R30 - \tfrac{1}{2} R32\cos 2\alpha\right)\sin^2 A \\
&= \tfrac{1}{2} R30\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \\
&\quad + \tfrac{1}{2} R32\cos 2\alpha\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) \\
&\quad - R32\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \\
&= \tfrac{1}{2} R30 + \tfrac{1}{2} R32\cos 2\alpha\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) \\
&\quad - R32\sin 2\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \\
&= \tfrac{1}{2} R30 - \tfrac{1}{2} R32\cos^2 2\alpha - \tfrac{1}{2} R32\sin^2 2\alpha = \\
&= \tfrac{1}{2}(R30 - R32) = \text{unabhängig von } \alpha
\end{aligned} \qquad \text{(B.34)}$$

Der Beweis für $C(t,t)$ ist analog zu führen.

Unter der Voraussetzung, daß nun wie im vorigen Abschnitt als Ausgangsdaten wieder die empirisch gewonnenen KF der l und t LA-Komponenten zur Verfügung stehen, sind die Funktionsparameter d und C wie folgt zu gewinnen. Es gilt

$$C(l,l) = C(\xi,\xi)_{A=0^o} = f\,(R(3,0) - R(3,2)) \qquad (B.35)$$

f besitzt an der Stelle $x^2 = \frac{1}{2}$ eine Nullstelle. Gleichzeitig läßt sich x als Funktion der ersten Nullstelle r_l und des Abstandsparameters d darstellen.

$$x = r_l / (\sqrt{2}\, d)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r_l^2}{2d^2} \qquad \longrightarrow \qquad r_l = r_{\xi\,(A=0^o)} = d \qquad (B.36)$$

Somit ist d aus den Daten direkt bestimmt. Die Varianz C_{ll} steht wiederum in linearem Zusammenhang mit den Varianzen der restlichen T-Funktionale. Diese sind nun nach Wahl des jeweiligen Proportionalitätsfaktors ebenfalls bekannt.

Neben den beiden vorgestellten Funktionen stehen naturgemäß noch eine Vielzahl meist einfacher analytischer Modelle zur Beschreibung der KF in Verwendung. Sie wurden in erster Linie aus dem statistischen Verhalten der Schwereanomalien abgeleitet (Poisson-Modell, Reziprokes-Distanz-Modell, etc.) oder zeichnen sich durch relativ einfache Wahl ihrer bestimmenden Parameter aus (z.B. 2-Parameter-Modell von Jordan und Heller; JORDAN, HELLER; 1978). Die Auswahl hängt im Endeffekt von der Qualität ihrer Anpassung an das vorhandene Datenmaterial, von der Art und Quantität der Eingabedaten, von der Erstreckung des Interessensgebiets und nicht zuletzt von den zur Verfügung stehenden EDV-Ressourcen ab.

C. Die Fourier- Transformation

a) Überblick

Die Fourier-Transformation (FT) stellt ein in vielen technischen Wissensgebieten wie z.B. Mathematik, Physik, Elektrotechnik etc. weit verbreitetes Verfahren zur Zerlegung eines Signals in eine Summe von Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen dar. Die meisten Anwendungen sehen im Signal eine Funktion der unabhängigen Zeitvariablen t. Diese kann jedoch selbstverständlich durch andere (physikalische) Variable, wie z.B. die Ortsfunktion x ersetzt werden. Der Einsatz moderner Rechenanlagen, sowie die Erstellung eines der Duallogik der Computer möglichst gut angepaßten Algorithmus zu Beginn der 60-er Jahre wogen bei weitem den Nachteil des erheblichen Rechenaufwandes gegen den Vorteil der leichteren Interpretierbarkeit der Funktionen im Frequenzbereich auf. Die vorliegende Arbeit kann natürlich nur auf jene Eigenschaften der FT eingehen, die im engen Zusammenhang mit ihrer geodätischen Anwendung zur Berechnung der topographischen Korrektur stehen. Zur Hebung der Übersichtlichkeit sind die Ableitungen teilweise auf den eindimensionalen Fall beschränkt. Eine Erweiterung auf den 2D - Bereich ist praktisch in jedem Fall ohne erheblichen Aufwand möglich. Für weitergehende Betrachtungen sei auf die einschlägige Literatur, wie (COOLEY, TUKEY; 1965), (BRACEWELL;1965) oder (BRIGHAM;1974) verwiesen.

b) Das Fourierintegral

Das eindimensionale Fourierintegral wird durch die Beziehung

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-j\omega x}\, dx \qquad (C.1)$$

definiert, wobei gilt

- ω ... Kreisfrequenz (Einheit: Perioden/ Distanz)
- x ... Distanzvariable
- j ... imaginäre Einheit

Die Gleichung (C.1) transformiert die Raumfunktion $h(x)$ in die Funktion $H(\omega)$ im Frequenzbereich. Symbolisch $H(\omega) = F(h(x))$

Die inverse FT rekonstruiert die Funktion h(x) aus ihrer Fouriertransformierten

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\ e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (C.2)$$

oder erneut symbolisch

$$h(x) = F^{-1}\,(H(\omega))$$

Analog gelten für die 2-dimensionale FT die folgenden Beziehungen

$$H(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\ e^{-j2\pi\,(ux+vy)}\, dx\, dy \qquad (C.3)$$

$$h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(u,v)\ e^{j2\pi\,(ux+vy)}\, du\, dv \qquad (C.4)$$

wobei die Frequenzen u,v nun die Kreisfrequenz ω ersetzen.

$$\omega = 2\pi u \qquad \text{bzw.} \qquad \omega = 2\pi v$$

Es ist zu beachten, daß die Fourier-Transformierte eine im allgemeinen komplexe Funktion ist. Ihre Aufsplitterung in Real- und Imaginärteil und die daraus erzielbaren Rechenvorteile werden im Kapitel C.d.3 behandelt.

c) Die diskrete Fouriertransformation

Die Formeln (C.1) und (C.2) gehen von einer analytischen Repräsentation der Funktionen h(x,y) bzw. H(u,v) aus. In der Praxis stehen jedoch in der überwiegenden Zahl aller Anwendungen nur Meßwerte der Signale, also Punktraster zur Verfügung. Regellose Punkthaufen müssen vorerst durch geeignete Interpolationsverfahren (Mittel, Splines,etc.) auf die Ecken des verwendeten Rasters abgebildet werden.

Bezeichnen M und N die Punktanzahl entlang der beiden Koordinatenachsen und Δx, Δy die zugehörigen Rasterweiten so ist eine volle Periode mit

$$X = M\,\Delta x \qquad \text{und} \qquad Y = N\,\Delta y$$

festgelegt. Die Wellenlängen x und y können nun durch

$$x = k\,\Delta x \qquad k = 0,1,2,\ldots,M-1$$
$$y = l\,\Delta y \qquad l = 0,1,2,\ldots,N-1$$

ausgedrückt werden.

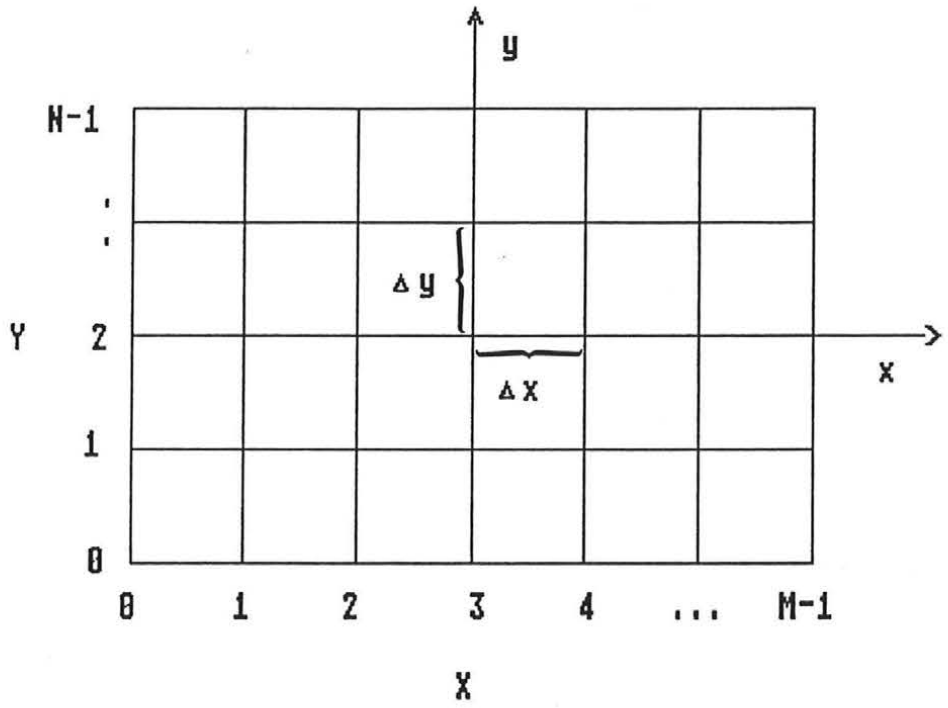


Abb. 4

Stellt man im Frequenzbereich u,v

$$u = m\,\Delta u \qquad m = 0,1,2,\ldots,M-1$$
$$v = n\,\Delta v \qquad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

in ähnlicher Weise dar und setzt

$$\Delta x = \frac{X}{M} \qquad \Delta u = \frac{U}{M} = \frac{1}{X}$$
sowie (C.5)
$$\Delta y = \frac{Y}{N} \qquad \Delta v = \frac{V}{N} = \frac{1}{Y}$$

(U,V ... die zu X,Y zugehörigen Frequenzperioden)
so ergibt sich unter Berücksichtigung von (C.3)

$$H(m\Delta u, n\Delta v) = \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k\Delta x, l\Delta y)\, e^{-j2\pi(m\Delta u\, k\Delta x + n\Delta v\, l\Delta y)} \qquad (C.6)$$

Aus (C.5) folgt

$$\Delta x \, \Delta y = \frac{X}{M} \frac{Y}{N} \qquad \Delta u \, \Delta x = \frac{1}{M}$$

und

$$\Delta u \, \Delta v = \frac{U}{M} \frac{V}{N} \qquad \Delta v \, \Delta y = \frac{1}{N}$$

und somit die diskretisierte Beziehung (C.3) für die Transformation in den Spektralbereich

$$H(m,n) = \frac{X}{M} \frac{Y}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} h(k,l) \, e^{-j 2\pi (mk/M + nl/N)} \qquad (C.7)$$

Die Herleitung der inversen Beziehung

$$h(k,l) = \frac{1}{X} \frac{1}{Y} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} H(m,n) \, e^{j 2\pi (mk/M + nl/N)} \qquad (C.8)$$

erfolgt auf identem Wege.

Gleichzeitig stellt sich die Frage , wie engmaschig sollte der verwendete Raster sein oder anders ausgedrückt, wie hoch ist die Abtastrate zu wählen, um eine vorgegebene Grenzfrequenz f_n (Nyquist- Frequenz) aus dem Datenmaterial zu rekonstruieren. Diese gesuchte Nyquist- Abtastrate ergibt sich zu

$$\frac{1}{X} = 2 f_n \qquad (C.9a)$$

oder im 2D-Fall

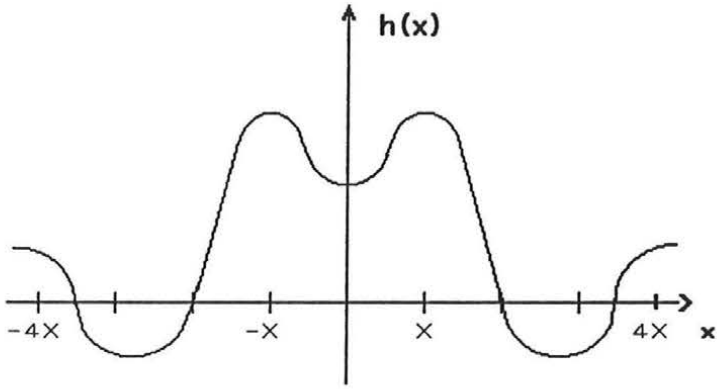
$$\pm u_n = \pm \frac{1}{2\Delta x} = \pm \frac{U}{2} = \pm \frac{M \Delta u}{2}$$

$$\pm v_n = \pm \frac{1}{2\Delta y} = \pm \frac{V}{2} = \pm \frac{N \Delta v}{2} \qquad (C.9b)$$

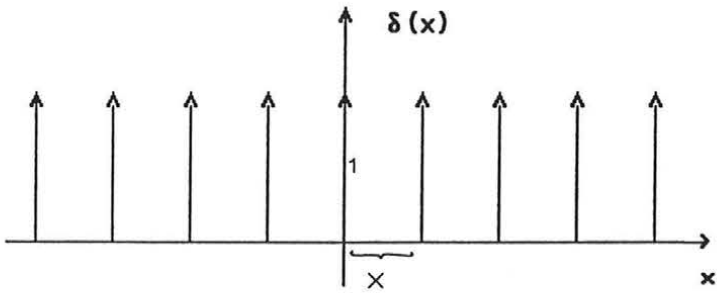
$1/u_n$ bzw. $1/v_n$ sind also die kleinsten Wellenlängen, die aus dem gegebenen Werteraster $(M,N,\Delta x,\Delta y)$ zu gewinnen sind.

Die Abbildungen 5.a-5.d zeigen die Transformation einer Funktion h(x),die mit der aus (C.9a) ermittelten Periode X abgetastet wurde.
(δ ... Deltafunktion; siehe Kap.C.d.4)
In den Abbildungen 6.a-6.d hingegen wurde die Abtastperiode für h(x) zu groß gewählt. Dies führt im Spektralbereich zu einem überlappten Faltungsprodukt $H(f)*\delta(f)$. (Bandüberlappung; aliasing)

Abb. 5.a)

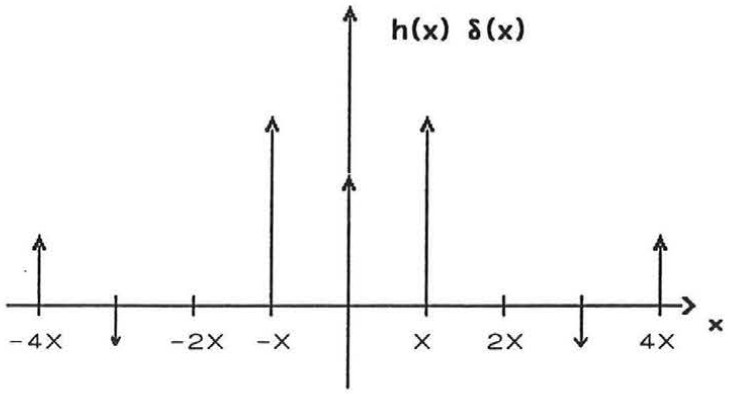


b)



=

c)



FT

d)

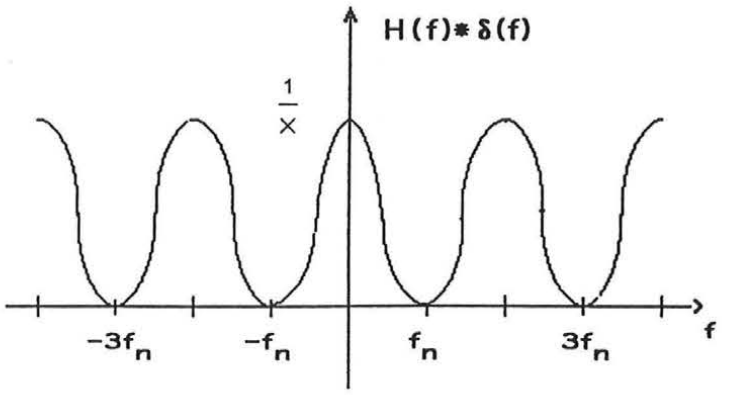
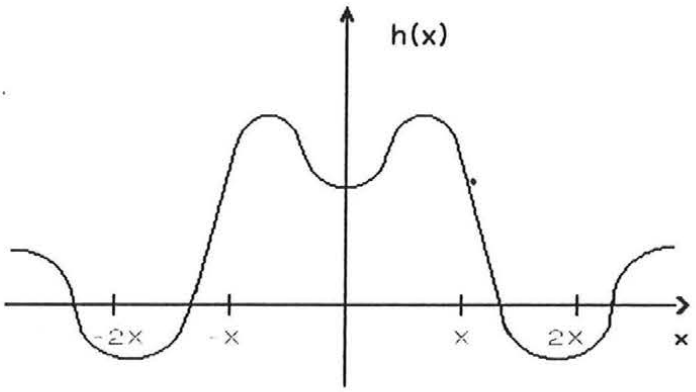
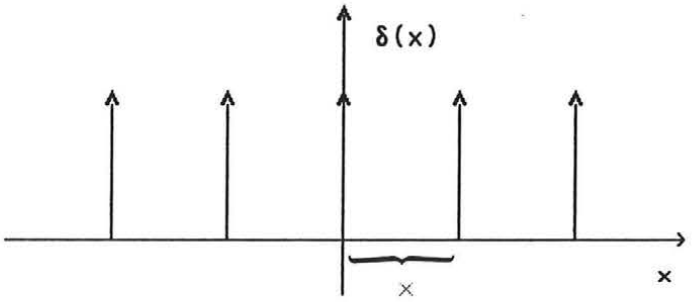


Abb. 6.a)

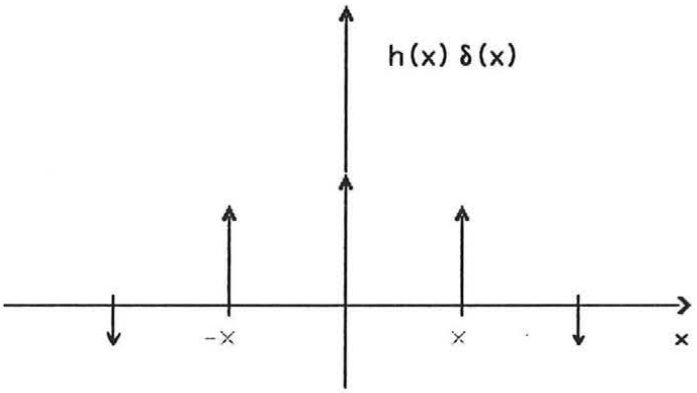


b)



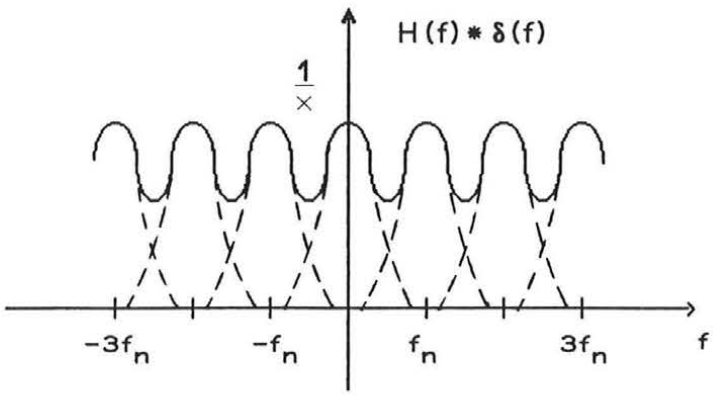
=

c)



F T

d)



d) Eigenschaften der FT

1) Periodizität

Eine der fundamentalen Eigenschaften der FT liegt in ihrer sowohl im Raum- als auch im Frequenzbereich gültigen Periodizität
Es gilt

$$H(m+M,n+N) = H(m,n)$$

und (C.10)

$$h(k+M,l+N) = h(k,l)$$

Diese kann im Fall nicht periodischen Datenmaterials zu recht beachtenswerten Effekten an den Rändern des Arbeitsgebietes führen und ist Gegenstand der Betrachtungen in Kapitel C.d.5.

2) Zeitverschiebung oder Phasenänderung

Wünscht man die Ortsfunktion h(x,y) um die konstanten Beträge a bzw. b zu verschieben, so geschieht dies durch Multiplikation einer Konstanten mit der ursprünglichen Fouriertransformierten.

$$h(x-a,y-b) = H(u,v)\, e^{-j\,2\pi(au+bv)} \qquad (C.11)$$

Damit erfolgt eine Verschiebung der Phase, jedoch keine Betragsänderung der Fouriertransformierten.

(C.11) dient der Verlegung des Ursprungs des Punktrasters in eine Rasterecke. Diese Nullpunktslage (oft SW-Ecke) wird von den meisten FT-Bibliotheksroutinen gefordert.

3) Gerade und ungerade Funktionen

Bezeichnet h_g (k,l) eine gerade Funktion, so ist ihre Fouriertransformierte H_g (m,n) ebenfalls eine gerade Funktion.
Beweis :

$$h_g(x) = h_g(-x)$$

Es gilt für die Fouriertransformierte

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_g(x)\, e^{-j2\pi fx}\, dx \qquad (C.12)$$

Mit den Euler-Formeln

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$$

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j \sin\varphi$$

läßt sich (C.12) aufspalten in

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_g(x) \cos(2\pi fx)\, dx - j \int_{-\infty}^{\infty} h_g(x) \sin(2\pi fx)\, dx$$

Da der Integrand des Imaginärteils eine ungerade Funktion ist ——→

$$j \int_{-\infty}^{\infty} F_u\, dx = 0 \qquad \text{verbleibt}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_g(x) \cos(2\pi fx)\, dx = R_g(x) \qquad (C.13)$$

Umgekehrt gilt für eine ungerade Funktion $h_u(k,l)$, daß ihre Fouriertransformierte $H_u(m,n)$ ebenfalls eine ungerade Funktion ist. In der Tabelle 1 sei eine kleine Zusammenstellung der Transformationsergebnisse spezieller Ortsfunktionen gegeben.

Raumbereich h(x)	**Frequenzbereich H(f)**
Reell	Realteil gerade Imaginärteil ungerade
Imaginär	Realteil ungerade Imaginärteil gerade
Realteil gerade Imaginärteil ungerade	Reell
Realteil ungerade Imaginärteil gerade	Imaginär
Reell und gerade	Reell und gerade
Reell und ungerade	Imaginär und ungerade
Imaginär und gerade	Imaginär und gerade
Imaginär und ungerade	Reell und ungerade

Tab.1

Kapitel D.e zeigt, daß man diese Beziehungen nutzbringend einsetzen kann um gleichzeitig 2 reelle Funktionen zu transformieren. Zu diesem Zweck addieren wir die beiden reellen Funktionen h(x) und g(x) zur komplexen Funktion m(x) in der Form $m(x) = h(x) + j\,g(x)$

Nach Tabelle 1 gilt (R ... Realteil, I ... Imaginärteil)

$$h(x) \longrightarrow H(f) = R_g(f) + j\,I_u(f)$$

und in ähnlicher Weise

$$jg(x) \longrightarrow jG(f) = R_u(f) + j\,I_g(f)$$

Somit folgt

$$m(x) = h(x) + jg(x) \qquad M(f) = H(f) + jG(f)$$

mit

$$H(f) = R_g(f) + jI_u(f) \qquad G(f) = I_g(f) - jR_u(f) \tag{C.14}$$

Zerlegt man M(f) in gerade und ungerade Anteile

$$M(f) = \underbrace{\left(\frac{R(f)}{2} + \frac{R(-f)}{2}\right)}_{\text{gerade}} + \underbrace{\left(\frac{R(f)}{2} - \frac{R(-f)}{2}\right)}_{\text{ungerade}}$$

$$+ j\left(\frac{I(f)}{2} + \frac{I(-f)}{2}\right) + j\left(\frac{I(f)}{2} - \frac{I(-f)}{2}\right)$$

so sind H(f) und G(f) mit (C.14) leicht zu trennen

$$H(f) = \left(\frac{R(f)}{2} + \frac{R(-f)}{2}\right) + j\left(\frac{I(f)}{2} - \frac{I(-f)}{2}\right)$$

$$G(f) = \left(\frac{I(f)}{2} + \frac{I(-f)}{2}\right) - j\left(\frac{R(f)}{2} - \frac{R(-f)}{2}\right) \tag{C.15}$$

Im Fall der diskreten Transformation mit der Periode N: $M(n) = R(n) + jI(n)$

$$H(n) = \left(\frac{R(n)}{2} + \frac{R(N-n)}{2}\right) + j\left(\frac{I(n)}{2} - \frac{I(N-n)}{2}\right)$$

$$G(n) = \left(\frac{I(n)}{2} + \frac{I(N-n)}{2}\right) - j\left(\frac{R(n)}{2} - \frac{R(N-n)}{2}\right)$$

4) Die Delta-Funktion

Mit Hilfe der Delta-Funktion lassen sich Fourier-Transformierte singulärer Funktionen definieren. Sie wird durch den folgenden Ausdruck bestimmt.

$$\delta(x - x_o) = 0 \qquad \text{für } x \neq x_o$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\, dx = 1 \tag{C.16}$$

Man könnte sich diese Funktion als einen Impuls mit sehr großer Impulshöhe, einer sehr kurzen Impulsdauer und der Fläche 1 vorstellen. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_o)\, h(x)\, dx = h(x_o) \tag{C.17}$$

Betrachtet man die Funktion

$$h(x) = K\, \delta(x) \qquad K \ldots \text{konstant}$$

so läßt sich die Fourier-Transformierte mit (C.1) und (C.17) ableiten.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\, \delta(x)\, e^{-j2\pi fx}\, dx = K e^{o} = K \tag{C.18}$$

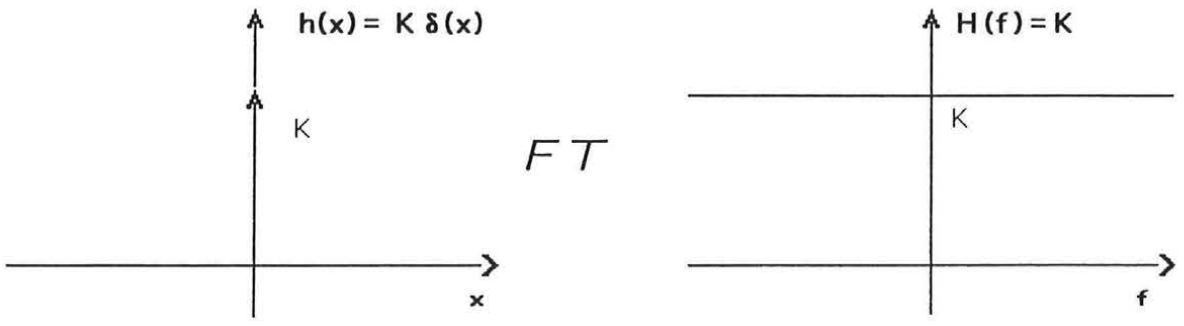


Abb. 7.a) b)

$$h(x) = K\, \delta(x) \qquad H(f) = K \tag{C.19}$$

Umgekehrt existiert natürlich das diametrale Transformationspaar (Abb. 8a,b)

$$h(x) = K \qquad H(f) = K\,\delta(f) \tag{C.20}$$

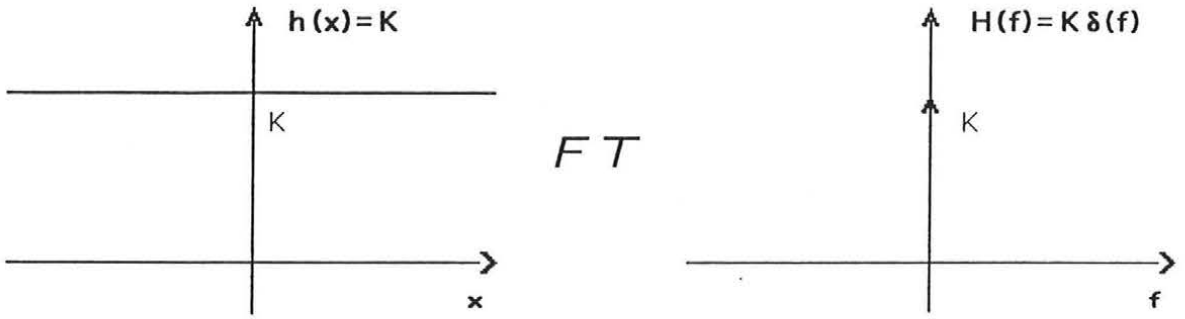


Abb. 8.a) b)

welches uns sofort die Ableitung eines praktischen Beispiels gestattet.

Beispiel: $h(x) = K$ $g(x)$ = Funktion von x

gesucht: $P(x) = \int h(x)\, g(x)\, dx$

Lösung mittels FT: $H(f) = K\,\delta(f)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-j 2\pi f x}\, dx$$

$$P(f) = H(f) * G(f) = K\, G(0)\, \delta(f) \tag{C.21}$$

(* ... Faltung; siehe Kapitel C.e)

Der DC-Wert (= Wert der transformierten Funktion an der Stelle f=0) G(0) der Funktion G berechnet sich aus

$$G(0) = \frac{X}{M} \sum_{k=0}^{M-1} g(k) = X\ \mu_k$$

Die Rücktransformation ergibt nach (C.20)

$$P(x) = K\, G(0) \tag{C.22}$$

Das Ergebnis der Integration einer mit einer Konstanten multiplizierten Funktion gewinnt man aus dem Produkt des DC-Werts der Funktion mit dieser Konstanten. Diese Aussage gilt natürlich ebenfalls im 2D-Raum und wird uns desweiteren helfen (Kap. D.b) Rechenzeit einzusparen.

5) Unstetigkeitsstellen

Die FT ist von ihrer Definition her gesehen optimal auf periodische Funktionen anwendbar. Sind die Daten jedoch nicht periodisch oder deckt sich das Abtastintervall nicht mit der Wellenlänge der Eingangswerte, sind Unstetigkeitsstellen im Randbereich die Folge.

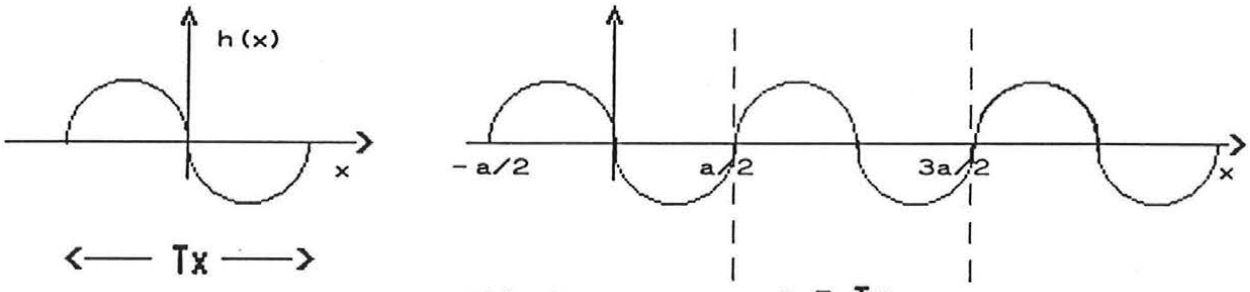


Abb.9a

Fall 1: Abtastintervall= Wellenlänge

Fall 2: Abtastintervall= 3/4 Wellenlänge

<u>Unstetigkeitsstellen</u>

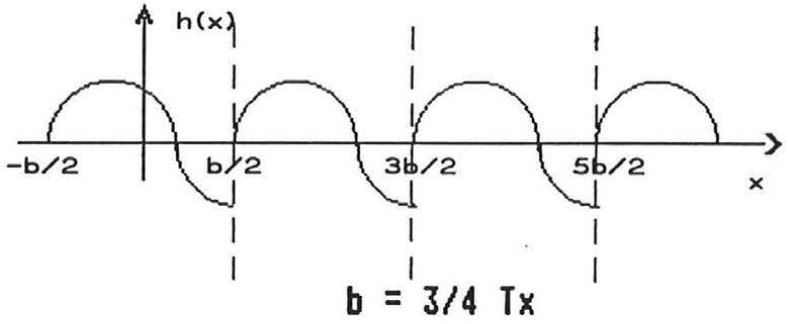


Abb. 9b

Dies führt zum Auftreten von Frequenzen, die in keiner Weise in den Originaldaten vorhanden waren (Leck-Effekt;leakage). Die Lösung liegt entweder in der Anpassung des Abtastintervalls an die Datenfrequenzen oder in der Verwendung von Begrenzungsfunktionen (Fensterfunktionen mit kleinen spektralen Seitenschwingeramplituden) um die Daten an den Rändern gegen 0 streben zu lassen.

e) Faltung und Korrelation

1) Faltung

Ihre größte Bedeutung gewinnt die FT in der Auswertung von Faltungs- und Korrelationsintegralen. Betrachten wir das Faltungsintegral
kontinuierlich (1-D):

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\ h(x-y)\ dy = g(x) * h(x) \qquad (C.23)$$

diskret (2–D):

$$p(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} g(i,j)\ h(k-i,l-j)\,\Delta x\,\Delta y = g(k,l) * h(k,l)$$

so findet eine Filterung der ersten Funktion g durch die zweite h statt, wobei die Operanden ohne Einfluß auf das Ergebnis vertauschbar sind. Das Faltungstheorem besagt nun, daß eine Faltung im Raum einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht. Es gilt somit

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) * h(x) \\ P(f) &= G(f) \cdot H(f) \end{aligned} \qquad (C.24)$$

2) Korrelation

In ähnicher Weise können wir die Korrelation ebenfalls als Filterung sehen.
kontinuierlich (1-D):

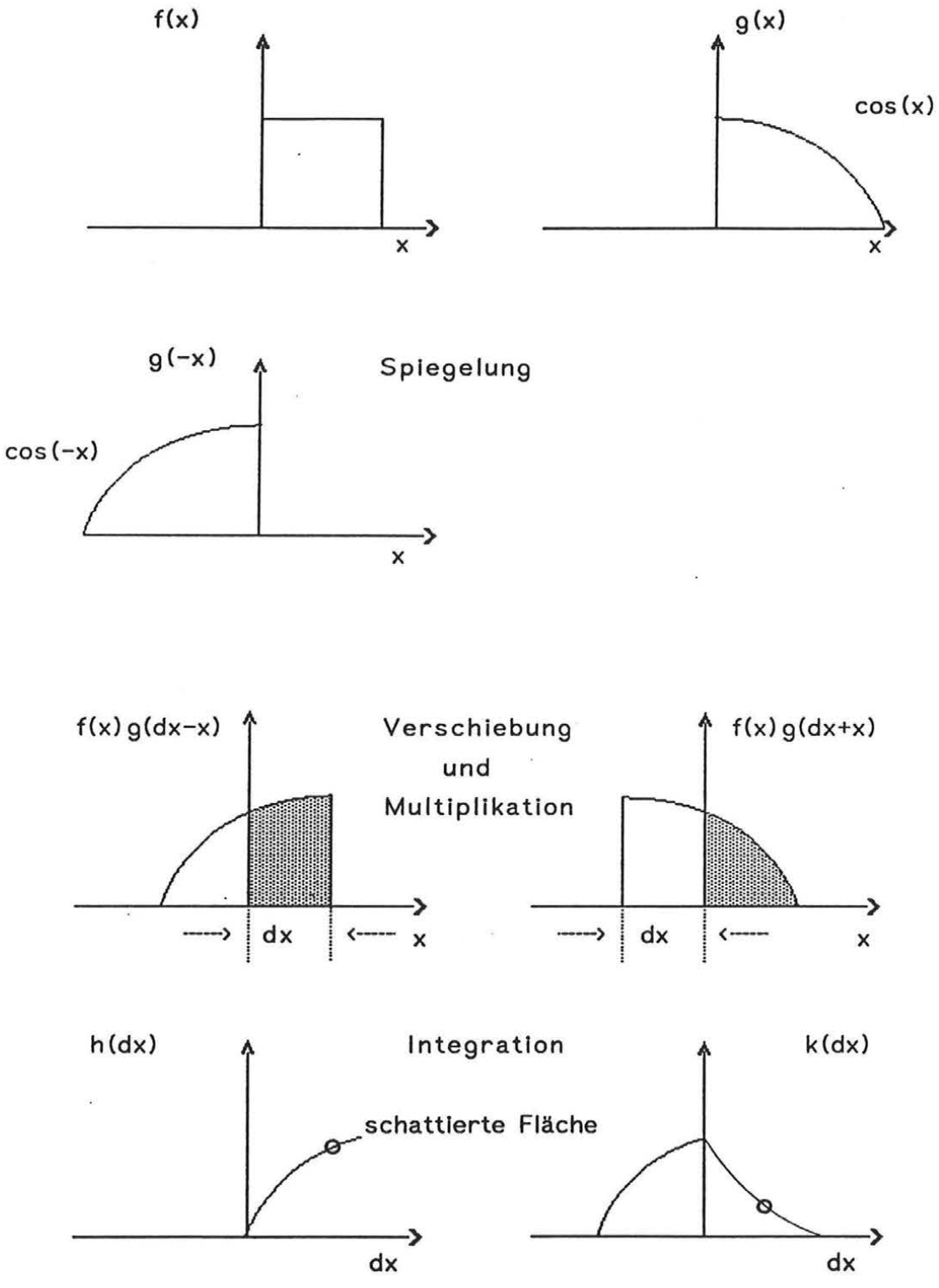
$$r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\ h(x+y)\ dy \qquad (C.25)$$

diskret (2-D):

$$r(k,l) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} g(i,j)\ h(k+i,l+j)\ \Delta x\,\Delta y = g(k,l) \circ h(k,l)$$

Diesmal tritt jedoch im Frequenzbereich anstelle G(f) die konjugiert-komplexe Funktion $G^*(f)$ auf.

$$\begin{aligned} r(x) &= g(x) \circ h(x) \\ R(f) &= G^*(f) \cdot H(f) \end{aligned} \qquad (C.26)$$



Faltung *Korrelation*

Abb. 10

Beziehung (C.26) läßt Raum für folgende interessante Überlegung. Ist g(x) eine gerade Funktion, so folgt G(f) = reell und es gilt somit

$$G(f) = G^*(f)$$

In diesem Fall sind die Fourier-Transformierten des Faltungs- und des Korrelationsintegrals identisch.
Stellen g(x) und h(x) verschiedene Funktionen dar, spricht man von Kreuzkorrelation. Sind g(x) und h(x) identisch bildet (C.25) die Autokorrelationsfunktion. Wie im Fall der Faltung ist natürlich auch hier leicht einzusehen, daß der Übergang von einer Integration im Raumbereich zu einer Multiplikation im Frequenzbereich eine wesentliche Rechenvereinfachung mit sich bringt.

3) Kovarianz

Zur Bildung der Kovarianzfunktion C_{hg} unserer beiden Grundfunktionen g und h ist Gleichung (C.27) auszuwerten.

$$C_{hg} = E\left\{[h(i,j) - \mu_h]\,[g(k+i,l+j) - \mu_g]\right\} =$$

$$= \lim_{\substack{M\to\infty \\ N\to\infty}} \frac{1}{M}\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1} [h(i,j) - \mu_h][g(k+i,l+j) - \mu_g] \qquad (C.27)$$

Man sieht

$$C_{hg}(k,l) = R_{hg}(k,l) - \mu_h \mu_g \qquad (C.28)$$

Somit ist die Kovarianz die Korrelationsfunktion der zentralen Datenfunktionen. Erneut ist zwischen Autokovarianz (g = h) und Kreuzkovarianz (g ≠ h) zu unterscheiden.

Es gilt

$$C_{hh}(0,0) = \sigma_h^2$$
$$C_{hg}(0,0) = \sigma_{hg} \qquad (C.29)$$
$$C_{hh}(\infty,\infty) = 0$$

4) Leistungsdichte (Power Spectral Density = PSD)

Die spektrale Leistungsdichte S_{hg} entspricht der Fouriertransformierten der Korrelationsfunktion R_{hg}. Ihre Bedeutung liegt z.B. in der Anzeige dominanter Frequenzen im Datenmaterial.

$$S_{hg}(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{hg}(x,y)\, e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy \qquad (C.30)$$

Durch diesen Zusammenhang mit R_{hg} kann unter anderem aus der Gestalt der Korrelationsfunktion folgendes geschlossen werden. Ist R_{hg} eine reelle gerade Funktion, so ist S_{hg} ebenfalls gerade und reell und durch eine einfache Cosinustransformation zu bilden.

$$S_{hg}(u,v) = 2\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} R_{hg}\cos[2\pi(ux+vy)]\, dx\, dy \qquad (C.31)$$

In aller Kürze seien noch einige nützliche Eigenschaften der PSD angegeben

$$\begin{aligned} S_{hg}(-m,-n) &= S^{*}_{hg}(m,n) = S_{gh}(m,n) \\ S_{hh}(-m,-n) &= S_{hh}(m,n) \\ S_{hg}(0,0) &= T_x T_y \mu_h \mu_g \\ S_{hh}(0,0) &= T_x T_y \mu_h^2 \end{aligned} \qquad (C.32)$$

f) Die schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Die FFT ist ein seit zwei Jahrzehnten bekannter Algorithmus, der es ermöglicht durch ein erheblich verkürztes Verfahren der FT aus einer Folge von Momentanwerten einer Schwingung das Frequenzspektrum abzuleiten. An der überwiegenden Zahl der im Gebrauch stehenden Computeranlagen sind FFT-Routinen zumeist im Rahmen von Programmbibliotheken installiert. Die Mehrzahl der implementierten Unterprogramme beruhen auf dem COOLEY-TUKEY oder dem SANDE-TUKEY-Algorithmus. Dem Benutzer bleibt im Grunde nur der Aufruf einer "black-box", die ihm die Fouriertransformierte bzw. die inverse Transformation korrekt und schnell liefert, sofern die Eingabespezifikationen beachtet wurden.

Trotzdem seien kurz die Hintergründe der FFT in einer Weise erläutert, die ausführlicher z.B. in (BRIGHAM;1974) nachzulesen sind. Vereinfachen wir die Beziehung

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, e^{-j 2\pi nk/N} \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1 \tag{C.33}$$

mit

$$W = e^{-j 2\pi/N}$$

so gewinnt man die Darstellung

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)\, W^{kn} \tag{C.34}$$

(C.34) ausgeschrieben mit ($W^0 = 1, N=4$)

$$\begin{pmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{pmatrix} \tag{C.35}$$

Aufgrund der Periode 2π gilt

$$W^{kn} = W^{kn \bmod N}$$

und somit

$$\underline{H(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix} \underline{h(n)} \tag{C.36}$$

Gelingt es uns nun zusätzlich die Matrix in (C.36) passend zu faktorisieren,

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{C.37}$$

so können wir unter Berücksichtigung von $W^0 = -W^2$, $W^1 = -W^3$ feststellen,

daß der Rechenaufwand von (C.37) bei $N=2^{\gamma}$ auf $N\gamma/2$ komplexe Multiplikationen und $N\gamma$ komplexe Additionen gegenüber N^2 komplexen Multiplikationen und $N(N-1)$ komplexen Additionen bei der direkten FT gesunken ist. Die zusätzlich nötige Umordnung der Zeilen in (C.37) fällt nicht weiter ins Gewicht. Um nicht der Einschränkung der Basis 2 zu unterliegen wurden Algorithmen für beliebige Basen, vornehmlich für 4,8,16 entworfen. Damit sinkt zwar die Zahl der komplexen Rechenoperationen, allerdings steigt der Speicherbedarf und kompliziert sich der Algorithmus. Die Basen 4 und 8 scheinen am effizientesten. Zusätzlich gibt es Routinen für die beliebige Basiswahl,jedoch sollte N möglichst stark faktorisierbar sein. Eine weitere häufig genutzte Möglichkeit besteht im Auffüllen des Datenmaterials, um eine hochgradig teilbare Anzahl von Abtastwerten zu erhalten (siehe Kapitel C.g).

Die weitgehende Faktorisierung der Transformationmatrizen, die Ausnützung von Symmetrieeigenschaften sowie die geschickte Wahl der Datenfelddimension N sind die Eckpfeiler der FFT. Alle hier gezeigten Ableitungen sind ohne Einschränkungen auch im 2D-Bereich gültig und schaffen die Möglichkeit mit Rasterpunktzahlen > 100000 in vertretbarer Rechenzeit zu operieren.

g) Randeffekte

Aufgrund der Periodizität der Fourierentwicklung müssen Überlegungen angestellt werden, inwieweit die gewonnenen Ergebnisse die vorliegenden Eingangswerte repräsentieren.Da in der Praxis einerseits ein begrenztes Datengitter der Dimension $M \times N$ mit meist keineswegs periodischer Information zur Verfügung steht, andererseits die Beziehung (C.10)

$$h(k+M, l+N) = h(k,l)$$

Gültigkeit hat, wird bei der FT dieses Gitter unendlich oft an das ursprüngliche Datenmaterial kopiert. Somit liegt den transformierten Randwerten ein Datenmaterial zugrunde, das zum Teil nicht die Realität widerspiegelt. Eine Möglichkeit dieses Problem in den Griff zu bekommen besteht in der Anwendung von sogenannten "Fensterfunktionen". Dies sind gerade reelle Gewichtsfunktionen,welche die Grundwerte an den Rändern langsam gegen 0 streben lassen. Im Spekralbereich sind sie durch geringe Seitenschwingungen und hohe Konzentration in der Grundschwingung repräsentiert (SIDERIS; 1984).

Eine weitere, recht einfache und wirkungsvolle Methode besteht darin, die Kernfunktion f ab einer Distanz d_o gleich 0 zu setzen (Abb.11). Verwendet man

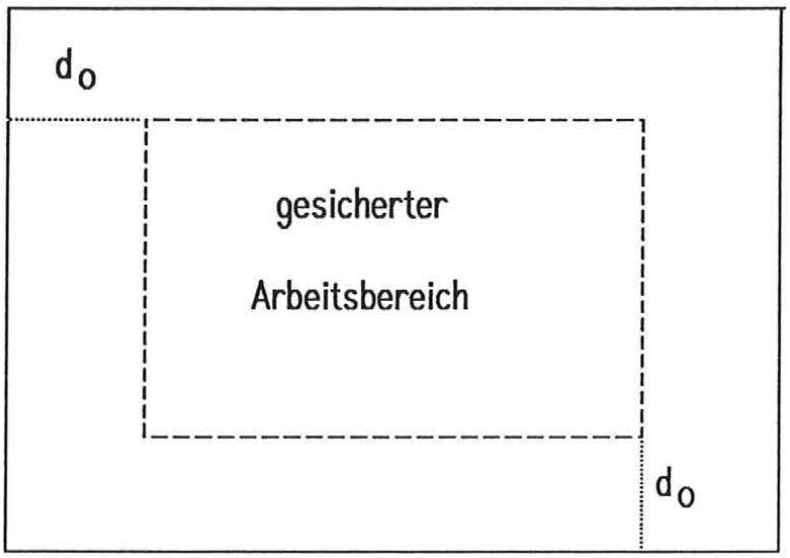


Abb. 11

nur Funktionswerte deren Distanz von den Rändern mindestens d_o beträgt, wird die Anwendung einer Fensterfunktion überflüssig. Der Nachteil liegt in der Erstellung oder dem kostspieligen Bezug von großflächigem Datenmaterial, um in einem relativ eng begrenzten Gebiet aussagekräftige Werte zu erhalten. Als Beispiel diene folgende Überlegung. Bei einem angenommenen d_o=10% der Seitenlänge eines quadratischen Datenfeldes liegt die aussagekräftige Fläche bei F_1=64% der Gesamtfläche. Im allgemeinen hängt d_o vom gewünschten Einzugsgebiet um die Aufpunkte ab und liegt zumeist weit über den angegebenen 10%. Bei z.B. d_o=25% liegt allerdings die Nutzfläche nur mehr bei F_2 = 25% der Gesamtfläche. (Abb. 12)

Um dieser Problematik zu entgehen sollte man das gegebene Datengitter mit sogenannten dummy-Daten umfeldern. Man umgibt also die Grunddaten mit einem dr breiten Band von Werten, welche die Natur möglichst gut repräsentieren und keine neuen Frequenzen in die Spektraldarstellung einbringen (siehe Abb. 9.a). In unserem Fall eines Höhenrasters zeigt die Überlegung, daß ein Randbereich in dem alle Höhenwerte gleich Null oder konstant gesetzt werden, aufgrund der schroffen Kante zu den realen Daten, die denkbar schlechteste Lösung darstellt (siehe Abb. 13.a).

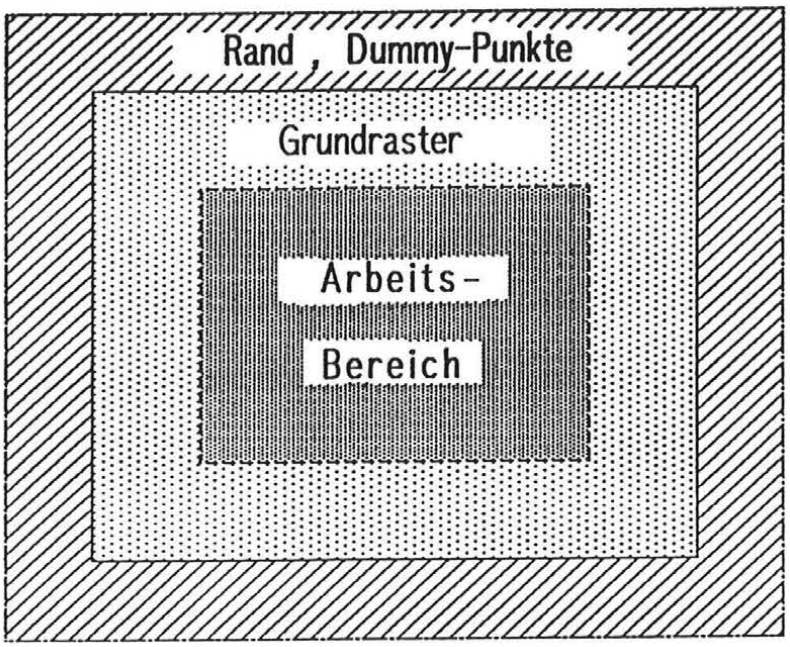


Abb. 12

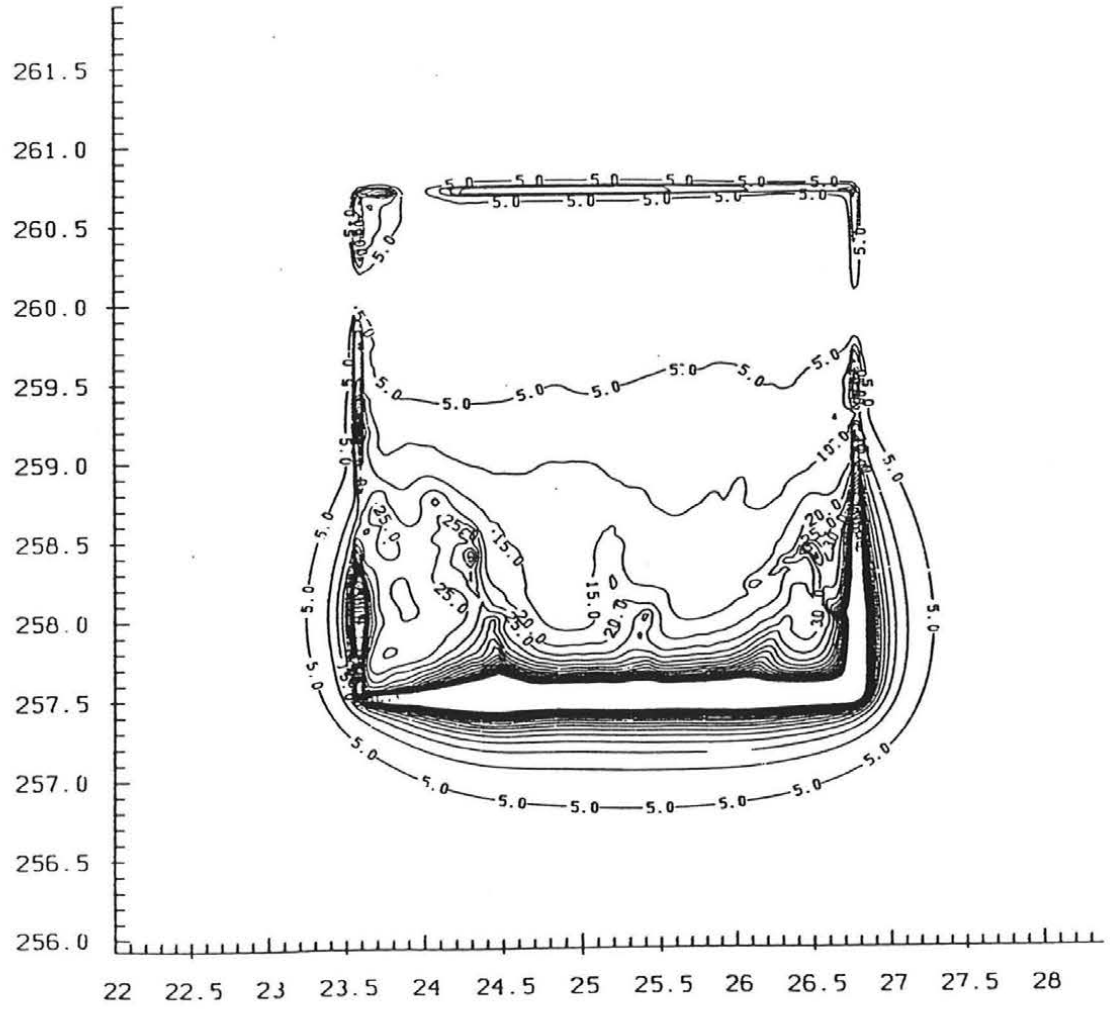


Abb. 13.a) dr=64 x 25m = 1.6 km ; H_{Rand} = const = 1000m
Schichtabstand 5mgal; F_{Raster} = 25% F_{Rand} = 75%

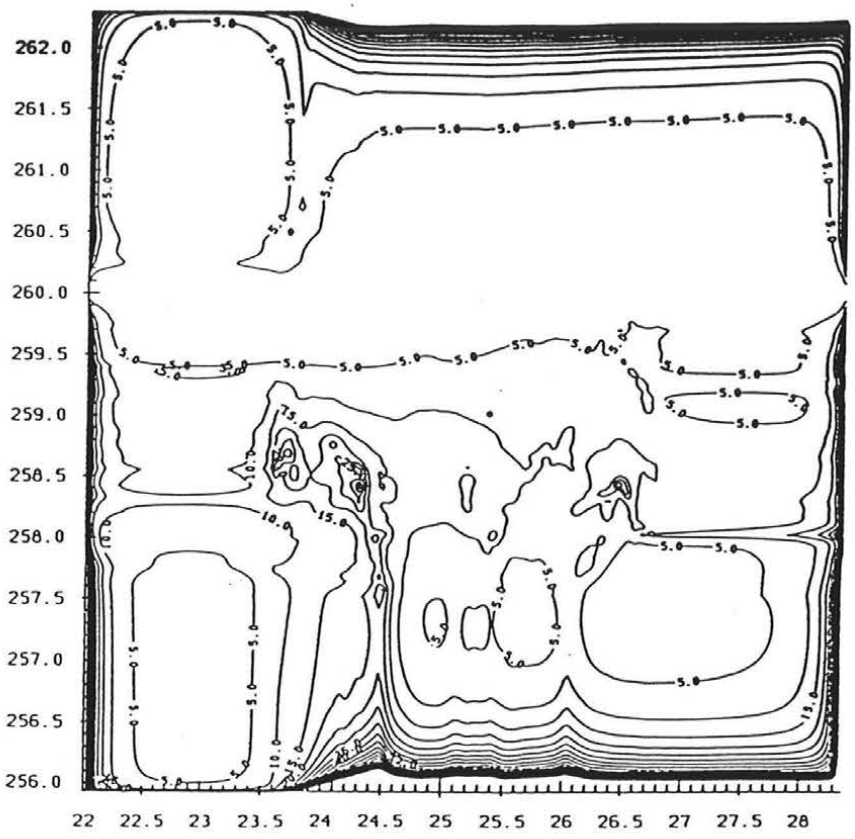


Abb. 13.b) dr = 64 x 25m = 1.6km ; H_{Rand} = verlaufend (EDGE)
Schichtabstand 5mgal ; F_{Raster} = 25% F_{Rand} = 75%

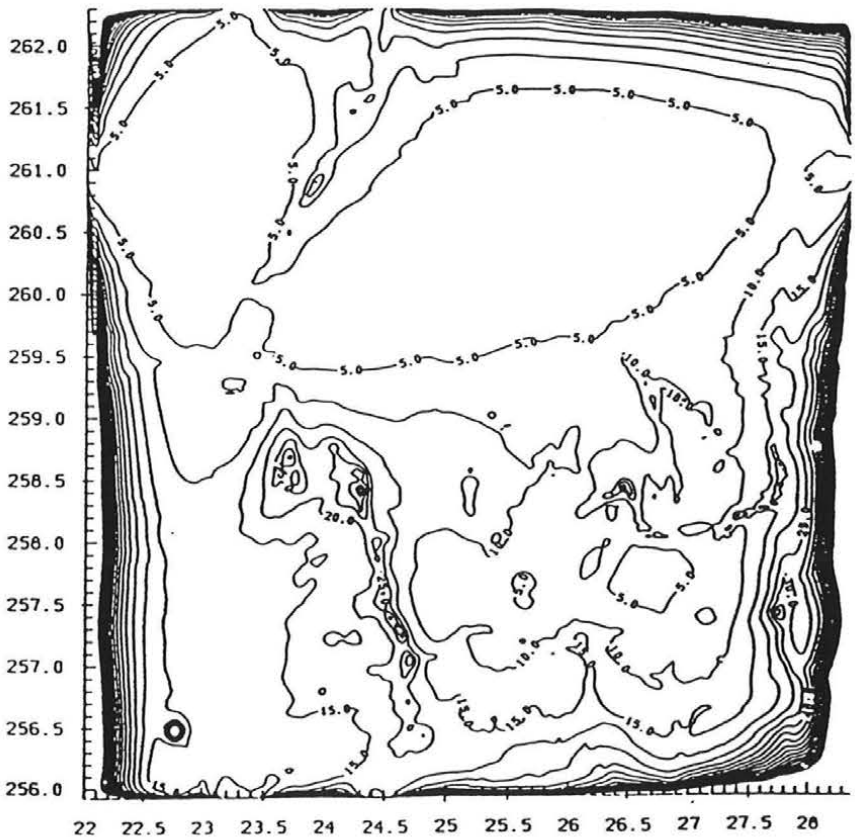


Abb. 13.c) dr = 0 ; Schichtabstand 5 mgal
F_{Raster} = 100% F_{Rand} = 0%

Wesentlich bessere Resultate erhält man mit einem Randbereich, dessen konstante Höhe gleich dem Mittelwert der Höhen des Grundrasters entspricht. Trotzdem treten natürlich auch in diesem Fall noch unangenehme Sprünge an der Rastergrenze auf, die den brauchbaren Arbeitsbereich wesentlich verkleinern. Die besten Erfahrungen konnten mit einem glatt verlaufenden Rand, dessen Größen beginnend von den Randwerten des vorgegebenen Rasters sich allmählich einer Konstanten nähern, gewonnen werden. Zu diesem Zweck wurde die Subroutine "EDGE" (Anhang B) erstellt,welche eine Umrandung der frei wählbaren Breite dr liefert. Der Algorithmus kopiert immer die Höhe des nächstgelegenen Grundrasterpunktes als Höhe in den Dummy-Bereich. Die Wahl der Randbreite sollte jedenfalls auch von der nun zu transformierenden Gesamtpunktzahl $M_{neu} \times N_{neu}$

$M_{neu} = M + 2dr/RW \quad N_{neu} = N + 2dr/RW \quad RW...Rasterweite$

abhängig gemacht werden. Nicht nur die Problematik des Speicherbedarfs und der Verarbeitung großer Datenfelder muß berücksichtigt werden, sondern vorrangig die Tatsache, daß die FFT wesentlich schneller bei gut teilbaren M_{neu}, N_{neu} abläuft.

Testrechnungen haben gezeigt, daß bei Wahl der maximal sinnvollen Randbreite $dr_{max} \approx d_o$ die Grenze des Arbeitsbereichs bis auf $d_o/2$ an die Grenze des Grundrasters heranrückt, ohne einen spürbaren Genauigkeitsverlust ($\approx$1mgal; 0.5" bei RW=250m) hinnehmen zu müssen. Diese Werte hängen jedoch stark von der Rasterweite und der Topographie ab. Unter den Annahmen der beiden bereits gebrachten Beispiele über den prozentuellen Anteil der Fläche mit aussagekräftigen Funktionswerten, vergrößern sich diese bei d_o=10% auf F_1= 81% und für d_o= 25% auf immerhin F_2= 56.25%.Diese Zahlen untermauern direkt das verbesserte Kosten/ Nutzenverhältnis zwischen Erstellung bzw. Kauf und Gebrauch eines Höhenrasters.

h) Rasterschachtelung

Die Berechnung des Potentials sowie seiner Funktionale für den Aufpunkt P erfolgt im diskreten Fall durch doppelte Summation von Funktionen der Höhendifferenzen zwischen dem laufenden Punkt Q und dem Aufpunkt über der xy-Ebene E. Je größer allerdings der Abstand r=PQ , desto geringer die Bedeutung der Einzelsumme für das Gesamtergebnis. Somit ist es keines-

wegs notwendig bei großer Aufpunktdistanz jede kleine (kurzwellige) topographische Unregelmäßigkeit in voller Schärfe zu berücksichtigen. Dieser Umstand hilft sowohl Rechenzeit als auch Speicherplatz zu sparen. Bei der Prismenmethode stehen zumeist 2 Rastertypen in Verwendung. Ein feinmaschiger, das Interessensgebiet abdeckender Raster F (einige Kilometer) und ein ihn umgebender grobmaschiger Bereich G (≈bis 20-30 km) der sich um die Aufpunkte bis zur Integrationsgrenze erstreckt.

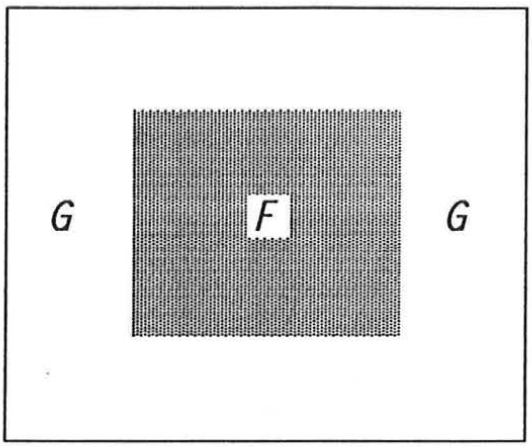


Abb. 14

Im groben Raster kann mit Vorteil mit einfacheren Beziehungen wie z.B. der "Massenlinien-" oder "Massenpunktformel" gearbeitet werden. Die numerischen Probleme liegen hauptsächlich in der Korrespondenz beider Raster. So sollte der engmaschige Bereich F genau in die Maschengrenzen von G passen und zudem dem gleichen Grunddatenmaterial entstammen um an der gemeinsamen Grenze keine Unstetigkeitsstellen des Geländes zu simulieren. Dies wird nur optimal erfüllt, wenn G durch Mittelbildung der dichteren F-Werte entsteht. Anderenfalls sind Grenzwerte mittels eines passenden Ausgleichsalgorithmus zu bestimmen.
Zur Steigerung der Genauigkeit empfiehlt es sich zudem, anstatt der im Feld gemessenen Höhe von P eine aus dem Reduktionsraster interpolierte Aufpunktshöhe zu verwenden, um allfällige Differenzen zur Rasterfläche zu vermeiden (z.B. besondere Empfindlichkeit der g-Reduktion).

Im Spektralbereich stehen uns zwei Wege offen. Entweder teilen wir ähnlich der Quadermethode das Gebiet in zwei unterschiedlich feine Raster oder wir trennen im Frequenzbereich die langwellige von der kurzwelligen Höheninformation.

Im ersten Fall bildet man schematisch

$$tc \approx f\,\Delta h = (f_1 + f_2) * \Delta h = f_1 * \Delta h + f_2 * \Delta h \qquad (C.38)$$

wobei f_1 das Integral vom Aufpunkt bis zum inneren Reduktionsradius d_1 und f_2 das Integral von d_1 bis ∞ bedeuten. In der Praxis wird ∞ natürlich durch den äußeren Reduktionsradius d_2 ersetzt. (Abb.15)

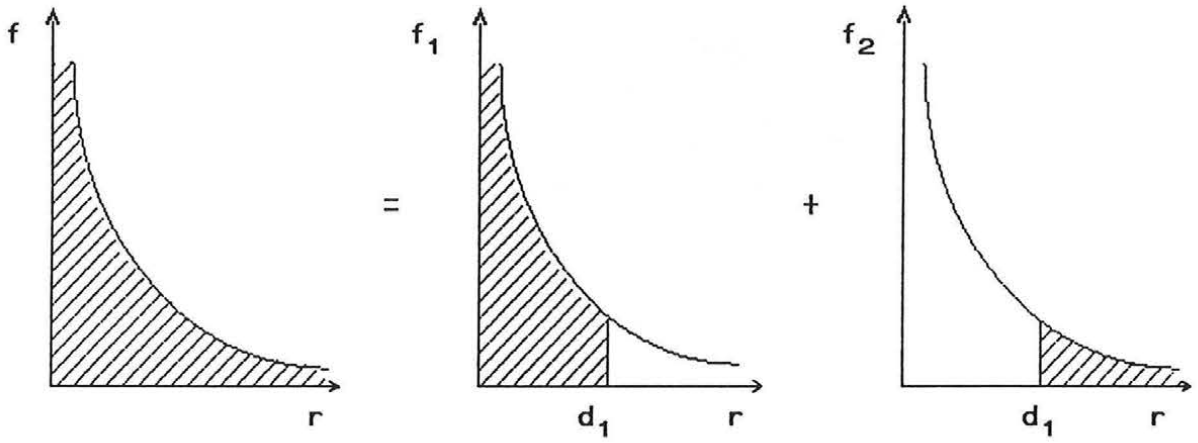


Abb. 15

Im zweiten Fall trennen wir die Höheninformation, also formal

$$tc \approx f * \Delta h = f * (\Delta h_1 + \Delta h_2) = f * \Delta h_1 + f * \Delta h_2 \qquad (C.39)$$

wobei nun Δh_1 die ruhige, glatte, langwellige Höheninformation darstellt und Δh_2 die kurzwelligen Resthöhen. Diese zwar grundsätzlich elegantere Lösung arbeitet jedoch nur optimal, wenn Δh_1 die "low-pass" gefilterte Höheninformation von Δh wiedergibt und Δh_2 nur mehr Frequenzen über der Nyquist-Frequenz des groben Rasters beinhaltet. Dies ist im allgemeinen jedoch nicht der Fall, vor allem wenn die Raster F und G verschiedenen Datenquellen entstammen. Desweiteren treten zusätzlich Fehler durch die nunmehr nötige Interpolation der Funktionswerte des G-Rasters auf das feine Gitter auf.

D. Topographische Korrektur

a) Überblick

Der Elimination des Einflusses der Topographie (sichtbare Massen,Dichtesprünge) auf Meßgrößen wie g, φ, λ (φ ... astron. Breite, λ ... astron. Länge) ist größtes Augenmerk zu schenken. Das Ziel sind einerseits nicht völlig voraussetzungsfrei gewonnene Randwerte entlang einer Niveaufläche und andererseits möglichst "glatte" Datenfelder in denen in einfacher Weise zu interpolieren ist. So bedienen sich die klassischen "remove-restore-Verfahren" eines 3-Schritt Algorithmus.

1) Entfernung der Topographie
   Wirkung auf Oberflächenpunkt P

2) Freiluftreduktion

3) Wiederherstellung der Topographie
   Wirkung auf P_o

um Schwere und Lotabweichung im Geoidpunkt P_o festzulegen. In ähnlicher Weise wird zur Bestimmung von Höhenanomalien z.B. unter Zuhilfenahme des Instrumentariums der Kollokation die topographische (oder topographisch-isostatische) Reduktion zwecks Glättung des Datenmaterials vorweggenommen. (MORITZ,1983)

Unter Geländekorrektur (tc = terrain correction) versteht man allgemein den nicht linearen Anteil der topographischen Reduktion.

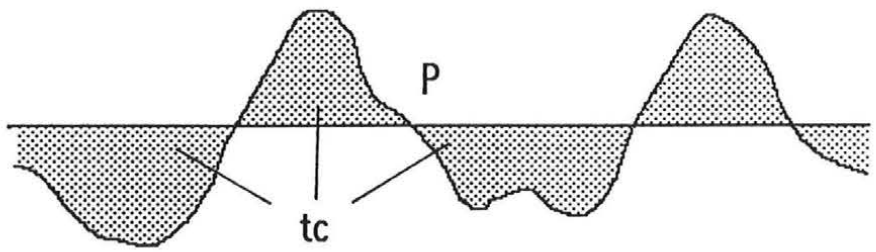


Abb. 16

So läßt sich die Korrektur gemessener g-Werte in einen Bouguer-Term (Platte) und den tc-Term aufspalten,

$$dg_{Top} = - 2\pi G\rho h_P + tc_g \qquad (D.1)$$

wobei h_P für die Höhe des Oberflächenpunkts steht. tc_g ist in jedem Fall positiv an den Meßwert anzubringen. Ähnliche Beziehungen sind natürlich ebenfalls für die Lotabweichungskomponenten ξ, η gültig.

$$\begin{aligned} d\xi &= -tc_\xi \\ d\eta &= -tc_\eta \end{aligned} \qquad (D.2)$$

In diesem Fall sind topographische Reduktion und Geländekorrektur bis auf das Vorzeichen ident, da der Einfluß der ebenen Bouguerplatte auf die Lotabweichung = 0 ist.

Zur Festlegung der tc-Werte bieten sich nun 3 Verfahren an. Die älteste Methode ist jene der Kompartimente, wobei für jeden Aufpunkt getrennt die mittleren Geländehöhen von Kreisringsektoren zu bestimmen sind. Mit dem verstärkten Einsatz von Computern und der Vorlage von Geländeinformation in Form von Höhenrastern wurde auf die von Elmiger (ELMIGER,1969) erläuterte Quadermethode übergegangen. Das Gelände wird hier durch ein digitales Modell angenähert, bei dem die Gesteinsmassen in quaderförmige Säulen mit quadratischem oder rechteckigem Grundriß zerlegt werden.Sind Lage,Höhe und Dichte eines derartigen Quaders bekannt,ermittelt sich seine Wirkung auf den Aufpunkt P durch Integration der $\frac{1}{r}$ - Funktion über den Quader.

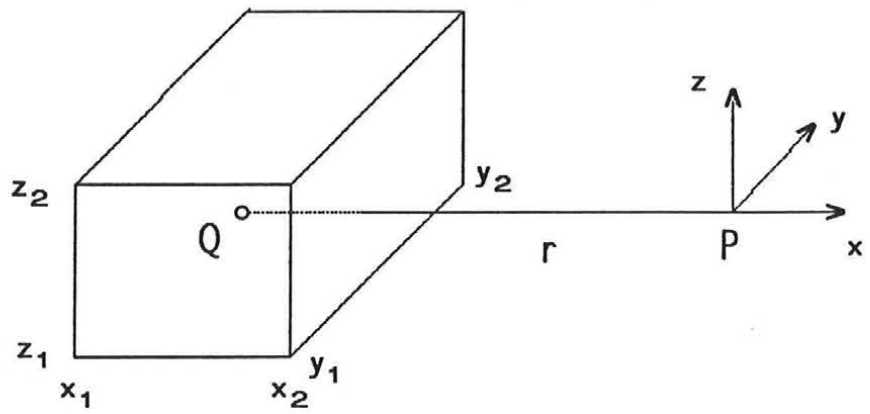


Abb. 17

Setzen wir Q als Integrationspunkt und ρ als die konstante Dichte voraus, so läßt sich für T, g, ξ und η zeigen

$$T = G\rho \int_{x1}^{x2}\int_{y1}^{y2}\int_{z1}^{z2} \frac{1}{r}\, dz\, dy\, dx = G\rho \int_V \frac{1}{r}\, dV$$

$$dg = G\rho \int_V \frac{d}{dz_Q}\left(\frac{1}{r}\right) dV \qquad = -G\rho \int_V \frac{z}{r^3}\, dV \qquad \text{(D.3)}$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{G\rho}{\gamma}\int_V \frac{d}{d\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}\left(\frac{1}{r}\right) dV \qquad = -\frac{G\rho}{\gamma}\int_V \frac{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}{r^3}\, dV$$

Der leichten Einsetzbarkeit desselben Höhenrasters zur Reduktion mehrerer Aufpunkte steht ein nicht unerheblicher Aufwand an Rechenkapazität zur Auswertung von (D.3) gegenüber. Die sinkende Einflußnahme des Quaders Q mit steigender Entfernung zum Aufpunkt P erlaubt allerdings die Verwendung der wesentlich rascher auswertbaren Massenlinien-, bzw. Massenpunktformel (ab d=3km) ohne spürbaren Genauigkeitsverlust. Somit läßt sich zwar Rechenzeit in den Randbereichen einsparen, für eine große Zahl von Aufpunkten jedoch ist dies noch immer keine befriedigende Lösung. Damit gewann das im folgenden Abschnitt besprochene Verfahren an Bedeutung.

b) Die Terrainkorrektur mittels FFT

Schreiben wir die Beziehung für dg aus (D.3) nochmals an, wobei diesmal das Volumsintegral in eine Höhenkomponente und eine Integration über die x,y-Ebene E getrennt sei.

$$tc_g(P) = G\rho \int_E \int_{h_P}^{h_Q} \frac{z - h_P}{r^3}\, dz\, dE \qquad \text{(D.4)}$$

$$\text{mit} \quad r = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z - h_P)^2}$$

Sieht man vorerst die Höhendifferenzen um den Aufpunkt als vernachlässigbar klein an

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{r_0^3} \qquad \text{mit} \qquad r_0 = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

und integriert über z, so vereinfacht sich (D.4) zu

$$tc_g(P) \approx \frac{1}{2} G\rho \int_E \frac{(h_Q - h_P)^2}{r_o^3} dE \qquad (D.5)$$

Moritz (MORITZ,1968) nennt diesen Term " lineare Approximation" der Terrainkorrektur tc, obwohl der an sich quadratische Höhenterm auftritt. Setzen wir den Begriff "linear" jedoch in bezug auf das Produkt $\Delta g \cdot h$ und sehen $G\rho h$ in der Ordnung Δg, so wird die Bezeichnung für $G\rho h^2$ als "lineares Glied" klar erkennbar.

Spaltet man (D.5) in die 3 Teilintegrale,

$$tc_g(P) = \frac{1}{2} G\rho \left[\int_E \frac{h_Q^2}{r_o^3} dE + h_P^2 \int_E \frac{1}{r_o^3} dE - 2h_P \int_E \frac{h_Q}{r_o^3} dE \right] \qquad (D.6)$$

so liegt tc in einer Form vor, die durch wesentlich schnellere Techniken als die Quadermethode sie darstellt, auswertbar ist. Wird $1/r_o^3 = f$ gesetzt und bedeutet die Verknüpfung * eine Faltung im Sinne von Kapitel (C.4), so läßt sich (D.6) in folgender für die praktische Anwendung der FFT geeigneter Form anschreiben.

$$tc_g(P) = \frac{1}{2} G\rho \left[h^2 * f + h_P^2 f_o - 2h_P (h * f) \right] \qquad (D.7)$$

h steht hier für die Höhe des laufenden Punktes Q und f_o für die DC-Komponente = Wert der transformierten Kernfunktion f im Ursprung (siehe Beispiel Kapitel C.d.4).

Auf den ersten Blick erscheinen zur Auswertung von (D.7) 5 Transformationen notwendig. Vorerst jene der Kernfunktion f und der beiden Höhenfunktionen h bzw. h^2 in den Spektralraum, sodann die Rückführung der Faltungsprodukte $h^2 * f$ und $h * f$. Durch geschickte Zuordnung der reellen Funktionen h und h^2 zu einer komplexen Größe $h + ih^2$ und durch Ausnützung der Transformationseigenschaften gerader und ungerader bzw. reeller und komplexer Funktionen (siehe Kapitel C.d.3) bei der Rückführung kann mit 3 Fourierumbildungen das Auslangen gefunden werden.

c) Die Lotabweichungskorrektur

Die Beziehungen (D.3) für die Lotabweichungskomponenten ξ , η erhalten in linearer Näherung die Gestalt

$$tc_{\xi}(P) = -\frac{G\rho}{\gamma}\int_{E}\int_{h_P}^{h_Q}\frac{(x_Q-x_P)}{r_o^3}\,dz\,dE$$

$$tc_{\eta}(P) = -\frac{G\rho}{\gamma}\int_{E}\int_{h_P}^{h_Q}\frac{(y_Q-y_P)}{r_o^3}\,dz\,dE \qquad (D.8)$$

γ ... Betrag des Schwerevektors

Es sei darauf hingewiesen, daß die Integranden nun frei von der Punkthöhe h_P sind. Damit entspricht die lineare Approximation für die Lotabweichungskomponenten einem Kondensationsmodell, in dem die Massen in einer unendlich dünnen Schicht über der xy-Ebene aufgetragen sind.

Die Integration über z ergibt

$$tc_{\xi}(P) = -\frac{G\rho}{\gamma}\int_{E}\Delta x\,\frac{(h_Q-h_P)}{r_o^3}\,dE$$

$$tc_{\eta}(P) = -\frac{G\rho}{\gamma}\int_{E}\Delta y\,\frac{(h_Q-h_P)}{r_o^3}\,dE \qquad (D.9)$$

Setzt man

$$f = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}\frac{1}{r_o^3}$$

so erhält man den zu (D.7) analogen Ausdruck für die Lotabweichungskomponenten (ξ,η sind blind gegenüber dem Einfluß der Bouguerplatte ——› h_P=0).

$$\begin{matrix} tc_{\xi} \\ tc_{\eta} \end{matrix} = -\frac{G\rho}{\gamma}\,[f * h] \qquad (D.10)$$

Diese Entwicklung umfaßt nur 4 Transformationen; eines Filters f pro Komponente, des Höhenrasters h sowie die Rückwandlung des Faltungsproduktes. Diesem numerischen Vorteil steht jedoch die Meinung ungenügender Präzision der Ergebnisse in Gebieten mit bewegter Topographie gegenüber (z.B. FORSBERG, 1984). Zudem wird häufig auf die meist beschränkte Zahl von

Lotabweichungspunkten hingewiesen, die ebenso rationell mit der Quadermethode zu bearbeiten sei. Folgend werden nun 2 Möglichkeiten zur Verbesserung des Approximationsalgorithmus gezeigt und der Frage nachgegangen, ob die Ergebnisse der Beziehung (D.10) den Genauigkeitsanforderungen der überwiegenden Zahl der Anwendungen entspricht. Ebenso soll anhand von Beispielen geklärt werden, ab welcher Mindestanzahl von Aufpunkten die FFT wirtschaftlich einzusetzen ist.

d) Verwendung eines Höhenkorrekturfaktors

Gehen wir auf die Entwicklung (D.4) zurück, so gilt in aller Strenge

$$tc_g(P) = G\rho \int_E dx\, dy \int_{h_P}^{h_Q} \frac{(z - h_P)}{[(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2+(z_P-z_Q)^2]^{3/2}}\, dz \qquad (D.11)$$

Durch Approximieren des Filters f ($f = 1/r^3 \approx 1/r_o^3$) erhielten wir (D.7). Setzt man jedoch nach P.Comer (COMER,1986) ,

$$f = (\Delta x^2+\Delta y^2+a^2)^{-3/2} \qquad (D.12)$$

wobei a^2 einen integralen Mittelwert für $(h_P - z)^2$ darstellt, so gewinnen wir eine Näherung , die der spezifischen Topographie des Arbeitsgebiets besser angepaßt ist. Zudem wird das Problem der Singularität von f im Fall $r_o=0$ in der xy-Ebene gelöst.

Da gilt

$$\iint f\, dx\, dy = 2\pi/a = f_o \qquad \text{und}$$

$$F = (2\pi/a)\, e^{-2\pi a \sqrt{u^2+v^2}} \qquad (D.13)$$

folgt aus (D.7) und (D.13)

$$tc_g(P) = \frac{1}{2} G\rho\, [h^2 * f + h_P^2\, 2\pi/a - 2h_P(h*f)] \qquad (D.14)$$

bzw. (D.10) für die Lotabweichungskomponenten mit geändertem Filter f. Um sinnvolle Werte für die Konstante a zu erhalten, können z.B. Tabellen zu Rate gezogen werden, die a für das Argument "mittlere Hangneigung"

enthalten. Empfehlenswerter erscheint es jedoch den mittleren Höhenunterschied durch Testrechnungen den topographischen Verhältnissen optimal anzupassen.

e) Approximation höherer Ordnung

Ausgehend von (D.4) läßt sich das Integral (D.9) folgendermaßen erweitern.

$$r^{-3} \approx r_o^{-3} - \frac{3}{2} r_o^{-5} (z-h_P)^2 + \underline{\left| \frac{15}{8} r_o^{-7} (z-h_P)^4 \right.} \qquad \text{(D.15)}$$

mit

$$r_o = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Integrieren wir nach z und setzen die Grenzen h_P bzw. h_Q ein, erhält das Ebenenintegral folgende Gestalt.

$$\begin{matrix} tc_\xi(P) \\ tc_\eta(P) \end{matrix} = -\frac{G\rho}{\gamma} \int_E \begin{matrix} (x_Q - x_P) \\ (y_Q - y_P) \end{matrix} \left[\frac{1}{r_o^3} (h_Q - h_P) - \frac{1}{2} \frac{1}{r_o^5} (h_Q - h_P)^3 \right] \qquad \text{(D.16)}$$

Diesmal treten allerdings 2 Filterfunktionen auf

$$f = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \frac{1}{r_o^3} \qquad \text{und} \qquad g = \left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\} \frac{1}{2} \frac{1}{r_o^5} \qquad \text{(D.17)}$$

deren Verknüpfung mit den Geländehöhen zu 4 Faltungsprodukten führt.

$$\begin{matrix} tc_\xi(P) \\ tc_\eta(P) \end{matrix} = -\frac{G\rho}{\gamma} \left[f*h - 3h_P^2 (g*h) + 3h_P (g*h^2) - g*h^3 \right] \qquad \text{(D.18)}$$

Bei erster Durchsicht dieser Beziehung scheint der Rechenaufwand gegenüber dem Kondensationsmodell gigantisch gestiegen zu sein. So sind 7 reelle Funktionen in den Frequenzbereich zu transformieren (2 pro Filter + h + h^2 + h^3) und 4 Faltungsprodukte pro Koordinatenrichtung = 8 Funktionen retour zu wandeln. Bedienen wir uns jedoch der schon angesprochenen Möglichkeit 2 reelle Funktionen gleichzeitig in einer komplexen Variablen zu verarbeiten und in Folge mittels der Beziehungen (C.14) wieder zu trennen, so genügen 4 FFT-Aufrufe um alle Funktionen in den Spektralbereich zu transformieren.

Umgekehrt entsprechen den Faltungsprodukten $f*h$, $g*h$, $g*h^2$ und $g*h^3$ rein reelle Funktionen. Somit muß sich ihre Spektraldarstellung nach Tab. 1 aus einem geraden Realteil und einem ungeraden Imaginärteil zusammensetzen.

$$\begin{aligned} F(u) &= R_g(u) + j\, I_u(u) \quad \langle\!\!-\!\!-\!\!\rangle \; f(x) = R(x) \\ G(u) &= R_g(u) + j\, I_u(u) \quad \langle\!\!-\!\!-\!\!\rangle \; g(x) = R(x) \end{aligned} \tag{D.19}$$

Multipliziert man in (D.19) die Funktion G mit der imaginären Einheit j, so folgt

$$\begin{aligned} F(u) &= R_g(u) + j\, I_u(u) \quad \langle\!\!-\!\!-\!\!\rangle \; f(x) = R(x) \\ G(u) &= -I_u(u) + j\, R_g(u) \quad \langle\!\!-\!\!-\!\!\rangle \; g(x) = I(x) \end{aligned} \tag{D.20}$$

Addition der Komponenten (D.20) in einer komplexen Variablen und Umbildung mit FFT liefert im Raum die beiden gesuchten Funktionen $f(x)$, $g(x)$ bereits getrennt. Somit sind nur insgesamt 4 Rücktransformationen für beide Lotabweichungskomponenten nötig. Effiziente Programmierung kann den Mehraufwand an Rechenzeit gegenüber der konventionellen Methode (D.10) auf etwa 10% begrenzen. In Kapitel E wird dies durch einige Beispiele dokumentiert.

Um einen Überblick über die Größenordnung der in (D.15) bzw. (D.16) auftretenden höheren Reihenglieder zu bekommen setzen wir nach der Integration über z

$$\begin{aligned} g_o &= \frac{1}{r_o^3}\,(h_Q - h_P) \\ g_1 &= \frac{1}{r_o^5}\,(h_Q - h_P)^3 \\ g_2 &= \frac{1}{r_o^7}\,(h_Q - h_P)^5 \end{aligned} \tag{D.21}$$

Stellt man g_1 und g_2 in Funktion von g_o dar

$$\begin{aligned} g_1 &= g_o\, r_1 \\ g_2 &= g_o\, r_2 \end{aligned} \tag{D.22}$$

so sind r_1, r_2 die gesuchten Verhältniszahlen zum Hauptterm.

$$g_1 = \frac{1}{r_o^3}(h_Q - h_P)\left[\frac{1}{2}\frac{1}{r_o^2}(h_Q - h_P)^2\right]$$

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{r_o^2}(h_Q - h_P)^2 = \frac{1}{2}\tan^2\alpha \qquad (D.23)$$

mit α ... mittlere Geländeneigung

In ähnlicher Weise finden wir

$$r_2 = \frac{3}{8}\frac{1}{r_o^4}(h_Q - h_P)^4 = \frac{3}{8}\tan^4\alpha \qquad (D.24)$$

Setzt man für α plausible Werte im Bereich $\alpha = 0^\circ$ bis zu hochalpinen mittleren Geländeneigungen von $\alpha = 30^\circ \approx 60\%$ ein, so zeigt Tabelle. 2 den relativen Fehler der Lotabweichungskomponenten, der durch Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auftritt.

α%	g_1	g_2
0%	0.0%	0.0%
15%	1.1%	0.0%
30%	4.5%	0.3%
45%	10.1%	1.5%
60%	18.0%	4.9%

Tab. 2

Somit scheint selbst bei Vernachlässigung aller Glieder $< 0.5''$ die Mitnahme des g_1- Terms bei bewegter Topographie ($\Delta\xi, \Delta\eta > 10''$) ab $\alpha = 30\%$ gerechtfertigt.

f) Interpolation mit bikubischen Splines

Im allgemeinen ist die Terrainkorrektur natürlich für beliebig gelegene Aufpunkte gesucht. Sind diese nicht mit den Rasterpunkten ident, so ist vorteilhaft mit bikubischen Splines $S(x,y)$ zu interpolieren. Dieses Produkt der

in den ebenen Hauptachsenrichtungen definierten kubischen Splines S(x) und S(y) eignet sich besonders als Basisfunktion im Rechteck. (SÜNKEL;1978)

$$S(x,y) = \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} a_{kl}^{(ij)} \, (x-x_i)^k \, (y-y_j)^l \qquad \text{(D.25)}$$

In besonders engmaschigen Rastern (z.B. dx=dy=25m) ist die bilineare Interpolation allerdings völlig ausreichend.

E. Lokale Studie Tirol

a) Die Meßkampagne

Im Rahmen des Projektes P5481 des Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung, dessen Ziel die Bestimmung des Geoidverlaufs in Westösterreich war, hielt sich der Verfasser zur Messung von Lotabweichungen im Sommer 1985 und Spätherbst 1986 einige Wochen im Bundesland Tirol auf (WEBER;1987). Das Einsatzgebiet (Abb.18) erstreckte sich vom Inntal nach Norden bis zur Staatsgrenze, im Westen begrenzt durch den Arlberg, im Osten durch die Verbindung Mittenwald-Seefeld. Auf 19 Stationen, deren mittlerer Punktabstand bei ca. 10km liegt, wurden die Lotabweichungskomponenten mit einer Genauigkeit des Mittels von 0.2"-0.3" durch Mehrfachmessung mit dem Zeiss-NI2-Astrolab erfaßt. Zudem gab die Meßwerterfassung gleichzeitig Gelegenheit eine Institutsentwicklung, welche die Datenaufnahme weitgehend automatisiert und den Personalaufwand auf eine Person beschränkt, in der Praxis zu erproben (WEBER,ZAHRADNIK;1986).

Aus hauptsächlich verkehrstechnischen Gründen wurde Reutte zum Ausgangspunkt aller Meßoperationen gewählt. Zugleich bekam diese Station aufgrund ihrer zentralen Lage in allen nachfolgenden Untersuchungen den Status des Referenzpunktes. Zur topographischen Reduktion der Lotabweichungen wurde in dankenswerter Weise für ein 80 km x 50km großes Teilgebiet ein digitales Höhenmodell mit einer Rasterweite von 250m (Raster R2) vom Institut für Photogrammetrie der TU-Wien zur Verfügung gestellt (Abb.18). Die Berechnungen erfolgten vorerst mittels Integration der Attraktionswirkung einzelner Quader auf die Meßpunkte. Der linear mit der Zahl der Aufpunkte steigende Bedarf an Rechenzeit zwang jedoch umgehend Überlegungen mit dem Ziel anzustellen den CPU-Bedarf bei gleichen Genauigkeitsanforderungen an die Ergebnisse erheblich zu reduzieren.

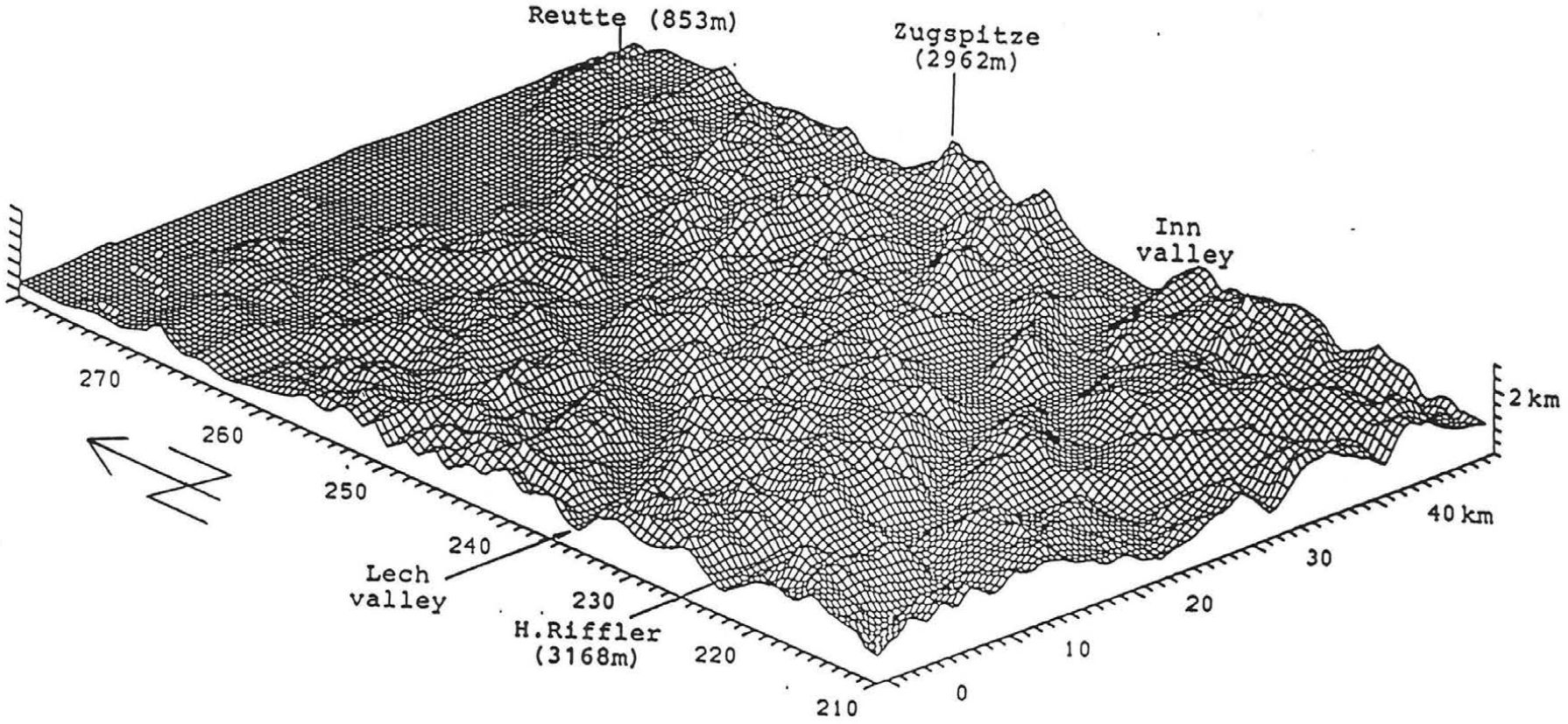


Abb.18: nördl. Tirol (Raster R2); Bezugsstreifen M28

b) Terrainkorrektur im Hochgebirge
(FFT oder Prismenintegration?)

Verschiedenste Publikationen der letzten Jahre (z.B. FORSBERG; 1985, SIDERIS;1984, etc.) verweisen direkt auf vorteilhafte FFT-Anwendungen zur Lösung der oben genannten Problematik. Die Einsparung von Rechenzeit ist allerorts unbestritten, Erfahrungen mit sehr engmaschigen Höhenmodellen in stark bewegter Topographie sind jedoch selten publiziert. Um diesem Mangel im vorliegenden Projekt zu begegnen wurde zusätzlich ein im Zuge von Arbeiten über Hangrutschungen im Bereich Reutte (MALLAUN; 1989) erstellter 25m x 25m Raster (6.3km x 8.0km Ausdehnung; R1 - Raster) für Testrechnungen übernommen.

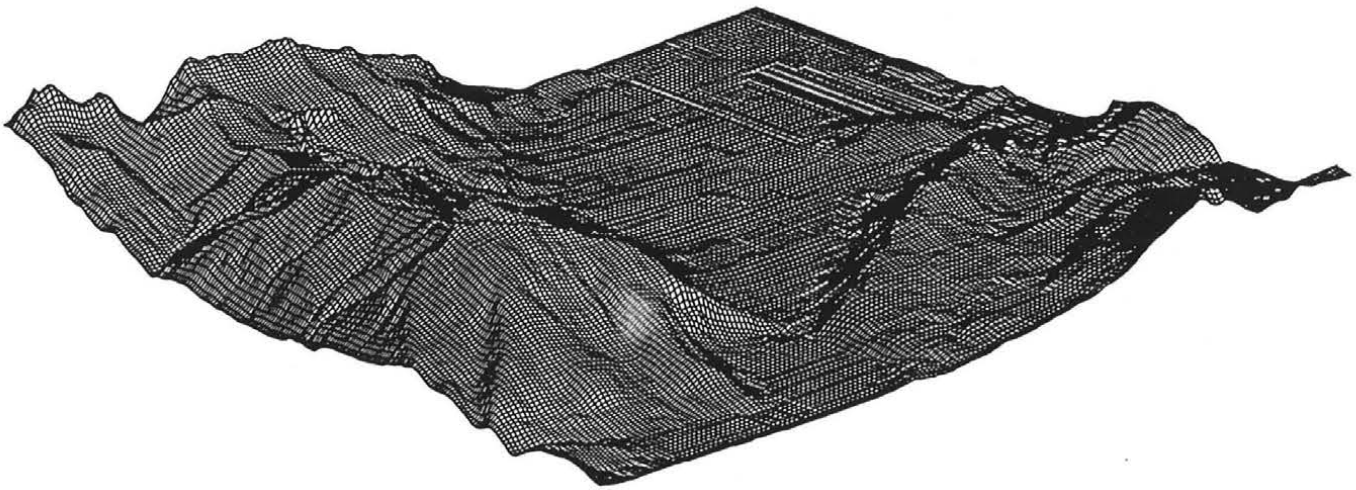


Abb. 19: Reutte (Raster R1)

Damit standen in einem Gebiet mit Höhenunterschieden bis zu 1500m zwei Datensätze zur Verfügung, die Vergleichsrechnungen zwischen Quader- und FFT-Methode zuließen.

Zur Prismenintegration wurde auf ein von H.HAITZMANN erstelltes Programm zurückgegriffen, wobei vorerst eine benutzerfreundliche Bedienungsoberfläche zu schaffen war.

Als Grundlage der Fourierentwicklung diente das von R.FORSBERG erarbeitete Programm "TCFOUR", welches aus vorgegebenen Höhenmodellen über der xy-Ebene unter anderem die Attraktionskomponenten in den drei Achsenrichtungen (z-Achse: Terrainkorrektur Δg; xy-Achsen: Terrainkorrektur $\Delta\xi$, $\Delta\eta$) ermittelt.

Eine wesentliche Aufgabe bestand nun darin , die nötigen Erweiterungen des vorliegenden Programms vorzunehmen. Ausgehend von der Kondensationsapproximation für die Lotabweichungskomponenten (D.8-D.10) wurde die Näherung dritter Ordnung (D.15-D.18) unter Berücksichtigung weiterhin vertretbarer Rechenzeiten eingearbeitet.

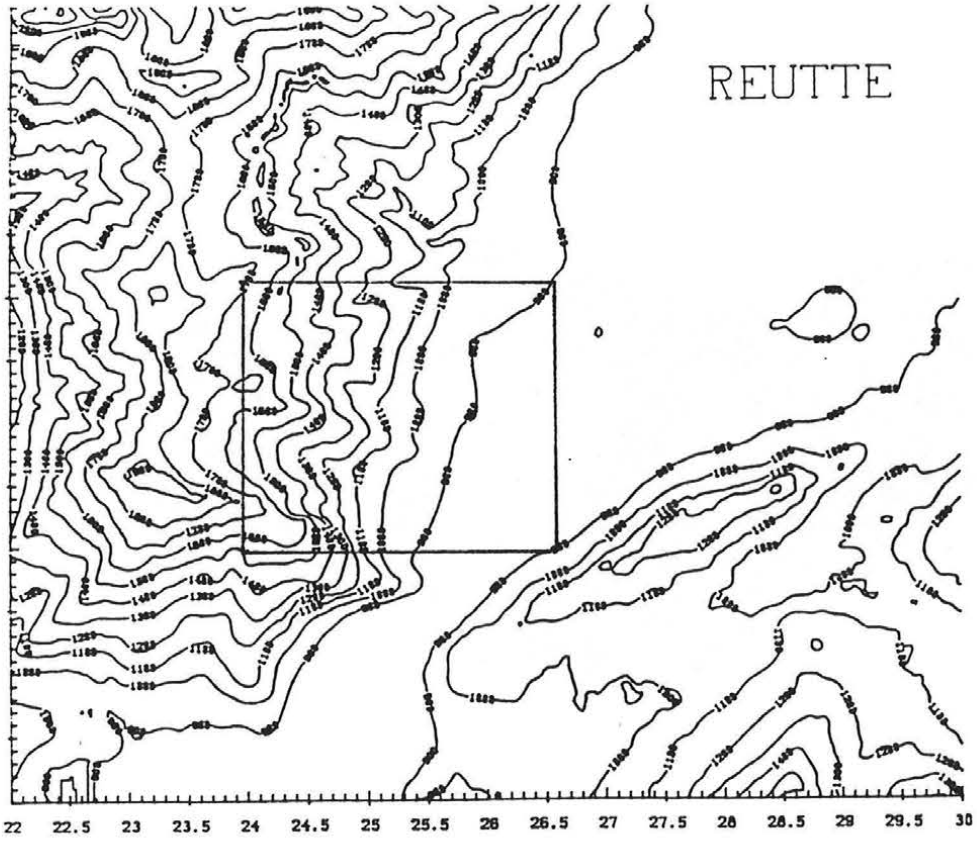


Abb. 20 : Schichtenabstand 100m; M28

Abb.20 zeigt den aus dem R1-Raster gerechneten Höhenschichtenplan des Gebiets Reutte. Im stark umrandeten Feld wurden 30 in Profilen angeordnete Testpunkte ausgewählt (Punktabstand 500m), in denen die Terrainkorrektur zu berechnen war. Die Lage und Länge der Profile ergab sich aus dem Reduktionsradius von 2 km und wurde von der geringen Ausdehnung des 25m-Rasters diktiert.

Die Tabellen Tab.3 bis Tab.5 beinhalten die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungsarten der Terrainkorrektur im R1-Raster (Index P= Prismenintegration, Index F=Fourierentwicklung, K= Kondensationsmethode)

Gebiet Reutte , RW=25m , d_1= 2km ,Δg[mgal], Δξη["],M28

Pkt	y[km]	x[km]	Δg_P	Δg_F	$\Delta\xi_P$	$\Delta\xi_{F,K}$	$\Delta\eta_P$	$\Delta\eta_{F,K}$
1	24.0	258.0	14.3	15.5	-7.3	-7.9	+2.8	+2.9
2	24.0	258.5	13.6	14.9	-0.4	0.0	+6.4	+6.9
3	24.0	259.0	8.5	8.3	-2.7	-2.6	+6.3	+6.3
4	24.0	259.5	6.5	6.2	+0.2	+0.3	+5.8	+5.7
5	24.0	260.0	7.4	7.3	-1.1	-0.9	+6.1	+6.0
6	24.5	258.0	19.0	21.3	-4.8	-5.1	+7.1	+8.0
7	24.5	258.5	14.0	16.1	-0.7	-0.2	+9.4	+10.0
8	24.5	259.0	12.5	13.6	-3.1	-3.3	+8.5	+8.7
9	24.5	259.5	10.3	10.7	-1.5	-1.5	+9.2	+9.2
10	24.5	260.0	8.2	8.4	-0.8	-0.7	+8.3	+8.2
11	25.0	258.0	12.4	14.5	-2.0	-1.6	+8.2	+9.0
12	25.0	258.5	9.9	10.9	-2.0	-1.8	+8.1	+8.4
13	25.0	259.0	10.8	11.5	-1.1	-0.9	+9.2	+9.3
14	25.0	259.5	9.4	9.6	-1.5	-1.6	+8.8	+8.7
15	25.0	260.0	9.7	10.0	-0.7	-0.6	+8.0	+7.9
16	25.5	258.0	4.5	4.5	-1.3	-1.1	+3.8	+3.8
17	25.5	258.5	5.0	4.9	-1.5	-1.3	+5.1	+5.0
18	25.5	259.0	5.3	5.1	-1.3	-1.3	+6.2	+6.0
19	25.5	259.5	6.7	6.5	-1.4	-1.5	+7.0	+6.8
20	25.5	260.0	7.0	6.6	-1.5	-1.5	+7.3	+6.9
21	26.0	258.0	2.5	2.3	+0.4	+0.6	+0.6	+0.5
22	26.0	258.5	2.4	2.2	-0.2	-0.1	+2.0	+1.8
23	26.0	259.0	2.5	2.1	-0.6	-0.6	+3.1	+2.9
24	26.0	259.5	2.8	2.4	-0.9	-0.9	+3.6	+3.3
25	26.0	260.0	3.2	2.7	-1.8	-1.7	+4.1	+3.8
26	26.5	258.0	4.4	4.4	+2.8	+3.0	-1.5	-1.6
27	26.5	258.5	1.4	1.3	+0.9	+1.0	0.0	-0.1
28	26.5	259.0	1.4	1.0	+0.1	+0.1	+0.8	+0.7
29	26.5	259.5	1.0	0.8	-0.6	-0.5	+1.5	+1.3
30	26.5	260.0	1.2	0.9	-1.0	-0.9	+2.3	+2.0

Tab. 3

Die daraus resultierenden statistischen Parameter der Differenzen Prismenintegration - Fourierentwicklung folgen zu

	Δg_{P-F}[mgal]	$\Delta \xi_{P-F}$["]	$\Delta \eta_{P-F}$["]
$\lvert tc_{max} \rvert$	2.3	0.6	0.9
μ	-0.29	-0.08	-0.01
σ	± 0.81	± 0.21	± 0.32

Tab. 4

μ ... Mittelwert

σ ... Standardabweichung

In Tabelle 5 wurde der Reduktionsradius auf 20km erweitert und die Höheninformation im Außenbereich dem weitmaschigeren R2-Raster entnommen. Die Ergebnisse zeigen eine Standardabweichung der Lotabweichungsdifferenzen im Bereich einiger Zehntelbogensekunden. Der für die g-Komponente entsprechende Wert von $\sigma = \pm$ 0.7 mgal scheint zufriedenstellend, wobei nochmals auf die besondere Empfindlichkeit bei Höhendifferenzen an den gemeinsamen Rastergrenzen hingewiesen sei.

	Δg_{P-F}[mgal]	$\Delta \xi_{P-F}$["]		$\Delta \eta_{P-F}$["]	
		K	T	K	T
$\lvert tc_{max} \rvert$	2.3	0.9	0.6	1.1	1.0
μ	-0.44	0.41	0.30	-0.25	0.34
σ	± 0.68	± 0.25	± 0.21	± 0.39	± 0.26

Tab. 5

Die Berücksichtigung der Third-Order Approximation (T) verbessert die Differenzbeträge nochmals um ca. 20%. Ein Vorteil, der durchaus im Rahmen des Mehraufwands an CPU-Zeit von ca. 10% liegt.

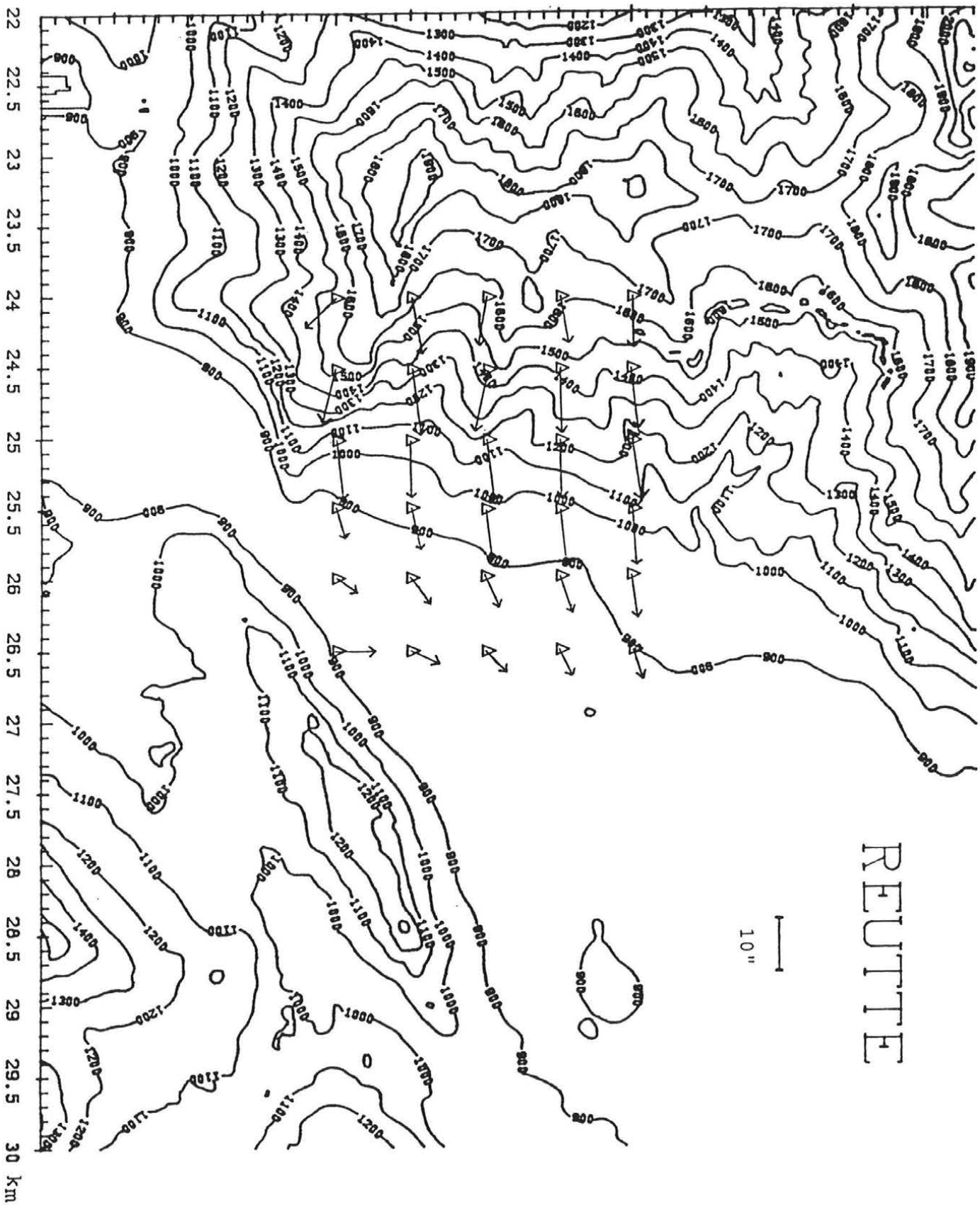


Abb. 21: LA-Testpunkte im Höhenschichtenplan

Ähnliche Tests wurden in Folge mit veränderten Rasterweiten durchgeführt. (RW=250m,500m,1km). Die beiden letztgenannten grobmaschigen Raster stellen jeweils gefilterte Versionen von R2 dar. Im Gegensatz zu Tab.5 stand diesmal keine Information des R1 -Rasters in Verwendung, allfällige Unstetigkeiten an der Grenze zu einem feinen Innenraster entfielen somit. Vergleichsbasis waren die aus dem 250m-Raster mit der Prismenmethode gewonnenen Werte (Index P).

	$\lvert tc_{max} \rvert$	μ	σ
Δg_{P-F250} [mgal]	1.5	-0.41	±0.38
Δg_{P-F500}	0.8	+0.17	±0.39
$\Delta g_{P-F1000}$	4.3	+1.24	±1.39
$\Delta \xi_{P-F250,K}$ ["]	1.1	+0.50	±0.15
$\Delta \xi_{P-F250,T}$	0.5	+0.40	±0.08
$\Delta \xi_{P-F500,K}$	0.6	+0.59	±0.12
$\Delta \xi_{P-F500,T}$	0.6	+0.40	±0.21
$\Delta \xi_{P-F1000,K}$	1.5	+0.45	±0.53
$\Delta \xi_{P-F1000,T}$	2.0	+0.34	±0.62
$\Delta \eta_{P-F250,K}$ ["]	0.7	-0.31	±0.21
$\Delta \eta_{P-F250,T}$	0.1	+0.07	±0.05
$\Delta \eta_{P-F500,K}$	0.4	+0.23	±0.14
$\Delta \eta_{P-F500,T}$	1.0	+0.59	±0.31
$\Delta \eta_{P-F1000,K}$	3.0	+1.52	±1.03
$\Delta \eta_{P-F1000,T}$	3.1	+1.73	±1.03

Tab.6

In einem weiteren Schritt sollten nun die in engen Profilen angeordneten Aufpunkte durch die Meßstationen des unter Kapitel E.a erläuterten Projektes ersetzt werden. Dies erforderte bei vorgegebener Dimension des Höhenrasters eine Begrenzung des Reduktionsradius auf 8 km um einen tragbaren Kompromiß zwischen einer repräsentativen Punktanzahl und einem möglichst großen Einflußbereich zu finden. Für die verbleibenden 16 Stationen konnte der Geländeeinfluß wiederum für 3 unterschiedliche Rasterweiten ermittelt und mit der Prismenlösung verglichen werden (Tab.7).

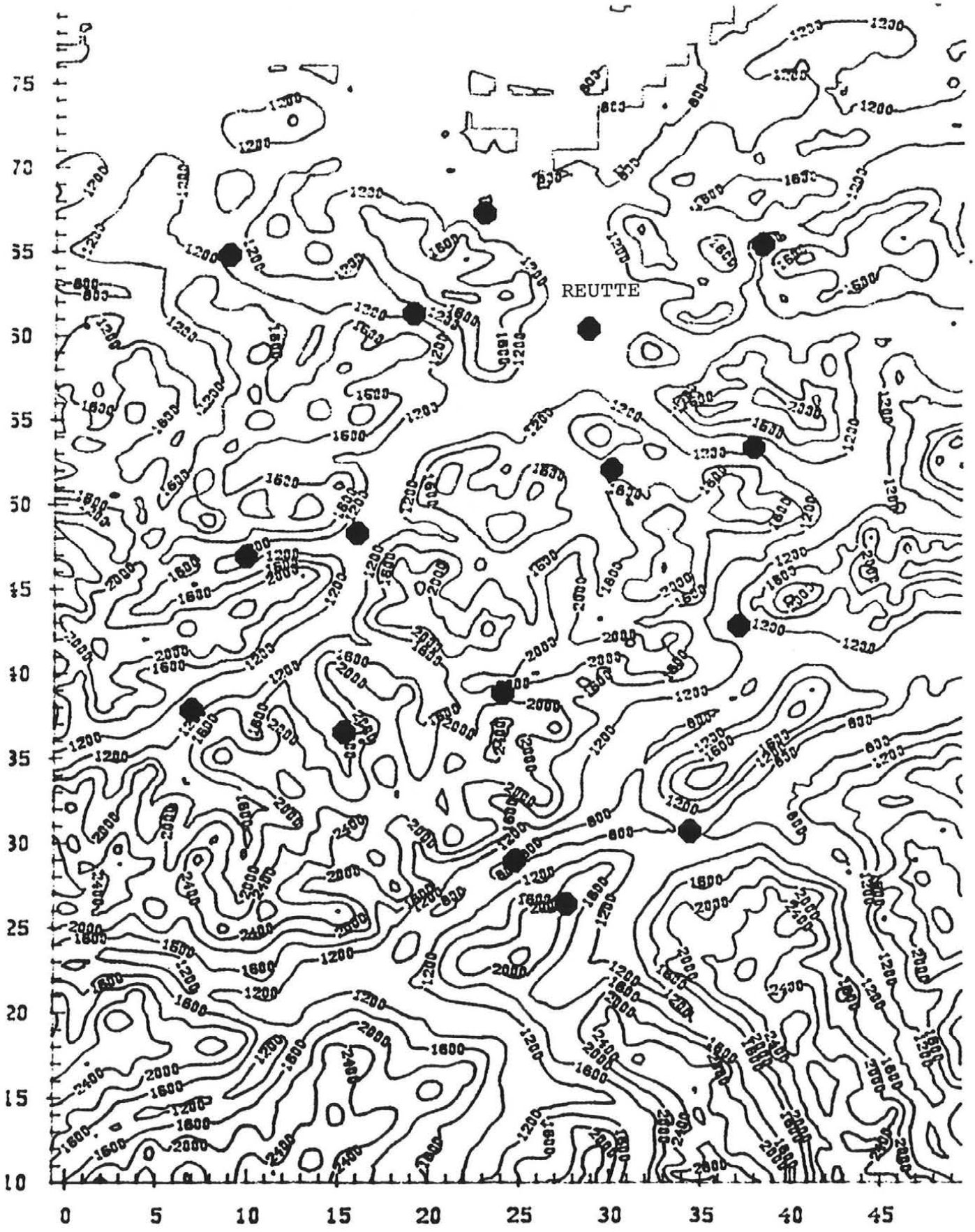


Abb.22: Lage der Meßpunkte im Höhenraster; M28

	$\lvert tc_{max} \rvert$	μ	σ
Δg_{P-F250}[mgal]	1.9	0.03	±0.89
Δg_{P-F500}	2.0	0.30	±0.82
$\Delta g_{P-F1000}$	5.6	1.83	±1.88
$\Delta\xi_{P-F250,K}$ ["]	1.1	0.03	±0.44
$\Delta\xi_{P-F250,T}$	1.0	0.18	±0.37
$\Delta\xi_{P-F500,K}$	1.2	0.15	±0.58
$\Delta\xi_{P-F500,T}$	1.4	0.18	±0.59
$\Delta\xi_{P-F1000,K}$	1.9	0.33	±0.87
$\Delta\xi_{P-F1000,T}$	1.9	0.35	±0.93
$\Delta\eta_{P-F250,K}$ ["]	0.7	0.15	±0.26
$\Delta\eta_{P-F250,T}$	0.4	0.09	±0.24
$\Delta\eta_{P-F500,K}$	0.6	0.01	±0.30
$\Delta\eta_{P-F500,T}$	0.5	0.01	±0.32
$\Delta\eta_{P-F1000,K}$	1.5	0.04	±0.62
$\Delta\eta_{P-F1000,T}$	1.0	0.03	±0.57

Tab. 7

Ergebnisse:

Übereinstimmend zeigen die Tabellen Tab.5 - Tab.7 , daß die Third-Order-Approximation nur bei den Rasterweiten unter 500m spürbare Verbesserungen liefert. Ab RW=500 ist die Kondensationslösung ebenbürtig. Während die Genauigkeit der ξ-, η-Komponenten mit der Dichte des Rasters steigt, trifft dies für die Δg-Werte offensichtlich nur bedingt zu. Ab einer Maschenweite von 500m beeinflußt hier eine Verdichtung die Ergebnisse kaum. Ist also die Terrainkorrektur in gebirgigem Gelände auf ±1 mgal bzw. ±0.5" gefordert, so wäre eine Maschenweite von 500m optimal. Eine in der Berechnung weiter verkleinerte Rasterweite senkt zwar die Standardabweichung der Lotabweichungsdifferenzen auf ±0.2" bis ±0.4", verbessert aber nicht die Situation der g-Komponente (siehe Kapitel E.c) und ist deshalb nur bedingt wirtschaftlich.

Die Varianz der mittelwertreduzierten Oberflächenlotabweichungen sinkt im zuletzt bearbeiteten Fall von $19"^2$ nach Anbringung der Terrainkorrektur (FFT, RW=500m,d=8km) auf $\approx 6"^2$.

c) Analyse der Filterfunktionen

Die nähere Betrachtung der in (D.7) und (D.10) verwendeten Filterfunktionen f

$$f_g = 1/r_o^3 \qquad f_\xi = x/r_o^3 \qquad f_\eta = y/r_o^3 \qquad \text{(E.1)}$$

führt zu einem besseren Verständnis der vorangegangenen Aussagen über sinnvoll einsetzbare Rasterweiten.
(Abb.23.a - 23.d für RW=250m)

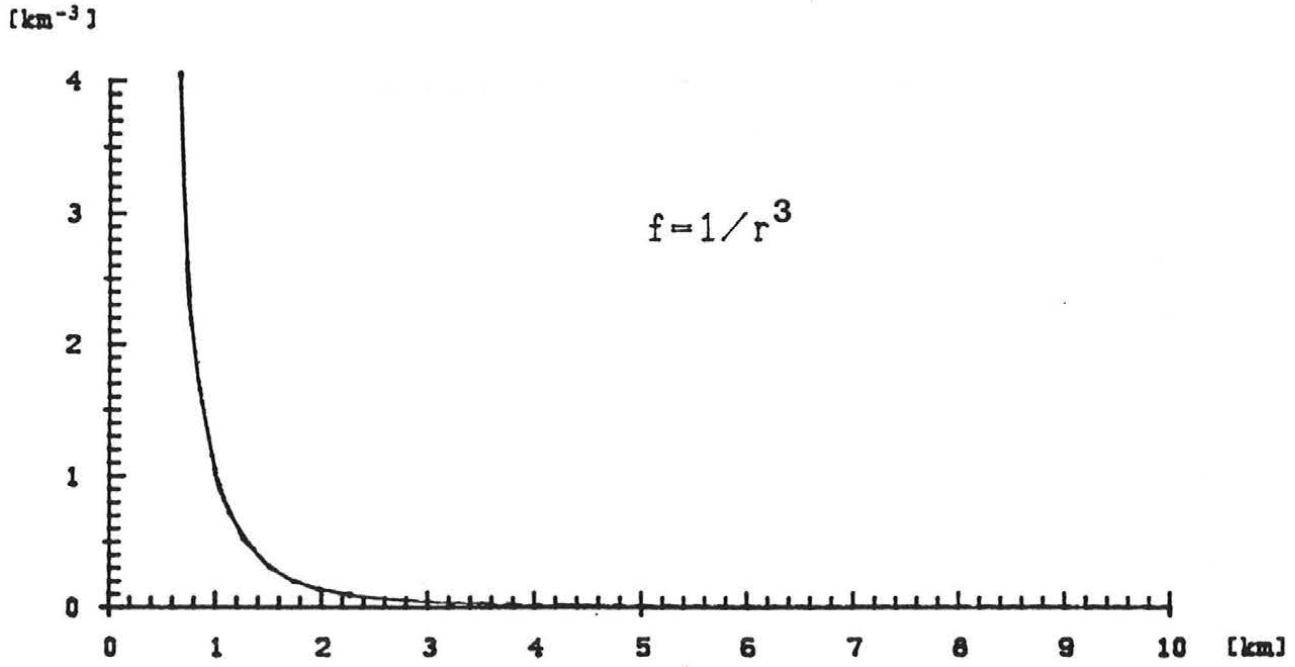


Abb. 23.a: Filter f_g

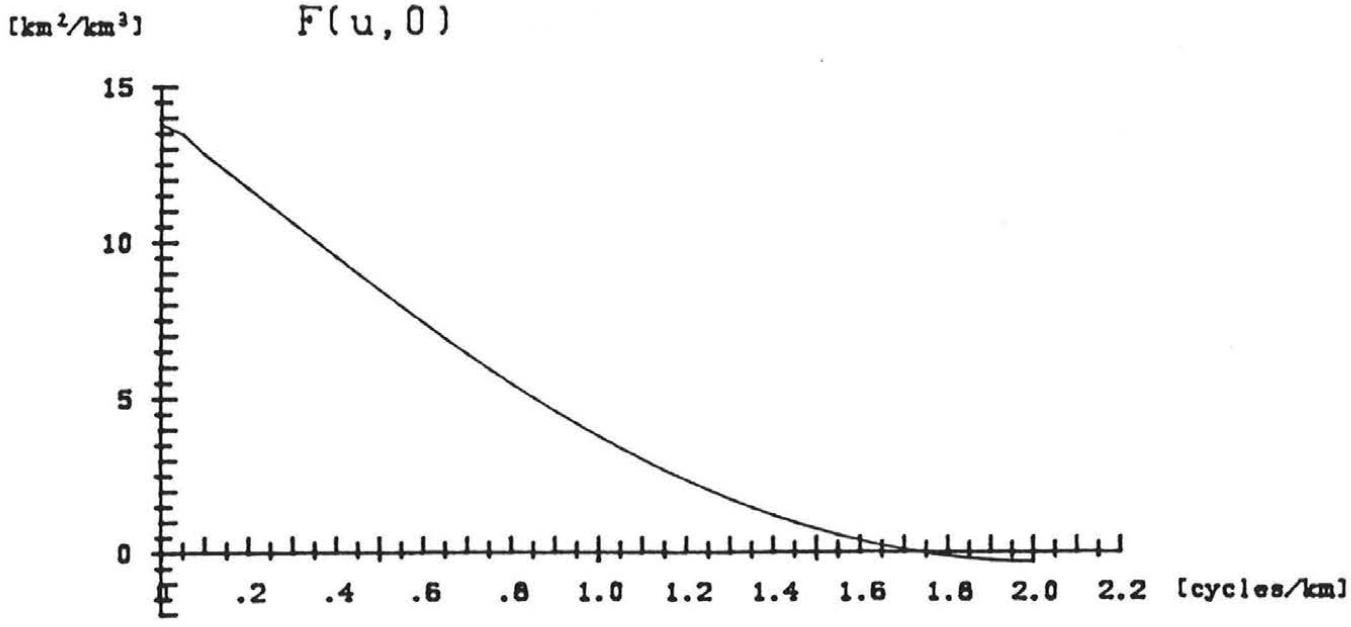
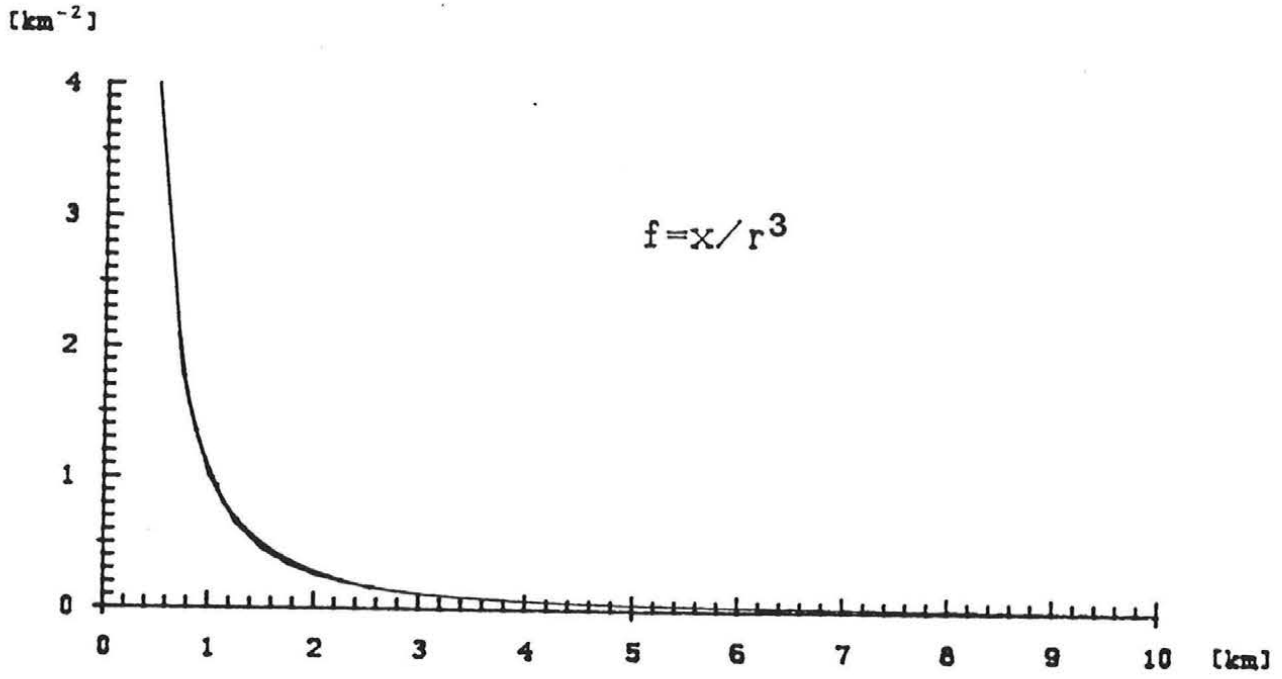


Abb.23.b: Spektrum



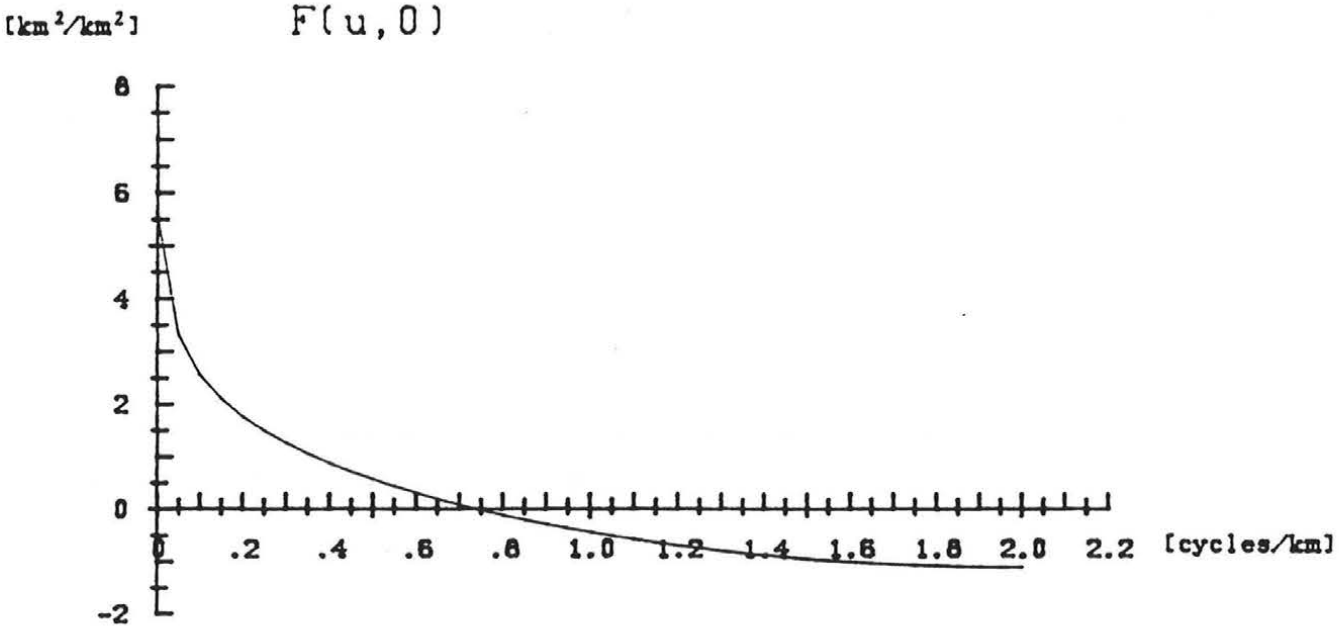


Abb. 23.c: Filter f_ξ

Abb.23.d: Spektrum

Die transformierten Funktionen f_g (E.1) wirken im Spektralbereich als "low-pass Filter". Große Wellenlängen dominieren während die hohen Frequenzen von 0.25 bis 0.50 Cycles/km unterdrückt werden. Dies ändert sich auch nicht durch eine Verdichtung des Reduktionsrasters und erlaubt deshalb keine wesentliche Steigerung der Genauigkeit (siehe Tab.6, Tab.7 für Δg).

f_ξ und f_η eliminieren zwar den Einfluß von Wellenlängen im Bereich der doppelten Grundrasterweite, sind jedoch für hohe Frequenzen in der Nähe der Nyquist-Frequenz durchlässig. Eine Verdichtung des Arbeitsrasters verbessert somit die Ergebnisse.

d) CPU-Zeitvergleich

In welcher Größenordnung liegen nun die zu erwartenden Rechenzeiteinsparungen?
Die Antwort läßt sich wohl in erster Linie von der Zahl der zu transformierenden Rasterpunkte N ableiten. Eine grob gültige Näherung zeigt, daß die Prismenmethode CPU-Zeit proportional dem Produkt aus der Anzahl N und der Zahl der Aufpunkte M benötigt.

$$t_P = \alpha_P \, N \, M \qquad (E.2)$$

Der Zeitbedarf der FFT-Methode hingegen gehorcht der Beziehung

$$t_{FFT} = \alpha_{FFT} \, N \, \log N \qquad (E.3)$$

Die gewählten Proportionalitätsfaktoren α sind nicht allein Funktionen des verwendeten Prozessors und des betrachteten Quellprogramms, sondern natürlich ebenfalls vom Reduktionsradius, der Speicherorganisation oder der Faktorisierbarkeit der Punktzahl pro Koordinatenachse abhängig. Die folgende Tabelle soll einen Einblick in die bei den diversen Transformationen und Testrechnungen der vorliegenden Arbeit tatsächlich gewonnenen Werte gestatten. Die Zeiten beziehen sich auf die CPU des CDC 860-180 Computers des Digitalrechenzentrums der TU-Wien.

Rasterpunkte N	**CPU-Time [s] FFT($\xi+\eta$)**	**Prismenintegration Aufpunkte M**
4000	8	3
16000	30	5
32800	72	6
60000	129	8
65500	139	9

Tab.8

Die dritte Spalte gibt die Anzahl jener Punkte an, deren Terrainkorrekturberechnung in der von der FFT vorgegebenen Zeit mittels Prismenintegration möglich ist (break-even-point). Die Tabelle 8 gilt für d=10km.

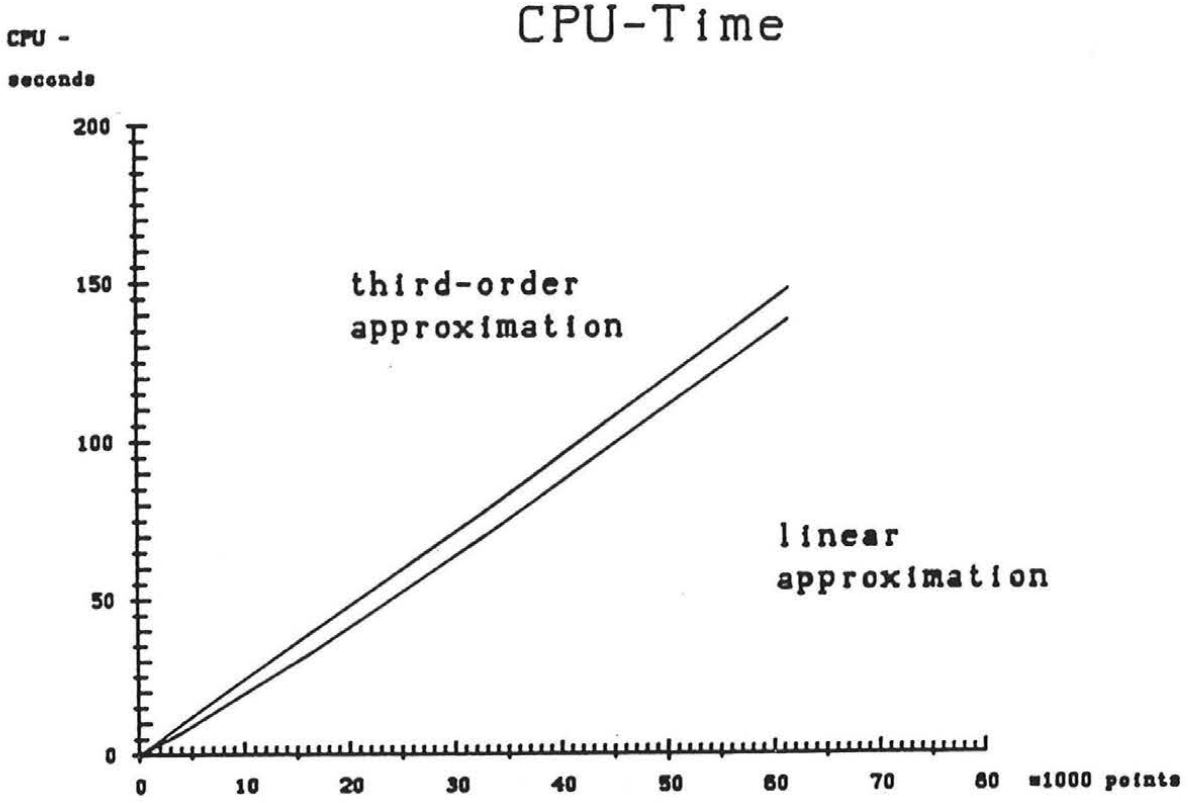


Abb. 24

Abbildung 24 dokumentiert die geringe Mehrbelastung an Rechenzeit (≈10%) bei Verwendung der Approximation 3.Ordnung (siehe Kap. D.e).

e) Kovarianzfunktion KF – Modellanpassung

Eine wesentliche Voraussetzung zur Prädiktion beliebiger Störfeldfunktionale oder zur Beschreibung statistischer Merkmale derselben ist die Ableitung der Kovarianzfunktion des Restfeldes. Dies wurde für das vom R2-Raster abgedeckte Teilgebiet Tirols unter Verwendung der in Kapitel B besprochenen Modelle durchgeführt.

Als Grundlage der weiteren Überlegungen diente eine Liste von 29 gut verteilten Lotabweichungsstationen mit einem mittleren Punktabstand von 10km-15km (siehe Abb. 25). Die im Landessystem vorhandenen Oberflächenlotabweichungen wurden mittels (WEBER; 1987)

$$\xi = \xi_{BESSEL} + 1.63'' + 0.42''(\varphi - 46^{\circ}) - 0.06''(\lambda - 9^{\circ})$$

$$\eta = \eta_{BESSEL} + 1.20'' + 0.13''(\varphi - 46^{\circ}) + 0.48''(\lambda - 9^{\circ}) \qquad (E.4)$$

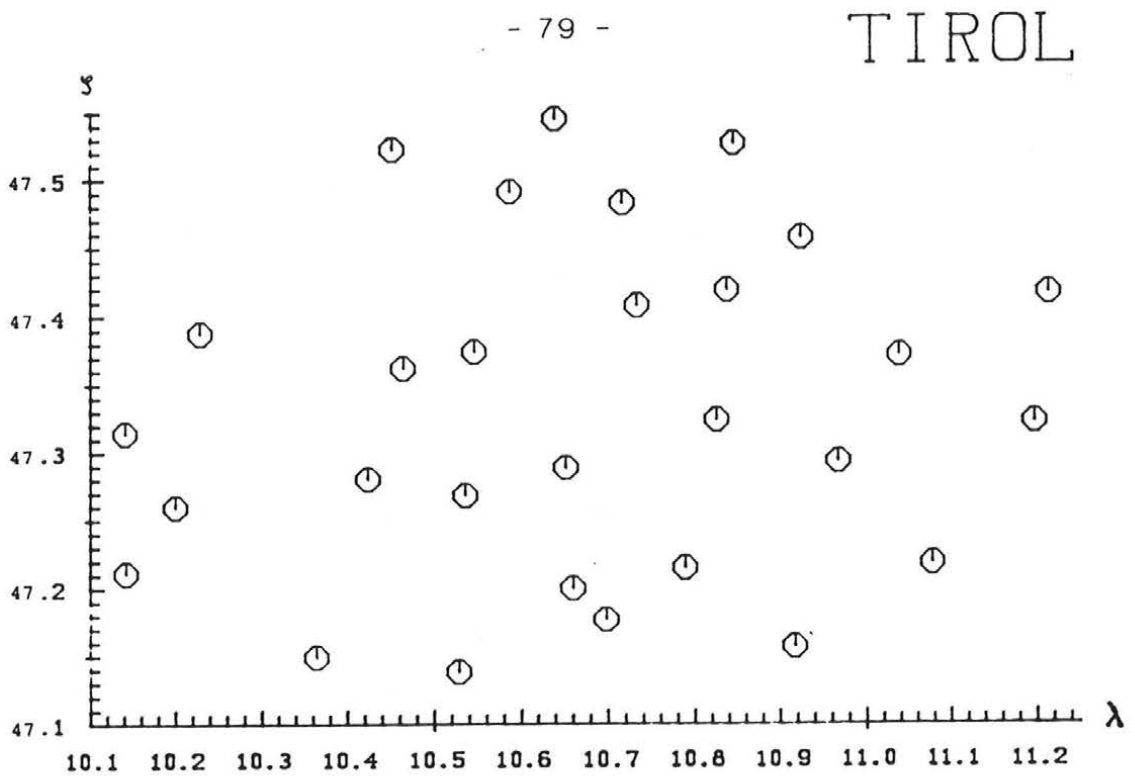


Abb. 25: Lage der Aufpunkte im Raster

in das geozentrische System transformiert und um ihren Mittelwert reduziert. Eine Zusammenstellung der charakteristischen Größen der für die Lotabweichungskomponenten gewonnenen empirischen KF gibt Tabelle 9. Die Schätzung der Varianz der Horizontalgradienten G_o ist in Gebirgsgegenden höchst problematisch und wurde deshalb unterlassen.

	ξ	η
Varianz C	$20.7''^2$	$17.5''^2$
Halbwertsbreite ζ	7.0 km	8.0 km
Nulldurchgang ND	22.5 km	35 km

Tab. 9

Um sich von der Azimutabhängigkeit zu befreien, arbeitet man zweckmäßigerweise mit longitudonalen und transversalen KF (B.18). Tabelle 10 zeigt die aus zentrierten l und t-Komponenten erhaltenen analogen Parameter.

	l	t
Varianz C	$19.1''^2$	$19.1''^2$
Halbwertsbreite ζ	6.3 km	9.0 km
Nulldurchgang ND	14 km	30 km

Tab. 10

Zuerst sei eine Anpassung an das ebene **Reilly-Modell** untersucht. Legen wir nach (B.36) den Abstandsparameter mit d=ND= 14 km und die Varianz mit C_{11}= 19.1"^{2} fest, so gestattet uns die somit vollständig bestimmte Reilly-Funktion die Auswertung der Ausdrücke (B.32). Eine Zusammenstellung der Ergebnisse für cov(ξ,ξ), cov(η,η), cov(Δg,Δg) und cov(ζ,ζ) zeigt Tabelle 11.

Distanz [km]	**cov(ξ,ξ) ["^{2}]**	**cov(η,η) ["^{2}]**	**cov(Δg,Δg) [mgal^2]**	**cov(ζ,ζ) [m^2]**
0.0	19.1	19.1	865	0.087
3.0	17.8	18.7	822	0.085
6.0	14.2	17.4	712	0.079
9.0	9.0	15.5	553	0.071
12.0	3.4	13.2	373	0.060
15.0	-1.7	10.7	202	0.049
21.0	-7.8	6.1	-38	0.028
27.0	-8.0	2.9	-116	0.013
33.0	-5.3	1.2	-94	0.005
39.0	-2.6	0.4	-50	0.002
48.0	-0.5	0.1	-11	0.000

Tab. 11

Zu Vergleichszwecken wurde nun versucht dem Datenmaterial eine lokale **Tscherning-Rapp-Funktion** anzupassen (siehe Kapitel B.b). Als Vorgabe dienten wieder die geozentrischen mittelwertreduzierten ξ,η-Werte bzw. die aus ihnen gewonnenen l,t-Parameter (Tab.10). Da die Modellierung in erster Linie Varianz und Halbwertsbreite repräsentieren sollte, kann der Grad der KF aus dem Nulldurchgang ND der cov(Δg,Δg) des Reilly-Modells nach

$$ND = 90^{o} / n \qquad (E.5)$$

vorerst nur geschätzt werden. Aus ND ≈ 19.7 km folgt n≈ 500. Der von Schwarz und Lachapelle vorgeschlagene Iterationsalgorithmus liefert

n= 532 A=530 R_B= 0.999771

und ermöglicht anschließend die Auswertung von (B.11), (B.12) und (B.14).

Distanz [km]	cov(ξ,ξ) ["²]	cov(η,η) ["²]	cov(Δg,Δg) [mgal²]	cov(ζ,ζ) [m²]
0.0	19.1	19.1	860	0.031
3.0	11.2	15.6	602	0.029
6.0	4.8	11.7	370	0.024
9.0	1.0	8.6	217	0.020
12.0	-1.3	6.4	114	0.014
15.0	-2.8	4.7	42	0.009
21.0	-4.0	2.3	-38	0.000
27.0	-3.9	0.9	-67	-0.005
33.0	-3.0	0.1	-65	-0.007
39.0	-1.8	-0.3	-46	-0.006
48.0	-0.1	-0.4	-11	-0.003

Tab. 12

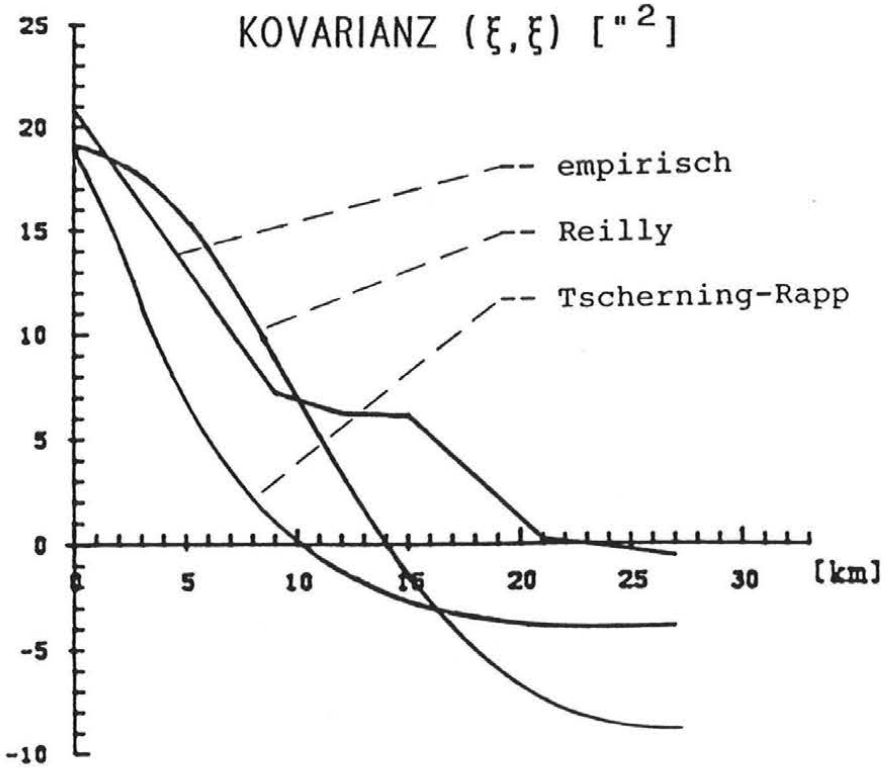


Abb. 26.a

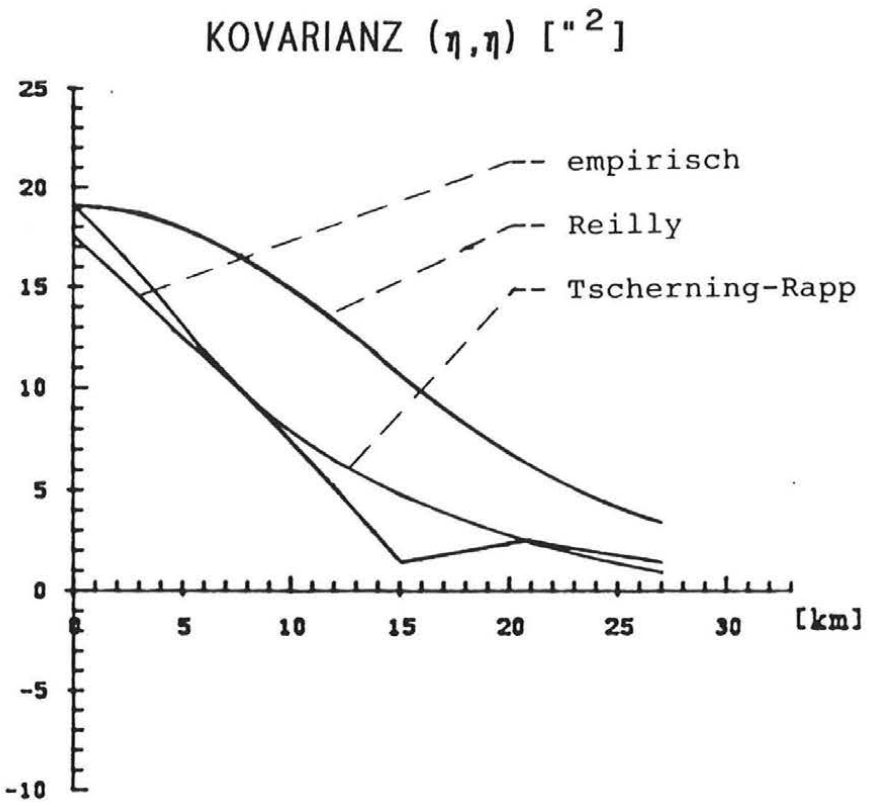


Abb. 26.b

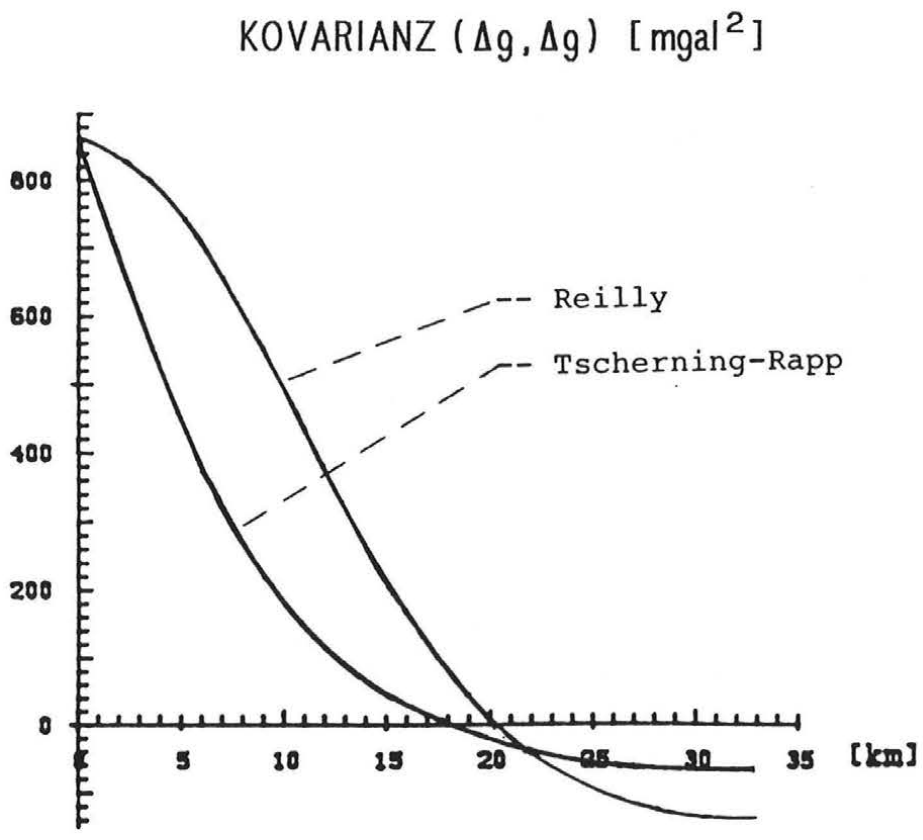


Abb. 26.c

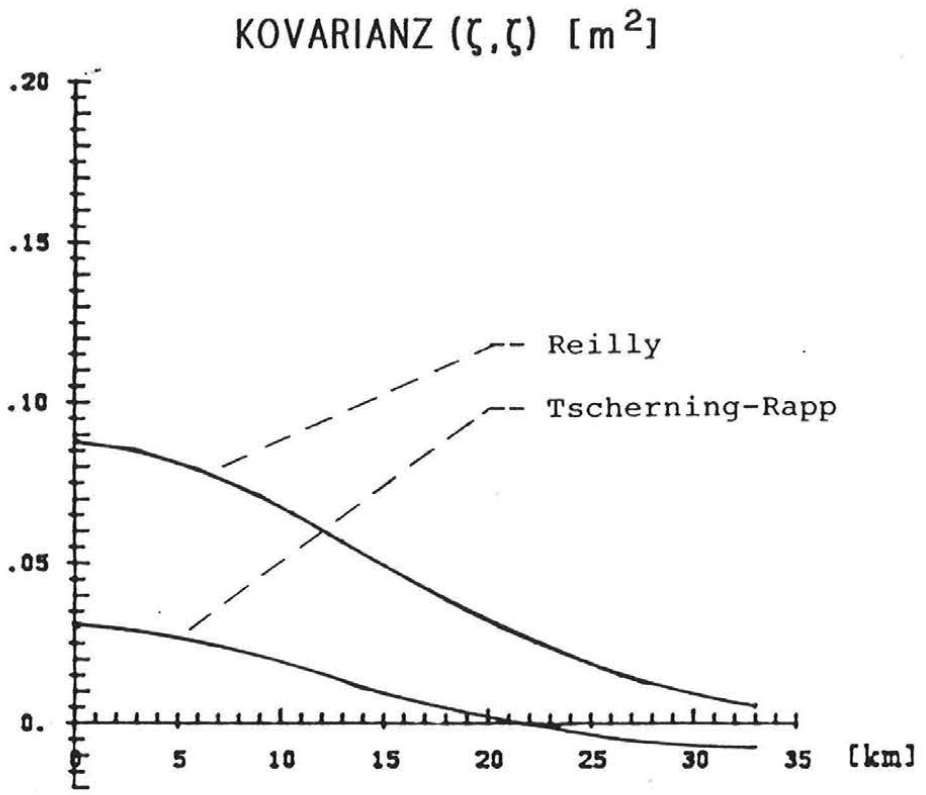


Abb. 26.d

In weiterer Folge sollten die nach den Überlegungen des Abschnitts E.b aus einem 500m x 500m Höhenmodell berechneten Terrainkorrekturen Berücksichtigung finden. Man bildet zuerst die reduzierten LA-Größen ξ_r , η_r nach

$$\xi_r = \xi_{gem} - tc_\xi + \xi_{LK} - \xi_{Trend}$$

$$\eta_r = \eta_{gem} - tc_\eta - \eta_{Trend} \qquad (E.6)$$

ξ_{gem}, η_{gem} ... Meßgrößen mit (E.4) transformiert

tc_ξ, tc_η ... Terrainkorrektur (FFT, 500m x 500m, d= 8km)

ξ_{LK} ... normale Lotkrümmung

ξ_{Trend} ... Trendreduktion wegen Breitenabhängigkeit (Alpenanstieg der Niveauflächen in N-S-Richtung)

η_{Trend} ... Trendreduktion = Mittelwertreduktion

Die aus den ξ_r , η_r nach (B.18) gewonnenen longitudonalen und transversalen Komponenten l_r, t_r zeigen im Vergleich zu Tab.10 die charakteristischen Größen

	l	t
Varianz C	$1.8''^2$	$1.8''^2$
Halbwertsbreite ζ	4.0 km	7.8 km
Nulldurchgang ND	8 km	20 km

Tab. 13

Ein sich dieser empirischen Funktion möglichst gut anschmiegendes Tscherning-Rapp-Modell

$n = 1130$ $A = 2418.5$ $R_B = 0.998000$

liefert die zu Tab. 12 korrespondierenden Werte.

Distanz [km]	cov(ξ,ξ) [$''^2$]	cov(η,η) [$''^2$]	cov($\Delta g,\Delta g$) [mgal^2]	cov(ζ,ζ) [m^2]
0.0	1.8	1.8	81	0.0017
3.0	1.4	1.7	71	0.0015
6.0	0.6	1.4	44	0.0010
9.0	-0.3	1.0	14	0.0004
12.0	-1.0	0.5	-9	-0.0001
15.0	-1.2	0.2	-21	-0.0004
21.0	-0.6	-0.1	-16	-0.0005
27.0	0.3	-0.1	3	0.0000
33.0	0.5	0.0	11	0.0003
39.0	0.2	0.0	10	0.0002
48.0	-0.3	0.0	-6	-0.0002

Tab. 14

Die Parameter des zugehörigen Reilly-Modells leiten sich wieder aus der Varianz $C_{ll} = 1.8''^2$ und dem Nulldurchgang ND = 8.2 km der empirischen KF der longitudonalen Lotabweichungen ab. Sie folgen zu

$d = 8.2$ km $C_0 = 81.4$ mgal^2

Distanz [km]	cov(ξ,ξ) ["²]	cov(η,η) ["²]	cov(Δg,Δg) [mgal²]	cov(ζ,ζ) [m²]
0.0	1.8	1.8	81	0.0028
3.0	1.5	1.7	71	0.0027
6.0	0.6	1.4	45	0.0022
9.0	-0.2	1.0	18	0.0016
12.0	-0.7	0.6	-2	0.0010
15.0	-0.8	0.3	-10	0.0005
21.0	-0.4	0.1	-4	0.0001
27.0	-0.1	0.0	-2	0.0000
33.0	0.0	0.0	0	0.0000
39.0	0.0	0.0	0	0.0000
48.0	0.0	0.0	0	0.0000

Tab. 15

In den unten ersichtlichen Graphiken 27.a - 27.d wurden sowohl die beiden besprochenen KF-Modelle, als auch die aus den Messungen empirisch festgelegten KF der ξ und η Werte dargestellt.

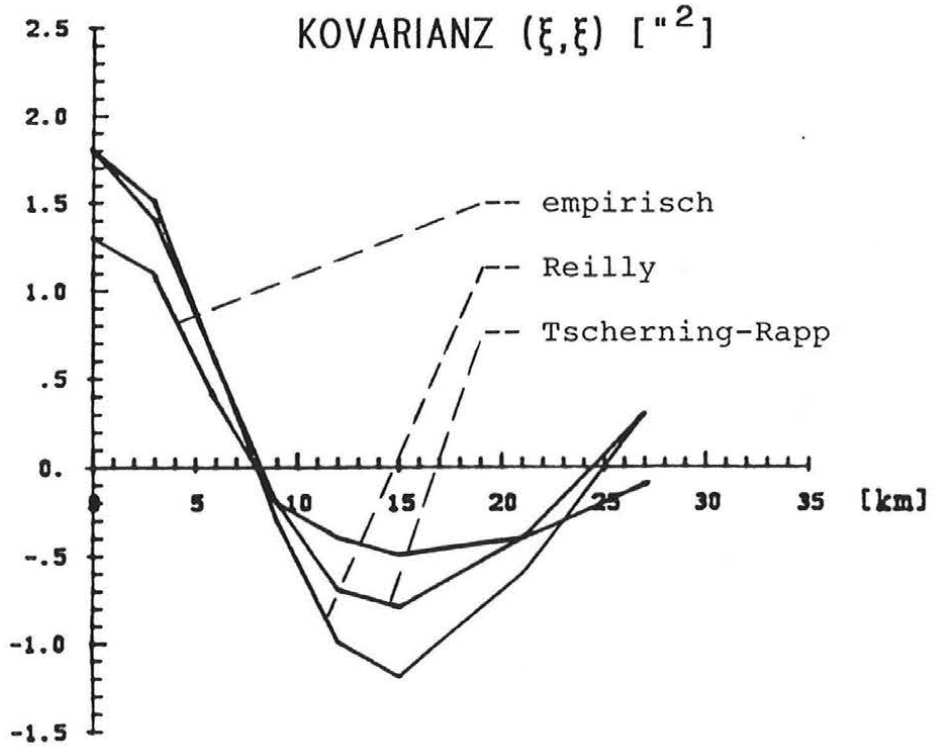


Abb. 27.a

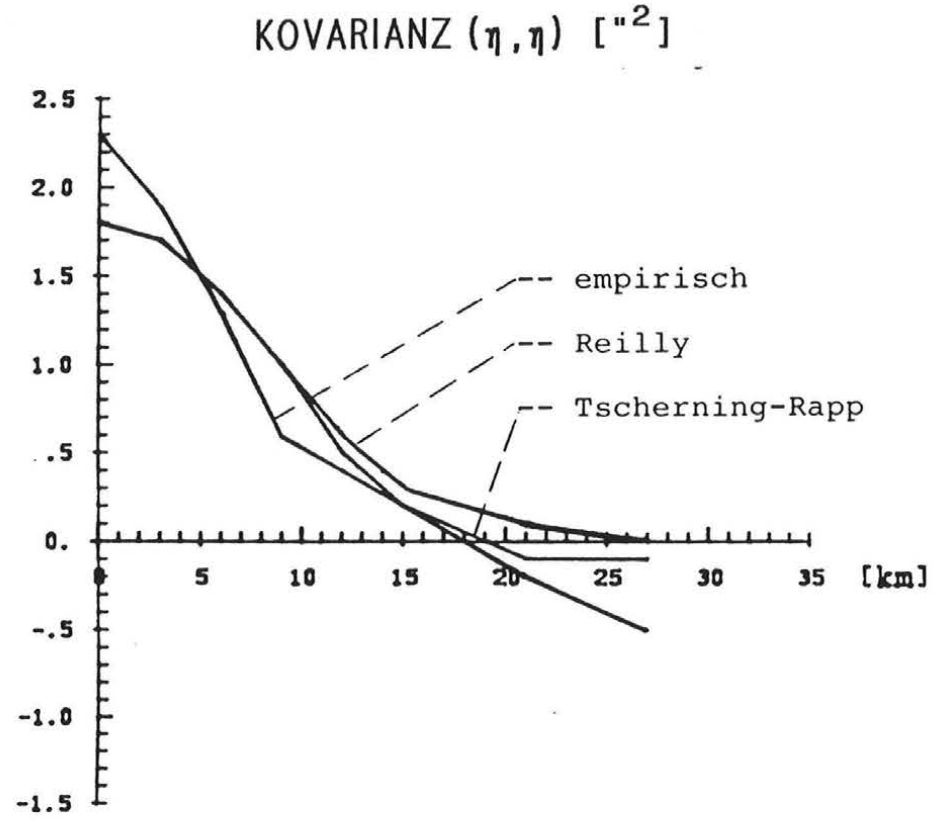


Abb. 27.b

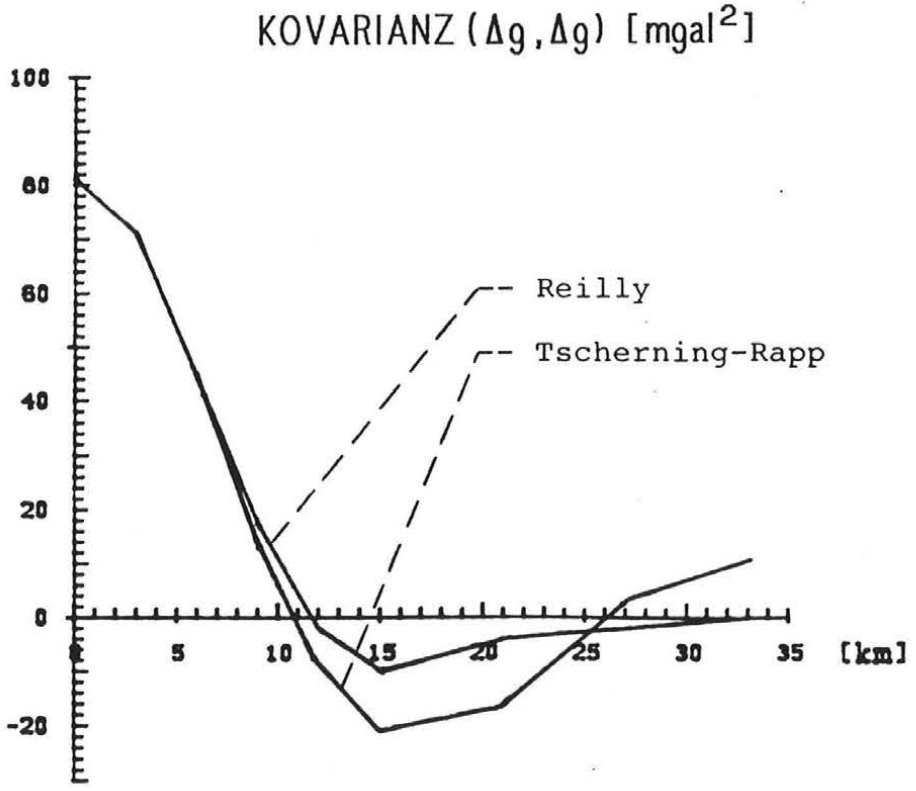


Abb. 27.c

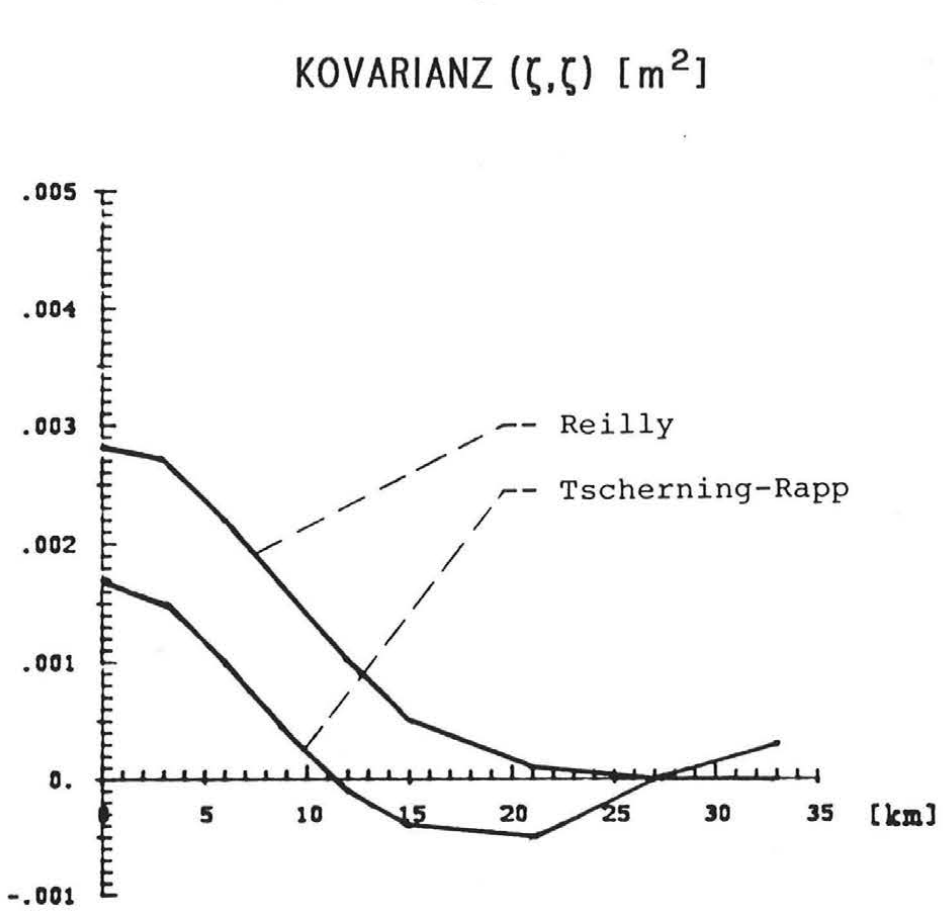


Abb. 27.d

Beide Modelle zeigen im relevanten Bereich bis zum ersten Nulldurchgang erwartungsgemäß gute Übereinstimmung mit den empirisch gewonnenen KF für ξ und η. Dieses Ergebnis war vorherzusehen, da in beiden Fällen die Modellparameter der Meßwertfunktion angepaßt wurden. Die Differenz in den Varianzen zwischen Modell und Meßwertfunktion ist auf die Verwendung longitudonaler und transversaler Komponenten zurückzuführen und folgt damit aus der Mittelung der Varianzen der ξ- und η-Werte (B.21).

Für eine unabhängige Kontrolle der soeben gezeigten Modellanpassungen wurde dankenswerterweise von der Abteilung K2 (Grundlagenmessung) des Bundesamtes f.Eich-und Vermessungswesen ein Datensatz von 66 gemessenen Schwerewerten zur Verfügung gestellt. Die aus den vorerst gebildeten Freiluftanomalien

$$\Delta g_F = g - \gamma_{h=0} + 0.3086\,h$$

bestimmte KF ist natürlich nicht direkt mit den Funktionen der Abbildung 27.c vergleichbar. Vielmehr ist zuerst die Terrainkorrektur an die Meßwerte anzubringen und die bekannte Höhenkorrelation der Freiluftanomalien durch Abspaltung eines Trendterms zu berücksichtigen.

$$\Delta g_r = g + tc_g + 0.3086\,h - \gamma_{h=0} - g_{Trend} \qquad (E.7)$$

tc_g ... Terrainkorrektur (FFT, 500m x 500m, d=8km)
g_{Trend} ... $= a + bh$

Sünkel (SÜNKEL,1981) weist schon anhand von Untersuchungen in 4 österreichischen Teilgebieten daraufhin, daß in hinreichend kleinen Gebieten bei optimaler Erfassung der Geländekorrektur die Steigung b der Trendgeraden die Wirkung der Bouguerplatte repräsentieren muß.

$$b = 2\pi G\rho = 0.1119 \text{ mgal/m} \quad \text{für } \rho = 2.67 \text{ g cm}^{-3} \qquad (E.8)$$

Der aus dem Datensatz tatsächlich errechnete Trend

$$g_{Trend} = -123.2 + 0.1116\,h$$

mit dem Faktor b=0.1116 mgal/m belegt (E.8) eindrucksvoll (siehe Abb. 28). Dieses Ergebnis ist sowohl eine Bestätigung der Güte der FFT-Reduktion und des in Verwendung stehenden Höhenrasters, als auch eine Plausibilitätsprüfung der angenommenen konstanten Dichte $\rho = 2.67$ g/cm^3. Das statistische Verhalten der in (E.7) gewonnenen Anomalien **Δg_r= mittelwertreduzierte Bouguer-Anomalien** unterscheidet sich natürlich für den bearbeiteten Ausschnitt Nordtirols wesentlich in Varianz und Halbwertsbreite von dem der Freiluftanomalien.

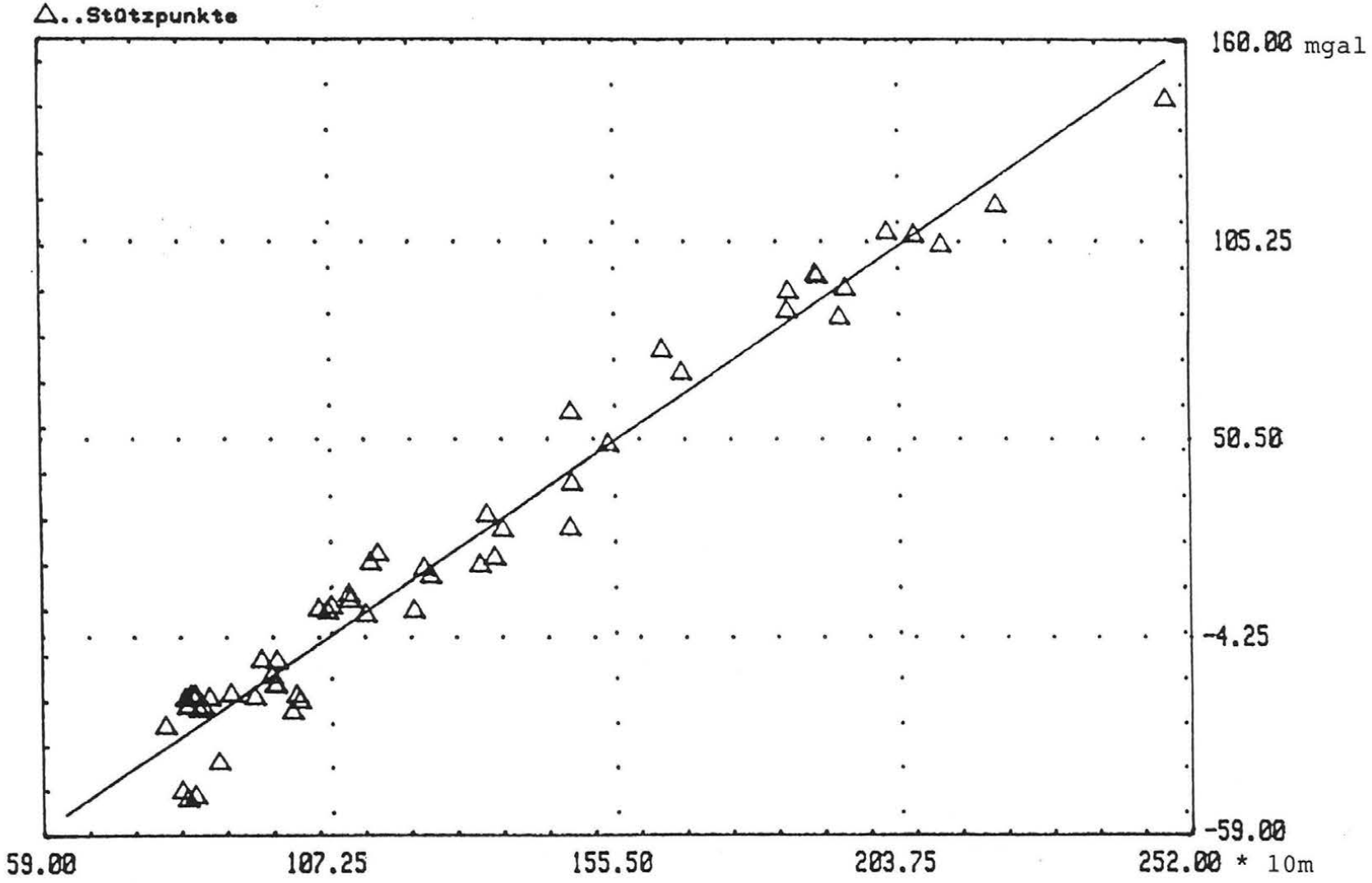


Abb.28: Höhenkorrelation der Freiluftanomalien

	Δg_F	Δg_r
Varianz C	2449 $mgal^2$	84.3 $mgal^2$
Halbwertsbreite ζ	2.5 km	9.6 km
Nulldurchgang ND	10.5 km	16.5 km

Tab. 16

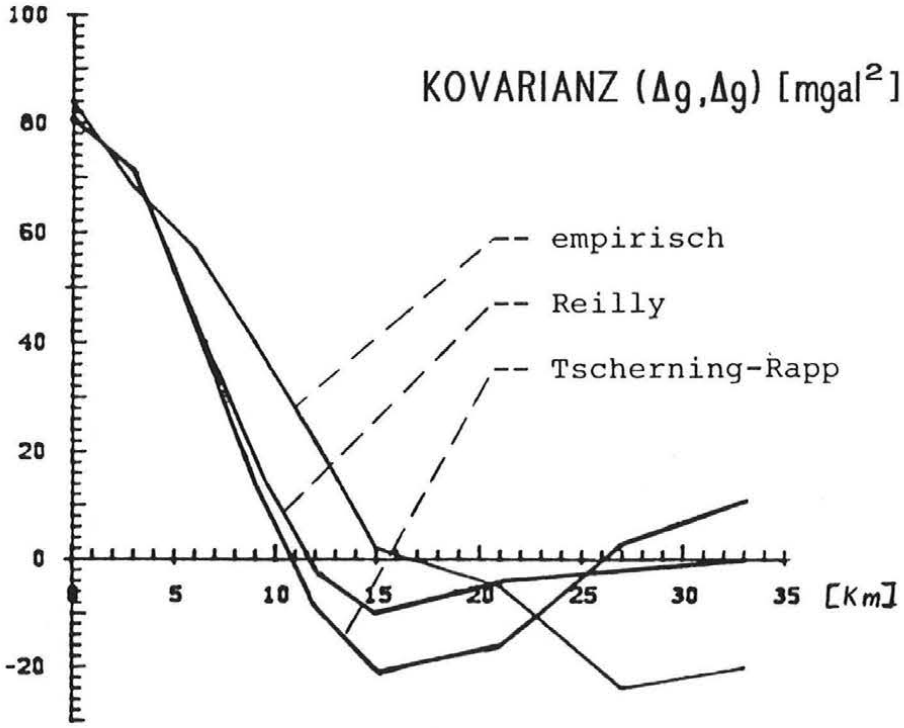


Abb. 29

Die aus den Bundesamtswerten gebildete KF schmiegt sich in ausgezeichneter Weise den bereits in Abbildung 27.c gezeigten Reilly- und Tscherning-Rapp-Funktionen an. Einer um nur 2 km differierenden Halbwertsbreite steht eine faktisch idente Varianz von Modell und Messung gegenüber. Das Reilly-Modell scheint in diesem Fall den Gesamtverlauf der empirischen Funktion der Schwereanomalien besser zu beschreiben.

Damit kann die Bestimmung einer realistischen KF für Schwereanomalien aus gemessenen Lotabweichungskomponenten als gelungen angesehen werden.

Abschließend wurden aus den nach (E.6) reduzierten Meßdaten ξ_r, η_r relative Cogeoidhöhenunterschiede zum Zentralpunkt Reutte in einem 0.05° x 0.05° Raster prädiziert (Abb.30; inclusive Trend). Als Grundlage zur Bildung der benötigten Auto- und Kreuzkovarianzen diente die in Tabelle 15 skizzierte Reilly-Funktion (Abb.27). Zur Geoid- bzw. Quasigeoiddarstellung müßte in einem zusätzlichen "Restore"-Prozeß der abgespaltene Terraineinfluß wieder Berücksichtigung finden. Die dabei zu erwartende maximale Differenz von Höhenanomalie und Geoidundulation liegt nach (E.9) bei ca. 30cm.

$$\zeta - N \text{ [m]} \approx -\Delta g_{Bouguer} \text{[gal]} \cdot h \text{ [km]} \qquad \text{(E.9)}$$

$$\Delta g \approx -120 \text{ mgal}; \quad h_{max} \approx 2500 \text{ m}$$

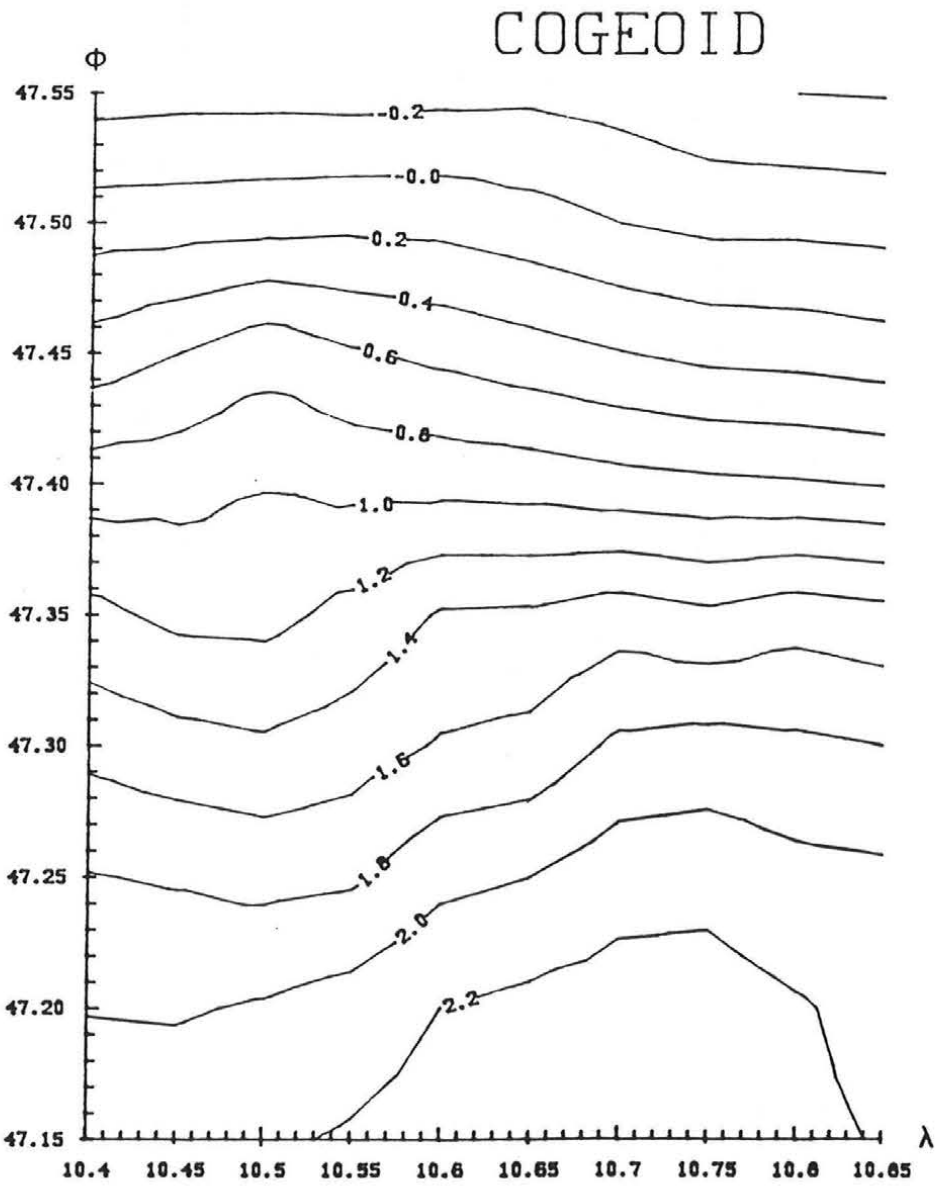


Abb. 30: Darstellung Cogeoid (relativ; Reutte = 0.00m); Schichtabstand 20 cm; Referenzsystem GRS 80

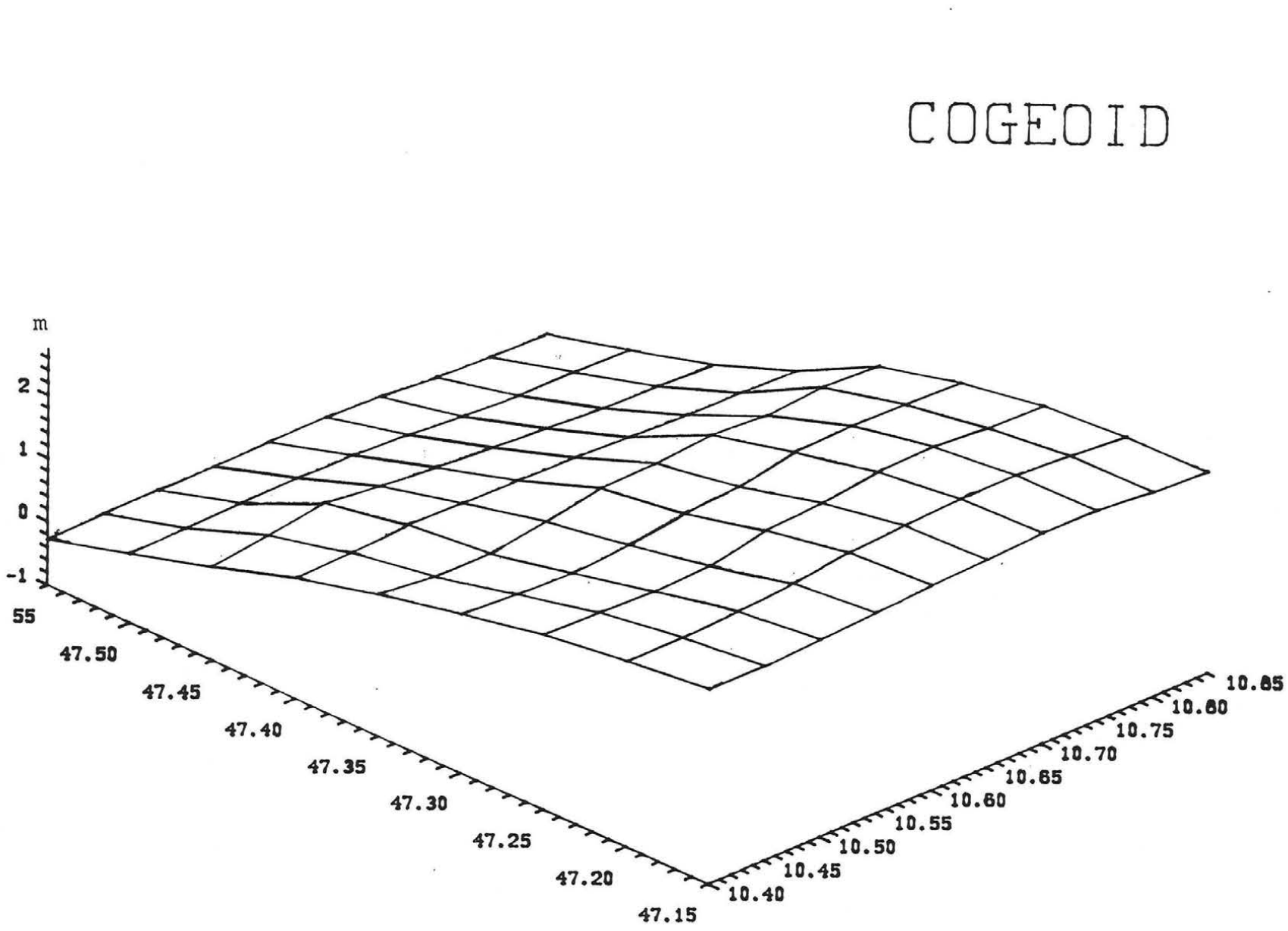


Abb.31: zum Schichtenplan korrespondierende 3D-Darstellung

f) Statistische Betrachtungen des österreichischen LA-Feldes

In einem zusätzlichen Schritt sollte der Versuch unternommen werden, eine für das gesamte Bundesgebiet passende KF festzulegen, wie dies von Sünkel (RINNER et al.,1987) bereits gezeigt wurde. Im Gegensatz zu der angesprochenen Arbeit wurde die mittels Prismenintegration bestimmte topographisch isostatische Korrektur durch eine einfache Terrainkorrektur (FFT) ersetzt. Die Datenbasis stellten 681 gut verteilte und in das geozentrische System transformierte Lotabweichungen (ξ,η) ,sowie ein 1.5° × 2.5° Höhenraster dar. Statistische Untersuchungen des Gesamtmaterials (ξ,η), der topographisch reduzierten Werte (ξ_{tc} , η_{tc}) und der zusätzlich um den Einfluß des Erdmodells GEM10C korrigierten Größen ($\xi_{tc,GEM}$, $\eta_{tc,GEM}$) sind in untenstehender Tabelle zusammengestellt.

	min ["]	max ["]	Mittel ["]	Varianz ["^{2}]
ξ	-14.1	24.8	3.9	39.9
ξ_{tc}	-6.1	16.0	2.5	9.7
$\xi_{tc,GEM}$	-5.6	16.3	2.7	9.7
η	-14.4	19.8	4.7	33.2
η_{tc}	-6.0	13.4	3.5	13.4
$\eta_{tc,GEM}$	-5.5	12.2	2.1	6.5

Tab.17

Über den bereits bekannten Weg der longitudonalen und transversalen LA-Komponenten wurde ein Tscherning -Rapp - Modell mit den Parametern (n=200, A=251.8) hergeleitet und die resultierenden Autokovarianzfunktionen für ξ , η, Δg , ζ in den Graphiken Abb.32.a- Abb.32.c dargestellt.

Der Vergleich mit den von Sünkel publizierten Werten zeigt etwas höhere Varianzen im eben skizzierten Weg, jedoch völlig idente Korrelationslängen. So differieren z.B. im Fall der Höhenanomalien die Varianzen um 0.03m^2 (0.067m^2 Sünkel; 0.097m^2 vorliegende Arbeit) während die Halbwertsbreiten (33km Sünkel; 31km v.A.) fast übereinstimmen. Die angesprochenen höheren C_0-Werte folgen natürlich aus der vereinfachten Reduktionsmethode (keine

Berücksichtigung eines Isostasie-Modells), dem weitmaschigeren Höhenmodell und aus der Verwendung der Dichtekonstanten $\rho = 2.67\ g/cm^3$ an Stelle eines detaillierten Dichtemodells des Bundesgebietes. Aus diesen Gründen können die gewonnenen Resultate als höchst zufriedenstellend angesehen werden.

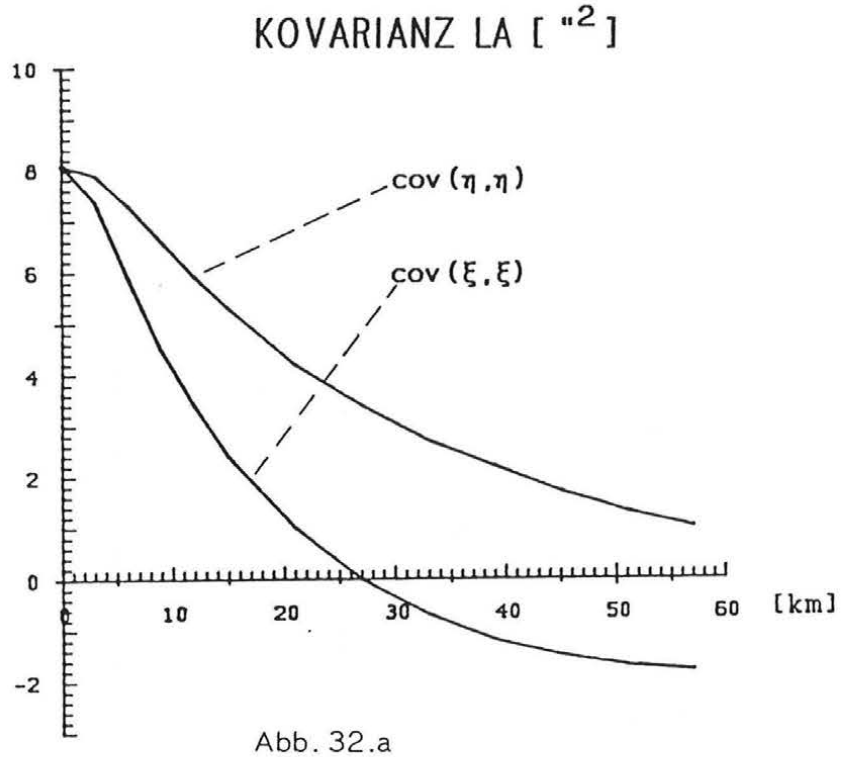


Abb. 32.a

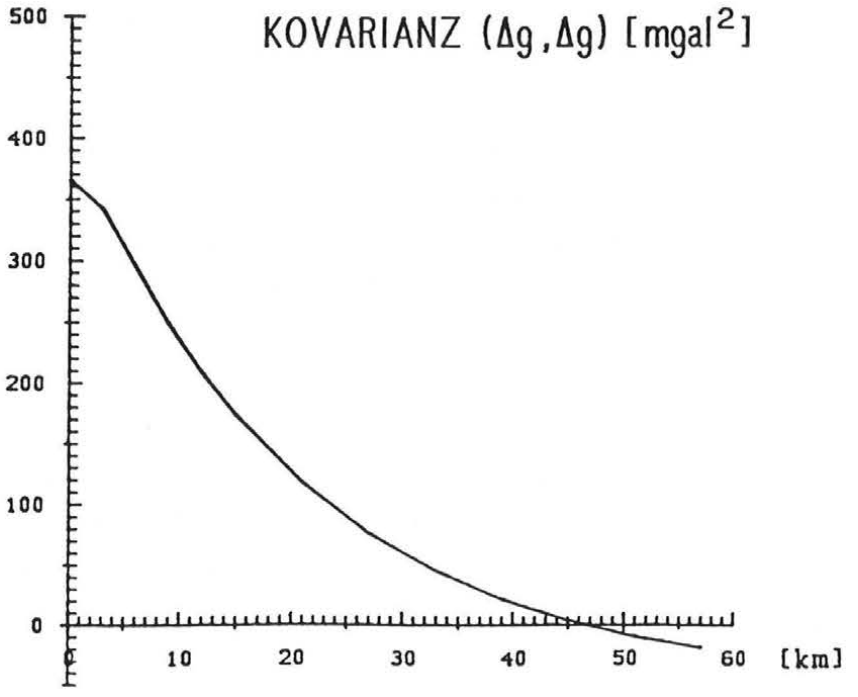


Abb. 32.b

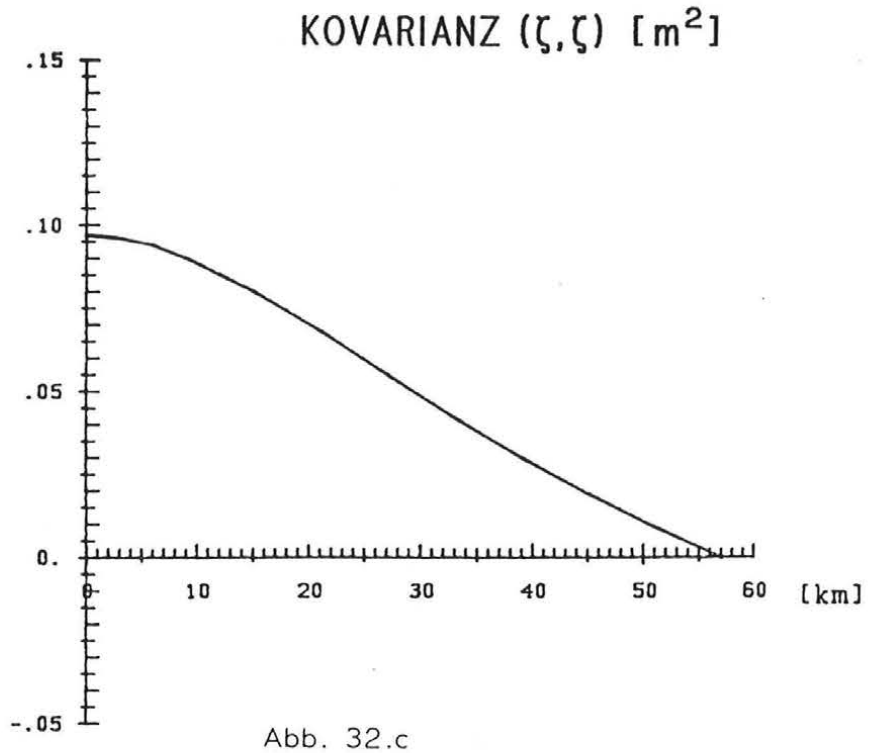


Abb. 32.c

F. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit skizziert die Vor- und Nachteile des FFT-Algorithmus als Ersatz der herkömmlichen Prismenintegration und beschäftigt sich speziell mit dem Einfluß der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten auf Lotabweichungsmessungen. Der häufig publizierten Meinung, daß die FFT für die horizontalen Ableitungen des Störpotentials auf Grund der geringen Meßpunktdichte und des erweiterten Reduktionsterms unwirtschaftlich sei, muß widersprochen werden. Die Approximation 3.Ordnung benötigt gegenüber dem Kondensationsmodell nur 10% zusätzliche CPU-Zeit und zeigt vor allem im Hochgebirge bei geringen Maschenweiten des Höhenmodells sehr gute Ergebnisse ($s \approx \pm 0.5''$). Eine beliebige Verdichtung des Höhenrasters hat sich jedoch nicht in jedem Fall (g-Werte) als sinnvoll erwiesen.

Die anschließende lokale Studie Tirol zeigt die Möglichkeit auf, realistische Aussagen über das statistische Verhalten aller Störfeldgrößen aus reinen Lotabweichungsmessungen abzuleiten. An den aus geländekorrigierten Werten gewonnenen ruhigeren Verlauf der empirischen KF wurden zwei bekannte KF-Modelle für lokale (Reilly) und regionale (Tscherning-Rapp) Untersuchungen angepaßt. Die Berechnungen zum "gesamtösterreichischen Geoid" (RINNER et al.,1987), dessen Verlauf ohne Einbeziehung von Schwerewerten festgelegt wurde, stützten sich einzig auf die ausgezeichnete Flächendekkung des österreichischen Lotabweichungsnetzes. Diese Vorgangsweise scheint unter Einbeziehung der erlangten Erfahrungen dieser Arbeit und unter Berücksichtigung der eher linienförmigen Verteilung, sowie der schlechten Verfügbarkeit der g-Werte in unserem Bundesgebiet, völlig gerechtfertigt.

Kurzfristiges Ziel zukünftiger Entwicklungen kann nur sein, den potentiellen Interessenten ein engmaschiges Netz von Feldgrößen anzubieten, in welchem unter Wahrung der Genauigkeitsvorgaben linear interpoliert werden kann. Mittelfristig ist es jedoch keineswegs als ausreichend anzusehen, dem Kreis der Ingenieurkonsulenten eine Serie von Lotabweichungen über dem Raster der Bezugsellipsoidkoordinaten zu übergeben. Vielmehr sind dem heutigen Standard sehr leistungsfähiger Personal-Computer und anwenderfreundlicher Software entsprechend Programmpakete mit Datenbankzugriffsmöglichkeiten anzubieten, die den Verschnitt heterogenen Datenmaterials (Situation, Geländemodell, Lotabweichungen, Undulationen über dem Refererenzellipsoid) erlauben. Zusätzlich sind die Transformationen zwischen den in Gebrauch stehenden

Koordinatensystemen (und Bezugsellipsoiden) sowie Interpolationsalgorithmen zur Neubestimmung von Stationswerten bei Änderung des Grunddatenmaterials und geeignete graphische Ausgaberoutinen zur Verfügung zu stellen.

Für im Forschungsbereich tätige Interessenten der Geowissenschaften sind die Störfelddaten im Verschnitt mit dem Gelände- und Dichtemodell des Staatsgebietes in einer Datenbank zusammenzufassen (möglichst im Gitter kartesischer Koordinaten), wobei allerdings Standards, die eine spätere Einbindung in ein umfassendes Geoinformationssystem erlauben, schon jetzt zu beachten wären.

Anhang A

Kreuzkovarianzen (Reilly-Modell)

Funktionen der Geoidundulation N

$$C(N,N) = \frac{1}{\gamma^2} R(1,0)$$

$$C(N,\Delta g) = \frac{1}{\gamma} (R(2,0) - (2/r) R(1,0))$$

$$C(N,\xi) = \frac{1}{\gamma^2} (R(2,1) \sin\alpha)$$

$$C(N,\eta) = \frac{1}{\gamma^2} (R(2,1) \cos\alpha)$$

$$C(N,T_{zz}) = - \frac{1}{\gamma} R(3,0)$$

Funktionen der Schwereanomalie Δg

$$C(\Delta g,\Delta g) = R(3,0) - 2(2/r) R(2,0) + (2/r)^2 R(1,0)$$

$$C(\Delta g,\xi) = \frac{1}{\gamma} (R(3,1) \sin\alpha - (2/r) R(2,1) \sin\alpha)$$

$$C(\Delta g,\eta) = \frac{1}{\gamma} (R(3,1) \cos\alpha - (2/r) R(2,1) \cos\alpha)$$

$$C(\Delta g,T_{zz}) = - R(4,0) + (2/r) R(3,0)$$

Funktionen der Lotabweichungskomponente ξ

$$C(\xi,\xi) = \frac{1}{\gamma^2} (\frac{1}{2} R(3,0) + \frac{1}{2} R(3,2) \cos 2\alpha)$$

$$C(\xi,\eta) = \frac{1}{\gamma^2} (-\frac{1}{2} R(3,2) \sin 2\alpha)$$

$$C(\xi,T_{zz}) = R(4,1) \sin\alpha$$

Funktionen der Lotabweichungskomponente η

$$C(\eta,\eta) = \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{2}R(3,0) - \frac{1}{2}R(3,2)\cos 2\alpha\right)$$

$$C(\eta,T_{zz}) = R(4,1)\cos\alpha$$

Funktion des Gradienten T_{zz}

$$C(T_{zz},T_{zz}) = R(5,0)$$

Anhang B

```
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c                                                         c
c                        E D G E                          c
c                                                         c
c     Subroutine edge surrounds the height grid with      c
c     a vector dimensioned by 'drand'.                    c
c     inn,ine remain unchanged                            c
c     ic=1 ... vector=const                               c
c     ic=2 ... vector=smoothed values                     c
c                                                         c
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

      subroutine edge(inn,ine,dfi,dla,iha,ihadim,drand,ic)
      dimension iha(ihadim)

      n=inn*ine
c
      inna=int(drand/dfi+0.001)
      inea=int(drand/dla+0.001)

      if (ic.eq.2) goto 2
c
c     Raenderung h=const.=1000
c
    1 k=1
      do 10 i=inna,inn-inna-1
      do 10 j=1,ine-2*inea
      iv=i*ine+inea+j
      do 9 m=k,iv-1
      iha(m)=1000
    9 continue
      k=iv+1
   10 continue
      do 11 m=k,n
      iha(m)=1000
   11 continue
c
      return

    2 ih=inn
      jh=ine
      lrun=1
   61 do 70 i=1,inn
      do 70 j=1,ine
      if (i.le.inna) iha((i-1)*ine+j)=iha(inna*ine+j)
      if (i.gt.(inn-inna)) iha((i-1)*ine+j)=iha((inn-inna-1)*ine+j)
      if (j.le.inea) iha((i-1)*ine+j)=iha((i-1)*ine+inea+1)
      if (j.gt.(ine-inea)) iha((i-1)*ine+j)=iha((i-1)*ine+ine-inea)
   70 continue
      if (lrun.gt.1) goto 80
      jh=inea
      lrun=lrun+1
      goto 61

   80 return
      end
```

LITERATUR

Bracewell, R. (1965) — The Fourier Transform and its Applications
Mc Graw-Hill; New York

Bretterbauer, K. (1984) — Das lokale Schwerefeld des Glocknergebiets
Institutsmitteilungen des Inst. f. Geodäsie
Nr.7 ; Innsbruck

Bretterbauer, K. (1986) — Das Höhenproblem der Geodäsie
ÖZ f. Verm. und Phot.,74.Jg., Nr.4; Wien

Brigham, E.O. (1987) — FFT, Schnelle Fourier-Transformation
R.Oldenbourg Verlag, 3.Auflage; München

Comer, R.P. (1986) — Terrain Correction via FFT: A New Derivation
EOS, Trans.American Geophys.Union., Vol.67,
Nr.16, S 260ff ; Baltimore,Maryland

Cooley, J.W.
Tuckey, J.W. (1965) — An Algorithm for Machine Calculation of Complex
Fourier Series
Math. Computation, Vol.19, S 297-301

Despotakis, V.K. (1987) — Geoid Undulation Computations at Laser Tracking
Stations
The Ohio State University, Report 383; Columbus,Ohio

Elmiger, A. (1969) — Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus
Massen, Interpolation von Lotabweichungen und
Geoidbestimmung in der Schweiz
Dissertation an der ETH; Zürich

Erker, E. (1986) — Möglichkeiten der lokalen Geoidbestimmung im Gebirge
Mitteilungen d. geodät. Inst. d. TU Graz,Folge 51; Graz

Forsberg, R. (1984) — A Study of Terrain Reductions, Density Anomalies and
Geophysical Inversion Methods in Gravity Field Modelling
The Ohio State University, Report 355; Columbus,Ohio

Forsberg, R. (1985)
Gravity Terrain Effect Computations by FFT
Bulletin Geodesique, Vol.59, Nr.4,S 342-360; Paris

Gerstbach, G. (1988)
Precise Alpine Geoid Determination without Digital Terrain Models
Bulletin Geodesique, Vol.62, Nr.4, S 541-563; Paris

Grafarend, E.W. (1973)
Gravity Gradients and Three Dimensional Net Adjustments without Ellipsoidal Reference
The Ohio State University, Report 202; Columbus,Ohio

Harrison, J.C. Dickinson, M. (1989)
Fourier Transform Methods in Local Gravity Modelling
Bulletin Geodesique, Vol.63, Nr.2, S 149-166; Paris

Hein, G.W. (1981)
Untersuchungen zur terrestrischen Schweregradiometrie
DGK, Reihe C, Heft 264; München

Hein, G.W. Landau, H. (1983)
A Contribution to 3D-Operational Geodesy
DGK, Reihe B, Heft 264; München

Heiskanen, W.A. Moritz, H. (1967)
Physical Geodesy
W.H. Freeman and Co.; San Francisco,London

Hoffm.-Wellenhof,B. Moritz, H. (1986)
Introduction to Spectral Analysis
Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy, Springer-Verlag, S 157-259; Berlin,New-York

Jordan, S.K. Heller, W.G. (1978)
Upward Continuation of Gravity Disturbance Covariance Functions
Journal of Geoph. Research, Vol.83, Nr.B7, S 3382 - 3388; Massachusetts

Mallaun, K.H. (1989)
Entwicklung eines Programmsystems zur Deformationsanalyse quasistatischer Punktfelder
Diplomarbeit TU-Wien,Vermessungswesen; Wien

Meissl, P. (1971)
A Study of Covariance Functions related to the Earth Disturbing Potential
The Ohio State University, Report 151; Columbus,Ohio

Meissl, P. (1971)
Preparations for the Numerical Evaluation of Second Order Molodensky-Type Formulas
The Ohio State University, Report 163; Columbus,Ohio

Moritz, H. (1968)
On the Use of the Terrain Correction in Solving Molodensky's Problem
The Ohio State University, Report 108; Columbus,Ohio

Moritz, H. (1976)
Covariance Functions in Least-Squares Collocation
The Ohio State University, Report 240; Columbus,Ohio

Moritz, H. (1977)
On the Computation of a Global Covariance Model
The Ohio State University, Report 255; Columbus,Ohio

Moritz, H. (1978)
Least-Squares Collocation
Advances in Geodesy, Selected Papers from Reviews of Geophysics and Space Physics, S 27-36
American Geophysical Union; Washington

Moritz, H.
Sünkel, H. (1978)
Approximation Methods in Geodesy
Proceedings der 2.Int. Sommerschule in der Ramsau
H. Wichmann Verlag, Sammlung Wichmann, neue Folge, Band 10; Karlsruhe

Moritz, H. (1980)
Advanced Physical Geodesy
H. Wichmann Verlag; Karlsruhe

Moritz, H. (1983)
Local Geoid Determination in Mountain Regions
The Ohio State University, Report 352; Columbus,Ohio

Rapp, R.H. (1986)
Global Geopotential Solutions
Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy, Springer-Verlag, S 365-415; Berlin,New-York

Reilly, W.I. (1979)
Mapping the Local Geometry of the Earth's Gravity Field
Dep. of Scientific and Ind. Research, Geoph. Division Report 143; New Zealand

Rinner, et al. (1983)
Das Geoid in Österreich
Geodät. Arbeiten Österreichs für die Int. Erdmessung
ÖKIE, Band 3, neue Folge; Graz

Rinner, et al. (1987)
The Gravity Field in Austria
Geodät. Arbeiten Österreichs für die Int. Erdmessung
ÖKIE, Band 4, neue Folge; Graz

Ruess, D. (1986)
Stand des österr. Schweregrundnetzes und des digitalen Höhenmodells
Tagungsbericht d. 4.Int. Alpengravimetrie-Kolloquiums
ZA f. Met. und Geodynamik, S 159-164,Nr.323; Wien

Rummel, R. (1986)
Satellite Gradiometry
Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy,Springer-Verlag,S 317-363; Berlin,New-York

Schwarz, K.P.
Lachapelle, G. (1980)
Local Characteristics of the Gravity Anomaly Covariance Function
Bulletin Geodesique, Vol.54, Nr.1, S 21-36; Paris

Sideris, M. (1984)
Computation of Gravimetric Terrain Corrections using FFT-Techniques
The University of Calgary, UCSE-Report 20007; Calgary, Alberta

Sjöberg, L.E. (1986)
Comparison of some Methods of Modifying Stokes' Formula
Proceedings of the Int. Symposium on the Definition of the Geoid; Florenz

Sünkel, H. (1978)
Approximation of Covariance Functions by non-positive Definite Functions
The Ohio State University, Report 271; Columbus,Ohio

Sünkel, H.
Malits, R. (1981)
Höhenkorrelation, Kovarianzfunktion u. Prädiktion von Schwereanomalien in lokal begr. Gebieten Österreichs
ÖZ f. Verm., 69.Jg., Nr.1, S 17-31; Wien

Sünkel, H. (1984)
On the Reduction of Gravity Data for the Prediction of the Gravity Disturbance Vector at Altitudes
The Ohio State University, Report 359; Columbus,Ohio

Tscherning, C.C. Rapp, R.H. (1974)
Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations and Deflections of the Vertical implied by Anomaly Degree Variance Models
The Ohio State University, Report 208; Columbus,Ohio

Tscherning, C.C. (1976)
Covariance Expressions for Second and Lower Order Derivatives of the Anomalous Potential
The Ohio State University, Report 225; Columbus,Ohio

Tscherning, C.C. (1986)
Functional Methods for Gravity Field Approximation
Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy, Springer-Verlag, S 3-47; Berlin,New-York

Weber, R. Zahradnik, D. (1986)
Eine automatisierte Zeitnehmung f. astron. Feldbeob. nach der Methode der gleichen Höhen
ZfV., Band 9/86, S 432-435; Stuttgart

Weber, R. (1987)
Local Geoid Determination
The Gravity Field in Austria
ÖKIE, Band 4, neue Folge, S 87-94; Graz

Weber, R. (1989)
Local Gravity Field Modelling in the Tyrol Alps using FFT-Techniques
Proceedings of the 1st Int. Symposium "Gravity Field Determination and GPS-Positioning in the Alps-Adria Area"; Zagreb

Vassiliou, A. (1985)
The use of spectral methods for the spatial modelling of gravity data
Manuscripta geodetica, Vol.10, Nr.4; Berlin

Zhao, S. (1989)
The Computation of Detailed Geoids Using the FFT-Method
The Ohio State University, Report 400; Columbus,Ohio

LEBENSLAUF

Name:	Robert WEBER
Familienstand:	geschieden
27. 6. 1958	geboren in Wien Eltern: Johann WEBER Gerda WEBER, geb. Kiesel
1964 - 1968	Besuch der Volksschule in Wien
1968 - 1976	Besuch des Realgymnasium in Wien BG und BRG 22
24. 6. 1976	Ablegung der Reifeprüfung
1. 10. 1976	Studium an der TU-Wien Studienrichtung Vermessungswesen Studienzweig: Erdmessung und Geophysik
6. 1979	1.Diplomprüfung
1. 1983	2.Diplomprüfung
7. 6. 1983	Heirat (Gattin Brigitte, geb. Hogen)
1. 6. - 30.7 1984	Ableistung der Grundausbildung des österr. Bundesheeres
11. 11. 1988	Scheidung
seit 2. 1983	Vertragsassistent an den Abteilungen Theoretische Geodäsie und Ingenieurgeodäsie (jeweils halbbeschäftigt) der Technischen Universität Wien

Bisher erschienen:

Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.

Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendungen im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.

Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.

Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Tektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.

Heft 5 K. LEDERSTEGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.

Heft 6 F. REINHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von +30 bis +60, Oktober 1975.

Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.

Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.

Heft 9 W. PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.

Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.

Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.

Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.

Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anläßlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.

Heft 14 L. MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.

Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anläßlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Bavir, Wien, Januar 1979.

Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.

Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.

Heft 18 Veröffentlichung des Instituts für Allgemeine Geodäsie anläßlich des 75. Geburtstages von Prof. Dipl. Ing. Dr. F. Hauer, Die Höhe des Großglockners, Wien, 1981.

Heft 19 H. KAGER, Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren, Wien, April 1981.

Heft 20 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1980, Wien, Mai 1982.

Heft 21 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie anläßlich des 70. Geburtstages von Prof. Dr. Wolfgang Pillewizer: Glaziologie und Kartographie, Wien, Dezember 1982.

Heft 22 K. TEMPFLI, Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse, Wien, Mai 1982.

Heft 23 E. CSAPLOVICS, Interpretation von Farbinfrarotbildern, Wien, November 1982.

Heft 24 J. JANSA, Rektifizierung von Multispektral-Scanneraufnahmen - Entwicklung und Erprobung eines EDV-Programms, Wien, Mai 1983.

Heft 25 Zusammenfassungen der Diplomarbeiten, Dissertationen und Habilitationen an den geodätischen Instituten der TU Wien, Wien, November 1984.

Heft 26 T. WUNDERLICH, Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln, Wien, August 1985.

Heft 27 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschafliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Bedarf und Möglichkeiten in Österreich, Wien, Juni 1986.

Heft 28 K. NOVAK, Orientierung von Amateuraufnahmen ohne Paßpunkte, Wien, August 1986.

Heft 29 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abteilung Ingenieurgeodäsie anläßlich des 80. Geburtstages von Prof. Dipl. Ing. Dr. F. Hauer, Wien, Oktober 1986.

Heft 30 K.-H. ROCH, Über die Bedeutung dynamisch ermittelter Parameter für die Bestimmung von Gesteins- und Gebirgseigenschaften, Wien, Februar 1987.

Heft 31 G. HE, Bildverbesserung mittels digitaler Filterung, Wien, April 1989.

Heft 32 F. SCHLÖGELHOFER, Qualitäts- und Wirtschaftlichkeitsmodelle für die Ingenieurphotogrammetrie, Wien, April 1989.

Heft 33 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschaftliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Datenbestände und Datenaustausch in Österreich, Wien, Juni 1989.

Heft 34 F. HOCHSTÖGER, Ein Beitrag zur Anwendung und Visualisierung digitaler Geländemodelle, Wien, Dezember 1989.