

Berliner Studienreihe zur Mathematik
Band 26

Michael Kaltenbäck

Fundament Analysis



Heldermann Verlag

Michael Kaltenbäck
Institut für Analysis und Scientific Computing
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10
1040 Wien
Österreich

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Gedruckt auf säurefreiem Papier.

© Copyright 2014 by Heldermann Verlag, Langer Graben 17, 32657 Lemgo, Germany; www.heldermann.de. All rights reserved.

ISBN 978-3-88538-126-6

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ix
1 Mengen und Abbildungen	1
1.1 Mengen	1
1.2 Funktionen	4
1.3 Äquivalenzrelation	8
1.4 Übungsaufgaben	9
2 Die reellen Zahlen	13
2.1 Algebraische Struktur der reellen Zahlen	13
2.2 Ordnungsstruktur der reellen Zahlen	16
2.3 Die natürlichen Zahlen	21
2.4 Die ganzen Zahlen	33
2.5 Eine alternative Konstruktion von \mathbb{Z}^*	37
2.6 Dividieren mit Rest*	41
2.7 Der Körper \mathbb{Q}	44
2.8 Archimedisch angeordnete Körper	49
2.9 Das Vollständigkeitsaxiom	50
2.10 Dedekindsche Schnitte*	54
2.11 Die komplexen Zahlen	59
2.12 Übungsaufgaben	61
3 Der Grenzwert	69
3.1 Metrische Räume	69
3.2 Der Grenzwert in metrischen Räumen	74
3.3 Folgen reeller und komplexer Zahlen	80
3.4 Monotone Folgen	84
3.5 Cauchy-Folgen	88
3.6 Konvergenz in weiteren metrischen Räumen	90
3.7 Konvergenz gegen unendlich	93
3.8 Konvergenz gegen $\pm\infty$ als metrische Konvergenz*	96
3.9 Unendliche Reihen	100
3.10 Konvergenzkriterien	105

3.11	Übungsaufgaben	110
4	Die Konstruktion der reellen Zahlen	119
4.1	Existenz	119
4.2	Eindeutigkeit	124
5	Topologie metrischer Räume	127
5.1	ϵ -Kugeln, offene und abgeschlossene Mengen	127
5.2	Kompaktheit	134
5.3	Gerichtete Mengen und Netze	139
5.4	Unbedingte Konvergenz und Umordnen von Reihen	146
5.5	Grenzwerte von Funktionen	154
5.6	Übungsaufgaben	159
6	Reelle und komplexe Funktionen	165
6.1	Stetigkeit	165
6.2	Der Zwischenwertsatz	173
6.3	Gleichmäßige Stetigkeit	175
6.4	Unstetigkeitsstellen	178
6.5	Monotone Funktionen	181
6.6	Gleichmäßige Konvergenz	183
6.7	Vervollständigung*	190
6.8	Reell- und komplexwertige Folgen und Reihen von Funktionen	192
6.9	Die Exponentialfunktion	197
6.10	Fundamentalsatz der Algebra	206
6.11	Weitere wichtige elementare Funktionen	208
6.12	Abelscher Grenzwertsatz*	212
6.13	Übungsaufgaben	214
7	Differentialrechnung	223
7.1	Begriff der Ableitung	223
7.2	Mittelwertsätze	230
7.3	Motivation zum Taylorsche Lehrsatz*	240
7.4	Der Taylorsche Lehrsatz	243
7.5	Stammfunktion	248
7.6	Übungsaufgaben	256
8	Das Riemannsches Integral	261
8.1	Ober- und Untersummen	261
8.2	Das Riemann-Integral	265
8.3	Integrale von stetigen Funktionen	272
8.4	Differential und Integralrechnung	273
8.5	Weitere Eigenschaften des Integrals*	279
8.6	Uneigentliche Integrale	280

.....	110
119	
.....	119
.....	124
127	
.....	127
.....	134
.....	139
.....	146
.....	154
.....	159
165	
.....	165
.....	173
.....	175
.....	178
.....	181
.....	183
.....	190
.....	192
.....	197
.....	206
.....	208
.....	212
.....	214
223	
.....	223
.....	230
.....	240
.....	243
.....	248
.....	256
261	
.....	261
.....	265
.....	272
.....	273
.....	279
.....	280

8.7	Vertauschung von Integralen mit Grenzwerten	283
8.8	Mittelwertsatz	294
8.9	Übungsaufgaben	296
9	Normen und Banachräume	303
9.1	Normierte Räume	303
9.2	Lineare Abbildungen	307
9.3	Banachraumwertige Reihen, Funktionen, etc.	313
9.4	Übungsaufgaben	328
10	Ableitungen nach mehreren Variablen	333
10.1	Partielle Ableitungen	333
10.2	Höhere Ableitungen	343
10.3	Extremwerte	350
10.4	Übungsaufgaben	356
11	Wegintegrale	361
11.1	Wege	361
11.2	Wegintegrale	367
11.3	Offene Mengen in \mathbb{R}^n und Gebiete	373
11.4	Gradientenfelder	375
11.5	Homotopie und einfacher Zusammenhang	384
11.6	Komplexe Wegintegrale und Holomorphie	387
11.7	Laurentreihen*	401
11.8	Nochmals komplexe Differenzierbarkeit*	403
11.9	Harmonische Funktionen*	405
11.10	Übungsaufgaben	406
12	Topologische Grundlagen	413
12.1	Topologische Grundbegriffe	413
12.2	Abgeschlossene Mengen	418
12.3	Stetige Abbildungen	423
12.4	Basis, Subbasis	427
12.5	Initiale Topologie	431
12.6	Spur- und Produkttopologie	434
12.7	Finale Topologie*	437
12.8	Zusammenhang und Trennungseigenschaft (T_1)*	439
12.9	Trennungseigenschaften (T_3) und (T_4)	442
12.10	Das Lemma von Urysohn*	444
12.11	Kompaktheit	448
12.12	Satz von Tychonoff*	453
12.13	Kompaktheit in metrischen Räumen	454
12.14	Alexandroff-Kompaktifizierung	460
12.15	Der Satz von Stone-Weierstraß	463

12.16 Übungsaufgaben	468
13 Lemma von Zorn*	475
Literaturverzeichnis	479
Index	480