DIPLOMARBEIT

CFD-Berechnungen zur Optimierung der Kammergeometrie von Vollabyrinthen mittels der Methode der Finiten-Elemente

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. K.LEEB

durch
Johannes ZUNZER
Steinhaus 86
A-4641 Steinhaus/Wels

Wien, 18. November 1997

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die ebene axial-symmetrische kompressible turbulente Strömung durch eine Vollabyrinthdichtung. Dabei wurde die Rotation des Läufers vernachlässigt. Die Strömung wurde mit Turbulenzmodellen des Programmpaketes FIDAP 7.52 mit Hilfe der Methode der Finiten-Elemente simuliert. Die dabei auftretenden Probleme der Netzerstellung, das Rechenverfahren und die Lösungsstrategie werden diskutiert. Zur Verifizierung der Rechenergebnisse werden Meßergebnisse an einer am Institut vorhanden Einrichtung herangezogen. Die Abmessungen des zur Berechnung verwendeten Modelles entsprechen der Dichtung am Prüfstand.
Am Prüfstand wurden bei dieser Dichtung Leckmassenströme für Druckverhältnisse von $\pi = 1.1 - 2.0$ gemessen. Jenes konvergierende Modell, welches den geringsten relativen Fehler bezogen auf die Messung aufweist, wurde zu einer Parameterstudie herangezogen. Dabei wurden die Spaltweite, die Dichtstreifenbreite und der Rotordurchmesser konstant gehalten. Die Bauhöhe und die Teilung wurden variiert. Mit den erhaltenen Ergebnissen wurden dimensionslose Kennzahlen gebildet, die durch Dimensionsanalyse erhalten wurden. Diese sind in Diagrammen zusammengefaßt, wobei sich teilweise optimale Geometrieverhältnisse ablesen lassen. Als optimales Verhältnis ist jenes definiert, bei dem sich ein minimaler Leckmassenstrom ergibt. Weiters läßt sich mit den erhaltenen Ergebnissen die bestehende Dichtung deutlich verbessern. Vor allem durch das Verändern des Verhältnisses Spaltweite zu Bauhöhe kann der Leckmassenstrom beeinflußt werden.
Einleitend sind die bereits bekannten kostruktiven Maßnahmen zur Erzielung einer optimalen Dichtwirkung (Geometrie) angeführt. Auch sind in dieser Arbeit in der Literatur verwendete Verfahren zur Berechnung des Leckmassenstromes von Vollabyrinthdichtungen aufgezählt. Es werden verschiedene Durchflußbeiwerte bzw. -funktionen zur Bestimmung des Durchflusses verwendet. Dabei fällt auf, daß die meisten Durchflußfunktionen unabhängig von der Dichtungsgeometrie sind. Zur Bewertung der Rechenverfahren wurden die berechneten mit den am Institut gemessenen Werte verglichen und als relativer Fehler dargestellt. Dabei treten zum Teil erhebliche Abweichungen auf. Die Beiwerte wurden ineinander umgerechnet und in Tabellenform dargestellt.
Um die Problematik der Turbulenzmodellierung aufzuzeigen, wurde die ebene stationäre inkompressible turbulente Strömung beschrieben und die dafür notwendigen Gleichungen (*Reynoldsgleichungen*) ausgehend von den *Navier-Stokes-Gleichungen* hergeleitet. Weiters wird das häufig angewendete $\overline{k}$-ε Turbulenzmodell für eine solche Strömung erläutert.

Vorwort

Besonderen Dank gilt O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER für die Korrektur und die gebotene Möglchkeit, trotz meines Studienzweiges Betriebswissenschaften, die Diplomarbeit am Institut für Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen an der Technischen Universität Wien durchzuführen. Für die Betreuung, die Korrekturen, die konstruktiven Tips, die Geduld und für die Hilfe am Computer, vor allem zu Beginn der Diplomarbeit, möchte ich mich bei Univ.Ass. Dipl.-Ing. K.LEEB bedanken. Anerkennung verdient auch Univ.Ass. Dipl.-Ing. R.WILLINGER, der sich für Fragen und Probleme annahm.

Für die finanzielle Unterstützung, die ein Studium ohne größere zusätzliche Belastungen ermöglicht, möchte ich mich beim BUNDESMINISTERIUM FÜR WISSENSCHAFT UND FORSCHUNG bedanken.

Meinen ELTERN gilt der Dank für die Unterstützung und die positive Einstellung zu diesem Studium, meinen Freunden und Studienkollegen HIPI und STEFFI bzw. ANDI, KLAUS, ROMAN und UDO für die schöne gemeinsame Studienzeit.

Gewidmet ist diese Arbeit meiner Freundin GABI und meiner Tochter LAURA.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

Lateinische Formelzeichen

a	$[m]$	Bauhöhe
A	$[m^2]$	Fläche
b	$[m]$	Dichtstreifenbreite
c	$[m/s]$	Durchflußgeschwindigkeit
c_p	$[J/kgK]$	spezifische Wärmekapazität
C	$[1]$	empirische Konstante
C_D	$[1]$	Durchflußbeiwert
C_D	$[1]$	empirische Konstante
C_1	$[1]$	empirische Konstante
C_2	$[1]$	empirische Konstante
d	$[m]$	Durchmesser
d_h	$[m]$	hydraulischer Durchmesser
D_m	$[m]$	mittlerer Spaltdurchmesser
D_{Rotor}	$[m]$	Rotordurchmesser
D_{Stator}	$[m]$	Gehäusedurchmesser
E	$[1]$	empirische Konstante
f	$[m^2]$	Strahlquerschnitt
f_{Sp}	$[m^2]$	geometrische Spaltfläche
F	$[\%]$	relativer Fehler
F	$[1]$	Funktion des Druckverhältnisses
G	$[m^2/s^3]$	Energieproduktion
h	$[m^2/s^2]$	spezifische Enthalpie
$\overline{k}$	$[m^2/s^2]$	kinetische Energie je Masseneinheit
K	$[1]$	Abkürzung
l	$[m]$	Mischungsweglänge
l	$[m]$	Dichtstrecke
$\dot{m}$	$[kg/s]$	Massenstrom
$\dot{m}_{ideal}$	$[kg/s]$	Massenstrom durch eine ideale Düse
$\dot{m}_{gemessen}$	$[kg/s]$	Massenstrom durch das Labyrinth
M	$[kg/kmol]$	Molmasse
Ma	$[1]$	Machzahl
p	$[N/m^2]$	Druck
Pr_k	$[1]$	Prandtlzahl der turbulenten kinetischen Energie
Pr_ε	$[1]$	Prandtlzahl der Dissipation

$\dot{Q}_{ideal}$	$[\sqrt{Ks^2/m^2}]$	reduzierter Volumenstrom
R	$[J/kgK]$	spezielle Gaskonstante
$\mathcal{R}$	$[J/kmolK]$	Allgemeine Gaskonstante
Re	$[1]$	Reynoldszahl
s	$[s, m]$	unabhängige Variable
s	$[m]$	Spaltweite
t	$[s]$	Zeit
t	$[m]$	Teilung
T	$[K]$	Temperatur
Tu	$[1]$	Turbulenzgrad
u	$[m/s]$	skalare Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
u^+	$[1]$	dimensionslose Geschwindigkeit
u_τ	$[m/s]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
U	$[m]$	Umfang
v	$[m/s]$	skalare Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
v	$[m^3/kg]$	spezifisches Volumen
w	$[m/s]$	skalare Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
x	$[m]$	kartesische Koordinate
y	$[m]$	kartesische Koordinate
y^+	$[1]$	dimensionsloser Wandabstand
z	$[m]$	kartesische Koordinate
z	$[1]$	gesamte Spitzenanzahl

Griechische Formelzeichen

α	$[1]$	Durchflußzahl
α	$[1]$	Relaxationsfaktor
β	$[1]$	Druckverhältnis
β_{krit}	$[1]$	kritisches Druckverhältnis
β_z	$[1]$	Druckverhältnis in der letzten Stufe
ε	$[m^2/s^3]$	Dissipation
δ	$[m]$	charakteristische Länge
κ	$[1]$	Isentropenexponent
κ	$[1]$	Kármán-Konstante
λ	$[1]$	Widerstandsbeiwert
μ	$[1]$	Kontraktionsbeiwert
μ	$[Pas]$	dynamische Viskosität
μ_t	$[kg/ms]$	scheinbare dynamische Viskosität
ν	$[1]$	Ausflußexponent
ν	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
ν_t	$[m^2/s]$	scheinbare kinematische Viskosität
π	$[1]$	Druckverhältnis
ρ	$[kg/m^3]$	Dichte
τ	$[N/m^2]$	Schubspannung
φ	$[1]$	dimensionslose Funktion des Druckverhältnisses
Φ	$[1]$	Durchflußfunktion

Φ	$[m/s, N/m^2]$	Strömungsparameter
χ	$[1]$	Abkürzung
ψ	$[1]$	gemessene Expansionszahl
ψ_p	$[1]$	Druckabfall der letzten Stufe
ψ_{th}	$[1]$	theoretische Expansionszahl
ω	$[1/s]$	Winkelgeschwindigkeit

Tiefgestellte Indizes

a	Austrittszustand
e	Eintrittszustand
g	groß
k	k-te Drosselstelle
k	klein
k	kinetische Energie
m	mittel, gemittelt
M	Martin
S	Snow
Sp	Spaltfläche
t	turbulent
th	theoretisch
tot	total, gesamt
T	Traupel
T	Temperatur
v	viskos
x	x-Richtung
y	y-Richtung
z	z-Richtung
ε	Dissipation
0	Anfang

Hochgestellte Indizes

$+$	dimensionslos
$*$	dimensionslos
$*$	kritisch
$'$	isentrop
$'$	Schwankungsanteil
$-$	mittel

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Im thermischen Turbomaschinenbau werden hauptsächlich *berührungsfreie* Dichtungen (*Labyrinthdichtungen*) eingesetzt. In Sonderfällen werden auch andere Bauarten verwendet. Während des Betriebes der Turbomaschinen herrschen hohe Umfangsgeschwindigkeiten und meistens auch hohe Temperaturen vor. Bei herkömmlichen *berührenden* Dichtungen würden daher große Gleitgeschwindigkeiten auftreten. Mit dem Einsatz von berührungsfreien Dichtungen werden die bei berührenden Dichtungen notwendige Schmierung und auftretende Reibungsverluste vermieden. Weiters kann die Dichtung unabhängig von der Betriebstemperatur gewählt werden. Diesen Vorteilen der berührungsfreien Dichtungen stehen einige Nachteile gegenüber. Diese liegen in den zumeist höheren Investitionskosten gegenüber den Berührungsdichtungen und der notwendigen Aufrechterhalterhaltung des kleinen Spiels zwischen Stator und Rotor. Außerdem sind diese Dichtungen auf Grund ihrer Wirkungsweise nicht vollständig dicht. Die Leckageverluste sind von einigen Einflußgrößen, u.a. von der Geometrie, abhängig. Eine optimale Anordnung kann die Verluste deulich reduzieren, weshalb der genauen Berechnung dieser Verluste besondere Aufmerksamkeit zukommen soll. Durch die Verfeinerung der Auslegungs- und Wirtschaftlichkeitsberechnungen der heutigen Zeit ist dieser Aufwand sicherlich gerechtfertigt.
Im Rahmen dieser Diplomarbeit soll zunächst eine Literaturstudie bezüglich der kostruktiven Maßnahmen zur Erreichung einer optimalen Geometrie von *Vollabyrinthen*, einer Grundform von Labyrinthdichtungen, betrieben werden. Für die Berechnung des Leckmassenstromes solcher Dichtungen liegen verschiedene Durchflußfunktionen vor. Diese sollen aufgezählt, abgeleitet und beschrieben werden. Weiters sind die in den Funktionen auftretenden Durchflußbeiwerte ineinander umzurechnen.
Für *Vollabyrinthe* sollen optimale Geometrieverhältnisse gefunden werden. Dazu sind durch Dimensionsanalyse die die Strömung durch eine solche Dichtung kennzeichnenden Kennzahlen herzuleiten. Zur Beschreibung der ebenen stationären turbulenten kompressiblen Strömung steht ein nichtlineares Differentialgleichungssystem zur Verfügung. Dieses System soll mit Hilfe der Methode der Finiten-Elemente gelöst werden. Für die Berechnung steht dabei das Programmpaket FIDAP 7.52 zur Verfügung. Dieses Programmpaket bietet verschiedene Kombinationen von Turbulenz- und Wirbelviskositätsmodellen an. Es sollen einige solcher Kombinationen getestet und das Turbulenzmodell ermittelt werden, das die geringsten Abweichungen von am Prüfstand ermittelten Durchflußbeiwerten einer bestimmten Geometrie aufweist. Weiters sollen die Unterschiede der verwendeten Turbulenz- und Wirbelviskositätsmodelle ausgearbeitet werden.
Die stationäre inkompressible turbulente Strömung soll beschrieben werden. Außerdem ist das häufig verwendete $\overline{k}$-ε Modell für diese Strömung zu erläutern.

Kapitel 2

Geometrie von Labyrinthdichtungen

2.1 Arten von berührungsfreien Dichtungen

Während früher bei kleineren Umfangsgeschwindigkeiten noch als *Stopfbüchsen* bezeichnete Berührungsdichtungen verwendet wurden, werden heute hauptsächlich berührungsfreie Dichtungen eingesetzt [19]. Nach *Trutnovsky* [18] unterscheidet man grundsätzlich drei Grundformen von berührungsfreien Dichtungen:

- Spaltdichtung (glatter Spalt)
- Labyrinthspaltdichtung (Durchblicklabyrinth)
- Labyrinthdichtung (Vollabyrinth)

Während der glatte Spalt über die ganze Länge einen konstanten bzw. stetig veränderlichen Durchlaßquerschnitt besitzt, besteht das Labyrinth aus aufeinanderfolgenden weiten und engen Querschnitten (Abbildung 2.1). Diese entstehen durch Ineinandergreifen der beiden Turbomaschinenteile Welle (Rotor) und Gehäuse (Stator). Bei Labyrinthspaltdichtungen stehen sich glatte und genutete Flächen derart gegenüber, daß nur noch kurze, auf gleichem Durchmesser angeordnete Spaltstrecken bestehen. Bei dieser Grundform wird noch zwischen ein- und doppelseitiger Labyrinthspaltdichtung unterschieden.

Abbildung 2.1: Grundformen berührungsfreier Dichtungen [19]

Im Hinblick auf die Spaltanordnung unterscheidet man die axiale, die radiale und eine Kombination dieser beiden, die axial-radial dichtende Bauart (Abbildung 2.2). Dabei sind die axialen Bauarten weniger empfindlich gegen radiale Wellenausschläge und die radial wirkenden Dichtungen unempfindlicher gegen axiale Wärmedehnungen der Welle.

Abbildung 2.2: Bauarten berührungsfreier Dichtungen [19]

Mit welchen Konstruktionen der Turbomaschinenbau das Dichtungsproblem zu lösen versucht, soll in Abbildung 2.3 dargestellt werden. Diese Abbildung zeigt verschiedene Konstruktionsbeispiele, hat aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Abbildung 2.3: Konstruktionsbeispiele von Dichtungen [19]

2.2 Literaturübersicht

Es wurde bereits viel Forschungsaufwand für die genaue Berechnung des Leckmassenstromes betrieben. Dieser ist vom Gesamtdruckverhältnis (Austrittsdruck zu Eintrittsdruck), vom thermodynamischen Zustand vor der Labyrinthdichtung und von der Geometrie abhängig. Oft sind die Zustände vor und nach der Dichtstrecke bereits vorgegeben. Zur Minimierung des *Leckmassenstromes* (häufig auch als *Spaltmassenstrom* oder *Lässigkeit* bezeichnet) bleibt somit nur noch die Variation der Geometrieparameter. Um die optimalen Parameter zu finden, sind bisher aufwendige Versuche notwendig gewesen. Mit Hilfe der numerischen Simulation soll der Aufwand wesentlich reduziert werden.
Winkler [19] gibt für Durchblickdichtungen an, daß die Verkleinerung der Spaltweite in

jedem Fall eine Verringerung des Leckmassenstromes bewirkt. Es ist jedoch aus Betriebssicherheitsgründen wenig sinnvoll, eine bestimmte Mindestspaltweite zu unterschreiten. Weiters gibt *Winkler* an, daß die Drosselung am wirksamsten ist, wenn die Dichtstreifenbreite unendlich klein ist, d.h. je weniger der Strahl im Drosselspalt geführt wird. Aus Festigkeitsgründen müssen jedoch nach *Winkler* Breiten von mindestens $0.2mm$ verwendet werden . Dies bezieht sich auf Druckdifferenzen zwischen zwei Wirbelkammern von $1bar$. Für höhere Druckdifferenzen müssen stärkere Bleche verwendet werden. Da die größten Druckunterschiede am Ende der Dichtung auftreten, genügt es bei Hochdruckdichtungen die letzten Bleche verstärkt auszubilden. Eine möglichst scharfe Ausbildung der Drosselstegkanten ist um so mehr anzustreben, je kleiner die Spaltweite ist. Bei tatsächlich scharfkantigem Rand löst sich der Strahl ab und schnürt sich ein. Der Kontraktionsbeiwert, der vom Verhältnis Radius der Dichtspitze zu Spaltweite abhängt, hat in diesem Fall seinen Kleinstwert. Diese Erkenntnisse haben auch für Vollabyrinthe Gültigkeit.
Hartmann [8] gibt ebenfalls eine Abhängigkeit der Lässigkeit von der Geometrie (Abbildung 2.4) an. Die einflußreichste Größe ist dabei die Spaltweite s. Die Spitzenbreite b ist am wirkungsvollsten, wenn sie unendlich klein ist (siehe auch *Winkler*). Sie muß daher bei der Suche nach der optimalen Geometrie nicht berücksichtigt werden. Nach *Hartmann* sind Stärken von $0.2(0.1)mm$ möglich. Weitere Angaben nach *Hartmann* sind nur für Durchblicklabyrinthe gültig.

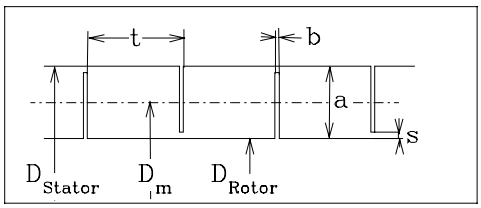


Abbildung 2.4: Abmessungen eines Vollabyrinthes

Trutnovsky [18] hat herausgefunden, daß bereits eine relativ geringe Änderung der Oberfläche vom glatten Spalt hin zu einer Labyrinthspaltdichtung eine starke Abnahme des Leckmassenstromes bewirkt. Dabei spielt die Größenwahl der Teilung t eine wichtige Rolle. Die günstigste Teilung ist jedoch meist kleiner als die im Turbomaschinenbau üblicherweise gewählte.
Keller [10] hat mit Luft den Kontraktionsbeiwert μ eines Leckstrahles im Dichtungsspalt für verschiedene Spaltgrößen untersucht. Dabei wurden Messungen in den einzelnen Kammern für verschiedene Bauformen durchgeführt. Der Kontraktionskoeffizient ist für unterschiedliche Spaltweiten, wie oft fälschlicherweise angenommen, nicht konstant. Der Kontraktionskoeffizient erreicht bei verhältnismäßig großem Spalt Werte von etwa $\mu = 0.6$, bei kleinen Spalten bis $\mu = 0.95$. Mit anderen Worten, die Strahleinschnürung wird umso geringer je kleiner die Spaltweite zwischen Dichtstreifen und Wandung ist. Die Strömung um eine scharfkantigen Spaltkante würde nach theoretischen Berechnungen einen Kontraktionskoeffizienten $\mu = 0.61$ unabhängig von der Spaltweite s ergeben. In Wirklichkeit ist nun diese Kante bei stark vergrößerter Betrachtung jedoch abgerundet. Bei Verkleinerung der Spaltweite auf praktisch vorkommende Werte wird die Abrundung relativ zur Spaltweite immer größer und die Forderung nach einer absolut scharfen Kante ist nicht mehr erfüllt. Infolge der endlichen Breite des Dichtungsstreifens entsteht an der Stelle der Strömung um die Kante allmählich diejenige durch eine kleine Düse. Dabei wird die Einschnürung kleiner und der Kontraktionskoeffizient μ geht über in den größeren Düsenbeiwert.

Martin [11] hat eine Durchflußgleichung auf Basis der Rohrströmung abgeleitet. Dann wurde der Widerstandsbeiwert λ in Abhängigkeit von der Geometrie untersucht (λ ist bei größeren Reynoldszahlen unabhängig von der Reynoldszahl). Zur Bestimmung der Funktion $\lambda = f(s/a)$ mit $t/a = konstant$ als Parameter wurden Durchflußmessungen für verschiedene Spaltdichtungen (auch für Vollabyrinthe) an einem ebenen Prüfstand durchgeführt. Dabei wurde die Bauhöhe a konstant gehalten und die Spaltweite s variiert. Die Meßergebnisse lassen eine Bestimmung der optimalen Bauform zu. *Martin* definiert diese als kürzeste Baulänge bei gegebenen Durchmesser D_{Rotor} der abzudichtenden Welle, gegebener Lässigkeit $\dot{m}$ sowie den gegebenen Zustandsgrößen vor und nach der Dichtstrecke. Die Vollabyrinthdichtung erreicht ihre günstigste Größe, wenn ein Verhältnis von $s/a \approx 0.25$ eingehalten wird. Vollabyrinthe werden von *Martin* als optimale Bauform angegeben. Werden jedoch sehr große Verschiebbarkeiten in axialer Richtung benötigt, so können andere Bauarten (z.B Durchblicklabyrinthe) strömungstechnisch günstiger sein. Bei Verschiebungen ändert sich die Kammergeometrie und somit der Durchflußbeiwert. Die Auswahl der Bauform ist außerdem von konstruktiven, fertigungs- und betriebssicherheitstechnischen Aspekten abhängig.

Kapitel 3

Berechnung des Leckmassenstromes für Vollabyrinthe

3.1 Aufgabenstellung

Die Problemstellung kann folgendermaßen definiert werden [16]. Gesucht ist der Leckmassenstrom $\dot{m}$ durch eine Folge von Drosselstellen der Anzahl z. Diese sollen einen Querschnitt f_{Sp} besitzen, der sich berechnen läßt zu:

$$f_{Sp} = D_m \pi s \quad \text{für} \quad s \ll D_m \qquad . \tag{3.1}$$

Dabei ist s die Spaltweite und D_m der mittlere Durchmesser der Dichtfläche. Dieser errechnet sich zu:

$$D_m = \frac{D_{Stator} + D_{Rotor}}{2} \qquad . \tag{3.2}$$

Die Abmessungen einer Labyrinthdichtung sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Weiters ist der Druck p_k vor der k-ten Drosselstelle und der Druck danach p_{k+1} eingetragen.

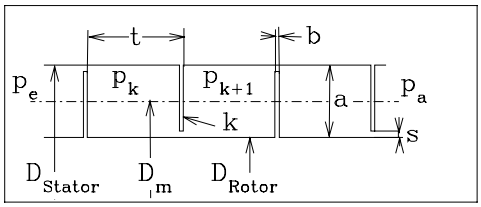


Abbildung 3.1: Abmessungen und Bezeichnungen

Eine Behandlung des Problems kann unter Anwendung der sogenannten *Fannokurve* (Abbildung 3.2) erfolgen. Diese kann als der geometrische Ort aller Zustandspunkte im h-s Diagramm definiert werden, die bei gegebenen Ausgangszustand und Leckmassenstrom in einem Durchtrittsquerschnitt f möglich sind. Auf Grund der Massen- und Energiebilanz kann man die *Fannokurve* angeben zu:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \frac{\sqrt{2(h_e - h)}}{v} = konstant \qquad . \tag{3.3}$$

Dabei schätzt man zunächst einen Wert von $\dot{m}$ und konstruiert für diesen mit dem gegebenen Anfangszustand (Totalzustand) am Eintritt p_e und v_e die Fannokurve. Dabei ist p_e der

Eintrittsdruck und v_e das spezifische Volumen vor dem Labyrinth. Als Querschnitt kommt dabei nicht die geometrische Spaltfläche aus Gl.(3.1), sondern der Strahlquerschnitt f in Frage. Dieser berechnet sich zu:

$$f = \alpha f_{Sp} \quad . \tag{3.4}$$

Dabei ist α die *Durchflußzahl*. Im ersten Spalt expandiert das Medium von p_e isentrop auf den Druck p_1'. In der Wirbelkammer wird die kinetische Energie verwirbelt. Diese Verwirbelung erfolgt entlang einer Isobaren (d.h $p_1' = p_2$), bis der Ausgangszustand der Enthalpie am Eintritt h_e wieder erreicht ist. Auf diese Weise gewinnt man die Zustandsänderungen für jeden Spalt. Hat man nun $\dot{m}$ richtig gewählt, so ergibt sich nach dem letzten Spalt der vorgegebene Ausgangsdruck p_a nach Abbildung 3.2. Tritt jedoch *Schallgeschwindigkeit* im letzten Spalt auf, so erreicht man den mit S gekennzeichneten Zustand, worauf die weitere Expansion bis p_a erfolgt. Stößt man nicht auf den Druck p_a, so ist das Verfahren solange zu wiederholen, bis sich eine der obigen Übereinstimmungen einstellt.

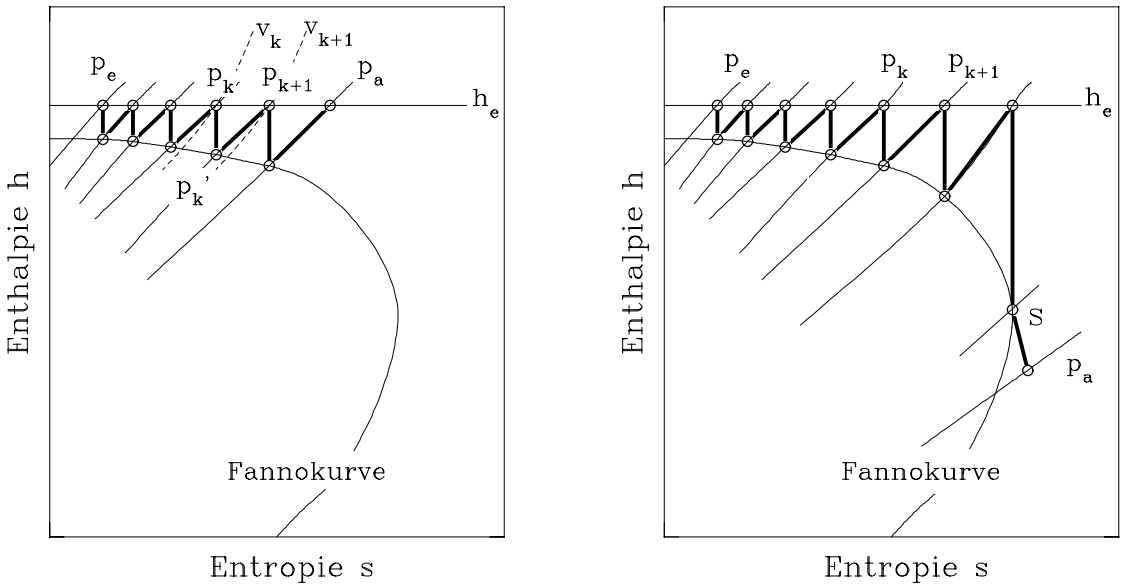


Abbildung 3.2: Fannokurve für unterkritisches und überkritisches Verhältnis

In der Praxis ist ein Vorgehen nach dieser Methode sehr mühsam. Außerdem gibt es Abweichungen der Zustände von dieser theoretischen Betrachtung. Deshalb versucht man, den Spaltmassenstrom $\dot{m}$ mittels einfacheren Rechenverfahren zu bestimmen.

3.2 Rechenverfahren

3.2.1 Theoretische Verfahren

3.2.1.1 Verfahren nach *Stodola*

Zunächst soll der unterkritische Fall betrachtet werden. *Stodola* [16] nähert die Durchflußgeschwindigkeit c in jedem einzelnen Spalt nach der im kompressiblen Fall bei kleinem Δp gültigen Relation an:

$$c = \sqrt{2v\Delta p} \tag{3.5}$$

Dabei ist Δp die Druckdifferenz und v das spezifische Volumen. Für den Spaltmassenstrom erhält man dann mit Gl.(3.5):

$$\dot{m} = f\frac{c}{v} = f\sqrt{\frac{2\Delta p}{v}} \tag{3.6}$$

Nach einer einfachen Umformung der Gl.(3.6) und einer Multiplikation mit p auf beiden Seiten erhält man die Form:

$$p\Delta p = \frac{pv}{2}\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \quad . \tag{3.7}$$

Nimmt man nun an, daß die Eintrittsenthalpie vor jeder Drosselstelle gleich ist, und setzt $p_k v_k = p_e v_e$ so ergibt sich für Gl.(3.7):

$$p\Delta p = \frac{p_e v_e}{2}\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \quad . \tag{3.8}$$

Summiert man über alle z Spalten, so erhält man:

$$\sum p\Delta p = \frac{z p_e v_e}{2}\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \quad . \tag{3.9}$$

Ersetzt man den Summenausdruck aus Gl.(3.9) näherungsweise durch ein Integral ($\sum p \rightarrow \int p$, $\Delta p \rightarrow dp$), so bekommt man:

$$\int_{p_a}^{p_e} p dp = \frac{p_e^2 - p_a^2}{2} = \frac{z p_e v_e}{2}\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \quad . \tag{3.10}$$

Aus dieser Gl.(3.10) läßt sich dann mit Gl.(3.4) der Spaltmassenstrom für unterkritische Verhältnisse nach *Stodola* näherungsweise berechnen zu:

$$\dot{m} = \alpha f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e^2 - p_a^2}{z p_e v_e}} = \alpha\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}} f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.11}$$

Dabei ist das Gesamtdruckverhältnis β definiert als Austritts- zu Eintrittsdruck:

$$\beta = \frac{p_a}{p_e} = \frac{1}{\pi} \quad . \tag{3.12}$$

Stodola berechnet den Leckmassenstrom auch für den Fall, daß im letzten Spalt Schallgeschwindigkeit erreicht wird (dies ist nur im letzten Spalt möglich!). Dabei gilt für die kritische Geschwindigkeit c^*:

$$c^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} p_{z-1} v_{z-1}} \quad . \tag{3.13}$$

Das kritische Verhältnis des spezifischen Volumens lautet:

$$\frac{v_{z-1}}{v^*} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad . \tag{3.14}$$

Für den Spaltmassenstrom aus Gl.(3.6) erhält man mit Gl.(3.13) und Gl.(3.14):

$$\begin{aligned}\dot{m} &= f\frac{c}{v} = f\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}p_{z-1}v_{z-1}}\frac{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}{v_{z-1}} \\ &= f\underbrace{\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1}}}_{K}\sqrt{\frac{p_{z-1}}{v_{z-1}}} = fK\sqrt{\frac{p_{z-1}^2}{p_e v_e}} \quad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dabei ist κ der Isentropenexponent und K eine Abkürzung. Für die ersten $(z-1)$ Spalten muß Gl.(3.11) gelten. Nach Gleichsetzung mit Gl.(3.15) erhält man:

$$K\sqrt{\frac{p_{z-1}^2}{p_e v_e}} = \sqrt{\frac{p_e^2 - p_{z-1}^2}{(z-1)p_e v_e}} \quad . \tag{3.16}$$

Aus dieser Gleichung kann man p_{z-1} berechnen zu:

$$p_{z-1}^2 = \frac{p_e^2}{K^2(z-1)+1} \quad . \tag{3.17}$$

Setzt man nun Gl.(3.17) in Gl.(3.15) ein, so folgt:

$$\dot{m} = fK\sqrt{\frac{p_e^2}{[K^2(z-1)+1]p_e v_e}} = f\sqrt{\frac{1}{z+\frac{1}{K^2}-1}}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.18}$$

Für einen Isentropenexponenten von $\kappa = 1.4$ (z.B. Luft) erhält man im überkritischen Fall den Leckmassenstrom ($K = 0.68$) zu:

$$\dot{m} = \alpha\sqrt{\frac{1}{z+\frac{1}{K^2}-1}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} = \alpha\sqrt{\frac{1}{z+1.13}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.19}$$

Die Konstante 1.13 ist bei großen Drosselstellenzahlen zu vernachlässigen. Hat die Strömung ausgesprochenen Düsencharakter, so wird in manchen Fällen $\alpha \approx 1$ zu setzen sein [18]. Damit Schallgeschwindigkeit im letzten Spalt überhaupt auftreten kann, muß gelten:

$$\frac{p_a}{p_{z-1}} \leq \beta_{krit} \quad . \tag{3.20}$$

Dabei ist β_{krit} das *kritische Druckverhältnis*, bei dem Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Dieses Druckverhältnis kann man schreiben zu:

$$\beta_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad . \tag{3.21}$$

Ist $\kappa = 1.4$, so wird das kritische Druckverhältnis $\beta_{krit} = 0.5283$. Durch Anwendung dieser Gleichung in Gl.(3.17) erhält man:

$$\beta \leq \beta_{krit}\frac{1}{\sqrt{K^2(z-1)+1}} = \frac{0.78}{\sqrt{z+1.13}} \quad . \tag{3.22}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so muß die Gleichung für überkritische Verhältnisse Gl.(3.19) angewendet werden. Bei gegebenem Druckverhältnis β kann umgekehrt die Drosselstellenzahl z_{krit} bestimmt werden, bei der gerade Schallgeschwindigkeit auftritt:

$$z_{krit} = \frac{\left(\frac{\beta_{krit}}{\beta}\right)^2 - 1}{K} + 1 = \frac{0.61}{\beta^2} - 1.13 \qquad . \tag{3.23}$$

Die Stodolagleichungen ergeben in der Regel keine großen Fehler der Leckverluste. Sie sind aber insofern unbefriedigend, da der Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Verhältnis nicht stetig verläuft. Als Größenordnung des Einschnürbeiwertes gibt *Stodola* $\alpha \approx 0.8$ an.

3.2.1.2 Verfahren nach *Egli*

Egli [2] geht bei diesem Rechenverfahren von einer adiabaten Expansion durch eine Düse aus. Die theoretische Ausflußmenge läßt nach der Gleichung von *de Saint Venant* berechnen zu:

$$\dot{m}_{th} = \alpha \psi_{th} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \qquad . \tag{3.24}$$

Dabei wird die Abkürzung ψ_{th} als *Expansionszahl* [18] bezeichnet. Diese läßt sich berechnen zu:

$$\psi_{th} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_a}{p_e} \qquad . \tag{3.25}$$

Diese Expansionszahl ψ_{th} vergleicht *Egli* mit gemessenen Werten ψ einer scharfkantige Mündung (=Blende) ($\kappa = 1.3$). Dabei erkennt er, daß für Druckverhältnisse $\beta > 0.8$ die Werte für Düse und Blende nahezu übereinstimmen.

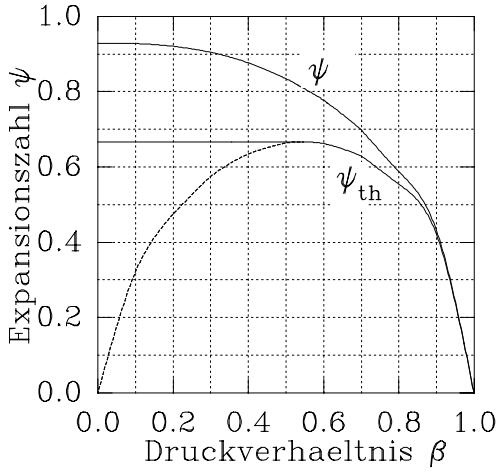


Abbildung 3.3: Expansionszahl einer Düse und einer scharfkantigen Mündung

Die Strömung durch mehrere hintereinandergeschaltete Drosseln stellt eine Wiederholung der Strömung durch eine scharfkantige Mündung dar. Für die Lässigkeit eines vollkommenen Labyrinthes gibt *Egli* eine ähnliche Gleichung wie für die einzelne Drosselstelle an. Diese hat die Form:

$$\dot{m} = \alpha \varphi f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \qquad . \tag{3.26}$$

Egli leitet dann die dimensionslose Funktion φ für mehrere Drosselstellen her. Dabei geht er von der differentiellen Form der Energiegleichung für eine Düse aus:

$$\frac{1}{2}dc^2 = -vdp \qquad . \tag{3.27}$$

Für eine isentrope Expansion mit $pv^\kappa = konstant$ erhält man Gl.(3.27) nach einmaliger Integration zu:

$$\frac{c^2}{2} = p_k v_k \frac{\kappa}{\kappa - 1}\left(1 - \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) \qquad . \tag{3.28}$$

Dabei ist p_k der Druck am Düseneintritt und p_{k+1} der am Düsenaustritt. Setzt man nun den Ausdruck $\Delta p = p_{k+1} - p_k$ in das Druckverhältnis ein, so bekommt man durch Reihenentwicklung:

$$\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_k}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_k} - \frac{\kappa - 1}{2\kappa^2}\left(\frac{\Delta p}{p_k}\right)^2 + \ldots \qquad . \tag{3.29}$$

Mit diesem Ausdruck in Gl.(3.28) eingesetzt erhält man:

$$\frac{c^2}{2} = -p_k v_k \left(\frac{\Delta p}{p_k} - \underbrace{\frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\Delta p}{p_k}\right)^2}_{} + \ldots\right) \qquad . \tag{3.30}$$

Für Druckverhältnisse $p_{k+1}/p_k > 0.8$ und somit $\Delta p/p_k < 0.2$ kann der Term über der geschwungenen Klammer vernachlässigt werden (für einen Isentropenexponenten $\kappa = 1.4$ wird der Term kleiner als 0.0143), sodaß man für Gl.(3.30) erhält:

$$\frac{c^2}{2} = -v\Delta p = -vdp \qquad . \tag{3.31}$$

Die Kontinuitätsgleichung für die Düse kann dann folgende Form angeschrieben werden:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \frac{c}{v_k^{'}} \qquad . \tag{3.32}$$

Dabei ist $v_k^{'}$ das spezifische Volumen nach der isentropen Expansion. Diese erhält man durch die Zustandsgleichung $p_k {v_k}^\kappa = p_k^{'} {v_k^{'}}^\kappa = p_{k+1} {v_k^{'}}^\kappa$ bzw. nach einer Reihenentwicklung und Vernachlässigung des Termes mit dem quadratischen Druckverhältnis (siehe Gl.(3.30)) zu:

$$v_k^{'} = v_k\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_k} + \frac{\kappa + 1}{2\kappa^2}\left(\frac{\Delta p}{p_k}\right)^2 + \ldots\right) = v_k\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_k}\right) \qquad . \tag{3.33}$$

Alle Eingangszustände liegen auf einer Kurve gleicher Enthalpie. Man erhält dafür die Beziehung:

$$p_k v_k = p_{k+1} v_{k+1} = konstant \qquad . \tag{3.34}$$

Setzt man nun Gl.(3.33) und Gl.(3.34) in Gl.(3.32) ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 = -\frac{2\Delta p}{v_k\left(1-\frac{2}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_k}\right)} = -\frac{2p_k\Delta p}{p_k v_k\left(1-\frac{2}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_k}\right)} \quad . \tag{3.35}$$

Die Gl.(3.35) soll nun in anderer Form geschrieben werden:

$$\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \frac{1}{\Delta x} - \left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \frac{2}{\kappa}\frac{1}{p_k}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right) = -\frac{2p_k}{p_k v_k}\left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right) \quad . \tag{3.36}$$

Dabei ist Δx ein Teil der Dichtungsstrecke. Falls nun die Zahl der Drosselstellen genügend groß ist, kann man $\Delta p/\Delta x$ durch dp/dx ersetzen und die Gleichung(3.36) integrieren.

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \int_{x_e}^{x_a} dx - \left(\frac{\dot{m}}{f}\right)^2 \frac{2}{\kappa}\int_{p_e}^{p_a}\frac{dp}{p_k} = -\frac{2}{p_e v_e}\int_{p_e}^{p_a} p_k dp \quad . \tag{3.37}$$

Integriert man nun diese Gleichung und setzt für $(x_a - x_e)/\Delta x = z$ ein, so erhält man für den Leckmassenstrom durch das Labyrinth:

$$\dot{m} = \alpha \underbrace{\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-\frac{2}{\kappa}\ln\beta}}}_{\varphi} f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.38}$$

Egli hat herausgefunden, daß sich mit der Konstanten $2/\kappa = 1$ vor $\ln\beta$ anstatt $2/\kappa$ für eine kleinere Zahl von Dichtstreifen die Gleichung besser an die graphische Lösung der *Fannokurve* anpaßt. Bei großen Drosselstellenzahlen wird der logarithmische Term nahezu bedeutungslos. Würde er ganz vernachlässigt werden, so kommt man auf die Gleichung nach *Stodola* zurück. Die endgültige Gleichung für den Spaltmassenstrom nach *Egli* lautet dann:

$$\dot{m} = \alpha\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-\ln\beta}} f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.39}$$

3.2.1.3 Verfahren nach *Kearton/Keh*

Kearton/Keh [9] gehen von einer Strömung durch eine einzige Drosselstelle aus. Dabei soll der Druck von p auf $p+dp$ entspannen (dp ist negativ). Das mittlere spezifische Volumen der Expansion ist näherungsweise $v + dv/2$. Die Durchflußgeschwindigkeit c ist dann gegeben durch den Ausdruck:

$$c = \sqrt{-2\left(v+\frac{dv}{2}\right)dp} \quad . \tag{3.40}$$

Für eine isentrope Strömung durch die Drosselstelle erhält man für die Durchflußgleichung:

$$\dot{m} = f\frac{c}{v+dv} = f\frac{\sqrt{-2\left(v+\frac{dv}{2}\right)dp}}{v+dv} \quad . \tag{3.41}$$

Als Vereinfachung wird eine isotherme Strömung angenommen. Messungen nach *Winkler* [19] und *Martin* [11] zeigen, daß der Zustandsverlauf einer Entspannung durch Spaltstrecken

durch eine Isenthalpe ($dh = c_p dT = 0$), also durch eine reine Drosselung beschrieben werden kann. Damit gilt für kalorisch ideale Gase ($c_p = konstant$) $dT = 0$, also isothermer Zustandsverlauf. Man erhält dann:

$$(p + dp)(v + dv) = pv = konstant \quad . \tag{3.42}$$

Für die Gl.(3.41) bekommt man mit Gl.(3.42):

$$\frac{\dot{m}}{f} = \sqrt{-2\frac{v + \frac{dv}{2}}{v + dv}\frac{(p + dp)dp}{pv}} = \sqrt{-2\frac{1 + \frac{dv}{2v}}{1 + \frac{dv}{v}}\frac{1 + \frac{dp}{p}}{pv}pdp} \quad . \tag{3.43}$$

Auf Grund von Gl.(3.42) ergibt sich:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dp}{p} \quad . \tag{3.44}$$

Durch Anwendung dieses Verhältnisses in Gl.(3.43) kommt man zur Form:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \sqrt{-2\frac{1 - \frac{dp}{2p}}{1 - \frac{dp}{p}}\frac{1 + \frac{dp}{p}}{pv}pdp} \quad . \tag{3.45}$$

Setzt man anstelle von p den Eintrittsdruck vor einer Drossel p_k und für $p + dp$ den Austrittsdruck p_{k+1} ein, so erhält man einen Ausdruck der Form:

$$-pdp = \frac{p_k^2 - p_{k+1}^2}{2\left(1 + \frac{dp}{2p}\right)} \quad . \tag{3.46}$$

Diesen Ausdruck wendet man in Gl.(3.45) an. Das ergibt eine Gleichung folgender Form:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \sqrt{F_k\frac{p_k^2 - p_{k+1}^2}{RT_e}} \quad . \tag{3.47}$$

Dabei läßt sich die Funktion F_k durch Reihenentwicklung darstellen als:

$$F_k = \frac{1 - \frac{dp}{2p}}{1 - \frac{dp}{p}}\frac{1 + \frac{dp}{p}}{1 + \frac{dp}{2p}} = 1 + \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{dp}{p}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{dp}{p}\right)^3 + \ldots \quad . \tag{3.48}$$

Werte für F_k sind in nachstehender Tabelle 3.1 angegeben.

p_{k+1}/p_k	F_k
1.00	1.00000
0.95	0.95116
0.90	0.90425
0.85	0.85872
0.80	0.81400

Tabelle 3.1: Werte der Funktion F_k

Es sollen nun die zwei Fälle des unterkritischen und überkritischen Verhältnisses unterschieden werden. Im unterkritischen Fall soll die Gl.(3.47) über z Drosselstellen aufsummiert werden. Man erhält dann:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \sqrt{F_m \frac{p_e^2 - p_a^2}{zRT_e}} \quad . \tag{3.49}$$

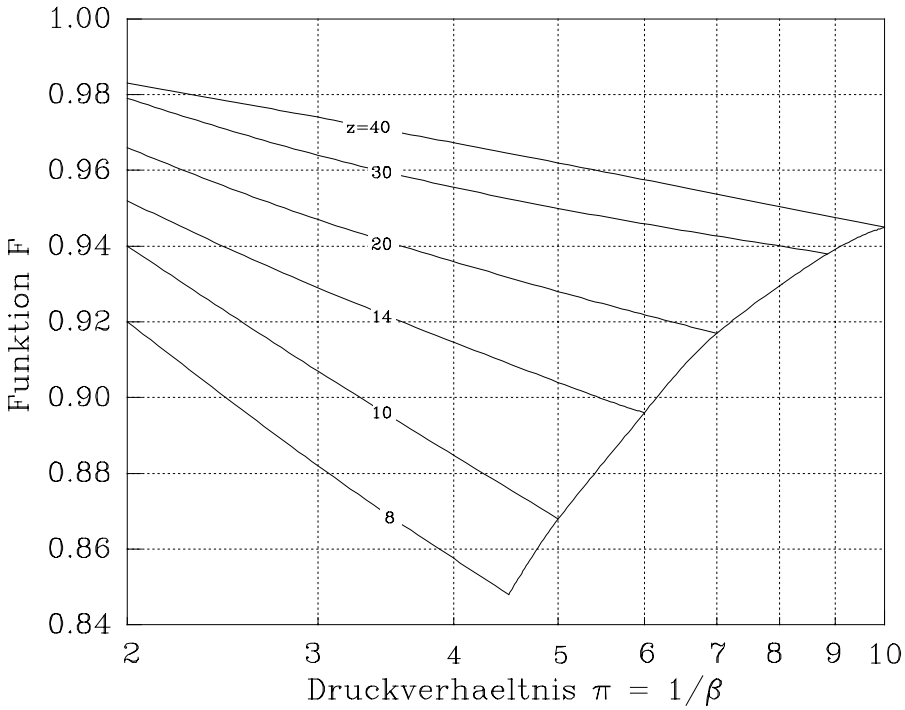


Abbildung 3.4: F als Funktion vom Druckverhältnis und Drosselstellenzahl

Dabei ist F_m eine gemittelte Funktion über alle F_k, da diese unterschiedliche Werte auf Grund unterschiedlicher Druckverhältnisse β_k besitzen. Es läßt sich F_m ermitteln mit:

$$\frac{z}{F_m} = \sum_{k=1}^{z} \frac{1}{F_k} \quad . \tag{3.50}$$

Auf Grund der geringen Abweichung zwischen dem berechneten Wert F_m und einem auf das Gesamtdruckverhältnis basierenden Wert F, kann dieser für die Berechnung des Leckmassenstromes verwendet werden. *Kearton/Keh* haben diese Funktion in einem Diagramm für unterschiedliche Drosselzahlen und Druckverhältnisse dargestellt (Abbildung 3.4). Um die Abweichungen der Praxis von den theoretischen Betrachtungen zu minimieren, wird die Durchflußzahl α_1 eingeführt. Diese ist für den unterkritischen Fall konstant und hat nach Untersuchungen von *Kearton/Keh* den Wert $\alpha_1 = 0.672$. Für die Durchflußgleichung in diesem Fall ergibt sich dann:

$$\dot{m} = \alpha_1 f_{Sp} \sqrt{F \frac{p_e^2 - p_a^2}{zRT_e}} = \alpha_1 \sqrt{F \frac{1-\beta^2}{z}} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_a}{p_e} \quad . \tag{3.51}$$

Kearton/Keh berechnen auch den Fall, daß das Druckverhälnis der letzten Stufe überkritisch ist. Es muß dann das Druckverhältnis der vorletzten Drosselstelle unterkritisch sein. Es ergibt

sich dann für Luft mit $p_z = 0.5283 p_{z-1}$:

$$\frac{\dot{m}}{f} = \frac{0.849 p_{z-1}}{\sqrt{RT_e}} \quad . \tag{3.52}$$

Führt man nun die Durchflußzahl für die letzte Stufe α_2 ein, so erhält man:

$$\frac{\dot{m}}{\alpha_2 f_{Sp}} = \frac{0.849 p_{z-1}}{\sqrt{RT_e}} \quad . \tag{3.53}$$

Quadriert man Gl.(3.53), so erhält man dafür:

$$\left(\frac{\dot{m}}{f_{Sp}}\right)^2 \frac{1}{\alpha_2^2} = \frac{0.721 p_{z-1}^2}{RT_e} \quad . \tag{3.54}$$

Für die ersten $(z-1)$ Drosselstellen muß gelten:

$$\frac{z-1}{\alpha_1^2} \frac{RT_e}{F} \left(\frac{\dot{m}}{f_{Sp}}\right)^2 = p_e^2 - p_{z-1}^2 \quad . \tag{3.55}$$

Setzt man nun für $(\dot{m}/f_{Sp})^2$ aus Gl.(3.53) in Gl.(3.54) ein, so bekommt für das Verhältnis von Eintrittsdruck zu Druck der vorletzten Stufe:

$$\frac{p_e}{p_{z-1}} = \sqrt{1 + \frac{0.721(z-1)}{F} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2} \quad . \tag{3.56}$$

Dieses Druckverhältnis wurde basierend auf experimentell ermittelten Ausfluß-Koeffizienten für verschiedene Anzahlen von Drosselstellen dargestellt (Tabelle 3.2). Für den Leckmassenstrom bei überkritischem Verhältnis erhält man dann:

$$\dot{m} = \alpha_2 \frac{0.849 p_{z-1} f_{Sp}}{\sqrt{RT_e}} = \alpha_2 0.849 \frac{\beta_{z,krit}}{\beta_{krit}} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.57}$$

Dabei ist die Durchflußzahl α_2 aus Abbildung 3.5 zu entnehmen.

z	p_e/p_{z-1}	$\pi_{z,krit}$	$\beta_{z,krit}$
6	2.12	4.01	0.249
8	2.38	4.52	0.221
10	2.63	4.98	0.201
12	2.84	5.40	0.185
14	3.04	5.78	0.173
16	3.24	6.13	0.163
18	3.42	6.47	0.154
20	3.58	6.79	0.147
25	3.96	7.51	0.133
30	4.31	8.18	0.122
35	4.64	8.80	0.114
40	4.94	9.36	0.107

Tabelle 3.2: Kritisches Gesamtdruckverhältnis verschiedener Drosselstellenzahlen

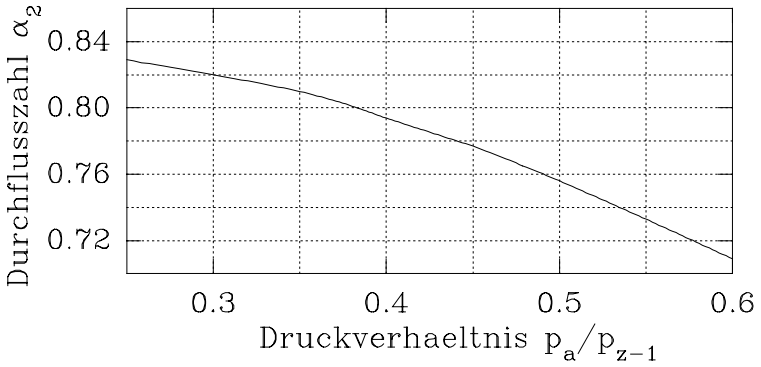


Abbildung 3.5: Durchflußzahl α_2 der letzten Drosselstelle bei überkritischem Verhältnis

Das Vorgehen zur Berechnung des Leckmassenstromes bei gegebenem Druckverhältnis und Drosselstellenzahl soll nun kurz erläutert werden. Zuerst muß anhand von Tabelle 3.2 überprüft werden, ob das Gesamtdruckverhältnis größer als das kritische ist. Ist dies der Fall, so ist Gl.(3.57) anzuwenden. Der Durchflußbeiwert α_2 ist dann aus Abbildung 3.5 zu ermitteln und in die Durchflußgleichung einzusetzen.
Ist die Anordnung unterkritisch, so ist Gl.(3.51) anzuwenden. Die Funktion F ist dabei aus Abbildung 3.4 zu entnehmen.

3.2.2 Halbempirische Verfahren

3.2.2.1 Verfahren nach *Bartosch*

Auch *Bartosch* [18] geht bei seinen Berechnungen vom Durchfluß durch eine einzige Drosselstelle aus. *Bartosch* schreibt dabei für die Durchflußmenge folgende Gleichung an:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \alpha f_{Sp} \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)^{\frac{\nu}{\kappa}} \sqrt{\frac{2p_k}{RT}(p_k - p_{k+1})} = \alpha f_{Sp} \beta_k^{\frac{\nu}{\kappa}} \sqrt{\frac{2p_k}{RT}(p_k - p_{k+1})} \\ &= \alpha \sqrt{2\left(\beta_k^{\frac{\nu}{\kappa}} - \beta_k^{\frac{\nu+\kappa}{\kappa}}\right)} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_k}{v_k}} \quad \text{mit} \quad \beta_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dabei wird ν als *Ausflußexponent* [18] bezeichnet. Dieser ist zwar eine Funktion vom Druckverhältnis β_k und von κ, ist aber wenig veränderlich und wird daher mit $\nu = 0.76$ als konstant angenommen. Der Index k steht für einen Ort vor und $k+1$ für einen Ort nach einer Drosselstelle im Labyrinth. Durch Umformung für ${\beta_k}^{\nu/\kappa}$ kann man schreiben:

$$\beta_k^{\frac{\nu}{\kappa}} = \beta_k^{\frac{\nu}{\kappa}-\frac{1}{2}} \beta_k^{\frac{1}{2}} = \chi_k {\beta_k}^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{3.59}$$

Für die Druckdifferenz vor und nach einer Drosselstelle ergibt sich dann aus Gl.(3.58):

$$p_k - p_{k+1} = \frac{p_k v_k}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\alpha f_{Sp} \chi_k}\right)^2 \frac{1}{p_{k+1}} \quad . \tag{3.60}$$

Die Anschreibung für z Drosselstellen erhält man durch Aufsummierung und Einführung eines gemittelten Faktors χ_m zu:

$$p_e - p_a = \frac{p_e v_e}{2} \left(\frac{\dot{m}}{\alpha f_{Sp} \chi_m}\right)^2 \sum_{k=1}^{z} \frac{1}{p_{k+1}} \quad . \tag{3.61}$$

Dabei läßt sich der mittlere Faktor χ_m anschreiben zu:

$$\chi_m = \beta_m{}^{\frac{\nu}{\kappa}-\frac{1}{2}} \approx \beta^{\frac{1}{z}\left(\frac{\nu}{\kappa}-\frac{1}{2}\right)} \quad . \tag{3.62}$$

Für typische Druckverhältnisse in Labyrinthen mit $z > 4$ kann $\chi_m = 1$ gesetzt werden. Für die Abkürzung χ_m erhält man nach Einsetzen von $\nu = 0.76$ und des Isentropenexponenten $\kappa = 1.4$:

$$\chi_m = \beta^{\frac{1}{4}\left(\frac{0.76}{1.4}-\frac{1}{2}\right)} = \beta^{0.0107} \approx 1 \quad . \tag{3.63}$$

Bartosch führt nun den Druckabfall in der letzten Stufe ein. Dieser ist definiert als:

$$\psi_p = \frac{p_{z-1}}{p_z} - 1 = \frac{1}{\beta_z} - 1 \quad . \tag{3.64}$$

Der Druck p_z entspricht dabei dem Ausgangsdruck p_a. Den Druckabfall stellt er als Funktion des Gesamtdruckverhältnisses β und der Drosselstellenanzahl z in Abbildung 3.6 dar. Für die Durchflußgleichung des Labyrinthes erhält *Bartosch* dann die Form:

$$\dot{m} = \alpha\chi_m\sqrt{2\beta^2\psi_p}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \approx \alpha\sqrt{2\beta^2\psi_p}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.65}$$

In Abbildung 3.7 ist das Druckverhältnis β_z in der letzten Stufe in Abhängigkeit vom Gesamtdruckverhältnis β und der Drosselzahl z dargestellt. Dabei kann man erkennen, bei welchem Gesamtdruckverhältnis bei gegebener Drosselzahl Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Für die Durchflußzahl α verwendet *Bartosch* Werte nach *Trojanovskij* [18].

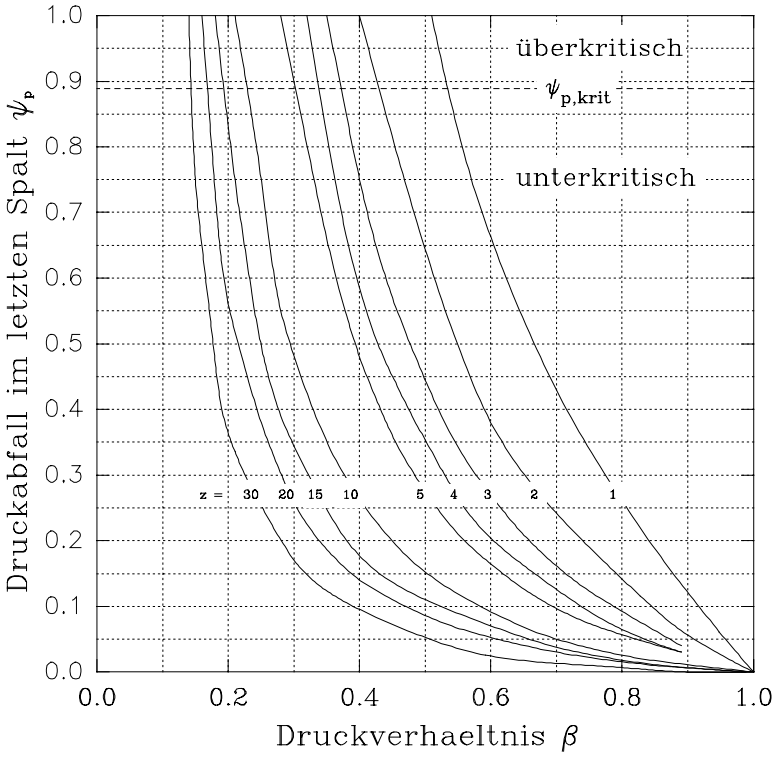


Abbildung 3.6: Druckabfall im letzten Spalt ψ_p

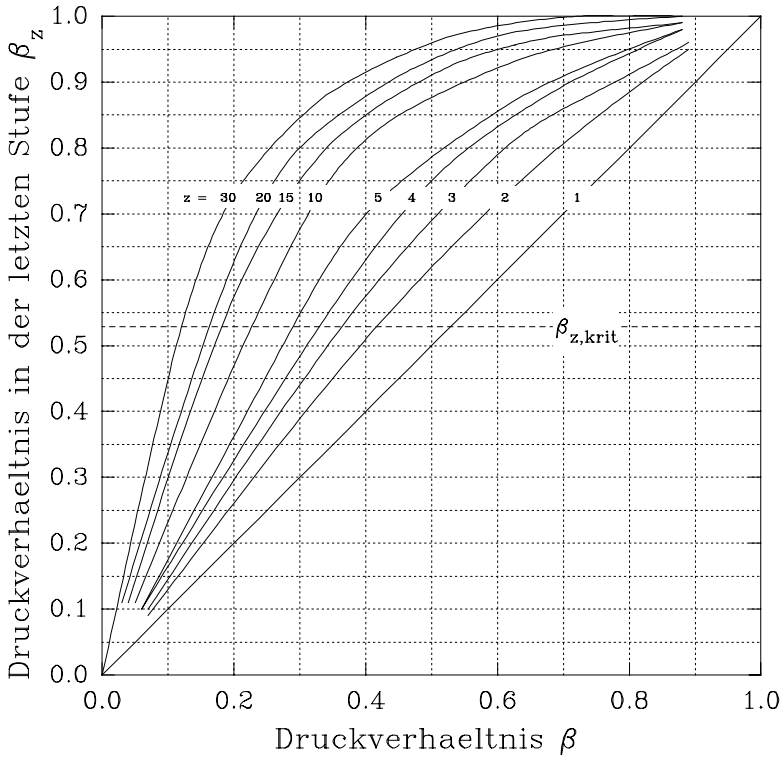


Abbildung 3.7: Druckverhältnis im letzten Spalt β_z

3.2.2.2 Verfahren nach *Traupel*

Die experimentellen Beobachtungen und die Methode der Fannokurve zeigen beim Vergleich Abweichungen [16]. Diese beruhen darauf, daß der Durchflußbeiwert α nicht eine von der Geometrie der Anordnung gegebene Konstante ist, sondern vom Verhältnis des Druckes vor und nach dem Spalt abhängig ist. Insbesondere wird α größer, wenn das Druckverhältnis über das Schalldruckverhältnis gesteigert wird. Theoretisch käme es bei Erreichen der Schallgschwindigkeit bei gegebenem Druck vor dem Spalt zu keiner Durchflußvergrößerung. Auf Grund der Erhöhung des Durchflußbeiwertes α bei weiterer Absenkung des Gegendruckes nimmt der Durchfluß jedoch zu. Um nun die Veränderlichkeit des Durchflußbeiwertes zu berücksichtigen, verallgemeinert man die Methode der Fannokurve. Dazu muß für jedes α eine Fannokurve gezeichnet werden. Man verpackt nun diesen Beiwert in eine vom Druckverhältnis und Spaltanzahl z abhängigen Durchflußfunktion Φ, und erhält so eine allgemeine Form des Spaltmassenstromes zu:

$$\dot{m} = \Phi_{Traupel} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.66}$$

Man muß die Funktion Φ finden, welche von zwei Variablen abhängig ist. Der Nachteil liegt darin, daß sie nur für eine bestimmte Geometrie Gültigkeit besitzt. Für einige wenige Fälle besteht die Möglichkeit der theoretischen Berechnung, im allgemeinen sind aber Versuche notwendig, um diese Funktion darzustellen. Im nachfolgenden Schaubild Abbildung 3.8 soll die Funktion $\Phi_{Traupel}$ für eine der Voll-Labyrinthdichtung ähnliche Dichtung (Kamm-Nut-Dichtung) dargestellt werden. Die Durchflußfunktion wurde für $\kappa = 1.3$ berechnet. Für $\kappa = 1.4$ müßte der Durchfluß durch eine einzige Drosselstelle um 3% erhöht werden. Der Fehler bei der Berechnung des Spaltmassenstromes wird aber mit steigender Spaltanzahl z

kleiner und verschwindet nahezu bei $z = 6$ [16]. Steigt z über den im Diagramm höchsten Wert $z = 40$ an, so verändert sich Φ proportional zu $1/\sqrt{z}$. Dies geht auch aus der Gleichung von *Stodola* für unterkritische Verhältnisse hervor.

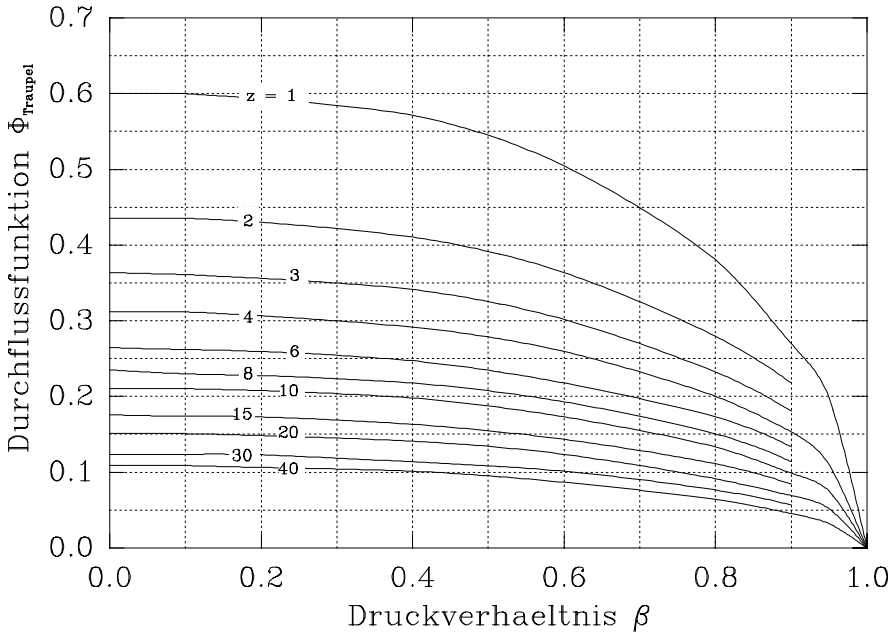


Abbildung 3.8: Durchflußfunktion $\Phi_{Traupel}$

3.2.2.3 Verfahren nach *Snow/Zabriskie/Sternlicht/Manning*

Bei diesem Verfahren wird ebenfalls von einer Strömung durch eine Drosselöffnung ausgegangen [18]. Dabei wird eine gleiche Durchflußzahl, gleiche Eintrittsenthalpien für alle Drosselstellen, konstante Querschnitte und $pv = konstant$ angenommen. Die Durchflußgleichung für eine Drosselöffnung wird in nachfolgender Form angeschrieben:

$$\dot{m} = \alpha f_{Sp}\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}\sqrt{\frac{p_k}{v_k}} = \alpha f_{Sp}\sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}\beta^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1-\beta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}\sqrt{\frac{p_k}{v_k}} \quad . \tag{3.67}$$

Nach dem Kontinuitätsgesetz muß $\dot{m}_k = \dot{m}_{k+1}$ gelten. Man kann daher schreiben:

$$\beta_k^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1-\beta_k^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \beta_{k+1}^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1-\beta_{k+1}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad . \tag{3.68}$$

Weiters soll für die Zustände gelten:

$$p_k v_k = p_{k+1} v_{k+1} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{v_k}{v_{k+1}} = \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad . \tag{3.69}$$

Die Gl.(3.68) erhält dann mit Gl.(3.69) die Form:

$$\beta_k^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\sqrt{1-\beta_k^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} = \beta_{k+1}^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{1-\beta_{k+1}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad \text{mit} \quad \beta_k = \frac{p_{k+1}}{p_k} \quad . \tag{3.70}$$

Mit dieser Gleichung wird ein Diagramm entwickelt, mit dem man vom Druckverhältnis einer Drosselstelle auf das Druckverhältnis der nächsten Drosselstelle gelangt. Beruhend

auf diesem Verfahren wird ein Diagramm für eine dimensionslose Durchflußmenge Φ_{Snow} (Abbildung 3.9) für $\kappa = 1.4$ dargestellt.

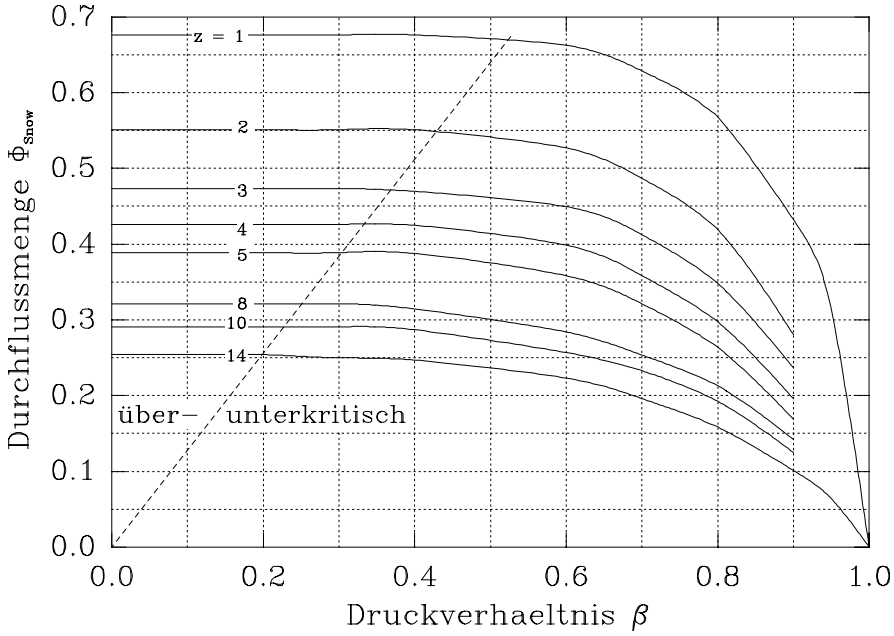


Abbildung 3.9: Durchflußfunktion Φ_{Snow}

Die Gleichung zur Berechnung des Leckmassenstromes lautet für dieses Verfahren:

$$\dot{m} = \alpha \Phi_{Snow} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.71}$$

Bei überkritischen Verhältnissen werden für die Durchflußzahl α Werte nach *Robinson* [18] verwendet.

3.2.3 Empirische Verfahren

3.2.3.1 Verfahren nach *Martin*

Martin [11] geht bei der Berechnung des Leckmassenstromes von einer Spaltstrecke mit einem Widerstandsbeiwert λ aus. Dieser soll über die ganze Strecke konstant sein, womit der Einfluß der Einlaufstrecke vernachlässigt wird. Weiters soll mit gemittelten Größen in den jeweiligen Querschnitten gerechnet werden, die in Hauptströmungsrichtung veränderlich sind. Ausgehend von der Differentialgleichung in x-Richtung für die stationäre turbulente Strömung in waagrechten Rohren bzw. Spaltstrecken mit konstantem Querschnitt soll die Durchflußgleichung hergeleitet werden:

$$cdc = -\frac{1}{\rho} dp - \lambda \frac{c^2}{2} \frac{dl}{d_h} \quad . \tag{3.72}$$

Dabei ist c die mittlere Durchflußgeschwindigkeit, l die Dichtstrecke, λ der Widerstandbeiwert und d_h der hydraulische Durchmesser. Dieser läßt sich für das Labyrinth schreiben zu:

$$d_h = \frac{4A}{U} = \frac{4\pi D_m s}{2 D_m \pi} = 2s \quad . \tag{3.73}$$

Dabei ist A die Querschnittsfläche und U der Umfang. Für eine konstante Massenstromdichte muß gelten:

$$\frac{\dot{m}}{f_{Sp}} = \rho c = c_e \rho_e = konstant \quad . \tag{3.74}$$

Nach Differentiation dieser Gleichung erhält man dann:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{d\rho}{\rho} = konstant \quad . \tag{3.75}$$

Durch Multiplikation der Gl.(3.72) mit $1/c^2$ und Einsetzen der Gl.(3.75) erhält man die Form:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{c^2\rho}dp - \lambda\frac{1}{2}\frac{dl}{d_h} \quad . \tag{3.76}$$

Quadriert man nun Gl.(3.74), so folgt:

$$\rho c^2 = \frac{c_e^2 \rho_e^2}{\rho} \quad . \tag{3.77}$$

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase folgt bei isothermer Strömung (Versuche nach *Winkler* [19] und *Martin* [11] des Zustandsverlaufes einer Entspannung durch Spaltstrecken zeigten, daß dieser mit genügender Genauigkeit als reine Drosselung beschrieben werden kann):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_e}{\rho_e} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} \quad . \tag{3.78}$$

Setzt man nun Gl.(3.78) und Gl.(3.77) in Gl.(3.76) ein, so ergibt sich:

$$-\frac{dp}{p} = -\frac{dp}{c_e^2\rho_e^2}\frac{\rho_e p}{p_e} - \lambda\frac{1}{2}\frac{dl}{d_h} \quad . \tag{3.79}$$

Integriert man nun über die Dichtstrecke l und über p_e bis p_a, so erhält man mit Gl.():

$$-\ln p_a + \ln p_e = \ln\frac{p_e}{p_a} = -\frac{1}{c_e^2\rho_e p_e}\frac{1}{2}(p_a^2 - p_e^2) - \lambda\frac{1}{2}\frac{l}{d_h} \quad . \tag{3.80}$$

Mit Gl.(3.74) erhält man für obige Gleichung:

$$\ln\frac{p_e}{p_a} = -\frac{{f_{Sp}}^2}{2\dot{m}^2 p_e v_e}(p_e^2 - p_a^2) - \lambda\frac{1}{2}\frac{l}{d_h} \quad . \tag{3.81}$$

Durch Auflösung nach $\dot{m}$ erhält man dann für die Durchflußgleichung.

$$\dot{m} = \frac{f_{Sp}}{\sqrt{\frac{\lambda l}{d_h} + 2\ln\frac{p_e}{p_a}}}\sqrt{\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_e v_e}} \quad . \tag{3.82}$$

Setzt man nun noch für den hydraulischen Durchmesser $d_h = 2s$ und für die Dichtungslänge $l = tz$ (t =Teilung) ein, so ergibt sich für den Leckmassenstrom:

$$\dot{m} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda tz}{2s} + 2\ln\frac{p_e}{p_a}}} f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e^2 - p_a^2}{p_e v_e}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda t}{2s} - \frac{2}{z}\ln\beta}}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}} f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_a}{p_e} \tag{3.83}$$

In dieser Gleichung ist somit nur der Widerstandsbeiwert λ unbekannt. Die Gleichung ist gültig für unterkritische Verhältnisse (Schallgeschwindigkeit wird nicht erreicht). *Martin* hat nun λ in Abhängigkeit der Geometrieparametern a, s und t untersucht. Um dimensionslose Verhältnisse zu verwenden und geometrisch ähnliche Dichtungen vergleichen zu können, hat er die relative Spaltweite s/a und die relative Teilung t/a eingeführt. Da aber die relative Teilung nur geringen Einfluß hat, ist es empfehlenswert, den Widerstansbeiwert λ in Abhängigkeit der relative Spaltweite darzustellen. Zur Bestimmung der quantitativen Funktion $\lambda = f_{(s/a)}$ mit $t/a = konstant$ wurden die Widerstandsbeiwerte λ über Durchflußmessungen für verschiedene Dichtungsbauarten ermittelt. Danach wurde für einen Bereich von $0.07 < s/a < 0.17$ die Meßwerte von λ durch eine Funktion in Abhängigkeit der Geometrieparameter angenähert (Abbildung 3.10). Die Gleichung für λ in diesem Bereich hat dann die Form:

$$\lambda = 2.364 - \sqrt{7.31 - 41.8 s/a} \tag{3.84}$$

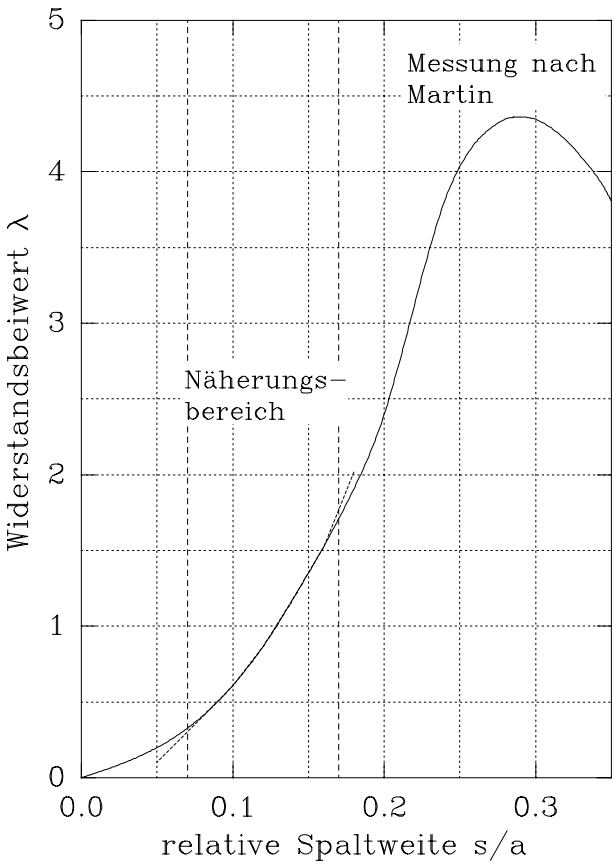


Abbildung 3.10: Widerstandsbeiwert λ als Funktion der relativen Spaltweite

Für ein Vollabyrinth gibt *Martin* nach dem Einsetzen von Gl.(3.84) in Gl.(3.83) und Vernachlässigung des logarithmischen Gliedes (gültig für große Druckverhältnisse und Drosselstellenzahlen) folgende empirische Durchflußgleichung an:

$$\dot{m} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1.182 - \sqrt{1.83 - 10.45 s/a}}} \sqrt{\frac{s/a}{t/a}}}_{\Phi_{Martin}} \sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_a}{p_e} \quad . \tag{3.85}$$

Wie man leicht aus Abbildung 3.10 erkennen kann, kommt die Dichtung dann zur vollen Wirkung, wenn ein Verhältnis von Spaltweite zu Bauhöhe von $s/a \approx 0.25$ eingehalten wird.

3.2.3.2 Berechnung mit dem Durchflußbeiwert C_D

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung der Labyrinthströmung besteht darin, diese mit einer isentropen Düsenströmung bei gleichem Druckverhältnis zu vergleichen [1][20]. Dazu wird der dimensionslose Durchflußbeiwert C_D bestimmt. Dieser Beiwert ist definiert als:

$$C_D = \frac{\dot{m}_{gemessen}}{\dot{m}_{ideal}} \quad . \tag{3.86}$$

Dabei sind $\dot{m}_{gemessen}$ der gemessene Spaltstrom am Prüfstand und $\dot{m}_{ideal}$ der Massenstrom durch eine ideale Düse. Der ideale Massenstrom berechnet sich zu:

$$\dot{m}_{ideal} = \frac{\dot{Q}_{ideal} p_e f_{Sp}}{\sqrt{T_e}} \quad . \tag{3.87}$$

Dabei ist T_e die gegebene Eintrittstemperatur. Die Größe $\dot{Q}_{ideal}$ wird als reduzierter Volumenstrom bezeichnet. Für unterkritische Verhältnisse erhält man $\dot{Q}_{ideal}$ zu:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ideal} &= \left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \sqrt{\frac{2\kappa}{R(\kappa-1)}\left[1-\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{R(\kappa-1)}\left[\left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_a}{p_e}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]} \\ &= \sqrt{\frac{2\kappa}{R(\kappa-1)}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{p_a}{p_e} \quad . \end{aligned} \tag{3.88}$$

Dabei ist die $\dot{Q}_{ideal}$ streng genommen kein Volumenstrom (Einheit), da sie aber nur von der Gaskonstante R, dem Isentropenexponenten κ und dem Druckverhältnis β abhängig ist, bietet sie sich als Rechengröße an. Als Abkürzung wird auch die *Expansionszahl* ψ_{th} [18] verwendet. Diese ist definiert als:

$$\psi_{th} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} = \sqrt{R}\dot{Q}_{ideal} \quad . \tag{3.89}$$

Beim Erreichen des kritischen Druckverhältnisses β_{krit} wird am Austritt der Düse Schallgeschwindigkeit erreicht. Für überkritische Druckverhältnisse muß das kritische Verhältnis β_{krit} der Düse in Gl.(3.88) eingesetzt werden. Dieses ergibt für einen Isentropenexponenten von $\kappa = 1.4$:

$$\beta_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.5283 \quad . \tag{3.90}$$

Der Durchflußbeiwert muß nun versuchsmäßig ermittelt werden. Danach kann man den Spaltmassenstrom bei bekanntem C_D-Wert berechnen zu:

$$\dot{m} = \frac{C_D \dot{Q}_{ideal} p_e f_{Sp}}{\sqrt{T_e}} = C_D \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} = C_D \psi_{th} f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.91}$$

Der Verlauf der Expansionszahl ψ_{th} ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

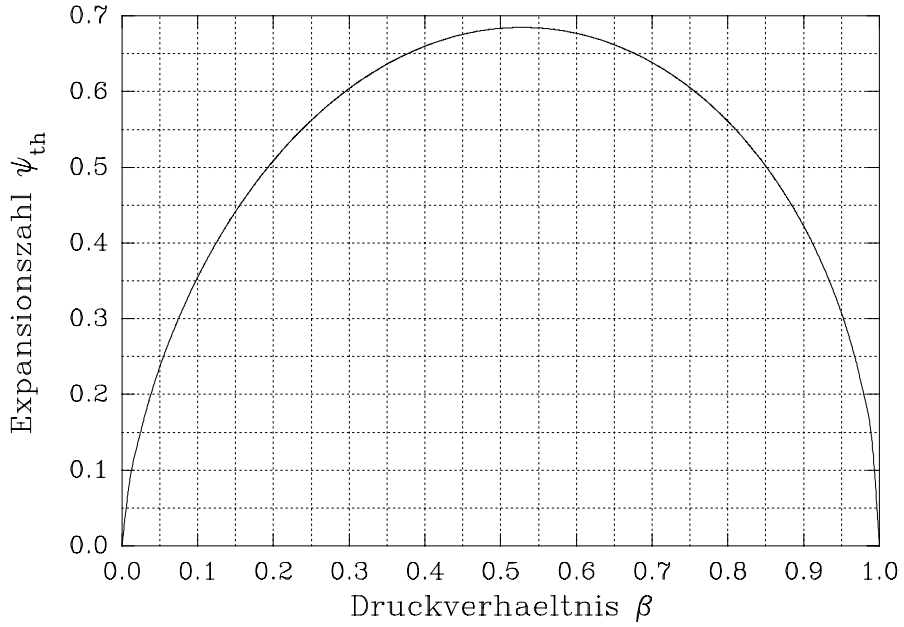


Abbildung 3.11: Expansionszahl ψ_{th} als Funktion des Druckverhältnisses

3.3 Gegenüberstellung

Die vorher beschriebenen Rechenverfahren sind in der Tabelle 3.3 gegenübergestellt. Die Formeln haben Gültigkeit für einen Isentropenexponenten von $\kappa = 1.4$ (z.B Luft). Sollten Leckmassenströme für andere Medien berechnet werden, so ist beim jeweiligen Verfahren nachzuschlagen. Die Bemerkungen beinhalten Einschränkungen für die Gültigkeit der Gleichungen, bzw. die Nummern der Abbildungen und Tabellen zur Bestimmung zugehöriger Funktionen.

	unterkritisch	überkritisch	Bemerkungen
Stodola	$\alpha\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\alpha\sqrt{\frac{1}{z+1.13}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\alpha \approx 0.8$
Kearton	$\alpha_1\sqrt{F\frac{1-\beta^2}{z}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\alpha_2 0.849\frac{\beta_{z,krit}}{\beta_{krit}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\alpha_1 = 0.672$, Tab.3.2, Abb.3.4 u. 3.5
Egli	$\alpha\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-ln\beta}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	nicht möglich	
Traupel	$\Phi_T f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\Phi_T f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	Φ_T aus Abb.3.8
Snow	$\alpha\Phi_S f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$\alpha\Phi_S f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	Φ_S aus Abb.3.9
Bartosch	$\alpha\chi_m\sqrt{2\beta^2\psi_p}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	nicht bekannt	$\chi_m \approx 1$, ψ_p aus Abb.3.6
C_D	$C_D\psi_{th}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	$C_D\psi_{th}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	C_D durch Versuche
Martin	$\Phi_M\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}f_{Sp}\sqrt{\frac{p_e}{v_e}}$	nicht möglich	Φ_M aus Gl.(3.85), $0.07 < s/a < 0.17$

Tabelle 3.3: Gegenüberstellung der Durchflußgleichungen

3.4 Beispiel

Anhand eines praktischen Beispiels sollen die einzelnen Durchflußgleichungen dargestellt werden. Die Angaben der Geometrie sollen dem untersuchten Vollabyrinth am Institut entsprechen. Diese Dichtung hat bei einer Drosselstellenzahl $z = 11$ eine Spaltweite $s = 0.5mm$ und die Bauhöhe $a = 6.0mm$. Die Teilung ist mit $t = 3.7mm$ und die Dichtstreifenbreite mit $b = 0.3mm$ vorgegeben.

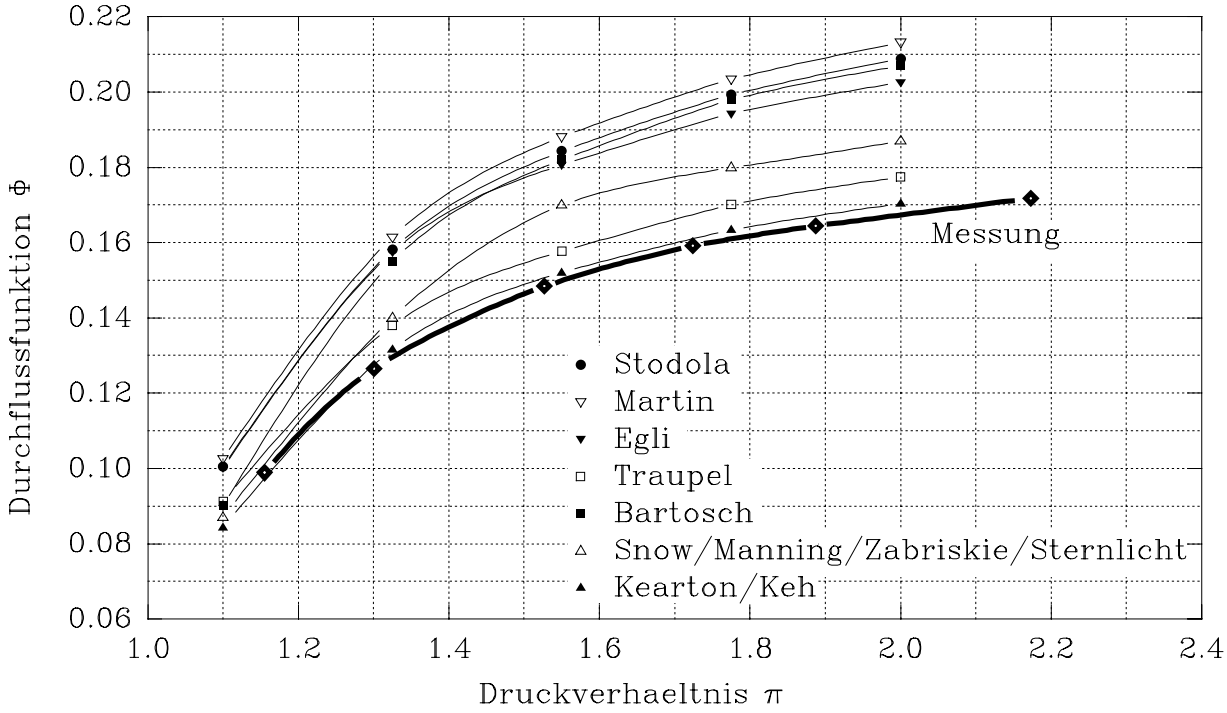


Abbildung 3.12: Vergleich der Durchflußfunktionen

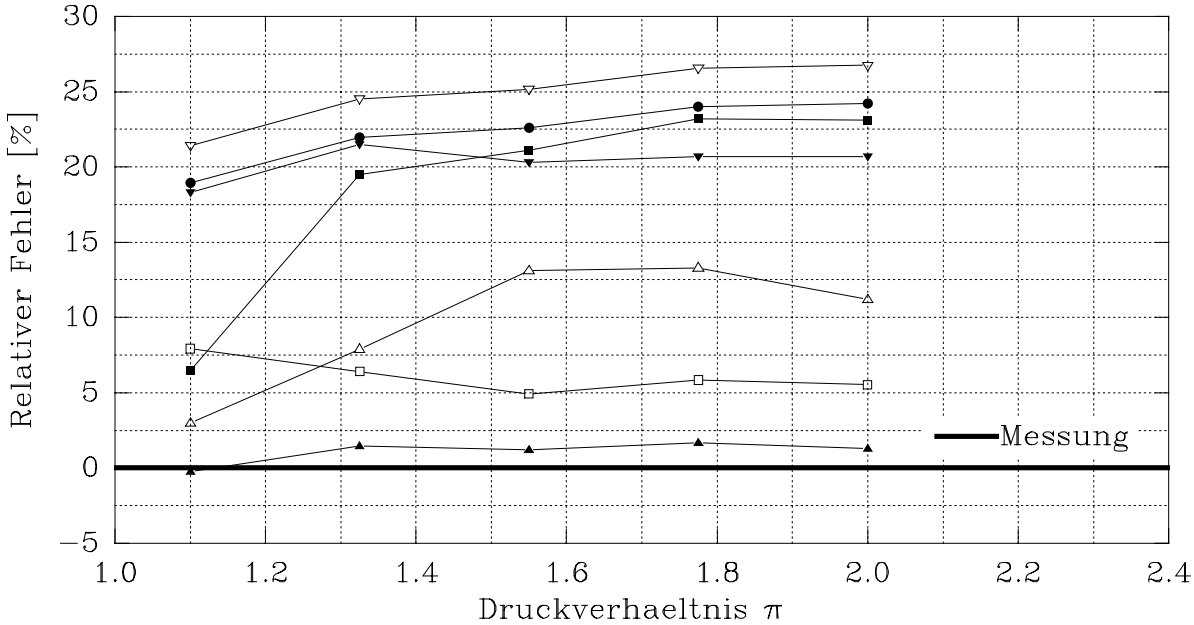


Abbildung 3.13: Relativer Fehler der Durchflußfunktionen

Der Vergleich soll für Druckverhältnisse von $\pi = 1.1 - 2.0$ erfolgen. Die jeweils verwendeten Durchflußzahlen α sind in Tabelle 3.4 dargestellt.

Stodola [16]	Egli [2]	Bartosch [18]	Snow	Kearton [9]
0.8	0.8	0.8	0.7	0.672

Tabelle 3.4: Verwendete Durchflußzahlen

In der Abbildung 3.12 ist die Durchflußfunktion Φ über dem Druckverhälnis für die verschiedenen Verfahren aufgetragen. Dabei wurde von der allgemeinen Form der Durchflußgleichung, wie sie *Traupel* angibt, ausgegangen:

$$\dot{m} = \Phi f_{Sp} \sqrt{\frac{p_e}{v_e}} \quad . \tag{3.92}$$

Wie man aus Abbildung 3.12 erkennen kann, paßt sich das Verfahren nach *Kearton/Keh* sehr gut an die Kurve der gemessenen Durchflußfunktion an. Das bedeutet auch, daß der Durchflußbeiwert $\alpha = 0.672$ für Vollabyrinthe gute Näherungen liefert und andererseits der von *Stodola* angegebene Wert von $\alpha = 0.8$ nicht entspricht.
Das Verfahren nach *Martin* zeigt sehr große Abweichungen von der Messung. Der Grund dafür könnte in der ebenen Versuchseinrichtung von *Martin* liegen, mit der die Durchflußfunktion ermittelt wurde. Außerdem wurde von ihm ein Labyrinth mit der Bauhöhe $a = 4.8mm$ bei Variation der Spaltweite untersucht. Weiters wurde der logarithmische Term vernachlässigt.
Zur Veranschaulichung der Abweichungen der Berechnungen von der Messung werden in Abbildung 3.13 die relativen Fehler der einzelnen Verfahren in Bezug auf die Messung aufgetragen.

3.5 Umrechnungen

In nachstehender Tabelle 3.5 sind die Verhältnisse von den Leckmassenströmen in den Spalten ("nach") zu den Leckmassenströmen in den Zeilen ("von") dargestellt. Hat man die Durchflußmenge mit einer der oben angeführten Verfahren bestimmt, so kann eine Umrechnung auf ein anderes Verfahren und Vergleiche der unterschiedlichen Verfahren durchgeführt werden. Es gibt zwei Möglichkeiten diese Umrechnungstabelle zu verwenden:

1. Man hat den Leckmassenstrom und die notwendigen Parameter für die Bestimmung eines bestimmten Durchflußbeiwertes A experimentell ermittelt. Soll der Durchflußbeiwert B eines anderen Verfahrens ermittelt werden, so ist das Verhältnis $\dot{m}_B/\dot{m}_A$ an der jeweiligen Matrixstelle 1 zu setzen. Durch Einsetzen der Faktoren aus den zugehörigen Diagrammen und Tabellen kann so der gewünschte Durchflußbeiwert berechnet werden. Damit können die meist vorhandenen Abweichungen der theoretischen Durchflußbeiwerte verschiedener Verfahren mit der Messung durchgeführt werden.

2. Man hat den Leckmassenstrom und die dafür notwendigen Parameter mit einem bestimmten Verfahren A berechnet. Wäre der Leckmassenstrom mit einem Verfahren B berechnet worden, so wäre dieser mit dem Term in der zugehörigen Matrixstelle zu multiplizieren. Auf diese Weise können Unterschiede der Rechenverfahren dargestellt werden.

von $\dot{m}_A \downarrow$ nach $\dot{m}_B \rightarrow$	Stodola	Kearton	Egli	Traupel
Stodola	1	$\frac{\alpha_1\sqrt{F}}{\alpha}$	$\sqrt{\frac{z}{z-ln\beta}}$	$\frac{\Phi_T}{\alpha}\sqrt{\frac{z}{1-\beta^2}}$
Kearton	$\frac{\alpha}{\alpha_1\sqrt{F}}$	1	$\frac{\alpha}{\alpha_1}\sqrt{\frac{z}{F(z-ln\beta)}}$	$\frac{\Phi_T}{\alpha_1}\sqrt{\frac{z}{F(1-\beta^2)}}$
Egli	$\sqrt{\frac{z-ln\beta}{z}}$	$\frac{\alpha_1}{\alpha}\sqrt{F\frac{z-ln\beta}{z}}$	1	$\frac{\Phi_T}{\alpha}\sqrt{\frac{z-ln\beta}{1-\beta^2}}$
Traupel	$\frac{\alpha}{\Phi_T}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{\alpha_1}{\Phi_T}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{\alpha}{\Phi_T}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-ln\beta}}$	1
Bartosch	$\frac{1}{\chi_m}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{2\beta^2\psi_p z}}$	$\frac{\alpha_1}{\alpha\chi_m}\sqrt{F\frac{1-\beta^2}{2\beta^2\psi_p z}}$	$\frac{1}{\chi_m}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{2\beta^2\psi_p(z-ln\beta)}}$	$\frac{\Phi_T}{\alpha\chi_m}\frac{1}{\sqrt{2\beta^2\psi_p}}$
Snow	$\frac{1}{\Phi_S}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{\alpha_1}{\alpha\Phi_S}\sqrt{F\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{1}{\Phi_S}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-ln\beta}}$	$\frac{\Phi_T}{\alpha\Phi_S}$
C_D	$\frac{\alpha}{C_D\psi_{th}}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{\alpha_1}{C_D\psi_{th}}\sqrt{F\frac{1-\beta^2}{z}}$	$\frac{\alpha}{C_D\psi_{th}}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z-ln\beta}}$	$\frac{\Phi_T}{C_D\psi_{th}}$
Martin	$\frac{\alpha}{\Phi_M}$	$\frac{\alpha_1}{\Phi_M}\sqrt{F}$	$\frac{\alpha}{\Phi_M}\sqrt{\frac{z}{1-ln\beta}}$	$\frac{\alpha}{\Phi_M}\sqrt{\frac{z}{1-\beta^2}}$

von $\dot{m}_A \downarrow$ nach $\dot{m}_B \rightarrow$	Bartosch	Snow	C_D	Martin
Stodola	$\chi_m\sqrt{\frac{2\beta^2\psi_p z}{1-\beta^2}}$	$\Phi_S\sqrt{\frac{z}{1-\beta^2}}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\alpha}\sqrt{\frac{z}{z-ln\beta}}$	$\frac{\Phi_S}{\alpha}$
Kearton	$\frac{\alpha\psi_p}{\alpha_1}\sqrt{\frac{2\beta^2\psi_p z}{F(1-\beta^2)}}$	$\frac{\alpha\Phi_S}{\alpha_1}\sqrt{\frac{z}{F(1-\beta^2)}}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\alpha_1}\sqrt{\frac{z}{F(1-\beta^2)}}$	$\frac{\Phi_M}{\alpha_1\sqrt{F}}$
Egli	$\chi_m\sqrt{\frac{2\beta^2\psi_p(z-ln\beta)}{1-\beta^2}}$	$\Phi_S\sqrt{\frac{z-ln\beta}{1-\beta^2}}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\alpha}\sqrt{\frac{z-ln\beta}{1-\beta^2}}$	$\frac{\Phi_M}{\alpha}\sqrt{\frac{z-ln\beta}{z}}$
Traupel	$\frac{\alpha\chi_m}{\Phi_T}\sqrt{2\beta^2\psi_p}$	$\frac{\alpha\Phi_S}{\Phi_T}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\Phi_T}$	$\frac{\Phi_M}{\Phi_T}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$
Bartosch	1	$\frac{\Phi_S}{\chi_m}\frac{1}{\sqrt{2}\beta^2\psi_p}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\alpha\chi_m}\frac{1}{\sqrt{2\beta^2\psi_p}}$	$\frac{\Phi_M}{\alpha\chi_m}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{2\beta^2\psi_p z}}$
Snow	$\frac{\chi_m}{\Phi_S}\sqrt{2\beta^2\psi_p}$	1	$\frac{C_D\psi_{th}}{\alpha\Phi_S}$	$\frac{\Phi_M}{\alpha\Phi_S}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$
C_D	$\frac{\alpha\chi_m}{C_D\psi_{th}}\sqrt{2\beta^2\psi_p}$	$\frac{\alpha\Phi_S}{C_D\psi_{th}}$	1	$\frac{\Phi_M}{C_D\psi_{th}}\sqrt{\frac{1-\beta^2}{z}}$
Martin	$\frac{\alpha\chi_m}{\Phi_M}\sqrt{\frac{2\beta^2\psi_p z}{1-\beta^2}}$	$\frac{\Phi_T}{\Phi_M}\sqrt{\frac{z}{1-\beta^2}}$	$\frac{C_D\psi_{th}}{\Phi_M}\sqrt{\frac{z}{1-\beta^2}}$	1

Tabelle 3.5: Umrechnung der Durchflußgleichungen

Kapitel 4

Dimensionsanalyse

4.1 Fluiddynamische Ähnlichkeit

Jede Strömung ist durch dimensionslose Kennzahlen charakterisiert [5]. Ganz allgemein gehören zu jedem technischen oder physikalischen Vorgang entsprechende Kennzahlen. Die Dimensionsanalyse bietet die Möglichkeit, diese Kennzahlen zu ermitteln. Liegt für das betrachtete Problem bereits eine mathematische Formulierung etwa in Form einer Differentialgleichung oder algebraischen Gleichung vor, so ergeben sich die Kennzahlen, wenn man in diese Gleichungen dimensionslose Größen einführt. Im Falle der Strömung sind Differentialgleichungen (*Navier-Stokes-Gleichungen*) vorhanden. Hier soll nur die für die x-Richtung gültige Gleichung ohne der Massenkraft behandelt werden:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{Impuls in x-Richtung} \tag{4.1}$$

Nun müssen dimensionslose Größen eingeführt werden. Diese sollen die gleiche Variablenbezeichung mit einem zusätzlichen Index besitzen. Für die in den *Navier-Stokes-Gleichungen* vorkommenden Größen erhält man dann:

$$\begin{aligned} u* &= \frac{u}{U} \qquad v* = \frac{v}{V} \\ x* &= \frac{x}{l} \qquad y* = \frac{y}{l} \\ p* &= \frac{p}{\Delta p} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dabei sind U, V, l und Δp geeignete Bezugsgrößen. Setzt man nun diese Größen in die *Navier-Stokes-Gleichungen* ein, so erhält man die Form [13]:

$$\frac{U^2}{l}u*\frac{\partial u*}{\partial x*} + \frac{U^2}{l}v*\frac{\partial u*}{\partial y*} = -\frac{\Delta p}{\rho l}\frac{\partial p}{\partial x*} + \frac{\mu U}{\rho l^2}\left(\frac{\partial^2 u*}{\partial x*^2} + \frac{\partial^2 u*}{\partial y*^2}\right) \tag{4.3}$$

Multipliziert man nun mit l/U^2, so bekommt für Gl.(4.3):

$$u*\frac{\partial u*}{\partial x*} + v*\frac{\partial u*}{\partial y*} = -\underbrace{\frac{\Delta p}{\rho U^2}}_{I}\frac{\partial p}{\partial x*} + \underbrace{\frac{\nu}{Ul}}_{II}\left(\frac{\partial^2 u*}{\partial x*^2} + \frac{\partial^2 u*}{\partial y*^2}\right) \tag{4.4}$$

Bei geometrisch ähnlichen Berandungen sind zwei inkompressible Strömungen mechanisch ähnlich, wenn $\frac{\nu}{Ul}$ gleich ist. Es muß dann auch $\frac{\Delta p}{\rho U^2}$ gleich sein. Das bedeutet dann, daß beide Strömungsprobleme dieselbe Differentialgleichung in dimensionsloser Form besitzen. Aus dem Ausdruck über der Klammer I läßt sich die sogenannte *Eulerzahl* [13] bestimmen. Diese ist definiert als:

$$c_p = \frac{2\Delta p}{\rho U^2} \qquad . \tag{4.5}$$

Der Ausdruck über der Klammer II ist der Kehrwert der sogenannten *Reynoldszahl*. Diese ist definiert als:

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \qquad . \tag{4.6}$$

Erweitert man die *Reynoldszahl* im Zähler und im Nenner mit ρU, so erhält man folgende Form:

$$Re = \frac{Ul}{\nu} = \frac{\rho U^2}{\frac{\mu U}{l}} = \frac{Trägheitskraft(Impulsstrom)}{Reibungskraft(Zähigkeitskraft)} \qquad . \tag{4.7}$$

$Re \ll 1$: Die Trägheitskraft ist gering, die Zähigkeitskraft ist dominant (z.B. Nebel).
$Re \to \infty$: Der Reibungseinfluß ist bedeutungslos (er spielt nur in Wandnähe eine Rolle).

4.2 Das $\prod$-Theorem von *Buckingham*

Für eine physikalische Größe p_1 in Abhängigkeit anderer Größen, kann man schreiben [15]:

$$p_1 = f(p_2, p_3 \ldots p_n) \qquad , \tag{4.8}$$

oder in impliziter Form:

$$F(p_1, p_2, p_3 \ldots p_n) = 0 \qquad . \tag{4.9}$$

Die n Größen sind mit m Basiseinheiten (z.B m, kg, s) miteinander verknüpft. Diese Abhängigkeit kann in der Form von $(n-m)$ dimensionslosen Kombinationen $\prod_1, \ldots, \prod_{n-m}$ (Kennzahlen) der ursprünglichen Größen dargestellt werden:

$$F(\prod_1 \prod_2 \cdots \prod_{n-m}) = 0 \qquad . \tag{4.10}$$

Es wird angenommen, daß die Strömung durch eine Labyrinthdichtung von den folgenden p_n Parametern abhängig ist:

- Dichte ρ
- Viskosität μ
- Geschwindigkeit u
- Winkelgeschwindigkeit ω

- Eintrittsdruck p_e
- Austrittsdruck p_a
- Spaltweite s
- Bauhöhe a
- Dichtstreifenbreite b
- Teilung t
- Dichtungslänge l

Weiters müßte der Einfluß der Wärme in der Parameterliste auftreten. Dieser könnte mit dem Isentropenexponenten κ berücksichtigt werden. Diese Größe ist aber bereits dimensionslos, sodaß sie nicht mehr zur dimensionslosen Kennzahlenbildung benötigt wird.
Für Größen mit gleichen Einheiten (z.B. Spaltweite und Bauhöhe) lassen sich sofort dimensionslose Kennzahlen anschreiben. Diese sind das Druckverhältnis $\beta = p_a/p_e$ und die Geometrieverhältnisse $z = l/t$, s/a, s/b und s/t.
In die Dimensionsmatrix müssen jeweils eine Druck- und Längengröße sowie die übrigen Größen eingetragen werden (Tabelle 4.1). Für die Basisgrößen stehen L (Länge), M (Masse) und T (Zeit).

	ρ	μ	u	p_e	ω	s
L	-3	-1	1	-1	0	1
M	1	1	0	1	0	0
T	0	-1	-1	-2	-1	0

Tabelle 4.1: Dimensionsmatrix

Da sich die Einheiten der elf Größen aus drei Basiseinheiten zusammensetzen, muß sich nach dem $\prod$-Theorem die Labyrinthströmung durch eine Abhängigkeit von $11 - 3 = 8$ (Anzahl der Größen n - Anzahl der Einheiten m = Anzahl der Kennzahlen) Kennzahlen beschreiben lassen. Fünf Kennzahlen sind bereits gefunden worden. Die weiteren drei Kombinationen haben die Form:

$$\prod_i = \rho^{\alpha_i} \mu^{\beta_i} u^{\gamma_i} p_e^{\delta_i} \omega^{\varepsilon_i} s^{\zeta_i} \qquad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \qquad . \tag{4.11}$$

Diese Kombinationen müssen dimensionslos sein. Daher muß für jede Basiseinheit die Summe der Exponenten Null ergeben. Für die Labyrinthströmung ergibt sich dann folgendes Gleichungssystem:

$$-3\alpha - \beta + \gamma - \delta + \zeta = 0 \quad \textbf{Exponenten von m} \tag{4.12}$$

$$\alpha + \beta + \delta = 0 \quad \textbf{Exponenten von kg} \tag{4.13}$$

$$-\beta - \gamma - 2\delta - \varepsilon = 0 \quad \textbf{Exponenten von s} \tag{4.14}$$

Die drei Lösungen findet man, indem ebensoviele Unbekannte willkürlich vorgegeben werden. Man erhält dann ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, das in üblicher Weise aufgelöst werden kann [5]. Für das erste dimensionslose Produkt soll folgendermaßen vorgegangen werden:

1. Wahl: $\delta = 1$, $\varepsilon = \zeta = 0$.
   Für das obige Gleichungssystem erhält man mit dieser Wahl:

$$-3\alpha-\beta+\gamma = 1 \tag{4.15}$$

$$\alpha+\beta = -1 \tag{4.16}$$

$$-\beta-\gamma = 2 \tag{4.17}$$

   Mit diesen Gleichungen erhält man: $\alpha = -1$, $\beta = 0$ und $\gamma = -2$. Das zugehörige dimensionslose Produkt lautet dann:

$$\prod_1 = \frac{p_e^1 \mu^0}{\rho^1 u^2} \quad . \tag{4.18}$$

   Dieses Produkt ist keine gängige Kennzahl. Nach Bildung des Kehrwertes dieses Produktes und einer Division durch den dimensionslosen Isentropenexponenten κ erhält man das Quadrat einer gängigen Größe, der sogenannten *Machzahl Ma* [5][13]:

$$Ma^2 = \frac{u^2 \rho}{\kappa p} = \frac{u^2}{c^2} \quad . \tag{4.19}$$

2. Wahl: $\varepsilon = 1$, $\delta = \zeta = 0$.
   Mit diesen Werten erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$-3\alpha-\beta+\gamma = 0 \tag{4.20}$$

$$\alpha+\beta = 0 \tag{4.21}$$

$$-\beta-\gamma = 1 \tag{4.22}$$

   Aus diesem System kann man sich die abhängigen Exponenten berechnen zu: $\alpha = -1$, $\beta = 1$ und $\gamma = -2$. Die dazugehörige Kennzahl hat dann die Form:

$$\prod_2 = \frac{\mu^1 \omega^1}{\rho^1 u^2} \quad . \tag{4.23}$$

   Aus diesem Produkt läßt sich durch Erweitern um eine Längengröße ein dimensionsloses Produkt bestehend aus einer Reynoldszahl und einem Geschwindigkeitsverhältnis bilden. Da die Reynoldszahl selbst als dimensionsloses Produkt verwendet wird, soll hier nur das Geschwindigkeitsverhältnis folgender Form (Umfangsgeschwindigkeit des Rotors zu Axialgeschwindigkeit des Mediums am Eintritt) angeführt werden:

$$\prod_2 = \frac{R_{Rotor}\omega}{u} \quad . \tag{4.24}$$

3. Wahl: $\zeta = 1$, $\delta = \varepsilon = 0$.
   Mit diesen Werten erhält man folgendes lineares Gleichungssystem:

$$-3\alpha-\beta+\gamma = -1 \tag{4.25}$$

$$\alpha+\beta = 0 \tag{4.26}$$

$$-\beta-\gamma = 0 \tag{4.27}$$

Aus diesem System kann man sich die abhängigen Exponenten berechnen zu: $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $\gamma = 1$. Die dazugehörige Kennzahl hat dann die Form:

$$\prod_3 = \frac{\rho^1 u^1 s^1}{\mu^1} \quad . \tag{4.28}$$

Nach einer Multiplikation mit 2, erhält man die als *Reynoldszahl* [5] bekannte Kennzahl:

$$Re = \frac{\rho u 2s}{\mu} = \frac{u d_h}{\nu} \quad . \tag{4.29}$$

Für die Strömung durch das Labyrinth ergibt sich somit folgender Zusammenhang:

$$F(Ma, R\omega/u, Re, \beta, z, s/a, s/b, s/t) = 0 \quad . \tag{4.30}$$

In der Parameterstudie werden Einflüsse der Bauhöhe a und der Teilung t bei verschiedenen Druckverhältnissen untersucht. Die Drosselstellenzahl z, die Dichtstreifenbreite b und die Spaltweite s und somit das Verhältnis s/b werden konstant gehalten.
Die Einflüsse der *Mach-* bzw. *Reynoldszahl* werden bei der Parameterstudie nicht näher untersucht. Da der Rotor ruhend betrachtet wird, ist auch der Einfluß des Geschwindigkeitsverhältnisses vernachlässigt.

4.3 Eliminationsverfahren

Dimensionslose Produkte kann man auch durch eine Art Eliminationsverfahren [15] erhalten. Dabei werden die Exponenten der Basiseinheiten der physikalischen Größen in der Dimensionsmatrix zeilenweise zu Null gemacht.

	ρ	μ	u	p_e	ω	s
L	-3	-1	1	-1	0	1
M	1	1	0	1	0	0
T	0	-1	-1	-2	-1	0

Da es sich bei den Zahlenwerten in der Matrix um Exponenten handelt, sind Multiplikationen bzw. Divisionen (keine Additionen bzw. Subtraktionen!) als Rechenoperationen anzuwenden. Im Fall der Strömung durch das Labyrinth erhält man nach dem Nullsetzen der untersten Zeile der Dimensionsmatrix:

	ρ	μ/ω	u/ω	p_e/ω^2	s
L	-3	-1	1	-1	1
M	1	1	0	1	0
T	0	0	0	0	0

Nach weiteren Rechenoperationen erhält man für die zweite Zeile ebenfalls eine Nullzeile.

	$\mu/(\rho\omega)$	u/ω	$p_e/(\rho\omega/^2)$	s
L	2	1	2	1
M	0	0	0	0
T	0	0	0	0

Nach letzten Multiplikationen bzw. Divisionen wird auch die dritte Zeile eine Nullzeile.

	$\mu/(s^2\rho\omega)$	$u/(s\omega)$	$p_e/(s^2\rho\omega/^2)$
L	0	0	0
M	0	0	0
T	0	0	0

Aus dieser Matrix kann man die dimensionslosen Produkte ablesen und anschließend wie beim $\prod$-Theorem von *Buckingham* bekannte Kennzahlen bilden.

Kapitel 5

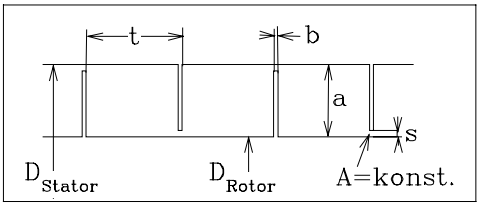
Parameterstudie

5.1 Aufgabenstellung

Durch Dimensionsanalyse läßt sich eine Abhängigkeit des Leckmassenstromes von der Geometrie und vom Gesamtdruckverhältnis herleiten. Durch Variation der Geometrieparameter Bauhöhe und Teilung bei konstanter Spaltweite, Dichtstreifenbreite und konstantem Rotordurchmesser soll der Durchflußbeiwert C_D (Kapitel 3.2.3.2 auf Seite 23) untersucht werden. Die Ergebnisse sollen so dargestellt werden, daß sich optimale Geometrieparameter ablesen lassen. Ausgehend von einer am Institut experimentell untersuchten Labyrinthdichtung sollen Verbesserungsvorschläge gemacht und die zu erwartenden Reduzierungen des Leckmassenstromes in Prozent dargestellt werden.

5.2 Beschreibung der Parameter

Als Querschnittsfläche für die Vergleichsdüse des Durchflußbeiwertes C_D wird die Spaltfläche zwischen Rotor und Dichtstreifen am Stator gewählt. Diese Fläche entspricht nicht der allgemein üblichen mittleren Spaltfläche. Der Grund für diese Wahl liegt in der besseren Vergleichbarkeit der einzelnen Geometrien. Mit dieser Definition ist es möglich, Labyrinthdichtungen mit gleichem Rotordurchmesser und gleicher Spaltweite, aber unterschiedlicher Bauhöhe zu vergleichen. Der Grund dafür ist, daß sich für die zu vergleichenden Dichtungen bei gleichem Druckverhältnis π der Massenstrom durch die ideale Düse $\dot{m}_{ideal}$ nicht verändert. Mit der Definition des C_D-Wertes, $C_D = \dot{m}_{gemessen}/\dot{m}_{ideal}$, können somit relative Beziehungen zwischen den untersuchten Geometrien hergestellt werden.
Die Parameter der Geometrie sind in Abbildung 5.1 dargestellt.



Konstanten	$b = 0.3mm$
	$s = 0.5mm$
	$D_{Rotor} = 300mm$
	$z = 11$
Variablen	$a = 1.5 - 6.0mm$
	$t = 0.54 - 6.32$
	$D_{Stator} = 303 - 312mm$

Abbildung 5.1: Geometrieparameter eines Vollabyrinthes

Bei dieser Studie wird der Rotordurchmesser mit $D_{Rotor} = 300mm$ konstant gehalten. Auch die Spaltweite mit $s = 0.5mm$ und die Dichtstreifenbreite $b = 0.3mm$ werden für diese Berechnungen nicht verändert. Für die Vergleichsfläche der Düse ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{4}((D_{Rotor} + 2s)^2 - D_{Rotor}) = \\ &= \frac{\pi}{4}((300 + 2 \cdot 0.5)^2 - 300) = 472.02mm^2 = konstant \quad . \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.3 Vorgehensweise

Die Berechnungen sollen mit Hilfe der Methode der Finiten-Elemente erfolgen. Das Programmpaket FIDAP 7.52 bietet verschiedene Möglichkeiten der Turbulenzmodellierung an. Auf Grund der Rotationssymmetrie wird das 3D-Strömungsproblem auf ein ebenes (2D) axial-symmetrisches Modell reduziert. Dadurch werden die Knotenzahl und die Rechenzeit gegenüber der 3D-Berechnung wesentlich verringert. Die Schwierigkeiten, die die Turbulenzmodellierung mit sich bringt, sind im Anhang dargestellt.
Um möglichst genaue und zuverlässige Rechenergebnisse zu erhalten, sollen einige Möglichkeiten der Turbulenzmodellierung miteinander verglichen werden. Die Simulationsmodelle zeigen auf Grund unterschiedlicher Modellierung der *Reynoldsspannungen* unterschiedliches Verhalten hinsichtlich Konvergenz und der berechneten Lösungen. Die Ergebnisse sollen mit am Institut durchgeführten Messungen verglichen werden. Für die Parameterstudie ist das Verfahren zu wählen, welches die geringste Abweichung von der Messung zeigt.
Für die Parameterstudie steht ein fertiges Eingabefile zur Verfügung, wobei die Geometrievariablen parametrisiert sind. Durch das Verändern der Geometrieparameter werden auch die Übergänge im Rechennetz verändert. Für jede neue Geometrie sind daher die Parameter zur Festlegeung des Netzes so zu verändern, daß sich Elementanordunungen ähnlich einem strukturierten Netz ergeben.
Die verschiedenen Geometrien sollen für Druckverhältnisse von $\pi = 1.1 - 2.0$ untersucht werden. Dabei ist zu beachten, daß sich das Druckverhältnis auf Grund der vorgegebenen Eintrittsgeschwindigkeit u einstellt.
Die durch die Berechnung erhaltenen Massenströme werden dann in den Durchflußbeiwert C_D umgerechnet und über dem Druckverhältnis aufgetragen.

5.4 FE-Netz

Das Netz für die Voll-Labyrinthdichtung soll in zwei Bereiche eingeteilt werden. Der erste Bereich umfaßt das Gebiet um die Dichtspitzen. Dieser wird mit einem *unstrukturierten Netz* umgeben. Da hier große Gradienten auftreten, muß das Netz sehr feinmaschig sein.
Der zweite Bereich ist derjenige zwischen den einzelnen Dichtspitzen. Dieser erhält ein *strukturiertes Netz*. In diesem Gebiet verändert sich bei konstanter Bauhöhe nur die Anzahl der Elemente in axialer Richtung. Die Abbildung 5.2 zeigt ein Netz, wie es zur Berechnung der Bauhöhe $a = 6.0mm$ verwendet wird. Dabei erkennt man deutlich den strukturierten Bereich in der Kammer und den unstrukturierten Bereich um die Dichtspitze. In der Nähe fester Wände muß auf die Elemente auf Grund der Wandfunktionen achtgegeben werden. Die Breite des an der Wand angrenzenden Elementes sollte so gewählt werden, daß der dimensionslose Abstand $y^+ = 30$ nicht unterschritten wird [3]. Dies kann nach Erhalt einer

ersten Lösung überprüft werden.
Für die Berechnung sollen 9-knotige Kontinuumselemente verwendet werden. Der Druck p wird dabei bilinear, die Geschwindigkeiten u und v bzw. die turbulente kinetische Energie $\overline{k}$ und die Dissipationsrate ε biquadratisch interpoliert.

Abbildung 5.2: FE-Netz eines Vollabyrinthes

5.5 Beschreibung des Rechenverfahrens

5.5.1 Grundgleichungen

Zur Berechnung der stationären, axial-symmetrischen, kompressiblen, turbulenten Strömung steht folgendenes Gleichungssystem zur Verfügung:

- Kontinuitätsgleichung
- Impulsgleichung in axialer Richtung
- Impulsgleichung in radialer Richtung
- Zustandsgleichung für ideale Gase
- Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie $\overline{k}$
- Transportgleichung für die turbulente Dissipationsrate ε
- Energiegleichung

Die Modellierung der viskosen Reibung an den Wänden erfolgt mit einer speziellen Ansatzfunktion. Die bei der Berechnung verwendeten Stoffwerte sind in Tabelle 5.1 angeführt.

Allgemeine Gaskonstante $\mathcal{R}$	8314 $J/kmolK$
Molmasse M	28.966 $kg/kmol$
spezifische Wärmekapazität c_p	1005 J/kgK
dynamische Viskosität μ	1.8E-5 Pas

Tabelle 5.1: Stoffwerte

Mit den 7 Gleichungen können dann die 7 Unbekannten $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{p}$, $\overline{k}$, ε, T und ρ berechnet werden.

5.5.2 Randbedingungen

5.5.2.1 Eintrittsbedingungen

Wird als Randbedingung ein fixer skalarer Wert vorgegeben, so spricht man von einer *Dirichlet'schen* Bedingungen. In der Eintrittsebene sind Werte für die Geschwindigkeitskomponenten u und v, die turbulente kinetische Energie $\overline{k}$, die Dissipationsrate ε und die Temperatur T anzugeben. In der Parameterstudie wurden einheitlich die in Tabelle 5.2 zusammengefaßten Werte verwendet.

u	v	T	$\overline{k}$	ε
variabel	0	293	0.02	1

Tabelle 5.2: Eintrittsbedingungen

5.5.2.2 Bedingungen an einer festen Wand

An den Wandungen (Rotor, Stator, Dichtstreifen) gilt die sogenannte *Haftbedingung*. Diese besagt, daß die Fluidteilchen mit unmittelbarer Wandberührung keine tangentiale Relativgeschwindigkeit gegenüber der Wand aufweisen [6]. An den Begrenzungsflächen wird somit $u = v = 0$ vorgegen. Der Wärmeübergang wird bei dieser Studie adiabat angenommen.

5.5.2.3 Austrittsbedingungen

Möglichst weit hinter das Labyrinth wird die Austrittsebene gelegt. Dort wird der Spannungsvektor nach der sogenannten *Traction-Free-Condition* [3] gleich Null gesetzt. Außerdem wird ein Referenzdruck von $1E5Pa$ (entspricht dem Umgebungsdruck) vorgegeben.
Für $\overline{k}$ und ε werden sogenannte *Neumann-Bedingungen* [3] verwendet. Das sind solche Bedingungen, bei denen der Gradient Null gesetzt wird.

5.6 Lösungsstrategie

Das Lösen der Gleichungen erfordert die meiste Zeit. Das zu lösende Gleichungssystem hat die allgemeine Form:

$$K_{(u)}u = F \qquad . \tag{5.2}$$

Dabei ist K die globale Systemmatrix und u ein Lösungsvektor. Der Vektor F beinhaltet die Randbedingungen. Als Gleichungslöser wird der für kompressible Strömungen notwendige *Segregated Solver* [3] verwendet. Die iterative Lösung erfolgt nach folgendem Schema:

$$K_{(u_i)}u_{i+1} = F \qquad . \tag{5.3}$$

Dabei ist u_i der errechnete Vektor der vorherigen Iteration. Das nichtsymmetrische lineare System muß für jede Iteration formuliert und gelöst werden. Dieser iterative Lösungsweg kann durch sogenannte *Relaxationsfaktoren* α verbessert werden. Diese führen zu folgender Form:

$$K_{(u_i)}u* = F \tag{5.4}$$

$$u_{i+1} = \alpha u_i + (1-\alpha)u* \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad . \tag{5.5}$$

Falls $\alpha = 0$ gesetzt wird, so reduziert sich diese Gleichung zu Gl.(5.3). Für die Parameterstudie wurden folgende Werte für die jeweiligen Größen (Geschwindigkeit, Druck...) verwendet.

α_u	α_v	α_p	α_T	α_k	α_ε
0.2	0.2	0.9	0.2	0.6	0.6

Tabelle 5.3: Relaxationsfaktoren

5.7 Konvergenz

Nach jeder Iteration wird überprüft, ob die Konvergenz erreicht wurde. Das verwendete Konvergenzkriterium beruht auf der Definition des relativen Fehlers des errechneten Lösungsvektors. Dieses lautet:

$$\frac{\| u_i - u_{i-1} \|}{\| u_i \|} \leq DTOL \qquad . \tag{5.6}$$

Dabei ist $\| \cdot \|$ die *euklidische* Norm, u_i der berechnete Lösungsvektor des Iterationsschrittes i und u_{i-1} Vektor des vorhergehenden Iterationsschrittes. In einem euklidischen Vektorraum versteht man unter der Länge oder dem Absolutbetrag eines Vektors $\underline{v}$ mit dem Symbol $\| \underline{v} \|$ die Zahl $\sqrt{\underline{v}\,\underline{v}}$ [7].
Für den *Segregated Solver* wird eine Abbruchschranke von $DTOL = 1.0E-3$ empfohlen [4]. Bei kleinen Bauhöhen erweist sich diese Abbruchschranke als zu hoch. Für die Bauhöhe $a = 1.5mm$ wurde deshalb diese Schranke bis auf $DTOL = 2.5E-4$ herabgesetzt. Erst bei diesem Wert werden kontinuierliche Verläufe des C_D-Wertes über dem Druckverhältnis erhalten.

5.8 Rechenergebnisse

5.8.1 Vergleich der Turbulenzmodelle

Am Institut wurden Messungen an einem Labyrinth der Bauhöhe $a = 6mm$ mit einer Teilung $t = 3.7mm$ durchgeführt. Für die Parameterstudie werden verschiedene Kombinationen von Turbulenz- und Wirbelviskositätsmodellen getestet und mit diesen Messungen verglichen. Die erhaltenen Ergebnisse sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Berechnungen erfolgen mit einer Abbruchschranke von jeweils 5E-4. Dabei ist zu beachten, daß mit den Kombinationen des *Speziale*-Modells diese Konvergenzschranke nicht erreicht wird. Die ersten Iterationen zeigen zwar deutliches Konvergenzverhalten, ab einem bestimmten relativen Fehler kommt es aber zu einem Pendeln um diesen. Aus diesem Grund werden diese Kombinationen nicht für die Parameterstudie herangezogen. Es stellt sich heraus, daß das *Standard-Boussinesq*-Modell unter den konvergierenden den geringsten relativen Fehler (im Durchschnitt ca. 5%) aufweist. Aus diesem Grund wird dieses Modell für die Parameterstudie verwendet.
Die Wirbelviskositätsmodelle stellen über die turbulente Viskosität eine Beziehung zwischen den unbekannten *Reynoldsspannungen* und den Größen der Grundströmung her. Die einzelnen Wirbelviskositätsmodelle liefern auf Grund der differenzierten Berechnung der *Reynoldsspannungen* und der Abhängigkeit von *Reynoldszahlen* und dgl. unterschiedliche

Ergebnisse. Mit dem isotropen Modell nach *Boussinesq* werden die scheinbaren Schubspannungen als lineare Funktion der Geschwindigkeitsgradienten berechnet [4].
Im anisotropen Modell nach *Speziale* wird der *Reynolds'sche* Spannungstensor als quadratische Funktion abgebildet. Dadurch ist ein Mechanismus zur Darstellung der turbulenten anisotropen Effekte vorhanden [4]. Der relative Fehler der Modelle ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Dieser berechnet sich zu:

$$F = \frac{C_{D,gerechnet} - C_{D,gemessen}}{C_{D,gemessen}} 100\% \quad . \tag{5.7}$$

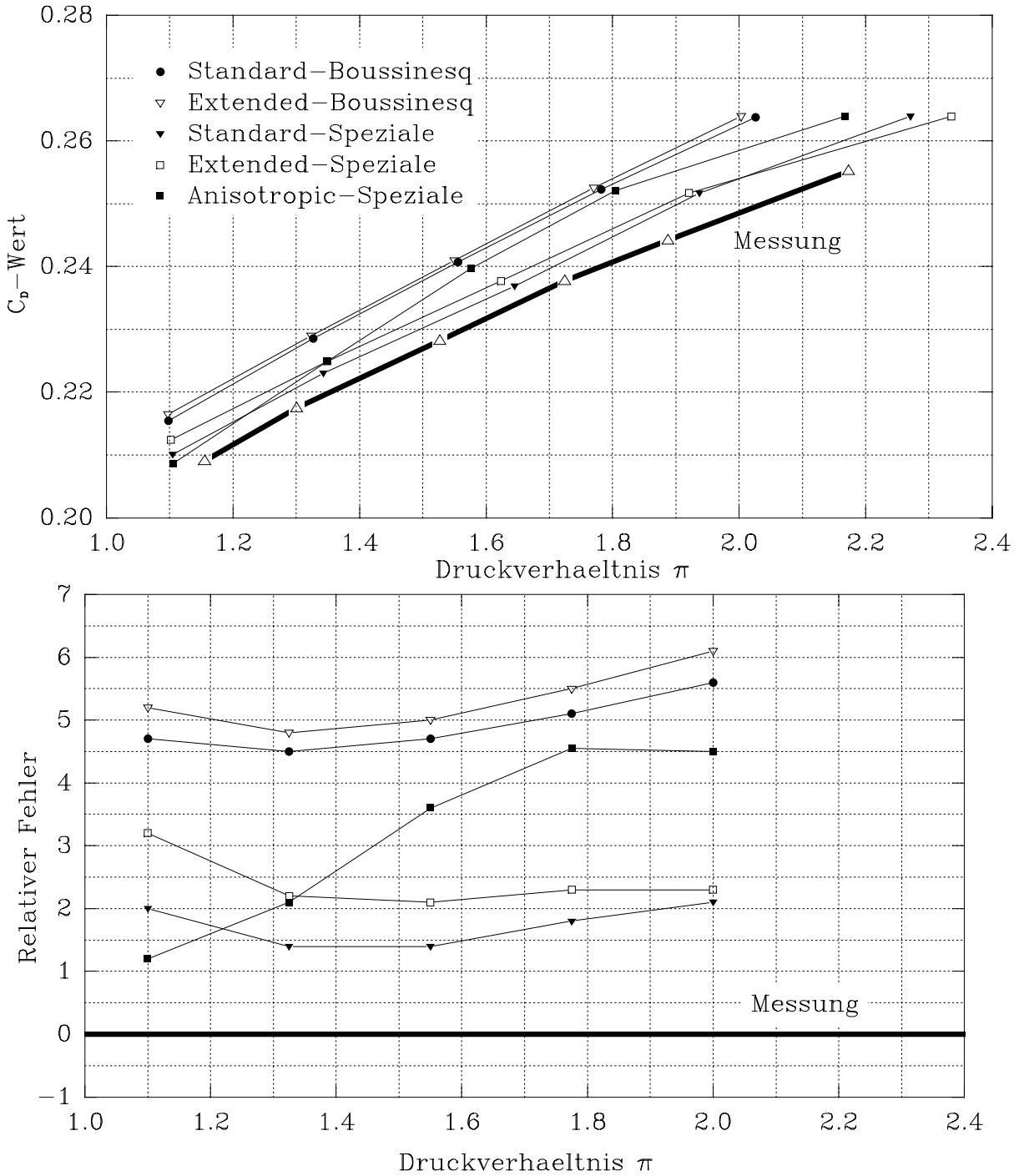


Abbildung 5.3: Durchflußbeiwerte und relativer Fehler verschiedener Simulationsmodelle

5.8.2 Berechnete Durchflußbeiwerte für $s/a = 0.083$

Für die größte untersuchte Bauhöhe ($a = 6.0mm$) ergeben sich die größten Knotenzahlen (Tabelle 5.4). Die gewählten Eintrittsgeschwindigkeiten u_e ergeben die *Reynoldszahlen* $Re = (u_e \rho_e 2s)/\mu$ in Abbildung 5.4. Mit diesen *Reynoldszahlen* bekommt man die Durchflußbeiwerte in Abbildung 5.5. Nach den Rechnungen für vier Verhältnisse a/t läßt sich noch immer nicht auf die Lage eines Optimums schließen, da der C_D-Wert bei weiterer Vergrößerung des Verhältnisses sinkt. Die Teilung t nimmt dann einen nicht realisierbaren Wert an. Die Abbruchschranke wird mit $DTOL = 0.001$ gewählt. In Abbildung 5.5 erkennt man eine nahezu lineare Abhängigkeit vom Druckverhältnis π.

a/t	0.949	1.353	1.765	2.186
Knoten	39953	32553	28113	25893
Elemente	11179	9179	7979	7379

Tabelle 5.4: Knoten- und Elementezahl für $s/a = 0.083$

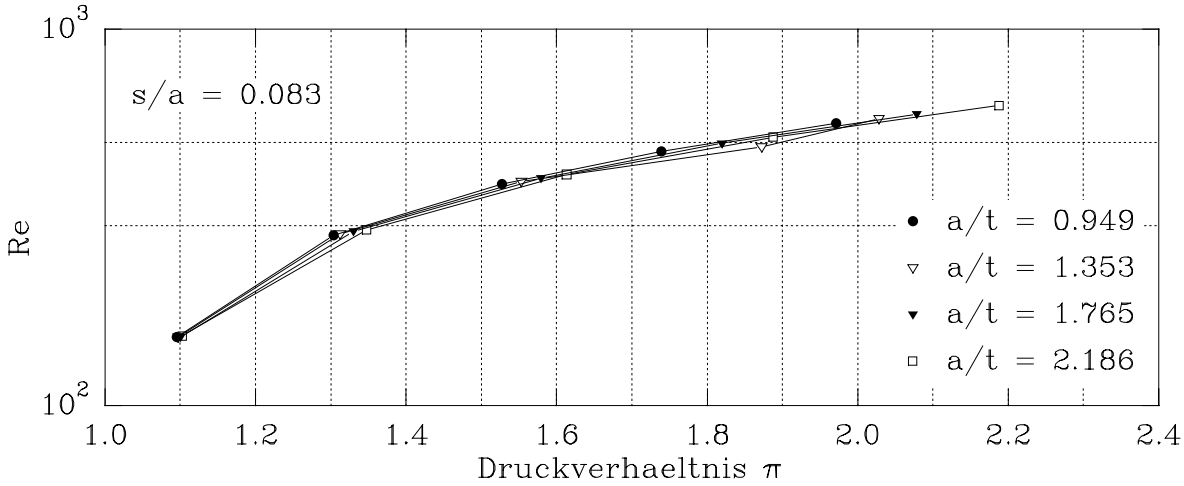


Abbildung 5.4: Reynoldszahlen für $s/a = 0.083$

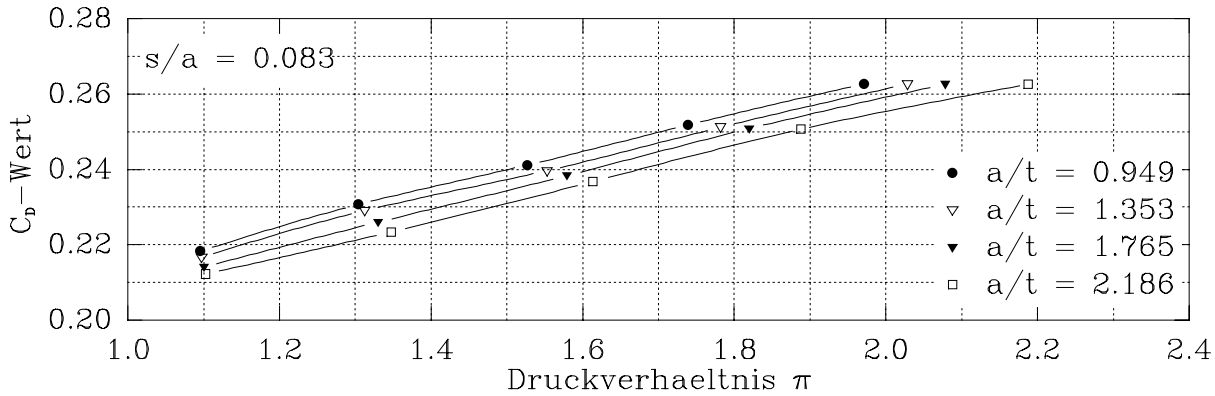


Abbildung 5.5: C_D-Wert als Funktion des Druckverhältnisses für $s/a = 0.083$

5.8.3 Berechnete Durchflußbeiwerte für $s/a = 0.111$

Die Knoten- und Elementeanzahlen und die *Reynoldszahlen* am Eintritt sind in Tabelle 5.6 bzw. Abbildung 5.8 zusammengefaßt. Für diese Bauhöhe erhält man ebenfalls bei einer Abbruchschranke von $DTOL = 0.001$ einen kontinuierlichen Verlauf des C_D-Wertes über dem Druckverhältnis. Auch für $a = 4.5mm$ werden wie für $a = 6.0mm$ Berechnungen für nur vier Verhältnisse a/t angestellt.

a/t	0.988	1.413	1.851	2.301
Knoten	33865	29565	25265	21825
Elemente	9432	8262	7132	6212

Tabelle 5.5: Knoten- und Elementezahl für $s/a = 0.111$

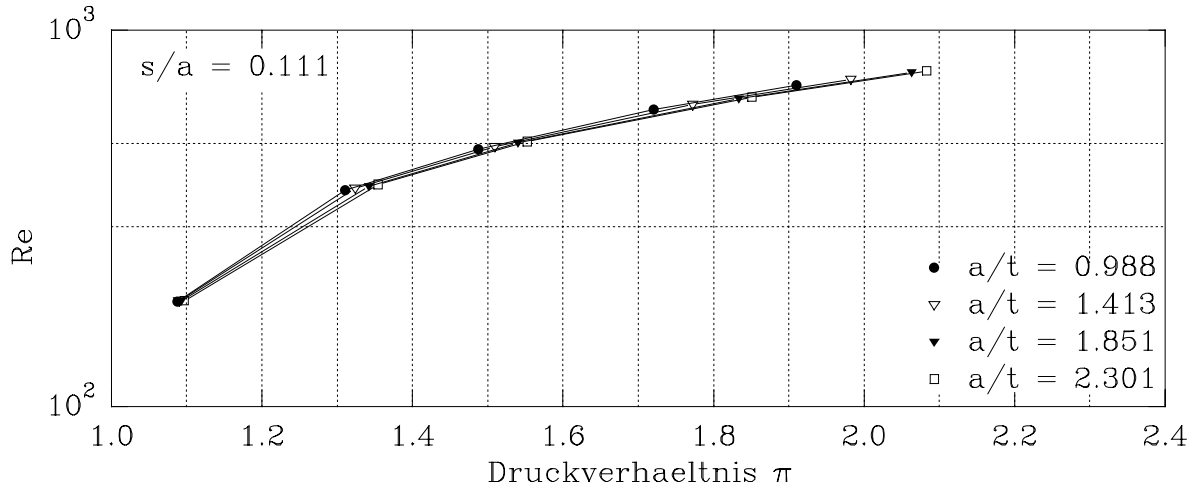


Abbildung 5.6: Reynoldszahlen für $s/a = 0.111$

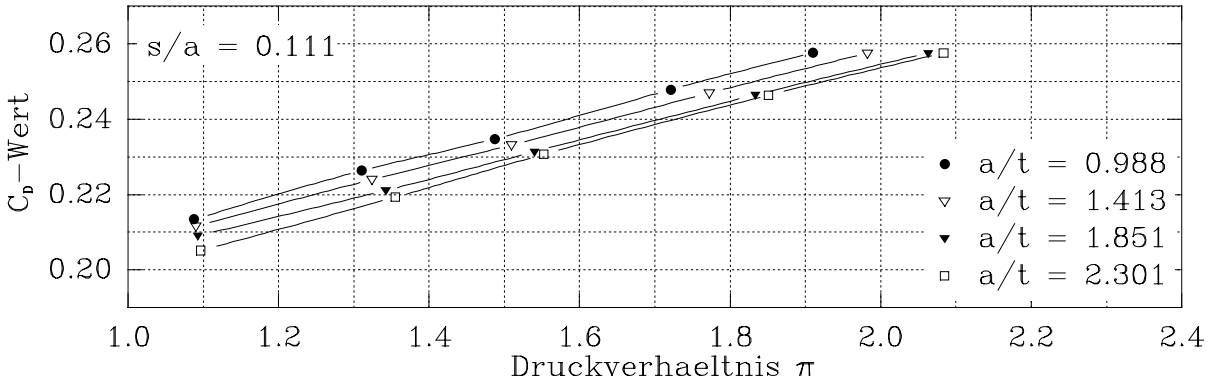


Abbildung 5.7: C_D-Wert als Funktion des Druckverhältnisses für $s/a = 0.111$

5.8.4 Berechnete Durchflußbeiwerte für $s/a = 0.143$

Für die Bauhöhe $a = 3.5mm$ sind die Knoten- und Elementezahlen in Tabelle 5.6 dargestellt. Die *Reynoldszahlen* am Eintritt sind in Abbildung 5.8 zusammengefaßt. Eine Abbruchschranke von $DTOL = 0.001$ ist auch für die Berechnung dieser Geometrien ausreichend. Die berechneten Durchflußbeiwerte sind in Abbildung 5.9 aufgetragen.

a/t	0.598	1.036	1.486	1.960	2.449
Knoten	40371	34631	28071	24381	21511
Elemente	11117	9577	7817	6827	6057

Tabelle 5.6: Knoten- und Elementezahl für $s/a = 0.143$

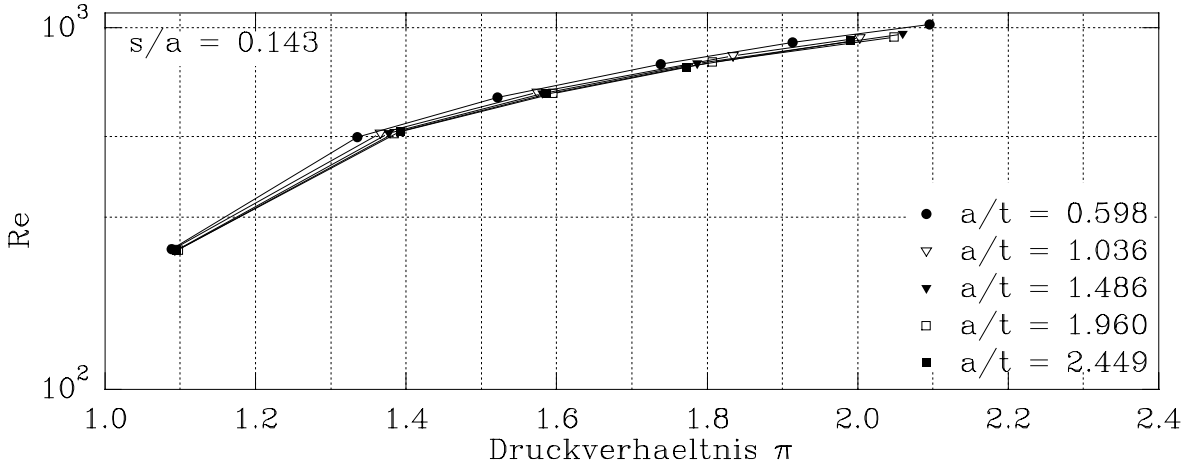


Abbildung 5.8: Reynoldszahlen für $s/a = 0.143$

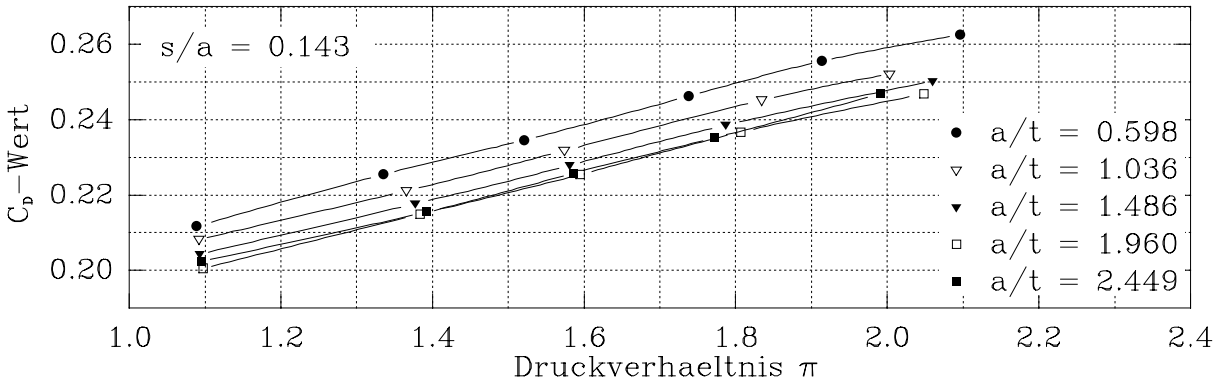


Abbildung 5.9: C_D-Wert als Funktion des Druckverhältnisses für $s/a = 0.143$

5.8.5 Berechnete Durchflußbeiwerte für $s/a = 0.200$

Für die Berechnungen der Bauhöhe von $a = 2.5mm$ werden die Daten aus Tabelle 5.7 verwendet. Die *Reynoldszahlen* am Eintritt sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Die Abbruchschranke wird mit $DTOL = 0.00035$ gewählt (also kleiner als bei $a = 3.5mm$), da sich sonst keine kontinuierlichen Verläufe des C_D-Wertes ergeben. In Abbildung 5.11 sind die berechneten Durchflußbeiwerte dargestellt.

a/t	0.65	1.13	1.64	2.19	2.78
Knoten	34751	30651	23271	20059	18419
Elemente	9616	8516	6538	5718	5278

Tabelle 5.7: Knoten- und Elementezahl für $s/a = 0.200$

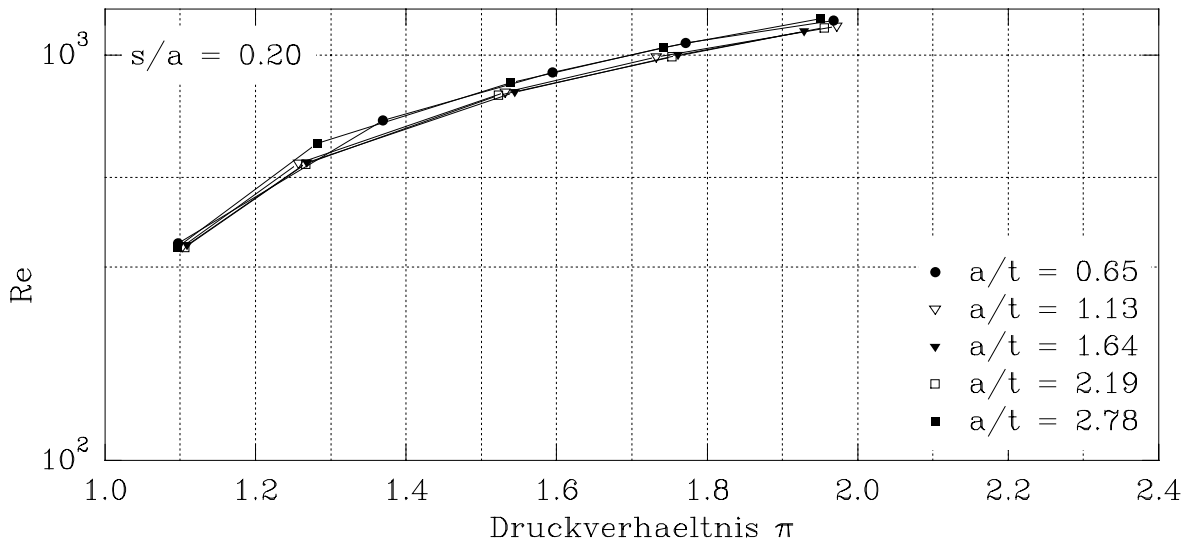


Abbildung 5.10: Reynoldszahlen für $s/a = 0.200$

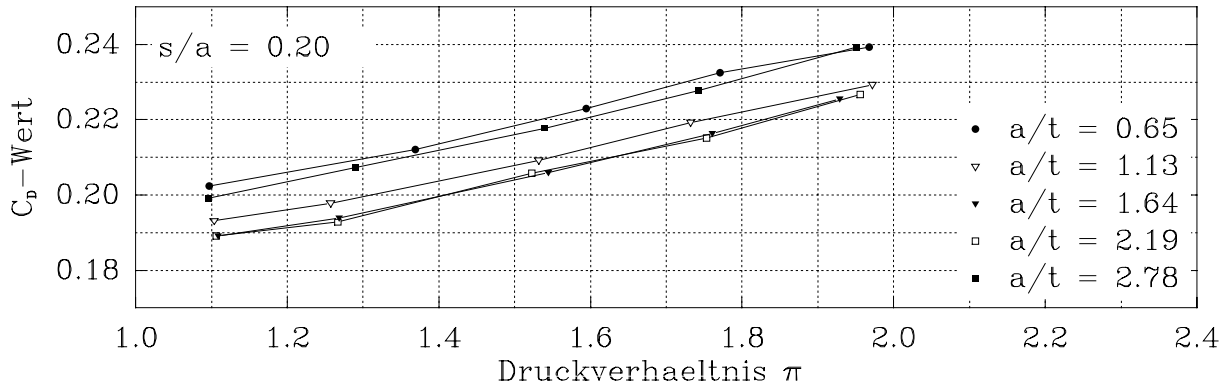


Abbildung 5.11: C_D-Wert als Funktion des Druckverhältnisses für $s/a = 0.200$

5.8.6 Berechnete Durchflußbeiwerte für $s/a = 0.333$

Das kleinste berechnete Labyrinth hat eine Bauhöhe von $a = 1.5mm$. Für dieses Labyrinth ergibt sich daher das kleinste zu berechnende Strömungsgebiet und somit die kleinsten Knoten- und Elementeanzahlen (Tabelle 5.8). Die *Reynoldszahlen* am Eintritt, dargestellt in Abbildung 5.12, haben die größten Werte. Außerdem sind die betragsmäßigen Unterschiede für die einzelnen Geometrien am größten.
Die Abbruchschranke wird für diese Berechnungen mit bis zu $DTOL = 0.00025$ gewählt, da sich sonst Unstetigkeiten im C_D-Verlaufes ergeben. In Abbildung 5.13 sind die berechneten Durchflußbeiwerte dargestellt. Bei Betrachtung der Geometrieverhältnisse erkennt man, daß der C_D-Wert zunächst mit steigendem a/t sinkt, um dann wieder anzusteigen. Dies läßt auf ein Minimum des C_D-Wertes in Abhängigkeit vom Geometrieverhältnis a/t schließen.

a/t	0.5	1.2	1.7	2.2	2.5
Knoten	30757	22885	18785	15505	14193
Elemente	8547	6435	5335	4455	4103

Tabelle 5.8: Knoten- und Elementezahl für $s/a = 0.333$

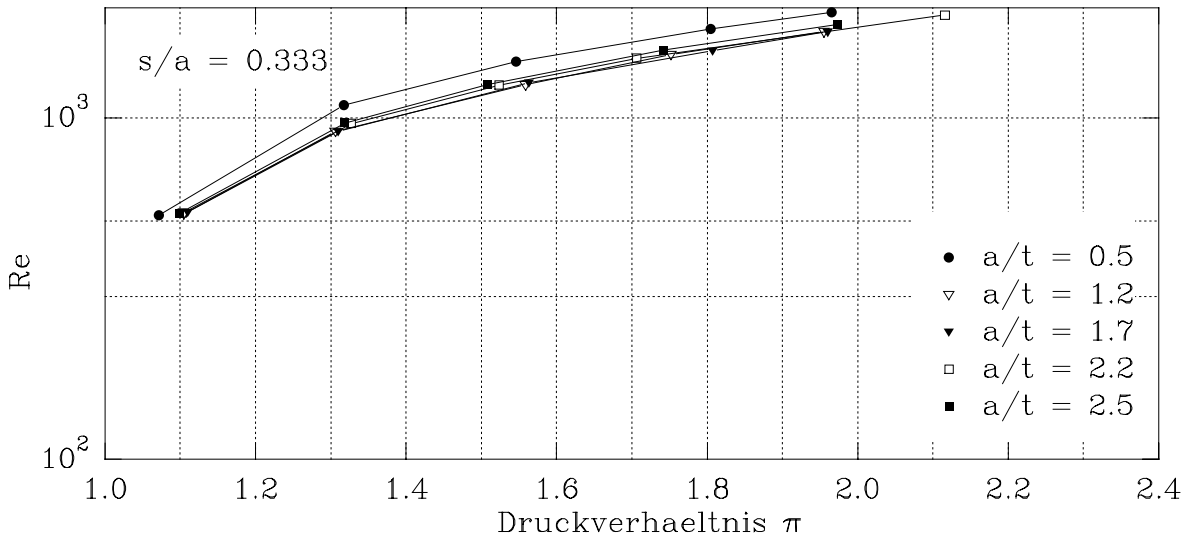


Abbildung 5.12: Reynoldszahlenen für $s/a = 0.333$

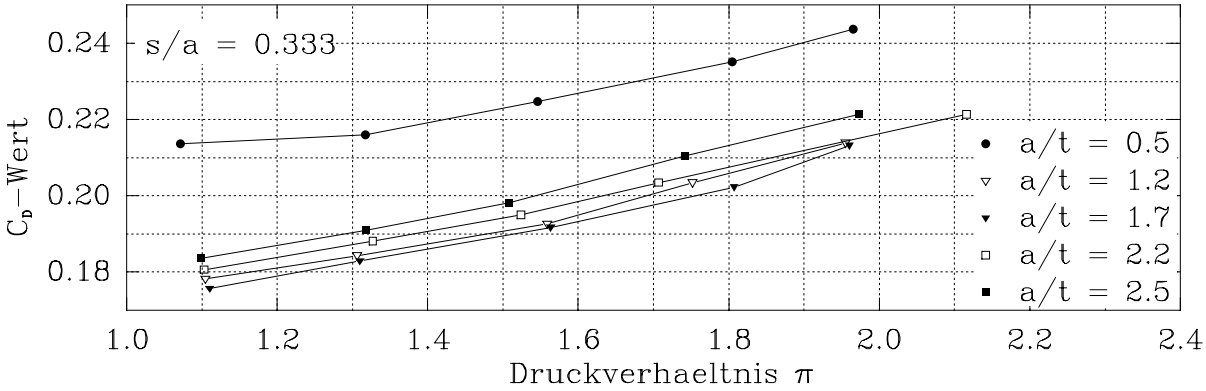


Abbildung 5.13: C_D-Wert als Funktion des Druckverhältnisses für $s/a = 0.333$

5.8.7 Darstellung der Ergebnisse

5.8.7.1 Einfluß des Verhältnisses a/t ($s/a = konstant$)

Die Verläufe der berechneten Durchflußbeiwerte werden ausgeglichen. Mit diesen Werten werden dann die C_D-Werte über dem Geometrieverhältnis a/t aufgetragen. Diese Darstellung erhält man, wenn die C_D-Verläufe bei einem bestimmten Druckverhältnis geschnitten werden und die dabei erhaltenen Werte aufträgt und verbindet.
Weiters ist das Geometrieverhältnis a/t für $t = 3mm$ eingezeichnet. Dieser Wert soll als Untergrenze der Teilung gedeutet werden. Werden die Dichtstreifen in einer vorgefertigten Nut mit einem Stemmdraht befestigt, so ist dieser Platzbedarf als Minimum anzusehen. Werden die Dichtstreifen aus dem Vollen gedreht, so ist der Platzbedarf geringer. Damit sind kleinere Teilungen t und somit größere Verhältnisse a/t zu erzielen.
Auf die Betriebssicherheit ist trotzdem zu achten (Dehnungen). Die Kennzeichnung von $t = 3mm$ dient auch zum besseren Vergleich mit den anderen Bauhöhen.
Für ein Verhältnis Spaltweite zu Bauhöhe $s/a = 0.14$ liegt das Minimum des C_D-Wertes bei $a/t = 2.09$, während sich bei $s/a = 0.20$ ein optimales Verhältnis $a/t = 1.87$ ergibt. Die Labyrinthdichtung des Verhältnisses $s/a = 0.33$ besitzt ein optimales Verhältnis $a/t = 1.56$.

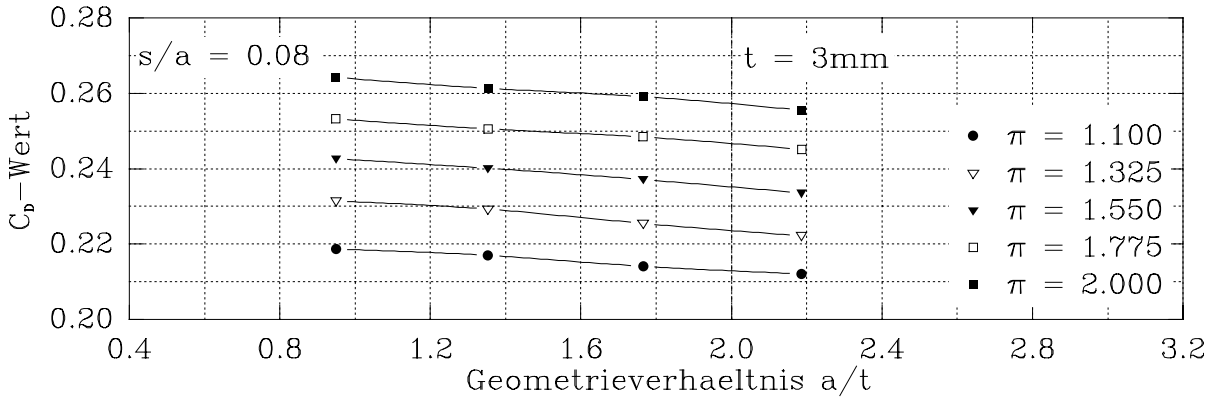


Abbildung 5.14: C_D-Wert als Funktion des Geometrieverhältnisses a/t für $s/a = 0.08$

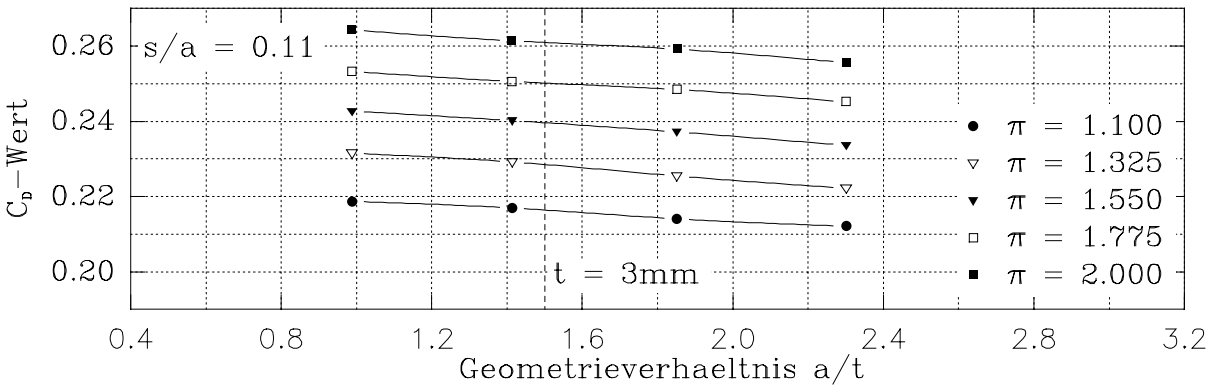


Abbildung 5.15: C_D-Wert als Funktion des Geometrieverhältnisses a/t für $s/a = 0.11$

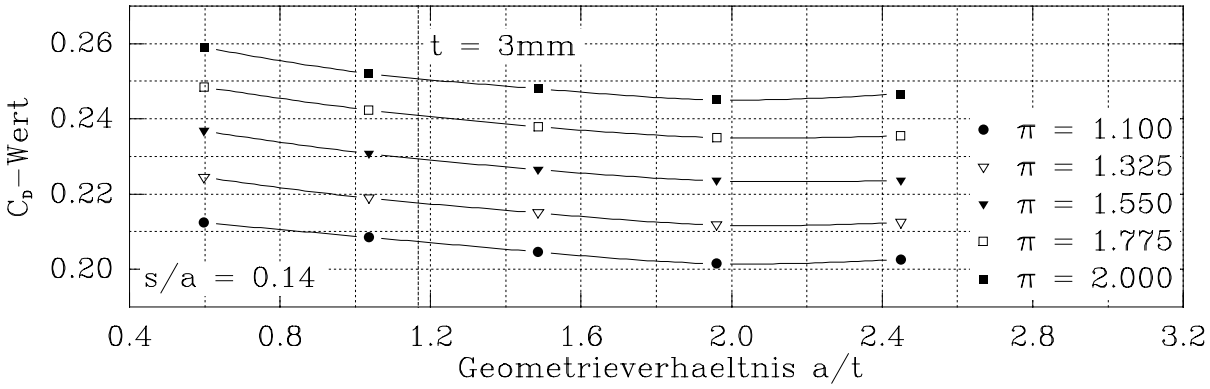


Abbildung 5.16: C_D-Wert als Funktion des Geometrieverhältnisses a/t für $s/a = 0.14$

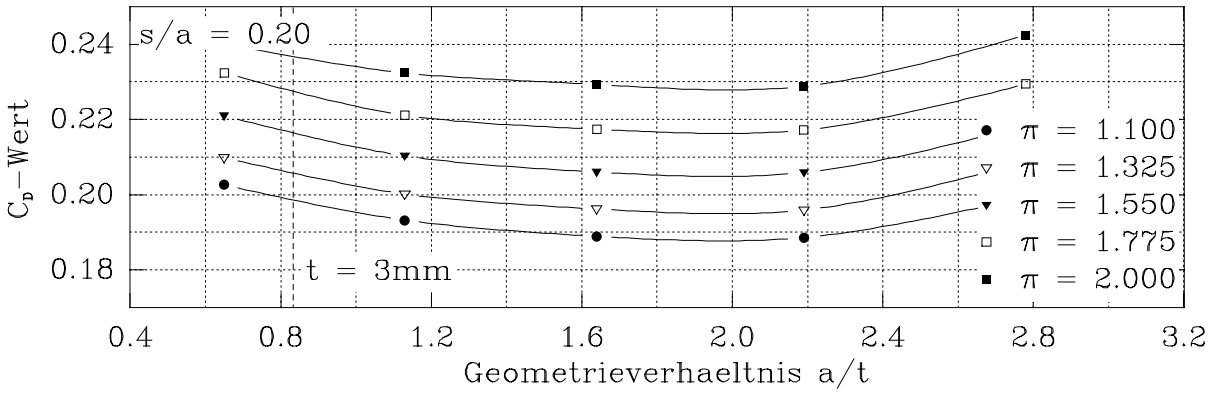


Abbildung 5.17: C_D-Wert als Funktion des Geometrieverhältnisses a/t für $s/a = 0.20$

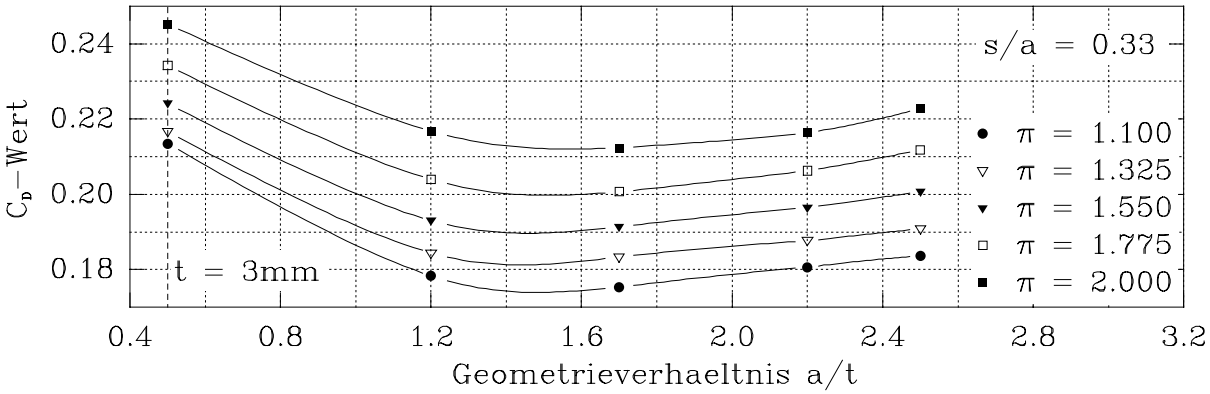
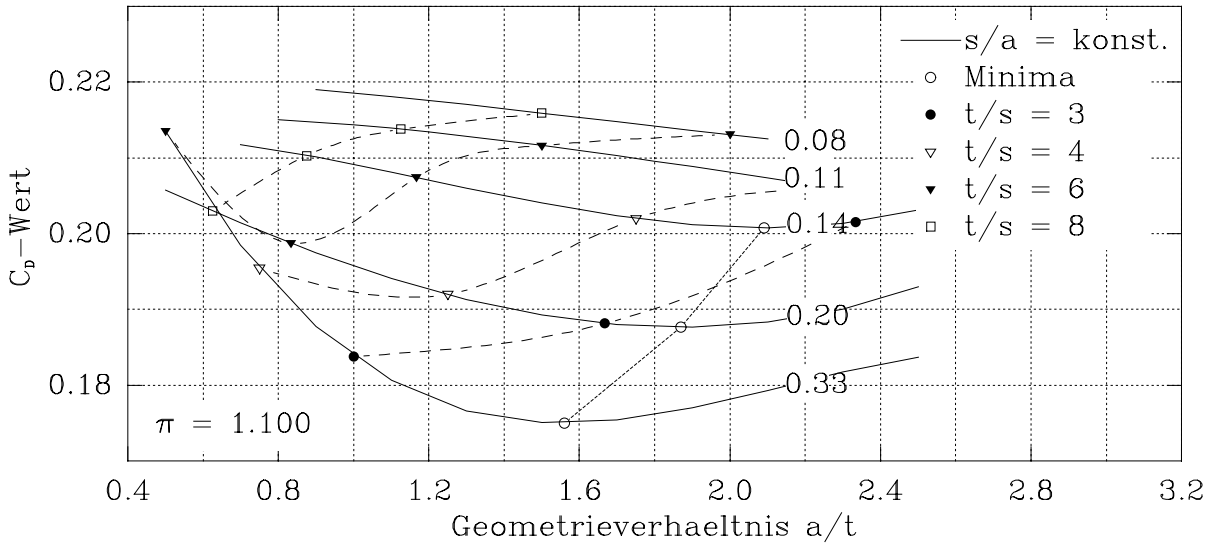


Abbildung 5.18: C_D-Wert als Funktion des Geometrieverhältnisses a/t für $s/a = 0.33$

5.8.7.2 Einfluß des Verhältnisses a/t ($\pi = konstant$)

In den Abbildungen 5.19 und 5.20 sind die Durchflußbeiwerte in Abhängigkeit vom Geometrieverhältnis a/t bei konstantem Druckverhältnis abgebildet. Hier sind die erhaltenen Minima und Linien konstanter Teilung eingetragen. Dabei erkennt man, daß es nicht sinnvoll ist, gewisse Teilungen zu unterschreiten, da dann der Durchflußbeiwert wieder ansteigt.



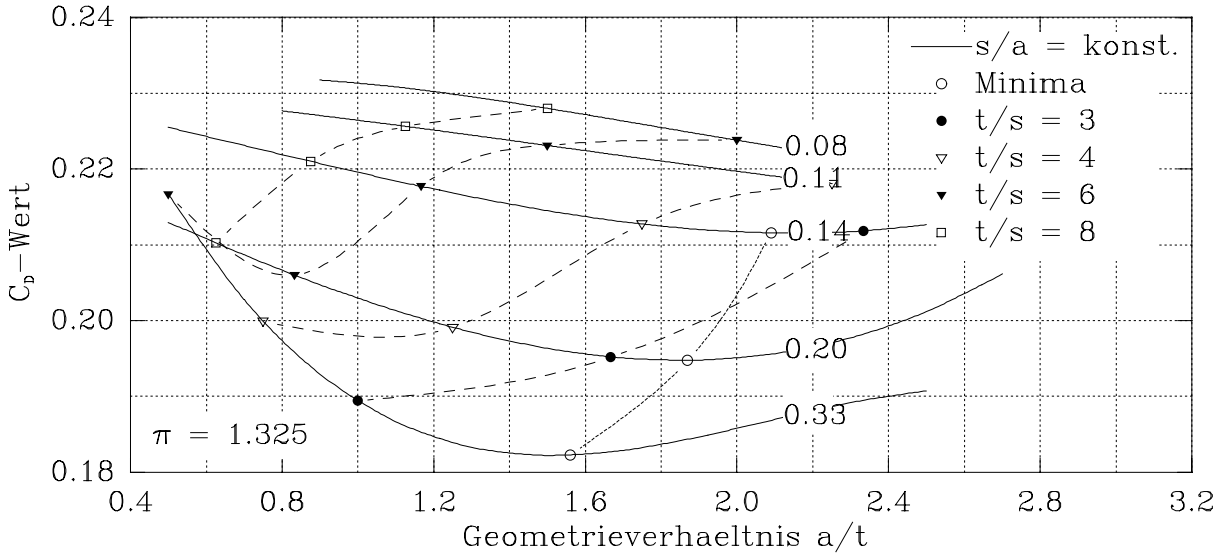


Abbildung 5.19: C_D-Wert als Funktion des Verhältnisses a/t für konstantes π

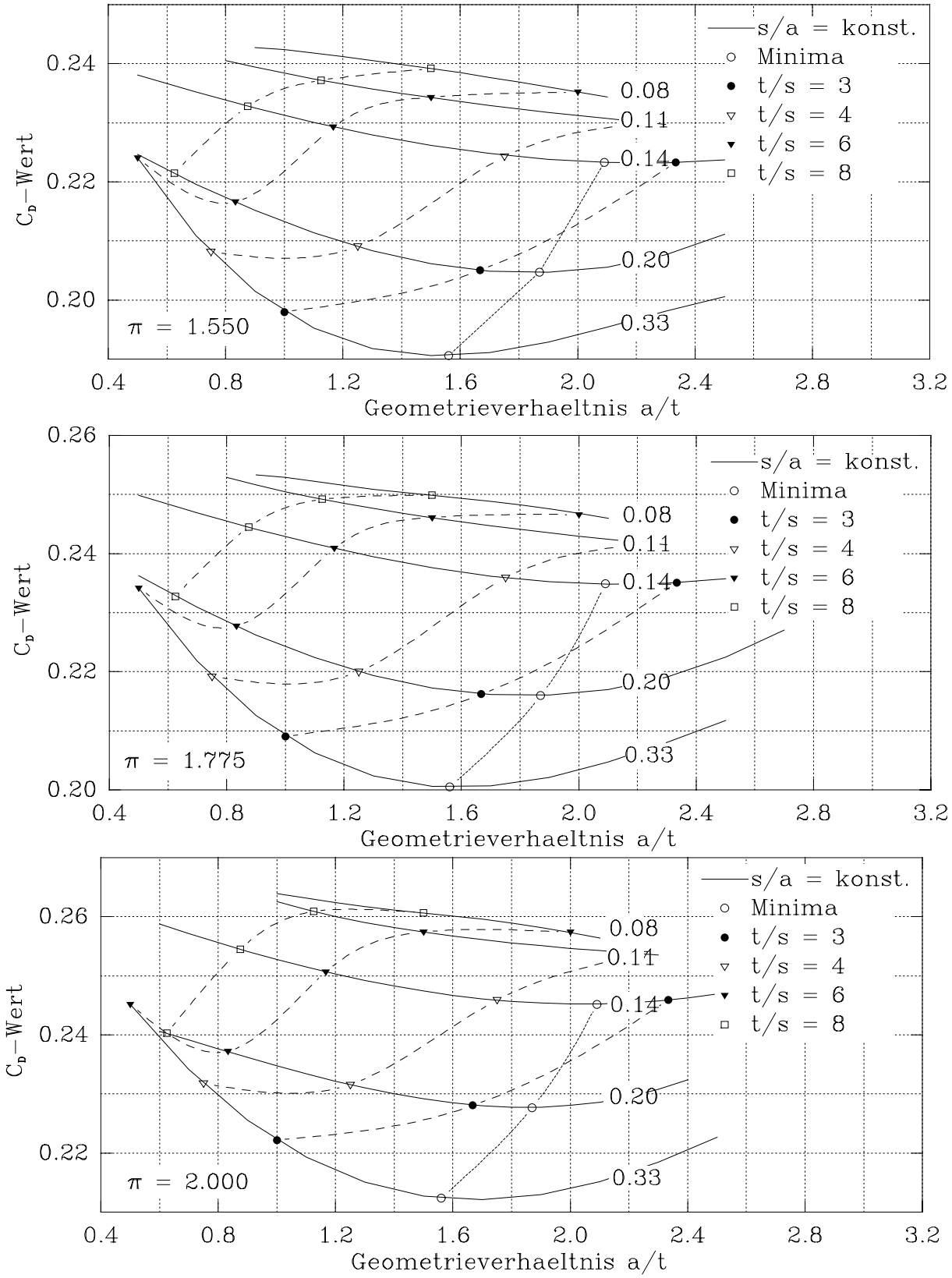


Abbildung 5.20: C_D-Wert als Funktion des Verhältnisses a/t für konstantes π

5.8.7.3 Einfluß des Verhältnisses s/a ($\pi = konstant$)

In der Abbildung 5.21 sind die C_D-Werte in Abhängigkeit vom Verhältnis s/a bei konstantem Druckverhältnis für bestimmte Verhältnisse a/t aufgetragen. Die Berechnungen erfolgen bei konstantem $s = 0.5mm$. Bei einem Verhältnis von $s/a \simeq 0.24$ wird der Durchflußbeiwert für ein Verhältnis $a/t = 1.5$ kleiner als für $a/t = 2.0$.

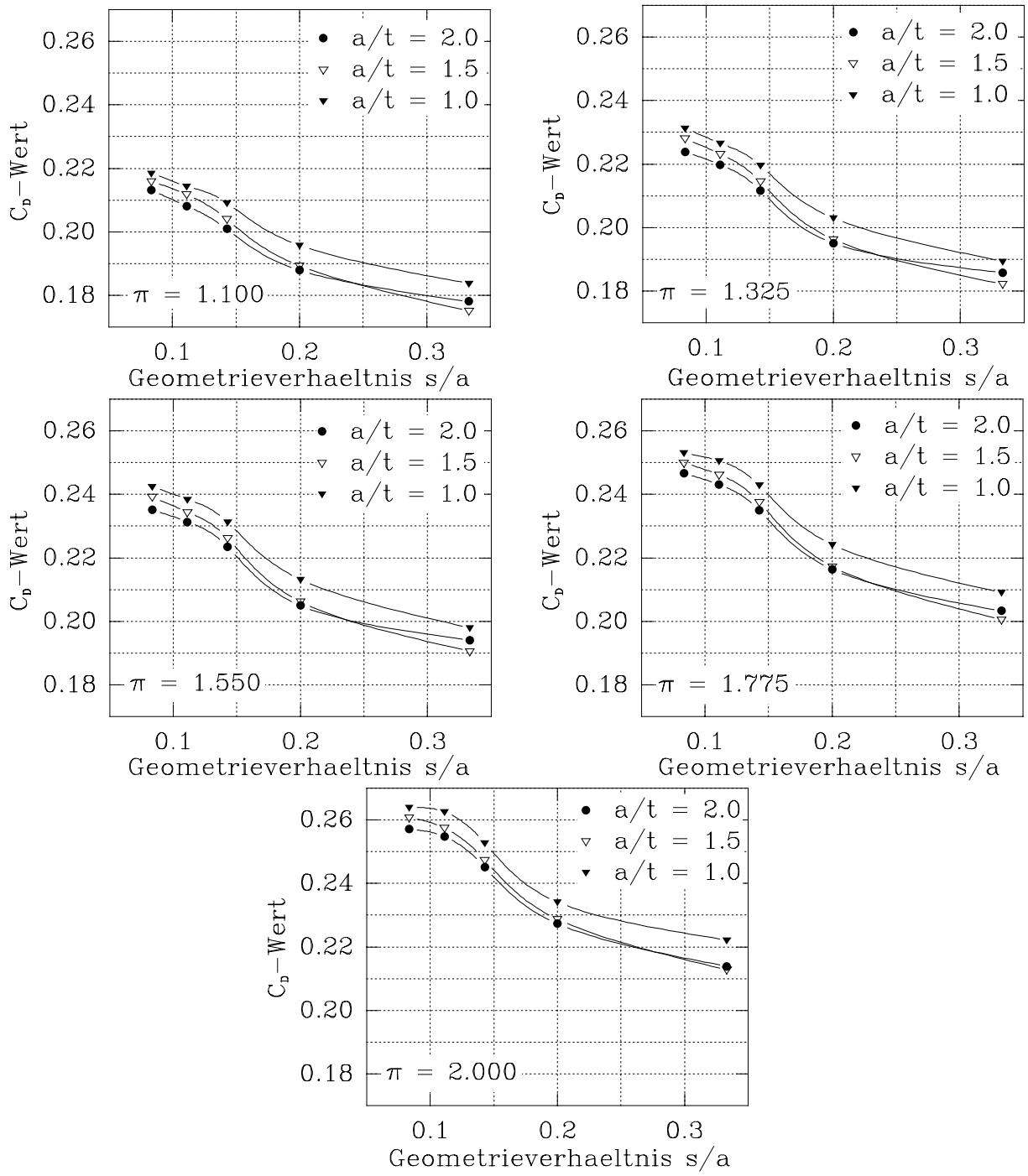


Abbildung 5.21: C_D-Wert als Funktion des Verhältnisses s/a für konstantes π

5.8.7.4 Einfluß des Verhältnisses s/a ($t/s = konstant$)

Mit zunehmender Bauhöhe wird auch der Statordurchmesser und somit die Querschnittsfläche des Labyrinthes größer. Die Spaltflächen um den Rotor bleiben konstant (Vergleichsfläche der Düse), während die äußeren Spaltflächen am Stator größer werden. Auf Grund der Axial-Symmetrie wird dieser Einfluß bei den Berechnungen berücksichtigt, während er bei einer 2D-Versuchseinrichtung (*Martin*) nicht in die Messungen eingeht.
In der Abbildung 5.22 sind die Durchflußbeiwerte über dem Geometrieverhältnis Spaltweite zu Bauhöhe für verschiedene Verhältnisse t/s aufgetragen. Ab einem Verhältnis von ca. $s/a = 0.11$ ist keine Erhöhung des C_D-Wertes und somit des Leckmassenstromes gegeben. Kann das Verhältnis ca. $s/a = 0.2$ vergrößert werden, so ist mit einer Senkung des Durchflußbeiwertes auf ein Minimum zu rechnen.
Bei einem Verhältnis Teilung zu Spaltweite von $t/s = 3$ ist kein Minimum erkennbar.

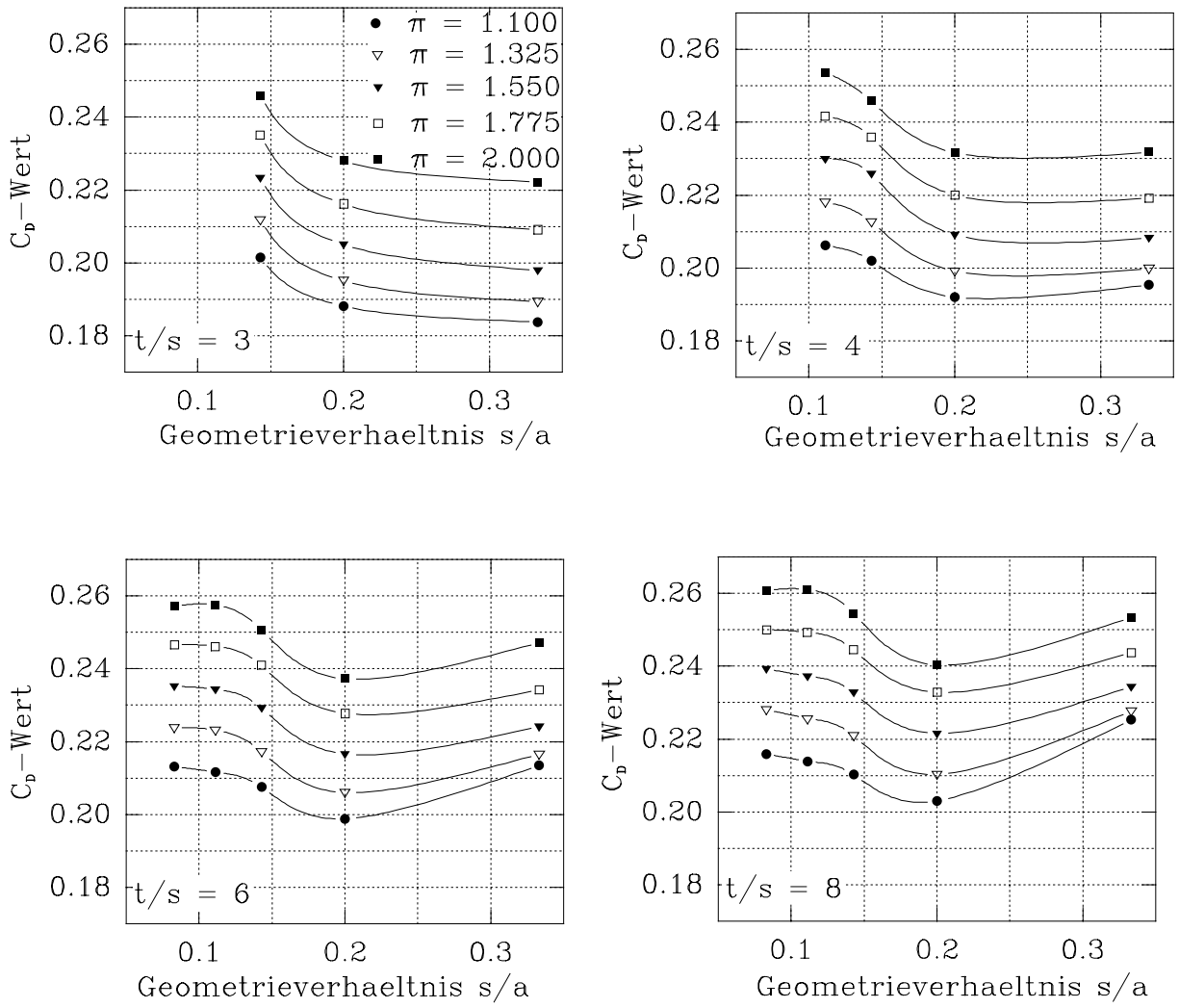


Abbildung 5.22: C_D-Wert als Funktion des Verhältnisses s/a für konstantes t/s

5.8.7.5 3D-Schaubilder

Um die erhaltenen Ergebnisse zu verdeutlichen, werden dreidimensionale Schaubilder angefertigt. Dabei wird der C_D-Werte in Abhängigkeit von den Geometrieverhältnissen a/t und s/a bei konstantem Druckverhältnis aufgetragen (Abbildung 5.23 und 5.24). Es ist zu erkennen, daß der C_D-Wert bei höheren Druckverhältnissen π größer wird und s/a einen größeren Einfluß auf den Leckmassenstrom als a/t hat.

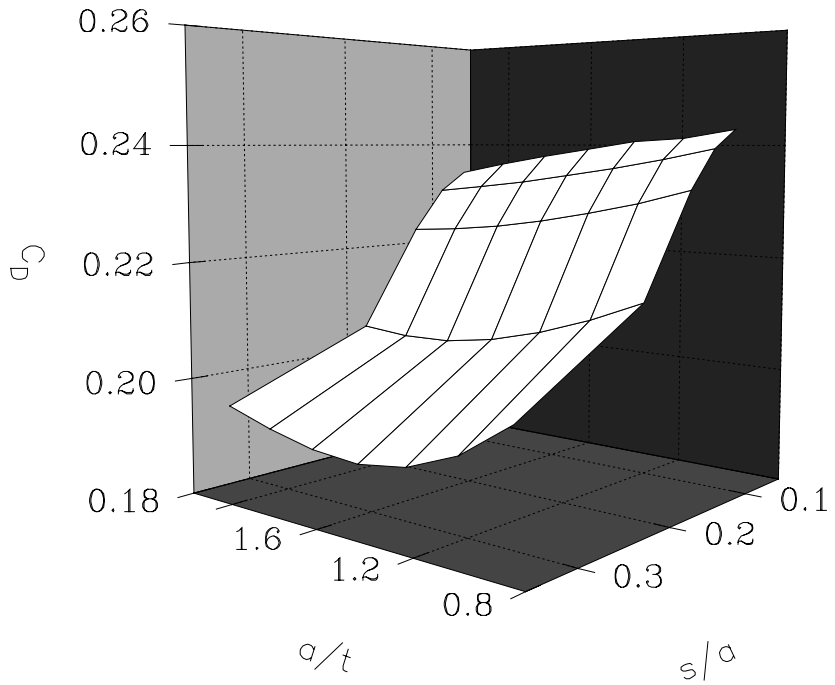


Abbildung 5.23: C_D-Wert als Funktion von a/t und s/a bei $\pi = 1.55$ ($Re = 390 - 1460$)

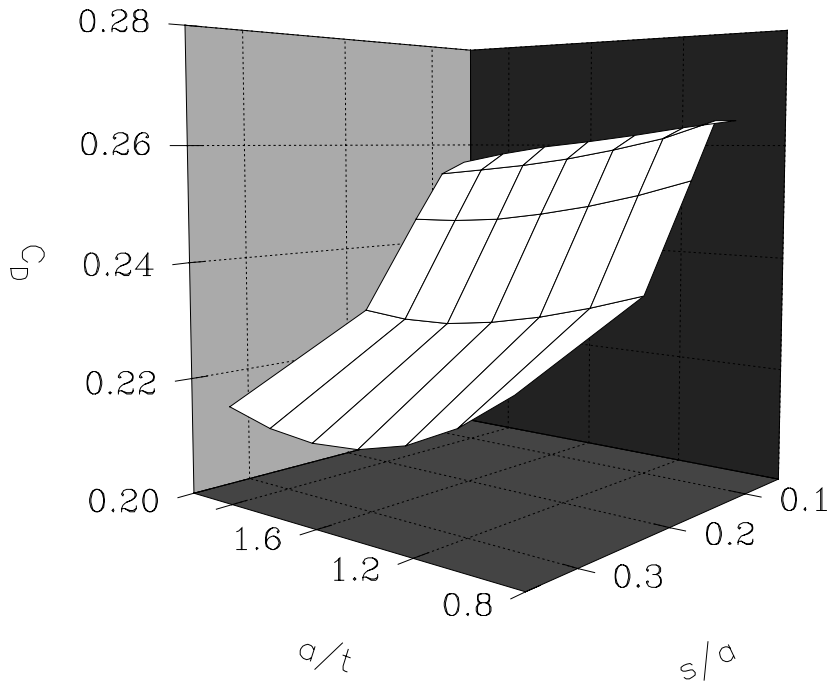


Abbildung 5.24: C_D-Wert als Funktion von a/t und s/a bei $\pi = 2.00$ ($Re = 560 - 2040$)

5.8.8 Strömungsverhältnisse in den Labyrinthen

5.8.8.1 Strömung im Labyrinth der Bauhöhe $a = 6.0mm$

Die unterschiedlichen Strömungsverhältnisse bei verschiedenen Teilungen und Bauhöhen zeigen die Abbildungen 5.25-5.33. Der Maßstab wird mit $M = 5 : 1$ gewählt. Die dargestellten Bereiche sind jeweils die ersten Kammern der Labyrinthdichtung. Das Gesamtdruckverhältnis ist einheitlich für alle Abbildungen $\pi \simeq 1.55$. Es werden die berechneten Absolutgeschwindigkeiten bestehend aus den Komponenten in x- und y-Richtung nach der Höhe des Betrages wiedergegeben. Die roten Farben in den Abbildungen bezeichnen große Geschwindigkeiten, die blauen kleinere. Die erwünschte Verwirbelung der Geschwindigkeitsenergie in den Kammern kommt dabei deutlich zum Ausdruck. Es kann auch eine hohe Geschwindigkeitszunahme in der Drosselstelle über den Dichtstreifen abgeleitet werden. Die Geschwindigkeit nimmt mit steigender Drosselzahl zu.
In der Abbildung 5.31 ist in der ersten Kammer nur eine geringe Verwirbelung erkennbar. Das läßt sich auf die für diese Bauhöhe relativ große Teilung zurückführen. Für diese Dichtung ergibt sich ein großer Durchflußbeiwert C_D (Abbildung 5.18).

Abbildung 5.25: Labyrinth: $a = 6.0mm$, $t = 6.32mm$

Abbildung 5.26: Labyrinth: $a = 6.0mm$, $t = 4.43mm$

Abbildung 5.27: Labyrinth: $a = 6.0mm$, $t = 2.74mm$

5.8.8.2 Strömung im Labyrinth der Bauhöhe $a = 3.5mm$

Abbildung 5.28: Labyrinth: $a = 3.5mm$, $t = 5.85mm$

Abbildung 5.29: Labyrinth: $a = 3.5mm$, $t = 2.36mm$

Abbildung 5.30: Labyrinth: $a = 3.5mm$, $t = 1.43mm$

5.8.8.3 Strömung im Labyrinth der Bauhöhe $a = 1.5mm$

Abbildung 5.31: Labyrinth: $a = 1.5mm$, $t = 3.00mm$

Abbildung 5.32: Labyrinth: $a = 1.5mm$, $t = 1.25mm$

Abbildung 5.33: Labyrinth: $a = 1.5mm$, $t = 0.68mm$

5.9 Schlußfolgerungen

Am Institut wurden Messungen an einer Vollabyrinthdichtung mit der Bauhöhe $a = 6mm$, einer Spaltweite $s = 0.5mm$, einem Durchmesser $D_{Rotor} = 300mm$ bei einer Teilung $t = 3.7mm$ durchgeführt. Verkleinerte man die Bauhöhe bei konstanter Teilung, so könnte auf Grund der Berechnungen der Durchflußbeiwert reduziert werden. In Abbildung 5.34 ist die absolute und die relative Verbesserung bezogen auf das Verhältnis Spaltweite zu Bauhöhe s/a dargestellt.

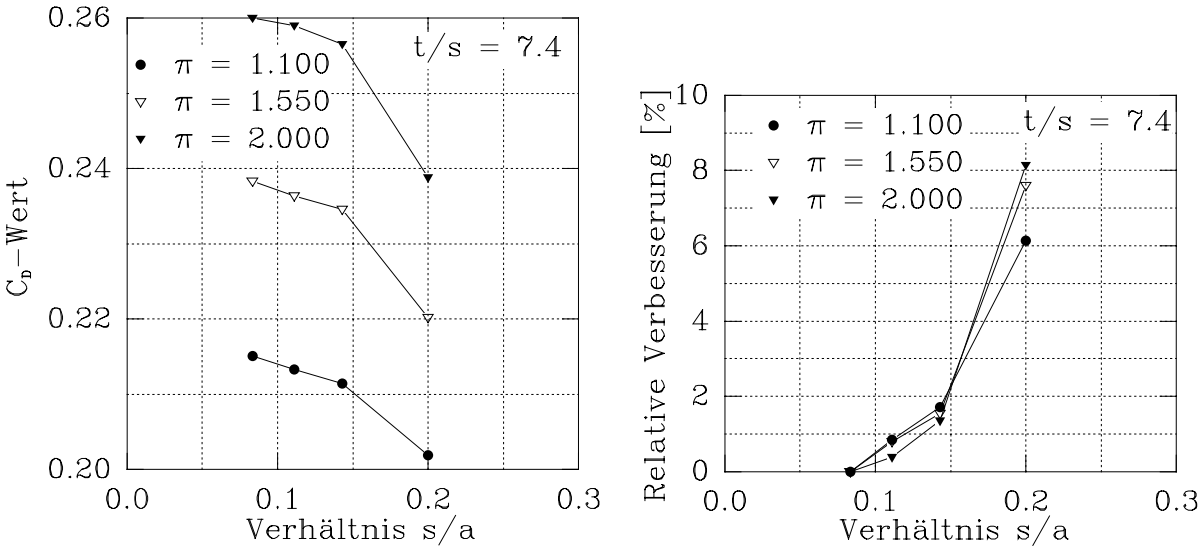


Abbildung 5.34: Erwartete Reduzierungen der Verluste

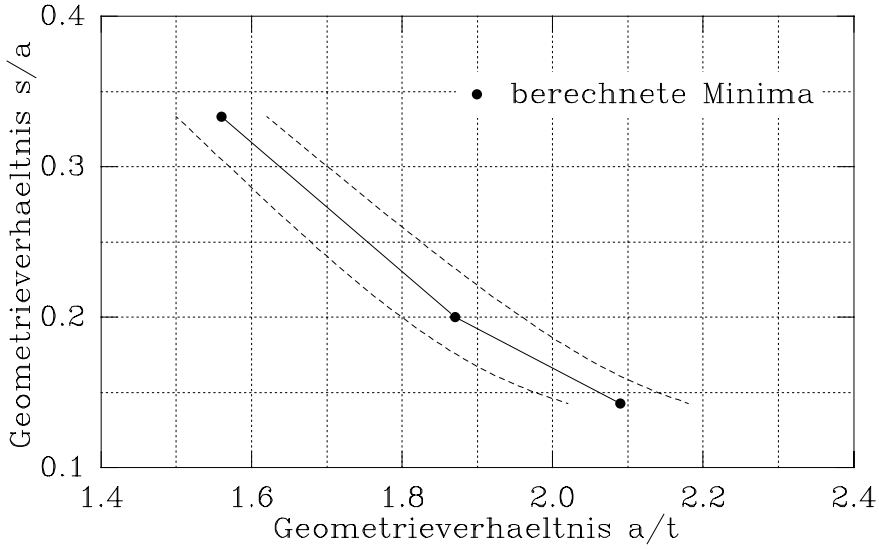


Abbildung 5.35: Optimale Verhältnisse a/t als Funktion von s/a

Ein weiteres Verbesserungspotential liegt in der der Verringerung der Teilung. Zwar ergibt sich nach den erfolgten Berechnungen für die Ausgangsverhältnis $s/a = 0.083$ kein optimales Verhältnis a/t (bei optimalen Verhältnissen ist der minimalste Leckmassenstrom zu erwarten), bis zu einem Verhältnis $t/s = 5.5$ ist aber eine Reduzierung des Leckmassenstromes zu erwarten. Bei diesem Verhältnis ergibt sich bei einer Spaltweite von $s = 0.5mm$ eine Teilung

von $t = 2.75mm$. Diese Teilung ist für einen Einbau der Dichtstreifen mittels Stemmdrähten als äußerstes Minimum anzusehen.
Die größten Verbesserungen sind bei den errechneten optimalen Geometrieverhältnissen a/t zu erwarten. Bei einem Verhältnis $a/t = 1.56$ bei einer Bauhöhe von $s/a = 0.333$ liegt die berechnete Reduzierung des Leckmassenstromes bei 18%. Dieser Wert bezieht sich auf die am Institut vorhande Dichtung. Diese Geometrie scheint jedoch in der Praxis aus betriebstechnischen Gründen nicht realisierbar. Für kleine Bauhöhen können die Dichtstreifen jedoch aus dem Vollen gedreht werden.
Die ermittelten Optima des Verhältnisses a/t sind in Abbildung 5.35 zusammengefaßt. Die Linien um die berechneten Werte sollen einen Streubereich, bedingt durch die Turbulenzmodellierung, Ausgleichsrechnungen u.a, darstellen.

5.10 Empfehlungen und Anregungen

Bei der Parameterstudie wurden die Spaltweite s, die Dichtstreifenbreite b, die Drosselstellenzahl z sowie der Rotordurchmesser D_{Rotor} konstant gehalten. Durch Variation dieser Parameter ergeben sich zusätzliche Kennzahlen, deren Einflüsse quantifiziert werden könnten.
Die kleiner werdende Dichtstreifenbreite, so die Angaben in der Literatur, senkt den Leckmassenstrom. Es wurde jedoch kein Beitrag gefunden, der den Einfluß der Breite quantifiziert. Außerdem spielt die Ausführung der Dichtstreifen beim Spalt und eine eventuelle Schrägstellung der Dichtstreifen beim Durchflußverhalten eine Rolle. Durch numerische Simulation könnten die Einflüsse mit einer weiteren Parameterstudie dargestellt werden. Außerdem sind in der Literatur Messungen angegeben, die Vergleiche zwischen Messung und Berechnung zulassen könnten.
Sind die Einflüsse der aus der Dimensionsanalyse ermittelten Kennzahlen bekannt, so kann ein Verfahren zur Bestimmung der optimalen Parameter bei einer vorgegebenen Abmessung gefunden werden. Mit so einem Verfahren sollte der minimale Leckmassenstrom bei einfacher Vorgehensweise ohne großen Rechenaufwand erreicht werden.
Der Leckmassenstrom kann außer durch Optimierung von Geometrieparametern auch durch Finden neuer Dichtungen reduziert werden. Mit einer Literaturstudie könnten eventuelle Neuerungen (z.B. *Bürstendichtung*) aufgezählt und mit bisher üblichen Dichtungsbauarten verglichen werden.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Aus der Literatur wurden Beiträge zur Bestimmung der optimalen Geometrie für eine Vollabyrinth-Dichtung zusammengefaßt. Die Dichtstreifenbreite b sollte unendlich klein sein, aus Gründen der Festigkeit werden aber Breiten von $b \simeq 0.3mm$ verwendet. Für das Verhältnis Spaltweite zu Bauhöhe gibt *Martin* ein Optimum von $s/a \simeq 0.25$ an. Dieser Wert wurde jedoch mit einer ebenen Versuchseinrichung ermittelt.
Zur Berechnung des Leckmassenstromes wurden verschiedene Durchflußgleichungen hergeleitet und in Tabellenform zusammengefaßt. Dabei wurde zwischen theoretischen, halbempirischen und empirischen Verfahren unterschieden. Die Durchflußgleichungen wurden mit einer am Institut durchgeführten Messung verglichen. Dabei traten erhebliche Abweichungen der Rechenverfahren von der Messung auf. Diese wurden als relativer Fehler in einem Diagramm aufgetragen.
Die in der Literatur verwendeten Durchflußbeiwerte wurden in einer Umrechnungstabelle dargestellt. Mit dieser Tabelle können Abweichungen unterschiedlicher Verfahren und Abweichungen der einzelnen Verfahren von einer Messung berechnet werden.
Die stationäre inkompressible turbulente Strömung wurde beschrieben. Dabei wurden die *Reynoldsgleichungen* ausgehend von *Navier-Stokes-Gleichungen* hergeleitet. Außerdem wurden die Eigenschaften dieser Gleichungen und die der Turbulenz allgemein erläutert. Für diese Strömung wurde auch das häufig angewendete $\overline{k}$-ε Modell beschrieben. Weiters wurde eine Übersicht und eine Begründung für die Anwendung von Turbulenzmodellen angeführt.
Durch Anwendung der Dimensionsanalyse ($\prod$-Theorem von *Buckingham*) wurden die für die Strömung durch ein Vollabyrinth relevanten Kennzahlen bestimmt. Einige dieser Kennzahlen ließen sich als Geometrieverhältnisse darstellen.
Um die Parameterstudie mittels FE-Berechnungen durchzuführen, wurde ein geeignetes Turbulenzmodell ermittelt. Beim Vergleich mit am Institut durchgeführten Messungen stellte sich das *Standard* $\overline{k}$-ε Modell in Kombination mit dem *Boussinesq*-Ansatz als jenes mit dem geringsten Fehler bei gleichzeitigem Erreichen des Konvergenzkriteriums heraus. Mit diesem Modell wurden Strömungen durch Labyrinthe unterschiedlicher Bauhöhen und Teilungen simuliert. Mit den berechneten C_D-Werten konnten einige optimale Geometrieverhältnisse von Bauhöhe zu Teilung ermittelt werden. Diese könnten das am Institut untersuchte Labyrinth in ihrer Dichtwirkung wesentlich verbessern. Die größte relative Verbesserung bezogen auf das Ausgangslabyrinth liegt bei Verhältnissen $s/a = 0.33$ und $a/t = 1.56$ bei 18%. Probleme könnten dann aber Wärmedehnungen während des Betriebes bereiten.

Literaturverzeichnis

[1] DÖRR, L. *Modellmessungen und Berechnungen zum Durchflußverhalten von Durchblicklabyrinthen unter Berücksichtigung der Übertragbarkeit.* Dissertation an der Universität Karlsruhe, 1985.

[2] EGLI, A. The Leakage of Steam Through Labyrinth Seals. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* (1935), 115–122.

[3] FDI. *FIDAP Manual.* Fluid Dynamics International, Evanston, 1990.

[4] FDI. *FIDAP 7.5 Update Manual.* Fluid Dynamics International, Evanston, 1995.

[5] GERSTEN, K. *Einführung in die Strömungsmechanik.* Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1991.

[6] GERSTEN, K., UND HERWIG, H. *Strömungsmechanik.* Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[7] GRUBER, P. *Mathematik 2.* Skriptum der Technischen Universität Wien, 1992.

[8] HARTMANN, W. Messung von Stopfbuchsverlusten. *Forschung Bd.13/Heft 4* (1942), 165–168.

[9] KEARTON, W., UND KEH, T. Leakage of Air through Labyrinth Glands of Staggered Type. *Proc. Instn. mech. Engrs. 166* (1952), 180–188.

[10] KELLER, C. Strömungsversuche an Labyrinthdichtungen für Dampfturbinen. *Escher-Wyss Mitteilungen* (1934), 9–13.

[11] MARTIN, P. *Beitrag zur Durchflußberechnung von Spaltdichtungen.* Dissertation an der Universität Karlsruhe, 1967.

[12] PRANDTL, L., OSWATITSCH, K., UND WIEGHARDT, K. *Führer durch die Strömungslehre, 9.Auflage.* Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1990.

[13] SOCKEL, H. *Grundzüge der Strömungslehre.* Skriptum der Technischen Universität Wien, 1993.

[14] SOCKEL, H. *Turbulente Strömungen.* Skriptum der Technischen Universität Wien, 1996.

[15] SPURK, J. *Dimensionsanalyse in der Strömungslehre.* Springer-Verlag, 1992.

[16] TRAUPEL, W. *Thermische Turbomaschinen Bd.1, 2.Auflage.* Springer-Verlag, 1966.

[17] TRUCKENBRODT, E. *Fluidmechanik Bd.1, 3.Auflage.* Springer-Verlag, 1989.

[18] TRUTNOVSKY, K., UND KOMOTORI, K. *Berührungsfreie Dichtungen, 4.Auflage.* VDI-Verlag Düsseldorf GmbH, 1981.

[19] WINKLER, H. Untersuchungen über das Verhalten berührungsfreier Dichtungen, insbesondere Durchblick-Stopfbüchsen für Turbomaschinen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Dresden Bd.7/Heft 1* (1957/58), 35–65.

[20] WITTIG, S. *Wärmeübergang in Labyrinthen, Rotierende Labyrinthdichtungen.* Universität Karlsruhe, 1990.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang A

Turbulente Strömung

A.1 Stationäre inkompressible turbulente Strömung

Einfachheitshalber soll die inkompressible Strömung behandelt werden, obwohl die Strömung durch das Labyrinth kompressibel berechnet wird. Im Fall der Kompressibilität treten zusätzliche Terme in den Gleichungen auf, die Probleme der Turbulenzmodellierung können aber auch bei Inkompressibilität erläutert werden.

A.2 Mittelwertbildung

Um zu einer Definition über die gemittelten Werte zu kommen, bedient man sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach dieser wird die turbulente Strömung als stochastischer Prozeß mit der Zufallsvariablen ϕ aufgefaßt. Bei einer *statistisch-stationären* Strömung bietet sich die zeitliche Mittelung an (bei statistisch-instationärer die räumliche Mittelung) [17]. Diese Strömung wird in eine Grundströmung und in einen Schwankungsanteil aufgeteilt. Für einen Momentanwert ϕ einer beliebigen Strömungsgröße kann man dann schreiben:

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \qquad . \tag{A.1}$$

Hierbei ist der zeitliche Mittelwert $\overline{\phi}$ definiert als:

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \phi dt \tag{A.2}$$

und ϕ' die momentane Abweichung vom Mittelwert $\overline{\phi}$. Nach dieser Definition muß für ϕ' nach Gl.(A.2) gelten:

$$\overline{\phi'} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \phi' dt = 0 \qquad . \tag{A.3}$$

Dabei ist Δt eine genügend lange Zeit. Als *Varianz* ist definiert:

$$\overline{(\phi')^2} \neq 0 \qquad ! \tag{A.4}$$

Von einer stationären Strömung spricht man dann, wenn deren charakteristische Größen (Druck p, Temperatur T, Dichte ρ und Geschwindigkeit u bzw. v) von der Zeit unabhängig sind. Es gilt dann folgender Ausdruck:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad . \tag{A.5}$$

Streng genommen sind turbulente Strömungen instationär. In der Praxis sind jedoch nicht die Einzelheiten der turbulenten Schwankungsbewegungen von Interesse, sondern vielmehr die Bewegungen der geordneten Grundströmung. Diese ist häufig stationär, also zeitunabhängig. Die Behandlung einer turbulenten Strömung als stationäre wird *quasistationär* [5] genannt. In Abbildung A.1 sind die statistisch-stationäre und -instationäre Strömung dargestellt.

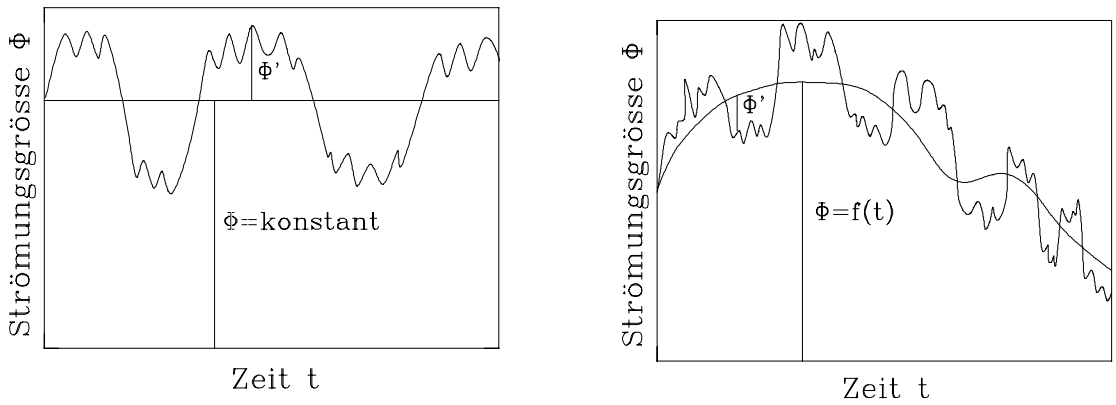


Abbildung A.1: Statistisch-stationäre und -instationäre Strömung

A.2.1 Rechenregeln für die Mittelwertbildung

Es sei ϕ eine bestimmte physikalische Feldgröße und s eine unabhängige Variable (Zeit t oder die Ortskoordinaten x, y, z). Dann gelten folgende Rechenregeln [17]:

$$\overline{\phi_1 \phi_2} = \overline{\phi_1}\,\overline{\phi_2} + \overline{\phi_1' \phi_2'} \tag{A.6}$$

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \tag{A.7}$$

$$\overline{\frac{\partial \phi'}{\partial s}} = 0 \tag{A.8}$$

$$\overline{\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial s}} = \overline{\phi_1} \frac{\partial \overline{\phi_2}}{\partial s} + \overline{\phi_1' \frac{\partial \phi_2'}{\partial s}} \qquad . \tag{A.9}$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß die Terme mit linearen Schwankungsanteilen bei der Mittelung wegfallen.

A.3 Gleichungen für die turbulente Strömung

Die Gleichungen sollen für die *zweidimensionale* oder *ebene* Strömung angeschrieben werden. Die für die Strömung charakteristischen Größen sind dann nur von zwei Koordinaten

abhängig. Jede reale Strömung ist dreidimensional, da stets Randeinflüsse vorhanden sind. Diese müssen für eine sinnvolle zweidimensionale Näherung asymptotisch klein sein. Es gilt dann:

$$w = 0 \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad . \tag{A.11}$$

Die Gewinnung strömungstechnischer Informationen erfordert im allgemeinen die Lösung der Differentialgleichungen für Massen-, Impuls- und Energietransport. Im folgenden sollen die für die turbulente Strömung wichtigen *Reynoldsgleichungen* hergeleitet werden. Die *allgemeine Theorie der Flüssigkeitsreibung* [12] lehrt, daß durch die Formänderung der einzelnen Flüssigkeitselemente Spannungen von ähnlicher Art entstehen wie bei elastischen Körpern. Der Unterschied dabei ist, daß die Spannungen nicht den Formänderungen, sondern den Formänderungsgeschwindigkeiten proportional sind. Die Gleichungen für die Spannungskomponenten lauten nach den Lehren der Elastizitätstheorie:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \tag{A.12}$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{A.13}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tag{A.14}$$

Die zeitabhängigen *Navier-Stokes-Gleichungen* (*Bewegungsgleichungen* oder *Impulsgleichungen*) beschreiben mit der *Kontinuitätsgleichung* die turbulente Strömung (auch die laminare) vollständig. Bei einer ebenen Strömung sind drei Unbekannte $u_{(t,x,y)}$, $v_{(t,x,y)}$ und $p_{(t,x,y)}$ für zwei Bewegungsgleichungen und die Kontinuität vorhanden. Dabei wird angenommen, daß das Fluid *inkompressibel*, also $\rho = konstant$ ist. Der Druck ist dann gleich dem Mittelwert der Normalspannungen (*Hypothese von Stokes*). Weiters wird angenommen, daß es sich um sogenannte *Newton'sche Fluide* handelt, also ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungs- und Deformationstensor herrscht. Bei Gasen führt das *Newton'sche Gesetz* zu zusätzlichen Normalspannungen. Die dafür zuständige Zähigkeit wird *Kompressionszähigkeit* [14] genannt. Der Einfluß ist jedoch gering und außerdem schwer zu bestimmen. Die *Navier-Stokes-Gleichungen* haben dann folgende Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{Kontinuität} \tag{A.15}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}}_{I} = \underbrace{X}_{II} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{III} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{IV} \qquad \textbf{Impuls in x-Richtung} \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{Impuls in y-Richtung} \tag{A.17}$$

I) Trägheitskräfte je Masse
II) Massenkraft je Masse

III) Druckkräfte je Masse
IV) Zähigkeitskräfte je Masse

Diese Gleichungen bringen das Gleichgewicht zwischen Massen-, Trägheits-, Druck- und Reibungskräfte zum Ausdruck. Dabei ist μ die *dynamische Viskosität* [5], oft auch nur Viskosität genannt. Es wird auch die *kinematische Viskosität* verwendet. Sie ist definiert als:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad . \tag{A.18}$$

Die analytische Lösung der Differentialgleichungen Gln.(A.15) bis (A.17) ist nur für eine geringe Zahl von einfachen Randbedingungen möglich. Diese sind aber in der Praxis von geringer Bedeutung. Auf Grund der Nichtlinearität der Gleichungen und der Komplexität der Strömungsrandbedingungen muß auf numerische Berechnungsverfahren zurückgegriffen werden. Für turbulente Strömungsvorgänge sind, wie bereits erwähnt, vor allem die Komponenten der Grundströmung von Interesse [5]. Es sollen daher die *Navier-Stokes-Gleichungen* zeitlich gemittelt werden. Auf Grund der Analogie wird nur die erste der beiden Bewegungsgleichungen hergeleitet. Mit den Momentanwerten der Variablen:

$$u = \overline{u} + u' \tag{A.19}$$

$$v = \overline{v} + v' \tag{A.20}$$

$$p = \overline{p} + p' \tag{A.21}$$

erhält man für die Kontinuitätsgleichung Gl.(A.15):

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad . \tag{A.22}$$

und für die *Navier-Stokes-Gleichung* nach Wegfall des zeitabhängigen Terms auf Grund der Gl.(A.5):

$$\begin{aligned} &\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + u'\frac{\partial u'}{\partial x} + \\ &\overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} v'\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{v}\frac{\partial v'}{\partial y} + v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x}\right) + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{A.23}$$

Führt man nun die zeitliche Mittelung dieser Gleichungen durch, d.h für jedes Glied in dieser Gleichung wird die Mittelung angewendet, so erhält man auf Grund der Anwendung der Rechenregeln aus Kapitel A.2.1 auf Seite 63 für die gemittelte Kontinuitätsgleichung Gl.(A.22):

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \quad . \tag{A.24}$$

Für die Schwankungsanteile muß auf Grund dieser Gleichung ebenfalls die Kontinuitätsgleichung erfüllt sein:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad . \tag{A.25}$$

Für die *Navier-Stokes-Gleichung* ergibt sich dann:

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}\right)-\left(\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}\right) \quad . \tag{A.26}$$

Für den Klammerausdruck auf der rechten Seite erhält man:

$$\begin{aligned}\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial y}} &= \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial(u'^2)}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial(u'v')}{\partial y}}-\overline{u'\frac{\partial v'}{\partial y}}\\ &= \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial(u'^2)}{\partial x}}+\overline{\frac{\partial(u'v')}{\partial y}}+\overline{u'\frac{\partial u'}{\partial x}}\\ &= \overline{\frac{\partial(u'v')}{\partial y}}+\overline{\frac{\partial(u'^2)}{\partial x}} \quad .\end{aligned} \tag{A.27}$$

Auf diese Schreibweise kommt man, wenn man die Kontinuität der Schwankungsanteile und eine einfache Umformung mit der Produktregel anwendet:

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial u'}{\partial x} \tag{A.28}$$

$$\frac{\partial(u'v')}{\partial y} = v'\frac{\partial u'}{\partial y}+u'\frac{\partial v'}{\partial y} \quad . \tag{A.29}$$

Damit lauten die gemittelten *Navier-Stokes-Gleichungen*, die auch als *Reynoldsgleichungen* bezeichnet werden:

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\overline{(u'^2)}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(u'v')}}{\partial y}\right) \tag{A.30}$$

$$\overline{v}\frac{\partial\overline{v}}{\partial y}+\overline{u}\frac{\partial\overline{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial\overline{(u'^2)}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(u'v')}}{\partial x}\right) \quad . \tag{A.31}$$

A.3.1 Grenzschichten

Unter einer Grenzschicht versteht man, wenn in Hauptströmungsrichtung nur kleine und normal dazu große Geschwindigkeitsgradienten vorherrschen [14]. Für turbulente Strömungsgrenzschichten reduzieren sich daher die beiden Impulsgleichungen auf eine Gleichung in Strömungsrichtung. In diesem Bereich herrscht die u-Komponente vor. Diese ändert sich in y-Richtung am stärksten. Da sich die Größen in x-Richtung nur sehr schwach im Vergleich zur Querrichtung ändern, gilt in guter Näherung:

$$\overline{\frac{\partial(u'^2)}{\partial x}} \ll \overline{\frac{\partial(u'v')}{\partial y}} \quad . \tag{A.32}$$

Die Grenzschichtgleichung lautet dann:

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}-\frac{\partial\overline{(u'v')}}{\partial y} \quad . \tag{A.33}$$

Dabei ist $\overline{p}$ der am Rand der Grenzschicht vorgegebene Druck. Mit der Kontinuitätsgleichung hat man dann zwei Gleichungen für die drei Unbekannten $\overline{u}$, $\overline{v}$, und $\overline{(u'v')}$. Die Mittelwerte der Produkte der Schwankungsgeschwindigkeiten sind charakteristische Merkmale der turbulenten Strömung. Durch das Auftreten des Ausdrucks $\overline{(u'v')}$ ist das gemittelte Gleichungssystem nicht mehr geschlossen. Dieses reduzierte Gleichungssystem (mehr Unbekannte als Gleichungen) läßt sich dadurch schließen, indem man für die sogenannte *turbulente Schubspannung* oder *Reynoldsspannung*:

$$\overline{\tau_t} = -\rho\overline{(u'v')} \tag{A.34}$$

einen algebraischen Ausdruck angibt. Diese Schubspannung ist eine Folge des Impulsaustausches durch die turbulente Schwankungsbewegung. Die Wirkung gleicht einer laminaren Strömung erhöhter Viskosität. Man spricht daher auch von *turbulenter Scheinreibung* [5]. Für die viskose Schubspannung gilt nach dem *Newton'schen Reibungsgesetz*:

$$\overline{\tau_v} = \mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} \quad . \tag{A.35}$$

Die gesamte mittlere Schubspannung τ_{tot} ergibt sich aus dem viskosen und turbulenten Anteil zu:

$$\overline{\tau_{tot}} = \overline{\tau_v} + \overline{\tau_t} = \mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y} - \rho\overline{(u'v')} \quad . \tag{A.36}$$

Die Verläufe der Schubspannungen über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ (siehe Gl.(A.44) auf Seite 69) sind in Abbildung A.2 dargestellt [3].

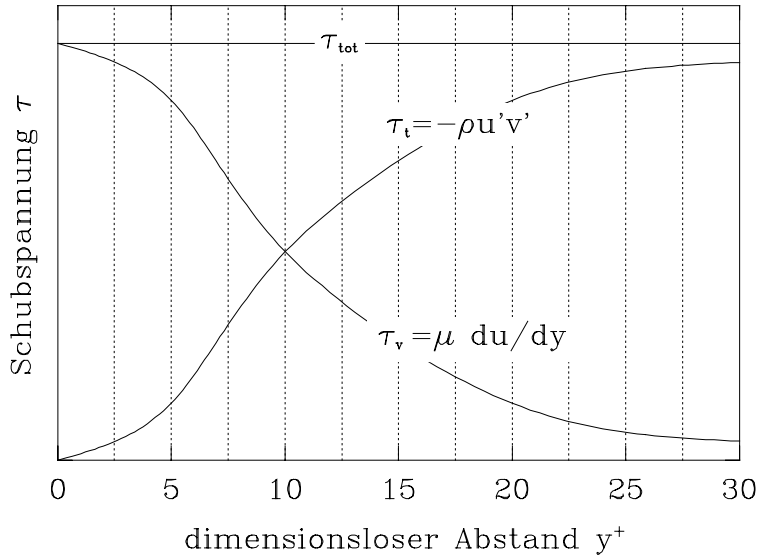


Abbildung A.2: Verläufe der Schubspannungen im Wandbereich

Man erhält dann mit Gl.(A.36) und Gl.(A.32) für Gl.(A.30):

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial\overline{\tau_{tot}}}{\partial y} \quad . \tag{A.37}$$

Diese Gleichung gilt formal für laminare und für turbulente Grenzschichten. Im laminaren Fall ergibt sich τ_{tot} aus dem *Newton'schen Reibungsgesetz* allein, während im turbulenten

Fall τ_{tot} um τ_t erweitert wird.
Formal läßt sich die Gl.(A.36) auch schreiben als:

$$\overline{\tau_{tot}} = \rho(\nu + \nu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = (\mu + \mu_t)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \tag{A.38}$$

mit

$$\nu_t = -\frac{\overline{u'v'}}{\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu_t = -\rho\frac{\overline{u'v'}}{\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}} \qquad . \tag{A.39}$$

Dabei ist ν_t die *scheinbare kinematische Viskosität.* Im Gegensatz zur kinematischen Viskosität ist ν_t keine Stoffkonstante, sondern eine geometrie- und strömungsabhängige Ortsfunktion. Die Hauptschwierigkeit in der Theroie der turbulenten Grenzschichten liegt im Aufstellen von Formeln für τ_t. Um das oben angesprochene *Schließungsproblem* für turbulente Strömungen zu lösen, muß dafür ein Zusammenhang zwischen der turbulenten Schwankungsbewegung und der mittleren Bewegung der Grundströmung gefunden werden. Ein Zusammenhang ist bisher nur auf empirischen bzw. halbempirischen Weg zu gewinnen *(Turbulenzmodellierung).*

A.3.2 Der Wandbereich

Strömungen im Wandbereich sind von entscheidender Bedeutung. Auf Grund der verschwindenden Tangentialgeschwindigkeit herrscht hier ein scharfer Übergang zwischen laminarer und vollturbulenter Strömung. Der Abstand von der Wand, in dem diese Übergänge erfolgen ist zwar gering, doch erfolgen hier die größten Veränderungen der Strömungsparameter. Diese großen Veränderungen in einem kleinen Bereich bringen gewisse Schwierigkeiten in der Modellierung mit sich. Es bedarf beträchtlich mehr Aufwand universelle Modelle für Übergangsströmungen zu entwickeln, als es für rein turbulente Strömung der Fall ist. Das ist auch ein Grund, warum die meisten Modelle nur für große *Reynoldszahlen* geeignet sind. Für die Wandregionen wurden Funktionen ermittelt, die auf der eindimensionalen Strömung und empirischen Beobachtungen beruhen. Da die gesamte Schubspannung τ_{tot} im Wandbereich konstant ist [3], gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{tot}) = 0 \qquad . \tag{A.40}$$

Nach der *Mischungsweg-Hypothese von Prandtl* [5] erhält man für die turbulente Schubspannung:

$$\tau_t = \rho l^2 \left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right| \frac{d\overline{u}}{dy} \tag{A.41}$$

Dabei ist l die Mischungsweglänge. Mit einem positiven Ausdruck $d\overline{u}/dy$ ergibt sich für Gl.(A.41):

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \qquad . \tag{A.42}$$

Für die gesamte Schubspannung τ_{tot} ergibt sich somit:

$$\tau_{tot} = \mu \frac{d\overline{u}}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)^2 \quad . \tag{A.43}$$

Zur Verallgemeinerung werden dimensionslose Größen folgender Form eingeführt:

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \tag{A.44}$$

$$l^+ = \frac{\rho u_\tau l}{\mu} \tag{A.45}$$

$$u^+ = \frac{\overline{u}}{u_\tau} \quad . \tag{A.46}$$

Dabei ist die *Schubspannungsgeschwindigkeit* u_τ [5] definiert als:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{tot}}{\rho}} \quad . \tag{A.47}$$

Man erhält dann für die Gl.(A.43):

$$\frac{du^+}{dy^+} + l^{+2} \left(\frac{du^+}{dy^+} \right)^2 = 1 \quad . \tag{A.48}$$

Mit einer geeigneten Modellierung von $l^+_{(y^+)}$ stellt diese Gleichung eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung $u^+_{(y^+)}$ dar. Für $y^+ \to 0$ und $y^+ \to \infty$ sind auch Angaben ohne Modellierung möglich [5].
a)*reinviskose Schicht*: $y^+ \to 0$
Unmittelbar an der Wand muß die turbulente Schwankungsbewegung verschwinden. Damit wird $l^+ = 0$. Daher lautet Gl.(A.48) für die reinviskose Schicht:

$$u^+ = y^+ \qquad \text{für} \quad y^+ \to 0 \quad . \tag{A.49}$$

b)*vollturbulente Schicht*: $y^+ \to \infty$
Mit $y^+ \to \infty$ wird nun derjenige Bereich der Strömung gekennzeichnet, in dem die Viskosität gegenüber dem turbulenten Impulsaustausch keine Wirkung mehr besitzt. Daher kann der erste Term auf der linken Seite der Gl.(A.48) vernachlässigt werden. Außerdem muß die Funktion $l^+_{(y^+)}$ von der Viskosität unabhängig sein. Dies ist der Fall, wenn l^+ proportional zu y^+ ist. Also gilt in diesem Bereich:

$$l^+ = \kappa y^+ \quad . \tag{A.50}$$

Dabei ist κ eine universelle Konstante. Sie wird *Kármán*-Konstante [5] genannt und hat den Wert $\kappa = 0.41$ (es wird auch der Wert $\kappa = 0.40$ verwendet [14]). Damit erhält man für Gl. (A.48):

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa y^+} \qquad \text{für} \quad y^+ \to \infty \quad . \tag{A.51}$$

Die Lösung erhält man nach einmaliger Integration zu:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \qquad \text{für} \quad y^+ \to \infty \qquad . \tag{A.52}$$

Diese Gleichung nennt man auch *universelles logarithmisches Wandgesetz* [12] der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung. Formal kann man diese Gleichung auch schreiben als:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+) \qquad \text{für} \quad y^+ \to \infty \qquad . \tag{A.53}$$

E ist dabei ein empirischer Koeffizient mit $E = 9.0$ [3] für glatte Wände ($C = 5.5 - 5.8$) [14]. Je nach Größe von y^+ läßt sich nun der Geschwindigkeitsverlauf in drei Bereiche unterteilen:

viskose Unterschicht	$0 < y^+ < 5$
Übergangsschicht	$5 < y^+ < 30$
vollturbulenter Wandbereich	$30 < y^+$.

Eine Funktion für den Wandbereich, die sowohl für die viskose Unterschicht ($y^+ < 5$), dem Übergangsbereich ($5 < y^+ < 30$) und dem vollturbulenten Bereich ($y^+ > 30$) Gültigkeit besitzt, stellt das *Reichardt'sche Gesetz* [3] dar. Dieses ist definiert als:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + 0.4y^+) + 7.8(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+}) \qquad \textbf{Reichardt'sches Gesetz} \tag{A.54}$$

Geht man vom natürlichen Logarithmus zum Zehnerlogarithmus über ($\ln x = \ln 10 \lg x = 2.3026 \lg x$), so ergibt sich mit $\kappa = 0.40$ die Gl.(A.52) zu:

$$u^+ = 5.75 \lg y^+ + 5.5 \qquad . \tag{A.55}$$

In Abbildung A.3 sind die experimentell ermittelten Verläufe der Wandgesetze dargestellt. Man erkennt dabei einen geradlinigen Verlauf ab $y^+ = 30$. Würde diese Gerade aber bis zum Wandabstand $y^+ = 0$ weiter verwendet werden, so ergebe sich in der Wandung eine Geschwindigkeit ungleich Null. Diese muß auf Grund der *Haftbedingung* [6] aber gleich Null sein. In unmittelbarer Wandnähe ist die Geschwindigkeit proportional dem Wandabstand. Dieser Verlauf ist aber nur für die Unterschicht mit ($y^+ < 5$) gültig.

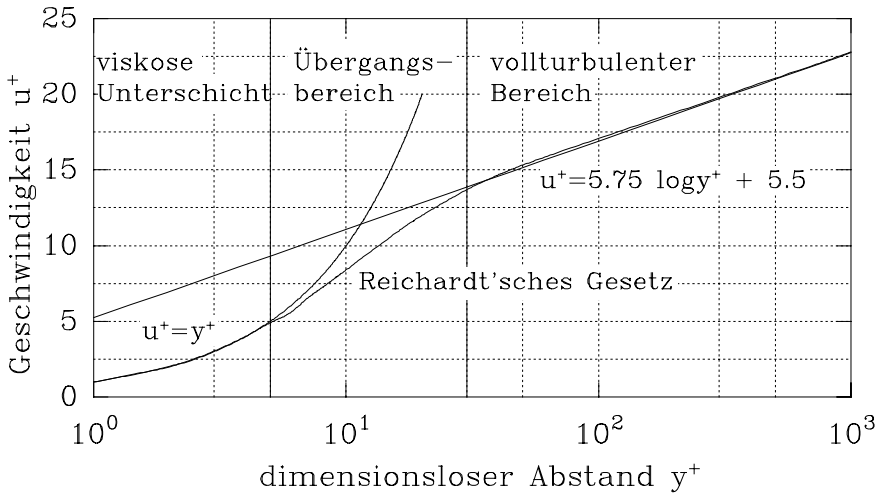


Abbildung A.3: Darstellung der Wandgesetze

Bei der turbulenten Strömung an einer rauhen Wand werden neben der zähen Schubspannung auch noch Tangentialkräfte auf die Wand übertragen [17]. Diese rühren von den Flüssigkeitsdrücken auf die Rauhigkeitserhebungen her. Diese Druckkräfte können unter Umständen die Zähigkeitskräfte übertreffen. Beide Kräfte werden zu einer resultierenden Reibungskraft zusammengefaßt. Ein unmittelbarer Einfluß der Rauhigkeiten macht sich aber in der Regel nur in der Unterschicht bemerkbar, deren Dicke etwa den Rauhigkeitserhebungen entspricht. Für die mittlere Geschwindigkeitsverteilung an einer rauhen Wand ist Gl.(A.52) ebenfalls gültig. Es ändert sich nur die Bestimmung der Integrationskonstanten.

A.3.3 Eigenschaften der Grundgleichungen

Hier sollen die wichtigsten Eigenschaften der Grundgleichungen für die turbulente Strömung dargestellt werden [6].

1. Die Grundgleichungen werden bezüglich eines ortsfesten Kontrollraumes formuliert, so daß sich in einem betrachteten Kontrollvolumen zu verschiedenen Zeiten verschiedene Fluidteilchen befinden (*Eulersche Betrachtungsweise*).

2. Aus dem *Newton'schen Grundgesetz* der Mechanik und dem Prinzip des Kräftegleichgewichts an einem Kontrollvolumen folgt die vektorielle Impulsgleichung. Unter Berücksichtigung der *Stokes'schen* Annahmen heißen diese Gleichungen *Navier-Stokes-Gleichungen*. Diese sind nichtlineare partielle Differentialgleichungen.

3. Der Druck in den *Navier-Stokes-Gleichungen* entspricht dem thermodynamischen Druck (Vernachlässigung der Kompressionszähigkeit).

4. Bei turbulenten Strömungen werden alle abhängigen Variablen in zeitliche Mittelwerte und zugehörige Schwankungsgrößen aufgeteilt. Anschließend werden die Grundgleichungen einem Mittelungsprozeß unterzogen.

5. In diesen Gleichungen treten durch den Mittelungsprozeß weitere Unbekannte auf. Damit ist die Zahl der Unbekannten größer als die Zahl der Gleichungen (Schließungsproblem).

6. Das Gleichungssystem kann durch Hinzunahme weiterer Gleichungen geschlossen werden. Man spricht dann von sogenannten Turbulenzmodelle. Sie kommen bis heute nicht ohne empirische Daten aus.

A.4 Größen der Turbulenz

Ein Maß für die Intensität der Turbulenz einer Strömung gibt der sogenannte *Turbulenzgrad* wieder. Dieser ist definiert zu:

$$Tu = \sqrt{\frac{2\overline{k}}{3u_\infty^2}} = \sqrt{\frac{\overline{(u'^2)} + \overline{(v'^2)} + \overline{(w'^2)}}{3u_\infty^2}} \quad . \tag{A.56}$$

Dabei ist u_∞ die ungestörte Anströmgeschwindigkeit. In turbulenten Strömungen hat der Turbulenzgrad Werte von etwa $Tu = 0.1$. Bei $Tu = 0.5 * 10^{-4}$ spricht man von *turbulenzarmen* Stömungen [5]. Bei *isotroper* Turbulenz gilt:

$$u' = v' = w' \quad . \tag{A.57}$$

Isotropie bedeutet also gleiches Turbulenzverhalten in alle Richtungen. Für den Turbulenzgrad bei isotroper Turbulenz gilt dann aufgrund Gl.(A.57):

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{(u'^2)}}}{u_\infty} \quad . \tag{A.58}$$

Ein typisches Turbulenzfeld hat ein großes Längen- und Zeitspektrum. Es ist daher zweckmäßig dieses Spektrum in einen großen (g), mittleren (m) und kleinen (k) Bereich einzuteilen. Die dementsprechenden *Reynoldszahlen* lauten [3]:

$$Re_g = \rho \frac{u_g \delta_g}{\mu} \tag{A.59}$$

$$Re_m = \rho \frac{u_m \delta_m}{\mu} \tag{A.60}$$

$$Re_k = \rho \frac{u_k \delta_k}{\mu} \quad . \tag{A.61}$$

Dabei muß $Re_k < Re_m < Re_g$ gelten. Die Grundströmung ist charakterisiert durch:

$$Re = \rho \frac{u\delta}{\mu} \quad . \tag{A.62}$$

Bei der Produktion der Turbulenz herrschen zunächst niedrige Frequenzen (große Turbulenzelemente) vor. Diese sind die Hauptträger der kinetischen Energie. Infolge der Schwankungsbewegung kommt es allmählich zum Zerfall der großen Turbulenzelemente in kleinere. Dieser *Kaskadenprozeß* [6] setzt sich fort, bis die Elemente so klein sind, daß die kinetische Energie unter der Wirkung der molekularen Viskosität dissipiert. Dieser Vorgang spielt sich also in Bereichen hoher Frequenzen (kleine Turbulenzelemente) ab. In diesem Bereich ist die Turbulenz bei hohen *Reynoldszahlen* isotrop. Sie besitzt dann einen Gleichgewichtszustand. Die großen Turbulenzelemente entstehen auf Grund Instabilitäten der Grundströmung. Dabei entziehen diese Turbulenzwirbel von der Grundströmung die Energierate G. Aus einer Dimensionsanalyse folgt:

$$G \sim \frac{{u_g}^3}{\delta_g} \quad . \tag{A.63}$$

Die großen Turbulenzelemente haben eine Zahl wichtiger Eigenschaften:

- sie sind streng anisotrop,
- sie korrelieren stark mit der Grundströmung ($\delta_g \sim \delta, u_g \sim u$),
- sie sind hauptverantwortlich für turbulenten Austausch,
- sie beinhalten den größten Teil der gesamten kinetischen Turbulenzenergie.

Die mittleren Elemente sind durch die mittleren Längen- und Zeitgrößen charakterisiert. Sie sind weniger ausgerichtet als die großen Elemente. Ihre hauptsächliche Aufgabe ist der Turbulenzenergietransfer zu den kleineren Wirbeln. Sonst sind sie nicht für den Turbulenzprozeß bestimmend. Außerdem beanspruchen sie nur einen geringen Teil der gesamten

Turbulenzenergie.
Die kleineren Elemente werden durch die dementsprechenden Größen charakterisiert. Sie haben die Aufgabe die kinetische Energie zu dissipieren. Dabei wird die von den mittleren Turbulenzelementen erhaltene Energie in Wärme umgewandelt. Die kleinen Elemente sind daher hoch viskos und isotrop. Die Strömungsgrößen korrelieren direkt mit den Stoffwerten des Fluids ρ und μ und mit der Dissipationsrate ε [3]. Man kann sich die Dissipationsrate ε als die Schwankungen der Spannungskomponenten mit der jeweils dazugehörenden Formänderungsgeschwindigkeit multipliziert vorstellen [12].

$$u_k \simeq \left(\frac{\mu\varepsilon}{\rho}\right)^{1/4} \tag{A.64}$$

$$\delta_k \simeq \left(\frac{\mu}{\rho\varepsilon^{1/3}}\right)^{3/4} \tag{A.65}$$

Setzt man nun die beiden Gleichungen (A.64) und (A.65) in die *Reynoldszahl* Gl.(A.61) ein, so erhält man:

$$Re_k = \rho\frac{u_k\delta_k}{\mu} = \rho\frac{\left(\frac{\mu\varepsilon}{\rho}\right)^{1/4}\left(\frac{\mu}{\rho\varepsilon^{1/3}}\right)^{3/4}}{\mu} \simeq 1 \qquad . \tag{A.66}$$

Das bestätigt die Behauptung einer kleinen *Reynoldszahl* und hohen Viskosität. Aus der Gleichung läßt sich erkennen:
je größer ε, desto kleiner die Elemente. Somit ist die physikalische Größe der kleinen Elemente abhängig von der Dissipationsrate ε. Diese wird durch die Energierate G bestimmt. Diese versorgt das Turbulenzfeld mit kinetischer Energie. In Strömungsbereichen mit kleinem Energietransfer herrscht ein Gleichgewicht zwischen Energierate G und der Dissipationsrate ε (Dissipation = Produktion), d.h.:

$$\varepsilon \simeq G \sim \frac{{u_g}^3}{\delta_g} \tag{A.67}$$

In solchen Strömungsbereichen spricht man von einem *lokalen Gleichgewicht*. Bei diesen Aussagen wurde ein vollentwickeltes Turbulenzfeld angenommen. In diesem Fall ist $Re_g > 100$. Man spricht dann von einer Turbulenz mit großer *Reynoldszahl*. In einem ausgeprägten Turbulenzfeld ist ein großer Unterschied zwischen großer und kleiner *Reynoldszahl* gegeben. Sie besitzen keine direkte Wechselwirkung und sind daher voneinander unabhängig. Außerdem läßt sich zeigen, daß die Viskosität und damit die molekularen Eigenschaften nur geringen Einfluß auf die großen Turbulenzelemente hat.
Mit den Gleichungen (A.59), (A.64) und (A.67) erhält man folgendes Verhältnis für die charakteristischen Geschwindigkeiten:

$$\frac{u_k}{u_g} \simeq {Re_g}^{-1/4} \qquad . \tag{A.68}$$

Mit den Gleichungen(A.59), (A.65) und (A.67) erhält man das dementsprechende Verhältnis für die Längengrößen:

$$\frac{\delta_k}{\delta_g} \simeq {Re_g}^{-3/4} \qquad . \tag{A.69}$$

Das Zeitgrößenverhältnis erhält man dann mit diesen beiden Gleichungen (A.68) und (A.69) zu:

$$\frac{t_k}{t_g} \simeq {Re_g}^{-1/2} \qquad . \tag{A.70}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß der Unterschied zwischen großen und kleinen Größen umso größer ist, je größer die *Reynoldszahl* Re_g ist. Auf Grund des Spektrums ist es zweckmäßig eine *kritische Reynoldszahl* Re_c einzuführen. Das ist jene *Reynoldszahl*, bei der die Turbulenz nur vorübergehend ist. Die Turbulenz wird dann eingeteilt in *ausgebildete* und *vorübergehende* Turbulenz. Ist das Turbulenzfeld voll entwickelt, so spricht man von großen *Reynoldszahlen*, im anderen Fall von kleinen.

A.4.1 Ausgebildete Turbulenz

Bei der ausgebildeten Turbulenz gelten die vorher besprochenen Spektren. Die kleinen und großen Wirbelelemente haben keine direkte Wechselbeziehung. Sie werden daher als *statistisch unabhängig* [3] bezeichnet. Die kleinen Wirbelelemente werden von der Viskosität bestimmt. Die großen hingegen sind für die turbulente Wirbelentstehung von Bedeutung. Eine solche Strömung zeigt nur eine geringe Empfindlichkeit auf die Veränderung der *Reynoldszahl* [3]. Für die Turbulenzmodellierung ist das eine wesentliche Vereinfachung.

A.4.2 Vorübergehende Turbulenz

Bei kleinen Werten von Re_g herrschen Wechselwirkungen zwischen den kleinen und großen Wirbelelementen. Die großen Wirbelelemente sind somit von der Viskosität des Fluids abhängig. Diese Abhängigheit stellt in der Turbulenzmodellierung große Probleme dar [3].

A.4.3 Eigenschaften der Turbulenz

Da die Turbulenz nicht einfach zu definieren ist, sollen die wichtigsten Merkmale zusammengefaßt werden [3].

- An jeder Stelle einer Strömung herrscht Gleichgewicht zwischen Trägheits-, Druck-, Reibungs- und Schwerkraft. Schwache Störungen der Strömung werden im laminaren Fall von der Reibungskraft gedämpft. Bei Erhöhung der Geschwindigkeit nimmt die Reibungskraft nicht so stark zu wie die übrigen Kräfte. Sie ist dann zu klein um die Störungen zu dämpfen und es kommt zur turbulenten Strömungsform.

- Wesentliches Merkmal einer turbulenten Strömung ist eine unregelmäßige und zufallsbedingte Schwankungsbewegung. Diese ist der geordneten Grundströmung überlagert. Die Schwankungsbewegung sorgt insbesonders für eine starke Vermischung in der Strömung quer zur Strömungsrichtung und damit für einen erhöhten Impulsaustausch. Sie hat auf die Grundströmung die Wirkung von *scheinbaren Reibungskräften*.

- Obwohl eine turbulente Strömung stets instationär ist, spricht man dennoch von einer stationären turbulenten Strömung, wenn die geordnete Grundströmung von der Zeit unabhängig ist.

- Turbulenz ist ein nichtlineares, zeitabhängiges und dreidimensionales Phänomen. Man kann sich Turbulenz als Gewirr von Wirbelfäden vorstellen, deren Streckung ein wichtiger Vorgang in der turbulenten Strömung ist.
- Die Fähigkeit des Impuls-,Wärme-und Stoffaustausches bei Turbulenz ist größer als durch molekulare Diffusion.
- Turbulente Strömung ist durch eine Vielzahl an verstrickten Wirbeln unterschiedlicher Größe charakterisiert. Für diese unterschiedlichen Größen lassen sich Längen- und Zeitgrößen definieren. Diese werden als Spektren bezeichnet.
- Die größeren Turbulenzelemente werden durch Instabilitäten in der Grundströmung verursacht. Diese Elemente entziehen der Grundströmung kinetische Energie und stellen so die für die turbulente Strömung notwendige Energie zur Verfügung. Auf Grund dieser Wechselbeziehung korrelieren die geometrischen und dynamischen Merkmale der Grundströmung mit denen der großen Elemente. Bei großen *Reynoldszahlen* sind die kleinsten Elemente *isotrop*.
- Die großen Elemente ihrerseits werden instabil und brechen zusammen. Dabei geben sie ihre kinetische Energie an die kleineren Elemente ab. Dieser Vorgang wird als *kinetische Energiekaskade* [3][14] bezeichnet (Abbildung A.4).

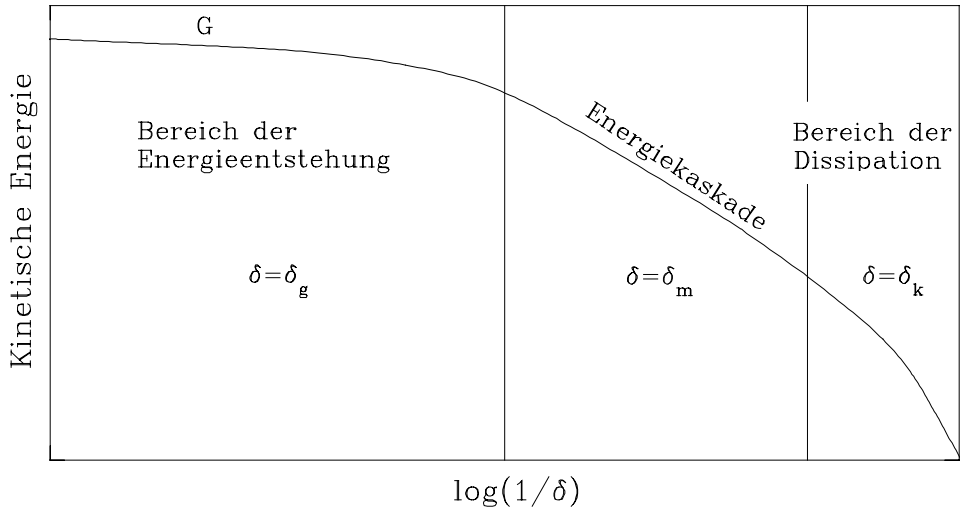


Abbildung A.4: Spektrale Verteilung der kinetischen Turbulenzenergie

Würde die Energiezufuhr unterbrochen, würde die Turbulenz schnell verfallen. Daher braucht Turbulenz kontinuierliche Versorgung an kinetischer Energie. Der Kaskadenprozeß setzt sich fort, bis die Turbulenzelemente so klein sind, daß die kinetische Energie unter der Wirkung der molekularen Viskosität dissipiert, also in innere Energie übergeführt wird.

- Der Betrag der dissipierten Energie hängt von der Energiezufuhr der großen Elemente ab, während der Dissipationsvorgang durch das Verhalten der kleinen Elemente bestimmt ist.
- Für die Erklärung der Turbulenzentstehung muß man die Störungsbewegungen im einzelnen nachrechnen, um herauszufinden, welche Formen von Störungen zur Turbulenz führen und unter welchen Bedingungen diese auftreten können.

Anhang B

Turbulenzmodellierung

B.1 Warum Turbulenzmodellierung ?

Es wurde bereits erwähnt, daß Turbulenz ein dreidimensionaler Vorgang ist. Will man die exakte Lösung simulieren, so sind die zeitabhängigen *Navier-Stokes-Gleichungen* zu lösen. Diese beschreiben die Strömung vollständig. Es sind somit keine weiteren Gleichungen oder Rechenmodelle notwendig. Um diese sogenannnte *direkte* Turbulenzsimulation durchzuführen, wären aber unwirtschaftlich große CPUs von Nöten [3]. Das soll im folgenden kurz erklärt werden.
Würde die exakte Berechnung erfolgen, so müßte für jedes Strömungsproblem ein dreidimensionales Netz erstellt werden. Weiters müßten die Netze so feinmaschig sein, daß die kleinsten energiedissipierenden Turbulenzlemente erfaßt werden.
Es sei nun ein Strömungsabschnitt mit einer charakteristischen Länge von δ=1m vorhanden. Die Reynoldszahl soll dabei $Re \simeq 500$ betragen. In solch einer Strömung sind die größten Wirbelelemente ca. ein Zehntel der charakteristischen Länge, also $\delta_g \simeq 0.1m$. Mit der Gl.(A.69) erhält man die charakteristische Länge der kleinen Wirbel zu $\delta_k \simeq 0.001m$. Für die numerische Lösung würde das einen Knotenabstand von $1mm$ bzw. $10^9 Netzpunkte/m^3$ bedeuten. Die Knotenzahl würde dann mit Gl.(A.69) proportional $Re_g^{9/4}$ und die Lösungszeit dementsprechend unwirtschaftlich lange werden.

B.2 Einteilung der Turbulenzmodelle

Aufgabe eines Turbulenzmodelles ist es, den Zusammenhang zwischen turbulenter Schubspannung und Größen der mittleren Bewegung (z.B mittlere Geschwindigkeitskomponenten) und deren Ableitungen (z.B turbulente kinetische Energie, Dissipation) herzustellen. Im allgemeinen handelt es sich dabei um partielle Differentialgleichungen. Enthalten diese Gleichungen neue Unbekannte, so sind weitere Modellgleichungen notwendig. Je nachdem wieviele partielle Differentialgleichungen verwendet werden, spricht man von:

- Null-Gleichungs-Modelle
- Ein-Gleichungs-Modelle
- Zwei-Gleichungs-Modelle .

Handelt es sich beim Zusammenhang zwischen turbulenter Schubspannung und Größen der mittleren Bewegung um eine algebraische Gleichunge, so nennt man dieses algebraische Modell auch Null-Gleichungs-Modell [6]. Die Zwei-Gleichungs-Modelle sind aufwendiger gestaltet als die Null-Gleichungs- und Ein-Gleichungs-Modelle. Das $\overline{k}$-ε *Modell* gehört zu diesen und soll auf Grund der häufigen und erfolgreichen Anwendung genauer beschrieben werden.

B.3 Das $\overline{k}$-ε Turbulenzmodell

B.3.1 Transportgleichung für die kinetische Energie $\overline{k}$

Die Gleichung für die kinetische Turbulenzenergie $\overline{k}$ ist definiert als:

$$\overline{k} = \frac{1}{2}\overline{u_j' u_j'} \qquad . \tag{B.1}$$

Auf Grund der Einheit von $\overline{k}$ (m^2/s^2) erkennt man, daß es sich um die auf die Masse bezogene mittlere kinetische Energie der Schwankungsbewegung handelt. Diese Größe ist mit dem *Turbulenzgrad* verknüpft [6]. Die exakte Gleichung der mechanischen Energie der Schwankungsbewegung ($\overline{k}$-Transportgleichung) hat die Form [14]:

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i}\overline{k}}_{I} = & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'\left(\frac{p'}{\rho}+k'\right)}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\overline{u_i' u_j'}}_{III} + \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{IV} \\ & - \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}}_{V} \qquad .\end{aligned} \tag{B.2}$$

I) konvektiver Transport von kinetischer Energie der turbulenten Schwankungen durch die Hauptbewegung
II) konvektiver Transport von Turbulenzenergie durch die Schwankungsbewegung
III) Produktion von Turbulenzenergie
IV) Leistung der zähen Schubspannungen der turbulenten Bewegung
V) Dissipation infolge der turbulenten Bewegung

Die Abkürzung k' ist dabei:

$$k' = \frac{1}{2}u_j' u_j' \qquad . \tag{B.3}$$

Diese exakte $\overline{k}$-Gleichung enthält Korrelationen, die nicht bekannt sind. Diese müssen durch bekannte Größen wie die mittleren Geschwindigkeiten modelliert werden, da man sonst nicht zu einem geschlossenen Gleichungssystem gelangt. Zunächst wird die Gl.(B.2) auf folgende Form gebracht:

$$\underbrace{\overline{u_i}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i}}_{I} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'\left(\frac{p'}{\rho}+k'\right)}}_{II} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\overline{\partial u_i' \partial u_j'}}_{III} + \underbrace{\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i}}_{IV} - \underbrace{\nu\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}}_{V} \qquad . \tag{B.4}$$

I) konvektiver Transport
II) turbulente Diffusion
III) Produktion
IV) laminare (molekulare) Diffusion
V) Dissipation ε

Der Term II (turbulente Diffusion) wird modelliert durch:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_i'\left(\frac{p'}{\rho}+k'\right)} = \frac{\nu_t}{Pr_k}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i} \quad . \tag{B.5}$$

Für das turbulente Diffusionsglied wird angenommen, daß der $\overline{k}$-Transport der Diffusion proportional dem Gradienten von $\overline{k}$ ist. Dabei ist Pr_k die *Prandtlzahl* für die turbulente kinetische Energie und wird als konstant angenommen. Der Ausdruck ν_t ergibt sich nach Durchführung einer Dimensionsanalyse (Kapitel 4 auf Seite 28). Die maßgeblichen Größen der Turbulenz sind beim $\overline{k}$-ε Modell die kinetische Energie $\overline{k}$ und die Dissipation ε. Die Dimensionsmatrix hat dann folgendes Aussehen:

	ν	k	ε
L	2	2	2
T	-1	-2	-3

Das Gleichungssystem für ein dimensionsloses Produkt lautet dann:

$$2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \tag{B.6}$$

$$-1\alpha - 2\beta - 3\gamma = 0 \tag{B.7}$$

$$\tag{B.8}$$

Für diese beiden Gleichungen erhält man mit $\alpha = 1$ und Einführung eines dimensionslosen Faktors C_D:

$$\nu_t = C_D\frac{\overline{k}^2}{\varepsilon} \quad . \tag{B.9}$$

Man hat nun eine Beziehung für ν_t in direkter Abhängigkeit von $\overline{k}$ und ε. Der Faktor C_D kann in vielen Strömungen konstant gehalten werden. Für die turbulenten *Reynoldsspannungen* wird der Ansatz nach *Boussinesq* verwendet. Er beruht darauf, daß die Spannungen proportional den Deformationsgeschwindigkeiten gesetzt werden. Es wird vorausgesetzt, daß analog zum molekularen Impulstransport der turbulente Impulstransport proportional dem Gradienten der Grundströmung ist. Im laminaren Fall gilt für die viskose Spannung:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) \quad . \tag{B.10}$$

Auf analoge Weise erhält man bei turbulenter Strömung für die *Reynoldsspannungen* eine gute Näherung [3]:

$$-\rho\overline{(u_i'v_j')} = \mu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\rho\overline{k}\delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad -\overline{(u_i'v_j')} = \nu_t\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\overline{k}\delta_{ij} \tag{B.11}$$

Das letzte Glied ist notwendig, da die Summe der Normalspannungen $2\overline{k}$ ergeben muß. Auf Grund der Kontinuitätsgleichung würde diese Summe sonst Null ergeben. Im Gegensatz zur laminaren Größe ν ist die entsprechende Größe der turbulenten Strömung ν_t keine konstante Stoffgröße, sondern eine von der Strömung abhängige Ortsfunktion.
Der Dissipationsterm V wird mit ε bezeichnet. Dieser ist gesteuert durch den Übergang von größeren zu den kleineren Wirbeln. Mit den oben angeführten Modellierungen erhält man folgende Transportgleichung für die kinetische Energie $\overline{k}$:

$$\overline{u_i}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{Pr_k}\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} - \varepsilon + \nu\frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial x_i \partial x_i} \tag{B.12}$$

Einen allgemeinen Verlauf der kinetischen Energie $\overline{k}$ im Wandbereich [3] zeigt Abbildung B.1.

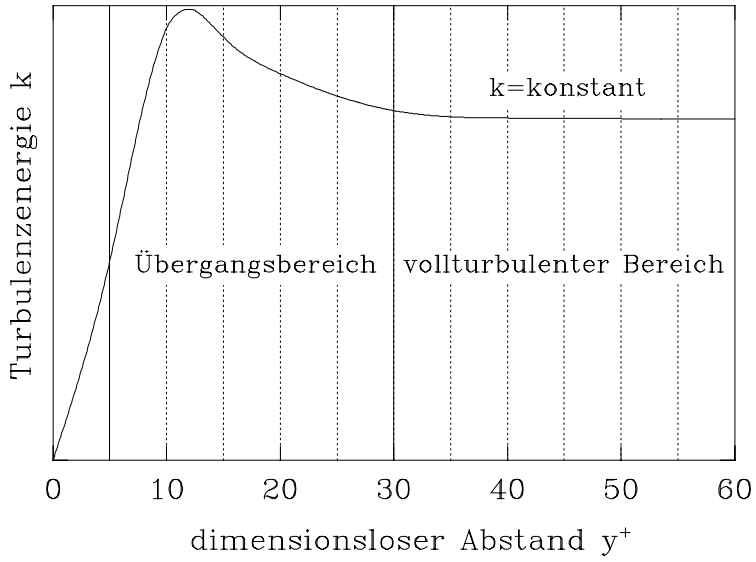


Abbildung B.1: $\overline{k}$-Profil im Wandbereich

B.3.2 Transportgleichung für die Dissipation ε

Die Dissipationsrate ε ist wie in Gl.(B.2) bereits definiert:

$$\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} \quad . \tag{B.13}$$

Die exakte Form der ε-Transportgleichung kann man in folgender Form anschreiben [14]:

$$\begin{aligned}\underbrace{\overline{u_k}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}}_{I} = & - \underbrace{2\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}\left(\overline{\frac{\partial u_l'}{\partial x_i}\frac{\partial u_l'}{x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}\right)}_{II} - \underbrace{2\nu\overline{\frac{\partial u_k'}{\partial x_l}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}}_{III} - \underbrace{2\nu^2\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\right)^2}}_{IV} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_k'\varepsilon'}}_{V} \\ & - \underbrace{2\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}\frac{\partial p'}{\partial x_l}\right)}}_{VI} - \underbrace{2\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k}u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_l}}_{VII} + \underbrace{\nu\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}}_{VIII} \quad .\end{aligned} \tag{B.14}$$

I) konvektiver Transport
II) Produktion der Wirbelstreckung der mittleren Bewegung
III) Produktion der Wirbelstreckung der Schwankungsbewegung
IV) Änderung durch die Zähigkeit
V) Diffusion der turbulenten Schwankungen
VI) Diffusion von ε durch Druckschwankungen
VII) Produktion durch die Hauptbewegung
VIII) viskose Diffusion

Auch hier treten wie bei der $\overline{k}$-Transportgleichung neue unbekannte Korrelationen auf, die durch Modellannahmen ausgedrückt werden müssen. Zunächst sollen aber die Größenordnungen der einzelnen Terme abgeschätzt werden [14]. Der Term III (Produktion der Wirbelstreckung der Schwankungsbewegung) ist sehr viel kleiner als der Term II (Produktion der Wirbelstreckung der mittleren Bewegung). Daher ist dieser Term bei großen Reynoldszahlen zu vernachlässigen. Ähnliches gilt auch für die Terme VI (Diffusion von ε durch Druckschwankungen), VII (Produktion durch die Hauptbewegung) und VIII (viskose Diffusion). Der Term II wird folgendermaßen modelliert:

$$2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \left(\overline{\frac{\partial u_l'}{\partial x_i} \frac{\partial u_l'}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k{}'}{\partial x_l} \frac{\partial u_i'}{\partial x_l}} \right) = -C_1 \frac{\varepsilon}{\overline{k}} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \overline{u_i' u_k'} \quad . \tag{B.15}$$

Der Term IV (Änderung durch die Zähigkeit) wird modelliert durch:

$$2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_l} \right)^2} = -C_2 \frac{\varepsilon^2}{\overline{k}} \quad . \tag{B.16}$$

Der Term V (Diffusion der turbulenten Schwankungen) wird angesetzt mit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k' \varepsilon'} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \quad . \tag{B.17}$$

Dabei sind C_1 und C_2 empirische Konstanten. Pr_ε wird als *Prandtlzahl* der Dissipation bezeichnet. Sie ist ebenfalls eine Konstante.
Einen allgemeinen Verlauf der Dissipation ε im Wandbereich [3] zeigt Abbildung B.2.

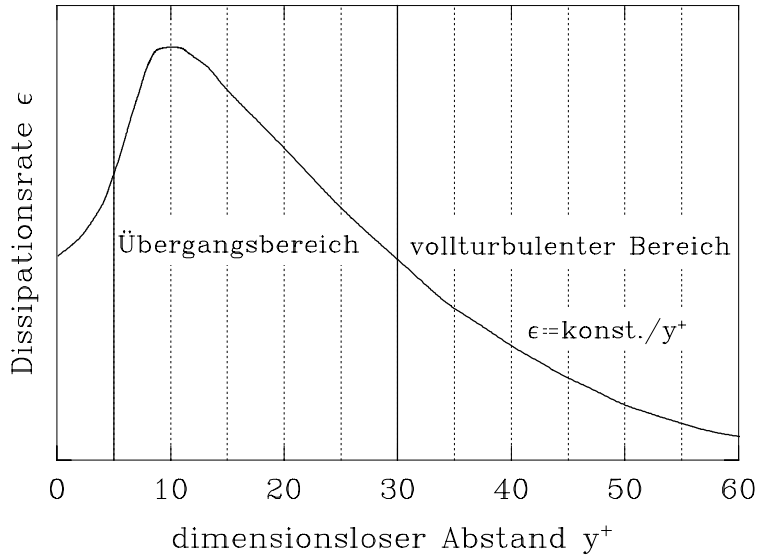


Abbildung B.2: ε-Profil im Wandbereich

Für die modellierte Form der ε-Transportgleichung erhält man dann die Form:

$$\overline{u_i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\right) + C_1\nu_t\frac{\varepsilon}{\overline{k}}\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} - C_2\frac{\varepsilon^2}{\overline{k}} + \nu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_i\partial x_i} \tag{B.18}$$

B.3.3 Das vollständige $\overline{k}$-ε Modell

Der Nachteil der Zweigleichungsmodelle ist, daß eben um diese mehr Gleichungen zu lösen sind und die Komplexität dadurch erhöht wird. Dies Bedarf auch eines höheren Rechenaufwandes. Das Modell ist nicht linear und außerdem bestehen enge Verbindungen zwischen den einzelnen Transportgleichungen. Daher werden nicht immer konvergierende Lösungen erreicht.
Mit den Transportgleichungen für $\overline{k}$ und ε, den beiden (drei) gemittelten Bewegungsgleichungen und der Kontinuitätsgleichung ergeben sich nun fünf (sechs) Gleichungen für die fünf (sechs) Unbekannten $\overline{u}$, $\overline{v}$, $(\overline{w})$, $\overline{p}$, $\overline{k}$ und ε. Für nichtisotherme Strömung erweitern sich diese Gleichungen um temperaturabhängige Terme. Diese werden in analoger Weise modelliert. Zusammenfassend sollen die verwendeten Gleichungen für dieses Modell dargestellt werden:

$$\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \qquad \textbf{Kontinuität} \tag{B.19}$$

$$\overline{u_i}\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2\overline{u_j}}{\partial x_i\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j'u_i'} \qquad \textbf{Impuls} \tag{B.20}$$

$$\nu_t = C_D\frac{\overline{k}^2}{\varepsilon} \qquad \textbf{Wirbelviskosität} \tag{B.21}$$

$$\overline{u_i}\frac{\partial\overline{k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{Pr_k}\frac{\partial\overline{k}}{\partial x_i}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} - \varepsilon \qquad \overline{k}\textbf{-Transport} \tag{B.22}$$

$$\overline{u_i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\right) + C_1\nu_t\frac{\varepsilon}{\overline{k}}\left(\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i} - C_2\frac{\varepsilon^2}{\overline{k}} \qquad \varepsilon\textbf{-Transport} \tag{B.23}$$

Das $\overline{k}$-ε Turbulenzmodell wurde für viele Anwendungen getestet, um die einzelnen Faktoren zu optimieren. Für spezielle Probleme können die folgenden Werte natürlich abweichen. Die Werte der allgemein verwendeten Konstanten sind in der Tabelle B.1 dargestellt.

C_D	C_1	C_2	Pr_k	Pr_ε
0.09	1.44	1.92	1.00	1.30

Tabelle B.1: Konstanten für das Standard k-ε Modell