

DIPLOMARBEIT

**Berechnung der ebenen turbulenten Strömung
durch ein DCA-Verdichtergitter**

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. R.WILLINGER

durch
Ivan ARATA
Zollergasse 26
A-1070 Wien

Wien, 10. Oktober 2001

Vorwort

Dem Institutsvorstand Herrn *o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hermann Haselbacher* danke ich für die Vergabe der Diplomarbeit und die Möglichkeit, diese am Institut abzufassen.

Herrn *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger* sei an dieser Stelle für die Anregung und Unterstützung der Arbeit gedankt.

Desweiteren möchte ich allen Kollegen und Freunden, die mir während der Fertigstellung dieser Diplomarbeit mit Rat und Tat hilfreich zur Seite gestanden haben, meinen herzlichen Dank aussprechen.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Berechnung der ebenen turbulenten Strömung in einem DCA-Verdichtergitter. Anhand von Testfällen aus der Literatur werden berechnete Ergebnisse im Vergleich mit Messungen vorgestellt. Die Messungen, die 1987-1990 von *Zierke* und *Deutsch* durchgeführt wurden und bei ERCOFTAC (European Research Community on Flow Turbulence and Combustion) im Rahmen des Testcase 15 veröffentlicht worden sind, beziehen sich auf drei verschiedene Zuströmwinkel. Diese drei Testfälle sind im Rahmen dieser Diplomarbeit ausgewählt worden.

Zu Beginn werden sowohl die Geometrie des betrachteten Gitters als auch die Eigenschaften der Strömung beschrieben. Das verwendete k - ϵ Turbulenzmodell und das numerische Lösungsverfahren zur Berechnung der Strömung werden erläutert. Druckverteilungen, Geschwindigkeiten und andere lokale Daten werden berechnet und aus den berechneten Daten werden die Charakteristiken des Verdichtergitters bestimmt. Messungen und Rechnungen haben teilweise erhebliche Abweichungen.

Diese Abweichungen sind hauptsächlich auf das verwendete Standard k - ϵ Turbulenzmodell zurückzuführen. Dieser ist nicht in der Lage, die komplexen Strömungsvorgänge auf Druck- und Saugseite (Ablösung, laminar-turbulent Übergang) wiederzugeben.

Auf Grund der Bedeutung des laminar-turbulent Überganges (Transition) wird in einem Kapitel eine kurze Einführung in dieser Teilgebiet der Strömungsmechanik gegeben.

Abstract

Le richieste sempre maggiori di rendimenti elevati e di grandi potenze specifiche nelle turbomacchine dipendono in gran parte dalla aerodinamica delle pale impiegate, i profili di queste utilizzati oggi sono progettati con grande attenzione per minimizzare le perdite, le quali dipendono principalmente dalle condizioni del fluido nello strato limite. Uno strato limite laminare ha il vantaggio che le particelle scorrono su traiettorie separate lungo la sola direzione del moto; in uno strato limite di tipo turbolento il moto è caratterizzato anche da movimenti caotici in direzione perpendicolare a quella principale del fluido, cosa che provoca un aumento delle perdite locali per attrito per effetto di maggiori scambi di impulso ed energia. Per mantenere piccole le perdite bisogna quindi cercare di mantenere lo strato limite il più possibile laminare lungo il profilo della pala e cercare in ogni modo di evitare il suo distaccamento, cosa che aumenterebbe in maniera massiccia le perdite.

Lo studio del moto di fluidi in regime turbolento è, a tutt'oggi, un problema aperto: pur essendo stata accumulata, fra la fine del secolo scorso ed i giorni nostri, una grande quantità di rilievi sperimentali, la comprensione completa della fenomenologia fisica sottostante alla creazione e all'evoluzione delle vorticosità appare un traguardo ancora lontano. A questo, si aggiunge la difficoltà di trattazione dal punto di vista matematico delle equazioni risultanti anche da approssimazioni grossolane.

Per determinare le caratteristiche fluidodinamiche di un profilo sta conquistando sempre di più importanza la simulazione numerica. Attraverso modelli matematici si sviluppano equazioni valide in ogni punto del campo di fluido considerato, il campo viene in seguito discretizzato in un numero finito di punti e solo i questi punti vengono risolte le equazioni dei modelli. Nell'ultimo decennio, l'evoluzione degli elaboratori elettronici ha aperto la strada verso questo tipo di problemi, che risultano estremamente complessi anche in presenza di flussi che si sviluppino attraverso geometrie semplici e in condizioni fisiche semplificate (flussi isotermi, incompressibili, ecc.). Si è visto come uno dei più grossi problemi sia la modellizzazione del comportamento del fluido in prossimità delle pareti che necessariamente lo contengono. Attualmente, si è di fronte al contrasto fra la necessità di abbandonare le prime semplicistiche ipotesi sul comportamento dei fluidi in tali regioni, che dimostrano i propri limiti nei confronti di modelli matematicamente più complessi, e la difficoltà di implementazione di algoritmi che posseggano un adeguato raggio di convergenza per la soluzione delle equazioni derivanti da tali modelli. La simulazione numerica ha il vantaggio che è economica, veloce, offre la possibilità di variare con semplicità la geometria e ogni genere di parametri, inoltre è possibile ottenere un numero molto più elevato di dati rispetto alle tradizionali prove sperimentali. Purtroppo non si rivela semplice creare modelli che descrivono bene la realtà, in più il modello discretizzato deve seguire con sufficiente precisione quello continuo. Altro inconveniente è l'elevata capacità di calcolo e di memoria che viene richiesta ai computers.

In questa tesi preparata alla TU-Wien sotto il programma T.I.M.E. viene eseguito il calcolo della corrente piana e turbolenta attraverso una cascade costituita da pale di profilo

DCA con il metodo degli elementi finiti. Il programma utilizzato è FIDAP della FLUENT che insieme a tutti gli altri strumenti necessari al compimento del succinto lavoro è stato messo a disposizione dal dipartimento di turbomacchine.

Questa tesi è così suddivisa:

Nel **Capitolo 1** viene presentata un'introduzione al problema.

Nel **Capitolo 2** vengono esposte le caratteristiche geometriche della pala e i dati sul fluido. Tutti i dati vengono presi uguali alle prove sperimentali eseguite da *Zierke* e *Deutsch* sotto un programma dell'ERCOFTAC (Testcase 17) per poter avere un confronto diretto tra dati calcolati e risultati sperimentali. Massa specifica, viscosità cinetica, velocità e grado di turbolenza all'ingresso della cascade vengono assegnati. Qui viene deciso che il fluido può essere considerato incompressibile.

Le equazioni di conservazione della massa e dell'impulso (Navier-Stokes) sono le equazioni su cui si basa fluidodinamica del problema considerato. In questo breve **Capitolo 3** vengono presentate le loro forme adimensionali. La possibilità di creare un modello numerico del moto di un fluido reale dipende in modo sostanziale dal concetto di moti simili: ciò significa che non si è vincolati alle effettive dimensioni fisiche del fenomeno, ma, fissate delle unità di riferimento, si possono scalare tutte le grandezze in funzione di queste, e i risultati ottenuti saranno riportabili (mediante riscalatura) nel reale. Nel presente caso, volendo effettuare un'analisi stazionaria (indipendente dal tempo) del moto di un fluido incompressibile ed isoterma, è necessario fissare esclusivamente velocità e lunghezza di riferimento. Come grandezze di riferimento vengono scelte come consigliato dalla letteratura disponibile sull'argomento: la lunghezza della corda della pala per la lunghezza e in generale per le altre grandezze i dati di ingresso della cascade.

Nel **Capitolo 4** vengono presentate le caratteristiche della turbolenza come stato del fluido. Nel moto di un fluido in moto turbolento, viene alla luce un comportamento non deterministico, nel senso che da un esperimento all'altro non è possibile riprodurre esattamente un dato campo di velocità ma solamente la sua media in un intervallo di tempo. Alla luce di ciò, è possibile definire quale stazionario un moto turbolento in cui la velocità media sia costante nel tempo; nel seguito, inoltre, vedremo come sarà possibile esprimere le fluttuazioni in funzione della velocità media, e quindi acquisterà significato effettuare modellizzazioni stazionarie, in cui nulla dipende esplicitamente dal tempo. E' fondamentale osservare come, in assenza di ipotesi sul comportamento della componente fluttuante della velocità, ciò non sia possibile. I modelli classici atti a descrivere la turbolenza si basano sulle equazioni di *Reynolds*, esse non sono altro che il risultato di una media temporale delle equazioni di Navier-Stokes. L'operazione di media fa nascere dei termini detti "Sforzi di *Reynolds*" nelle equazioni. Da un punto di vista fisico, gli sforzi di *Reynolds* possono essere visti quali sforzi fittizi che permettono di considerare il moto medio come un moto reale, sottoposto al gradiente medio di pressione, agli sforzi molecolari medi e agli sforzi di *Reynolds*. Le equazioni di *Reynolds*, comunque, non sono chiuse, nel senso che gli sforzi sono incogniti. E' quindi necessaria un'ipotesi di chiusura su che fornisca un'ulteriore equazione espressa in termini di quantità note e di costanti determinate empiricamente. Il tensore degli sforzi di *Reynolds* (formule 4.7-4.8) presenta forti analogie formali con lo sforzo di taglio dovuto al moto molecolare. In quel caso

il termine fluttuante era quello legato al moto delle molecole, nel caso degli sforzi di *Reynolds* invece rappresenta la componente casuale della velocità macroscopica. Questa somiglianza è alla base delle ipotesi di *Boussinesq* (1877) sulla esistenza di una viscosità turbolenta (eddy viscosity). Con espressione di *Boussinesq* (formula 4.13) viene anche definita la energia cinetica turbolenta k . Il sistema non è ora più chiuso, sono presenti infatti nove variabili (u, v, p e le sei indipendenti tensioni di *Reynolds*) per tre equazioni. La formula di *Boussinesq* mette in relazione le sei tensioni di *Reynolds* con una "viscosità turbolenta", questa grandezza è funzione del luogo e si pone l'obiettivo di andare a considerare gli effetti della turbolenza sul fluido. La definizione di questa viscosità turbolenta varia a seconda del tipo di modello di turbolenza utilizzato, in ogni modo viene calcolata con grandezze note del campo di velocità, quindi può essere considerato uno strumento atto a chiudere il sistema.

La necessità dal punto di vista applicativo di effettuare simulazioni al calcolatore in tempi ragionevoli ha, a tutt'oggi, fatto preferire tale tipo di modelli; rimane comunque il fatto che le uniche equazioni esatte rappresentanti il moto di fluidi viscosi sono quelle di Navier-Stokes, e l'unico modo per permettere alla matematica di fornire indicazioni sulla natura fisica della turbolenza è implementare direttamente tali equazioni; questo, che va sotto il nome di DNS (Direct Numerical Simulation) è un campo di ricerca in analisi numerica attualmente aperto. Ogni modello introduce nuove grandezze calcolabili con relazioni o equazioni differenziali (a seconda della difficoltà del modello). Un modo ovvio di procedere è quindi quello di esprimere la viscosità turbolenta (o grandezze equivalenti) in termini di quantità legate al moto del fluido, in modo analogo a quanto fatto con k : ciò porta al più semplice tipo di modelli **completi** per la turbolenza, quelli **a due equazioni**. In essi, oltre all'espressione generale per k viene introdotta un'altra equazione per la grandezza cui viene legata la viscosità turbolenta. Nel presente lavoro, verranno analizzati i modelli $k-\epsilon$ e $k-\omega$, in quanto il primo è il modello più noto e di validità numericamente e sperimentalmente stabilita (la formulazione originale di tale modello si trova nella pubblicazione di *Jones e Launder*, [12]), e per la scelta del secondo si è obbedito a una delle conclusioni ottenute nel congresso di Stanford (1980-81, [20]) sulla turbolenza: gran parte delle incertezze su questo tipo di modelli nascono dalla scelta della grandezza per la quale formulare l'equazione da affiancare a quella per k . Se per il modello $k-\epsilon$ la scelta ricade sul tasso di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta, indicato con la lettera ϵ e definito dalla formula 4.16, viene utilizzato per il modello $k-\omega$ un tasso di dissipazione per unità di energia indicato con ω e definito dalla formula 4.25. Purtroppo per problemi di convergenza il modello $k-\omega$ è stato scartato. Poiché il modello $k-\epsilon$ Standard ha validità solo per alti numeri di *Reynolds* viene utilizzata l'equazione universale alla parete per la regione in prossimità della pala dove gli effetti viscosi non sono più trascurabili. Tale equazione viene esposta nel paragrafo 4.4.3.2.

Nel **Capitolo 5** ci si occupa del metodo numerico utilizzato da FIDAP per calcolare le variabili del problema nel campo. La risoluzione del sistema di equazioni componenti i modelli illustrati in precedenza è ottenuta, nel presente lavoro, mediante il metodo degli elementi finiti, con i quali si discretizza il dominio, si ottiene una soddisfacente approssimazione delle soluzioni ai nodi e si interpola la soluzione sull'intero elemento. Tra le tante possibilità offerte da FIDAP si è scelta una discretizzazione attraverso elementi di tipo quadrilaterale non strutturato. La scelta di elementi non strutturati semplifica notevolmente il lavoro del programmatore in quanto la discretizzazione avviene pressoché automaticamente anche per geometrie complesse, nonostante ciò bisogna cercare

che la forma degli elementi non si allontani troppo da quella quadrata per assicurare risultati di buona qualità. Nella vicinanza della pala viene effettuata una forte compressione degli elementi per cercare di analizzare con accuratezza questa parte di campo particolarmente complessa. Di fondamentale importanza è la scelta della distanza tra la parete e il primo punto nel campo; la distanza adimensionale y^+ (definita nel paragrafo 4.4.3.2 dalla formula 4.22) deve rientrare infatti in un intervallo compreso tra 30 e 100 per assicurare un buon utilizzo della equazione alla parete. Questa grandezza di grande significato scientifico viene utilizzata all'interno dello strato limite. Poiché per il calcolo di questa grandezza viene utilizzata la tensione alla parete è pressoché impossibile prevedere in partenza la distanza ottimale. Solitamente viene scelta una distanza di massima tra parete e primo punto nel campo, si calcola la soluzione del problema e solamente a lavoro finito si controlla se il dato assegnato in partenza offre risultati di y^+ soddisfacenti. In caso contrario deve venire modificata la distanza tra punto-parete e successivamente ripetere questo processo.

Il metodo degli elementi finiti non prevede la soluzione diretta delle equazioni differenziali ricavate in precedenza ma la generazione e successiva soluzione di altre equazioni che quasi sempre vengono ottenute con il metodo "*Galerkin*". Tale metodo viene presentato nel paragrafo 5.2. Nel caso trattato qui vengono considerati quattro nodi per il calcolo della velocità e la pressione viene considerata costante all'interno di un elemento. Questa scelta soddisfa la condizione "*Brezzi-Babusca*". Gli operatori, i vettori e le matrici più importanti utilizzate sono definite in questo capitolo.

Altro argomento di fondamentale importanza per la risoluzione del problema sono le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. La scelta dei valori iniziali, se compatibili, non dovrebbe influenzare il risultato finale e quindi vengono imposti in tutto il sistema valori costanti. Per tutte le grandezze da definire si scelgono i valori di ingresso, per il calcolo di k_1^* e ϵ_1^* vengono utilizzate le formule 5.12 e 5.14. Le condizioni al contorno sono definite in base al tipo di contorno del sistema che si considera: pareti rigide, sezione di entrate e di uscita, sezioni di periodicità.

Nel paragrafo 5.4 viene esposto il criterio di convergenza utilizzato per il processo iterativo e gli strumenti che sono stati utili per influenzare la convergenza stessa.

Nel **Capitolo 6** si vuole approfondire un tema molto importante e con aspetti ancora sconosciuti al giorno d'oggi: la transizione dello strato limite. Le grandezze che aiutano la descrizione del fenomeno vengono qui definite, le grandezze che lo influenzano esposte. Una descrizione approfondita della transizione naturale, della transizione mediante bolla di separazione e della transizione by-pass viene effettuata.

Poiché la predizione del fenomeno della transizione significherebbe un notevole passo avanti per la fluidodinamica, si è cercato di elaborare modelli di turbolenza derivati dal modello k - ϵ specifici per questo problema. Più in generale si è cercato di creare modelli che descrivessero fedelmente i fenomeni all'interno dello strato limite (modelli *low-Reynolds*). Per capire cosa viene modificato dal modello standard vengono esposti in questo capitolo alcuni modelli:

-
1. *Jones und Launder* (1972-1973)
 2. *Launder und Sharma* (1974)
 3. *Lam und Bremhorst* (1981)
 4. *Chien* (1982)
 5. *Nagano und Hishida* (1987)
 6. *Myong und Kasagi* (1988)
 7. *Nagano und Tagawa* (1990)
 8. *Yang und Shih* (1992)

Particolarmente interessante è il caso dei modelli esposti nel paragrafo 6.3.1:

9. LS-PTM (1988)
10. LB-PTM (1988)

Essi sono creati specificatamente per la rilevazione della transizione. Considerando che il modello $k-\epsilon$ tende ad aumentare la energia cinetica turbolenta nello strato limite ad ogni iterazione secondo il meccanismo rappresentato in figura 6.5, e tenendo conto che l'energia presente nello strato limite è una variabile di primaria importanza per l'innesco della transizione, questi due modelli cercano con un controllo attivo di questo processo di predire i fenomeni all'interno dello strato limite.

Le particolari condizioni iniziali e al contorno dei modelli low-*Reynolds* vengono esposte.

Viene presentata anche una modificazione del modello $k-\omega$ nel paragrafo 6.4.

Un altro metodo per calcolare le caratteristiche dello strato limite, accanto ai modelli di turbolenza, viene dato dai metodi integrali. Tali metodi integrano le equazioni dello strato limite, perciò si ottengono come risultati solo delle grandezze mediate. Questi metodi necessitano di equazioni differenti a seconda che lo strato limite sia laminare o turbolento, perciò è necessario avere un criterio atto alla determinazione della regione dove avviene la transizione. Tali criteri vengono chiamati criteri di transizione. Essi cercano di mettere in relazione grandezze note del campo (Tab.6.1) per formare particolari numeri di *Reynolds* che una volta raggiunti caratterizzerebbero lo stato del fluido come transitorio. Anche questi metodi vengono esposti. Per l'applicazione di questi criteri è molto importante sapere come sono stati ricavati e in quali condizioni; essi sono relazioni empiriche trovate attraverso prove sperimentali e bisogna quindi verificare in precedenza che non ci siano troppe incongruenze tra tali prove e il caso trattato (paragrafo 6.5.6).

Nel **Capitolo 7** vengono confrontati i risultati numerici con quelli sperimentali. I calcoli vengono eseguiti per due diversi angoli di attacco: $i = -8.5^\circ$ e $i = -1.5^\circ$. Anche l'angolo $i = +5^\circ$ era stato inizialmente trattato, ma purtroppo non si è riuscito a raggiungere la convergenza voluta. Il motivo di questo problema è stato imputato a una separazione non stazionaria dello strato limite a circa metà della corda.

All'inizio del capitolo viene data una descrizione delle prove sperimentali, gli strumenti di misura utilizzati e le grandezze ricavate tramite essi (paragrafo 7.1.1).

I paragrafi seguenti sono relativi all'esposizione dei risultati ottenuti dall'analisi numerica effettuata, al loro confronto con le prove sperimentali (quando possibile), e

all'esposizione e discussione di interessanti grandezze che interessano e caratterizzano lo strato limite. Tali grandezze sono un punto di riferimento importante per la individuazione di fenomeni come transizione e separazione. Tutti i dati esposti sono suddivisi in tre sezioni: grandezze locali, grandezze relative allo strato limite e grandezze integrali.

1. Nella sezione relativa alle **grandezze locali** sono presenti:

Linee di flusso: Le figure 7.4 e 7.5 riportano le linee di flusso relative alle varie applicazioni. Ovviamente, la possibilità di computare tali linee di flusso non implica che il moto sia a potenziale: si tratta solo di grandezze computate a posteriori per permettere una migliore visualizzazione dei risultati.

Vettori delle velocità: Un ottimo metodo per dare un'idea qualitativa delle caratteristiche del flusso è dato da vettori che rappresentano in intensità direzione e verso le velocità puntuali. Essi sono rappresentati nel paragrafo 7.3.2.

Profili di velocità sul dorso e sul ventre: Profili delle velocità per alcune sezioni del canale vengono estrapolate dai dati ricavati e confrontati con le misurazioni (paragrafo 7.3.3), si notano buoni risultati soprattutto sul ventre della pala.

Distribuzione di pressione: La distribuzione di pressione sul profilo (paragrafo 7.3.4) è un dato molto importante per determinare lo sviluppo dello strato limite. Un aumento o diminuzione dello spessore dello strato limite è sempre legato a variazioni della pressione statica sulla pala. Un coefficiente adimensionale viene definito e i valori di questo confrontati. Anche qui, e come sempre, si riscontrano risultati migliori sul ventre della pala. Questo viene giustificato col fatto che sul dorso della pala lo strato limite si comporta in modo molto difficile da rilevare per un modello di turbolenza con separazioni di tipo "bubble" e distaccamenti.

Coefficiente di pressione statico: Il coefficiente di pressione statico viene calcolato oltre che sul profilo della pala anche in tutto il campo, esso viene rappresentato mediante linee di livello in paragrafo 7.3.5.

Distribuzione delle velocità nella scia: Per la determinazione delle perdite e dell'angolo medio di uscita, dati molto importanti che vanno a costituire le curve caratteristiche, è necessaria la distribuzione delle velocità nella scia. Questa viene rilevata e confrontata per tre diverse posizioni (vedi figura 7.26 e tabella 7.7). Qui i risultati non sono soddisfacenti per l'angolo di incidenza $i = -1.5^\circ$ dove si nota una grossolana sottovalutazione dell'intensità delle irregolarità del picco. Meglio anche se non buoni sono invece i risultati per $i = -8.5^\circ$ dove si rileva una giusta valutazione dell'intensità del picco, anche se questo risulta leggermente traslato.

2. Nella sezione relativa alle **grandezze relative allo strato limite** sono presenti:

Distanza adimensionale y^+ : In seguito a ripetute prove si è riusciti ad ottenere un y^+ pressochè perfetto per entrambi gli angoli (paragrafo 7.4.1).

Parametro di forma: Come già annunciato, alcune grandezze utili alla comprensione dello strato limite vengono presentate e discusse. Il paragrafo 7.4.2 tratta le grandezze δ_1 , δ_2 e H_{12} , la loro definizione è stata già effettuata nel paragrafo 6.1 La loro interpretazione porta alla individuazione di regioni di transizione e di distacco.

Coefficiente di attrito: Poiché FIDAP fornisce le tensioni sul profilo, si è pensato di ricavare il coefficiente di attrito, definito dalla formula 7.5 nel paragrafo 7.4.3, per confrontarlo con i dati presenti in letteratura. Nella formula di tale coefficiente è presente però la velocità estrema dello strato limite. Tale velocità è sconosciuta ma calcolabile grazie alla pressione di entrata nella regione di calcolo (fornita dai risultati sperimentali in tabella 7.4), dalla distribuzione di pressione sul profilo e dall'ipotesi di pressione totale costante ovunque. I dati ottenuti per la velocità estrema dello strato limite sono confrontati coi risultati sperimentali e giudicati buoni. Il confronto tra i coefficienti di attrito è invece scadente, non tanto per i valori, ma per la mancata rilevazione dei frequenti distaccamenti dello strato limite. D'altronde questo risultato è da attendere quando si utilizza il modello di turbolenza $k-\epsilon$ con equazione alla parete logaritmica.

3. Nella sezione relativa alle **grandezze integrali** sono presenti:

Perdite $\bar{\omega}$ in funzione dell'angolo di entrata β_1 : le perdite sono considerate tramite un opportuno coefficiente $\bar{\omega}$ definito con la formula 7.11. Il grafico è consultabile in figura 7.59.

Angolo di uscita $\bar{\beta}_2$ in funzione dell'angolo di entrata β_1 : l'angolo di uscita è naturalmente anch'esso una grandezza mediata sul passo t (formula 7.12). Il grafico è consultabile in figura 7.60.

Le caratteristiche in figura 7.59 e 7.60 non danno purtroppo risultati soddisfacenti. Gli errori sono in gran parte imputabili al modello $k-\epsilon$. Soprattutto per quanto riguarda le perdite non si dimostra questo modello di turbolenza storicamente attendibile. Errori, anche superiori del 200% i valori ricavati sperimentalmente, non sono l'eccezione per questo tipo di problemi.

Fattore di diffusione: a puro titolo di curiosità si è voluto valutare questo fattore ottenibile con la formula 7.13. Tale fattore era stato proposto dalla NACA

come criterio per valutare la possibilità di distacco dello strato limite lungo la pala considerando solo grandezze all'entrata e all'uscita della schiera di pale. Questo criterio era stato sviluppato per i profili della serie NACA65 e dice che per valori del parametro superiori a $D = 0.6$ si ha distaccamento. Come si può vedere dal grafico in figura 7.61, per un fattore di valore $D = 0.555$, cosa che corrisponde all'angolo di attacco $i = -1.5^\circ$, lo strato limite risulta già distaccato.

Nel **Capitolo 8** viene riassunto il lavoro e vengono date nuove idee per future tesi di laurea. Questa tesi è stata eseguita sotto l'ipotesi di incompressibilità, anche se il reale utilizzo di questo profilo è per numeri di Mach compresi tra 0.7 e 1.2. Un lavoro interessante è lo studio del flusso per queste più complicate condizioni di fluido. Altro tema di grande interesse sarebbe lo studio dello strato limite con modelli che considerino la transizione per cercare di avere risultati numerici più accurati e precisi.

Nell'**Appendice A** sono riportati il file di comandi utilizzati quali input per FIDAP.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Aufgabenstellung	1
2	Gittergeometrie	3
2.1	Schaufelgeometrie	3
2.2	Strömungsparameter	4
3	Grundgleichungen	6
4	Turbulente Strömungen	8
4.1	Allgemeine Eigenschaften	8
4.2	Strömungsgleichung und Reynolds'sche Gleichungen	8
4.3	Definition des Turbulenzgrads	10
4.4	Turbulenzmodellierung	10
4.4.1	Einleitung	10
4.4.2	Verfahrensmöglichkeiten	11
4.4.3	Zweigliedungsmodelle	12
4.4.3.1	k - ϵ Turbulenzmodell	12
4.4.3.2	Grenzschichtmodellierung	12
4.4.3.3	k - ω Turbulenzmodell	14
5	Numerisches Lösungsverfahren	16
5.1	Netzstruktur	16
5.2	Lösungsverfahren	19
5.3	Anfangs- und Randbedingungen	21
5.3.1	Anfangsbedingungen	21
5.3.2	Randbedingungen	22
5.3.2.1	Feste Ränder	22
5.3.2.2	Ein- und Ausströmrand	23
5.3.2.3	Periodizitätsbedingungen	23
5.4	Beeinflussung der Konvergenz	23
5.4.1	Relaxationsfaktoren	23
5.4.2	Konvergenzkriterien	24
6	Transition	25
6.1	Grenzschichtgrößen	25
6.2	Entstehung der Turbulenz	25
6.2.1	Natürliche Transition	26
6.2.2	Transition über eine laminare Ablöseblase	28
6.2.3	Bypass Transition	29
6.3	Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle	30
6.3.1	Modellerweiterungen	33

6.3.2	Anfangs- und Randbedingungen	34
6.3.2.1	Anfangsbedingungen	34
6.3.2.2	Randbedingungen	35
6.4	k - ω Turbulenzmodell	36
6.5	Transitionskriterien	37
6.5.1	Transitionskriterien mit der Reynoldszahl	37
6.5.2	Transitionskriterien mit dem Turbulenzgrad	37
6.5.3	Transitionskriterien mit Turbulenzgrad und Druckgradient	38
6.5.4	Transitionskriterien mit dem Formparameter	39
6.5.5	Transitionskriterien für die Ablöseblase	40
6.5.6	Anwendbarkeit der Korrelationen	41
7	Berechnungsergebnisse	42
7.1	Experimentelle und numerische Vergleichsdaten	42
7.1.1	Instrumentierung der Experimente	43
7.2	Konvergenz	47
7.3	Lokale Strömungsgrößen	49
7.3.1	Stromlinien	49
7.3.2	Geschwindigkeitsvektoren	50
7.3.3	Geschwindigkeitsprofile an Saug- und Druckseite	52
7.3.4	Profildruckverteilung	58
7.3.5	Statischer Druckkoeffizient	60
7.3.6	Geschwindigkeitsverteilung in der Nachlaufströmung	62
7.4	Grenzschichtgrößen	67
7.4.1	Dimensionsloser Wandabstand y^+	67
7.4.2	Formparameter	69
7.4.3	Schubspannungsbeiwert	77
7.5	Über der Teilung gemittelte Strömungsgrößen	86
7.6	Diffusionsfaktor	89
8	Zusammenfassung und Ausblick	90
A	FIDAP-Eingabefile	93

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

a	[-]	beliebige skalare Transportgröße
a	[m]	charakteristische Länge der Ablöseblase
A	[-]	Parameter der Modellerweiterungen
b	[m]	charakteristische Länge der Ablöseblase
B	[-]	Parameter der Modellerweiterungen
C	[-]	Konstante im logarithmischen Überlappungsgesetz
C_f	[-]	Schubspannungsbeiwert
C_{f0}	[-]	Schubspannungsparameter
C_p	[-]	statischer Druckkoeffizient
C_1, C_2, C_μ	[-]	Konstanten im k - ϵ Modell
\mathbf{D}	[-]	Differentialoperator
d	[m]	maximale Profildichte
D	[-]	Diffusionsfaktor
D	[m ² /s ³]	Zusatzterm der Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle
E	[-]	Zusatzterm der Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle
f_μ, f_1, f_2	[-]	Dämpfungsfunktionen der Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle
\vec{F}	[-]	Vektor mit Randbedingungen
g	[-]	Gewichtsfunktionen
H_{12}, H_{23}, H_{32}	[-]	Formparameter
\mathbf{J}	[-]	Jacobimatrix
k	[m ² /s ²]	turbulente kinetische Energie
i	[°]	Inzidenzwinkel
Ma	[-]	Machzahl
p	[N/m ²]	statischer Druck
p_t	[N/m ²]	Totaldruck
P	[m ² /s ³]	turbulente Produktionsrate
q_i	[-]	unbekannte Konstanten im Ritzschen Ansatz
r, s	[-]	lokale Koordinaten im Einheitsraum
r	[m]	Radius
R	[-]	Residuum
R_β, R_k, R_ω	[1]	Konstanten des k - ω Modells
Re	[-]	Reynoldszahl
Re	[-]	Turbulenz-Reynoldszahl
S	[m]	Sehnenlänge
t	[s]	Zeit
t	[m]	Schaufelteilung
T_{KD}	[-]	Zusatzterm des k - ω Modells

Tu	[-]	Turbulenzgrad
ΔT	[s]	Zeitintervall
u	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung
u^+	[-]	dimensionslose Geschwindigkeit
u_δ	[m/s]	Geschwindigkeit am Grenzschichtrand
u_τ	[m/s]	Schubspannungsgeschwindigkeit
v	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
w	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in z -Richtung
w	[m/s]	Relativgeschwindigkeit
x, y, z	[m]	kartesische Koordinaten
y^+	[-]	dimensionsloser Wandabstand

Griechische Formelzeichen

α	[-]	Relaxationsfaktor
$\alpha, \alpha^*, \alpha_0$	[-]	Konstanten im k - ω Modell
β	[°]	Strömungswinkel im Relativsystem, gemessen von der Axialrichtung
β, β^*	[-]	Konstanten im k - ω Modell
γ	[°]	Staffelungswinkel
ϵ	[m ² /s ³]	turbulente Dissipationsrate
ϵ	[-]	Konvergenzschranke
$\tilde{\epsilon}$	[m ² /s ³]	modifizierte turbulente Dissipationsrate
δ	[m]	Grenzschichtdicke
δ	[m]	turbulentes Längenmaß
δ_D	[°]	Deviationswinkel
δ_{ij}	[-]	Kronecker-Symbol
δ_1	[m]	Verdrängungsdicke
δ_2	[m]	Impulsverlustdicke
δ_3	[m]	Energieverlustdicke
Δ	[m]	Wandabstand
κ	[-]	Kármán-Konstante
κ	[°]	Metallwinkel
λ	[-]	Pohlhausenparameter
μ	[Pas]	dynamische Viskosität
μ_t	[Pas]	turbulente dynamische Viskosität
ν	[m ² /s]	kinematische Viskosität
ν_t	[m ² /s]	turbulente kinematische Viskosität
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ	[-]	Solidity (Inverses Teilungsverhältnis)
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	[-]	Konstanten im k - ϵ und im k - ω Modell
τ	[N/m ²]	Schubspannung
$\tau_{i,j}$	[-]	Spannungsmatrix
τ_w	[N/m ²]	Wandschubspannung
ϕ	[-]	Ansatzfunktionen
ϕ	[°]	Profilbogenwinkel
$\vec{\varphi}$	[-]	Interpolationsvektor der Geschwindigkeit
$\vec{\psi}$	[-]	Interpolationsvektor des Druckes
ω	[-]	spezifische Dissipationsrate im k - ω Modell
ω	[-]	Totaldruckkoeffizient

$\vec{\omega}$ [-] Vektor

Tiefgestellte Indizes

Ab	Ablösung
c	Skelettlinie
ex	Extremwert
$KRIT$	kritische Zahl
in	instabil
LE	Vorderkante
lok	lokale Größe
p	Druckseite
s	Saugseite
t	turbulent
TE	Hinterkante
tr	Transition
u	Umfangskomponente
x	x -Richtung
y	y -Richtung
W	Wand
1	Eintrittsebene
2	Austrittsebene
∞	Größen der ungestörten Strömung

Hochgestellte Indizes

$(.)^*$	dimensionslose Größe
$(.)'$	turbulente Schwankungsgröße
$\overline{(.)}$	zeitlich gemittelte Größe/teilungsgemittelte Größe

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Der Wunsch nach höheren Wirkungsgraden stellt an die Schaufelaerodynamik der Turbokomponenten immer höhere Anforderungen. Da durch die Erhöhung der Leistungsdichte die aerodynamische Belastung der einzelnen Stufen und Schaufeln steigt, müssen die zur Beschaukelungsauslegung eingesetzten Verfahren ständig erweitert und verbessert werden. Die Senkung der Betriebskosten ist ein wesentliches Ziel bei der Entwicklung der Turbomaschinen. Ein großer Anteil dieser Kosten sind die Treibstoffe; eine Senkung des spezifischen Brennstoffverbrauchs wird durch eine Wirkungsgradverbesserung der Einzelkomponenten gewonnen. Die Schaufelaerodynamik spielt hier eine wichtige Rolle, da einerseits der Wirkungsgrad gesteigert werden soll, andererseits größere Umlenkungen gefragt werden, um die Leistung zu erhöhen oder um die Stufenanzahl zu reduzieren. Durch eine Senkung der Profilverluste einer Schaufel wird eine Steigerung des Wirkungsgrades erreicht. Diese Verluste hängen im wesentlichen vom Strömungszustand innerhalb der Grenzschicht ab. Eine laminare Grenzschicht hat den Vorteil, dass die Fluidteilchen in getrennten Bahnen strömen. Dem gegenüber hat die turbulente Grenzschicht eine sogenannte turbulente Schwankungsbewegung quer zur Hauptströmungsrichtung, die eine Erhöhung der lokalen Reibungsverluste wegen eines Austausches von Impuls und Energie bewirkt. Um die Profilverluste gering halten zu können, muß deshalb die Grenzschicht so lang wie möglich laminar sein. Auf jeden Fall wäre die Ablösung der Grenzschicht zu vermeiden, da eine Ablösung bis zur Profilhinterkante einen großen Anstieg der Verluste bedeutet. Wenn die Umlenkungen gross sind, werden die Druckgradienten auch gross; leider ist es schwer, in diesem Fall keine Ablösung zu haben. Das ist speziell bei Verdichtergittern problematisch, weil dort Bereiche stark verzögerte Strömung auftreten, die zu einem raschen Anwachsen der Grenzschicht, mit der Gefahr einer vorzeitigen Strömungsablösung, führen.

Zur Ermittlung der Eigenschaften einer Beschaukelung, wie bei wissenschaftlichen Untersuchungen im allgemeinen, gab es in der Vergangenheit nur zwei methodische Ansätze:

Praktischer Ansatz: Es wird durch Experimente mittels Meßinstrumenten und Meßgeräten versucht, durch Beobachtung physikalische Gesetzmäßigkeiten herauszufinden. Leider ist dieser Ansatz manchmal nicht genügend, weil viele Experimente sehr aufwendig sind, die Messungen oft nur an wenigen Punkten möglich sind oder die Dimensionen des Meßobjektes zu klein sind.

Theoretischer Ansatz: Hier wird versucht, die Gesetzmäßigkeiten in Beziehungen zwischen mathematischen Größen zu übertragen. Diese Gesetze werden fast immer mit Hilfe der Differential- und Integralgleichung beschrieben, die meist so komplex sind, daß eine analytische Lösung nicht bestimmt werden kann. Oft kann man eine Lösung

nur mittels starken Vereinfachungen des Modells gewinnen, die oft zu grob sind, um eine befriedigende Beschreibung der Realität zu ermitteln.

In letzter Zeit ist eine anderer Weg neben den praktischen und theoretischen Ansätze entstanden: die numerische Simulation. Mathematische Gleichungen werden entwickelt, die die Realität gut beschreiben und gültig in jedem Punkt des betrachteten Raumes sind. Der Raum wird dann diskretisiert, um eine endliche Anzahl von Punkten zu erhalten; nur in diesen Punkten werden die kontinuierlichen Grundgleichungen ausgerechnet. Natürlich spielt hier die Leistungsfähigkeit des Rechners (Rechengeschwindigkeit und Speicherplatz) eine wesentliche Rolle, um die Dichte der Punkte zu erhöhen. Viele Vorteile und viele Nachteile hat dieser dritte Ansatz: Die Verfahren sind billig, schnell, mit veränderten Geometrien und Parametern einfach wiederherstellbar und es gibt die Möglichkeit, mehr Daten als durch klassische Experimente zu erhalten. Durch die Entwicklung unterschiedlichster Turbulenzmodelle wird beispielsweise die Simulation und die Modellierung turbulenter Strömungen ermöglicht. Leider ist es nicht so einfach, ein Modell zu bauen, das die Realität gut beschreibt. Dazu muß das diskrete Modell gut das kontinuierliche mathematische Modell approximieren. Nicht zu vergessen ist außerdem die hohe Anforderung an Rechengeschwindigkeit und Speicherplatz. Schließlich müssen die Ergebnisse der numerischen Simulation auch mit den Ergebnissen entsprechender physikalischer Experimente verglichen werden. Eventuell muss dann entweder der numerische Algorithmus nachgebessert werden (eine genauere Diskretisierung durch eine feinere Auflösung) oder das Modell muß abgeändert werden. Bei der Diskretisierung der Grundgleichungen kommen drei Verfahrenshauptgruppen zum Einsatz: Finite-Differenzen, Finite-Elemente und Finite-Volumen.

Die unterschiedlichen Methoden, um turbulente Strömungen zu simulieren, werden mit Hilfe kommerzieller Programmpakete wie FIDAP, FLUENT, FIRE, PHOENICS, FLOTRAN usw. implementiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein numerisches Verfahren für die Simulation von zweidimensionalen Problemstellungen aus dem Gebiet der thermischen Turbomaschinen vorgestellt und angewendet. Unter Verwendung des Finite-Elemente-Programmes FIDAP wird die ebene turbulente Strömung in einem Verdichtergitter berechnet. Die Berechnung von stationären inkompressiblen Strömungsfeldern basiert hier auf der Lösung der *Reynolds*'schen Gleichung durch das Prinzip der Wirbelviskosität. Bei vielen technischen Problemen spielen Turbulenzeinflüsse bezüglich der Strömungsbildung eine entscheidende Rolle. Aus diesem Grund stehen verschiedene Modelle zur Erfassung der Turbulenzauswirkungen zur Verfügung. Bei dem Turbulenzansatz handelt es sich hier um das Standard $k-\epsilon$ Turbulenzmodell. Als Testfall ist die Durchströmung des DCA-Verdichtergitters (Double Circular Arc) ausgewählt worden. Die Messungen, die 1987 von *Zierke* und *Deutsch* bei ERCOFTAC (European Research Community on Flow Turbulence and Combustion) im Rahmen des Testcase 15 veröffentlicht worden sind, beziehen sich auf drei verschiedene Zuströmwinkel. Diese drei Testfälle sind im Rahmen dieser Diplomarbeit ausgewählt worden. Ein Vergleich der Modellrechnungen mit den experimentellen Messungen wird durchgeführt. Aus den berechneten Daten sollen die Charakteristiken des Verdichtergitters bestimmt werden, das heißt die Zusammenhänge $\beta_2 = f(\beta_1)$ und $\omega_1 = g(\beta_1)$.

Kapitel 2

Gittergeometrie

2.1 Schaufelgeometrie

Das DCA Profil wurde im NASA Lewis Research Center entwickelt. Die einfache Geometrie charakterisiert dieses Profil, Profiloberseite und Profilunterseite der betrachteten Schaufel bestehen nämlich aus zwei Kreisbögen. Sie deckt heutzutage einen großen technischen Anwendungsbereich ab.

Der Vorteil dieser dünnen Schaufel liegt darin, daß sie auch bei Anströmmachzahlen größer als eins ein gutes aerodynamische Verhalten aufweist. Die Eigenschaften sind besonders gut bei typischer transsonischer Strömung [2], aber weniger gut im Falle einer hohen Überschallgeschwindigkeit. Es wird empfohlen, diese Schaufel nur bei Machzahlen von 0.70 bis 1.20 zu verwenden. Hat man niedrigere Geschwindigkeiten, dann entstehen mit einem NACA-65 Profil weniger Verluste.

In Abb.2.1 sind die Abmessungen der verwendeten Schaufel dargestellt.

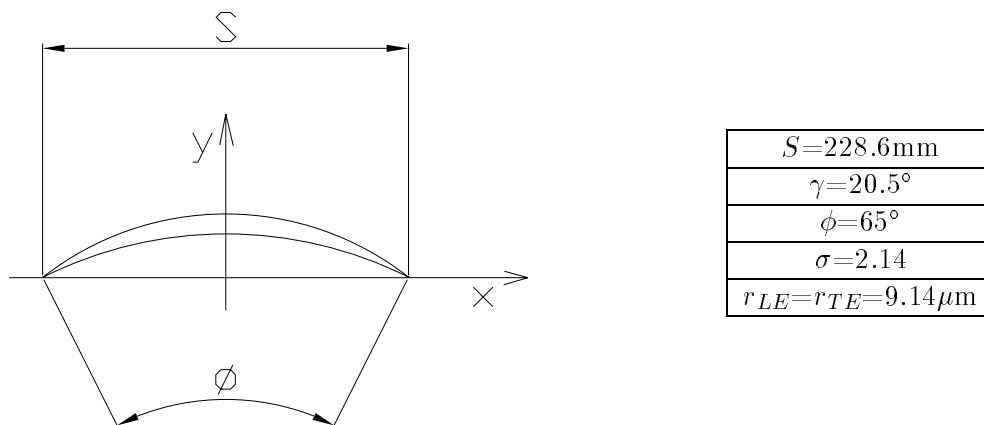


Abbildung 2.1: Schaufelgeometrie

Profiloberseite und Profilunterseite der Schaufel bestehen aus zwei Kreisbögen, die von den folgenden Gleichungen (in mm) beschrieben werden [3]:

$$x_p^2 + [y_p + 219.7]^2 = 246.8^2. \quad (2.1)$$

$$x_s^2 + [y_s + 149.5]^2 = 189.1^2. \quad (2.2)$$

Natürlich ist auch die Skelettlinie ein Kreisbogen:

$$x_c^2 + [y_c + 179.4]^2 = 212.8^2. \quad (2.3)$$

In Abb.2.2 ist die Dicke der Schaufel im Bezug auf die Sehnenlänge entlang der Sehne dargestellt. Die Dickenverteilung hat $d/S=0.0547$ als maximale Dicke.

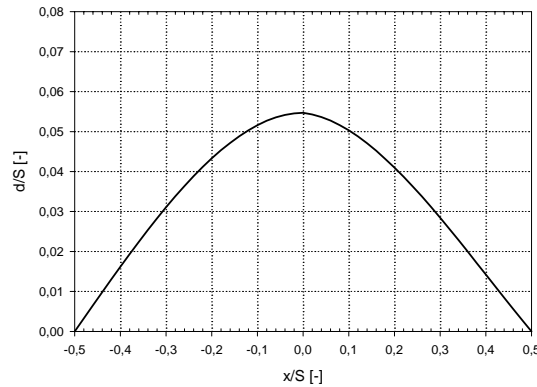


Abbildung 2.2: Dickenverteilung

2.2 Strömungsparameter

Als Strömungsparameter werden Anströmgeschwindigkeit, Turbulenzgrad und die drei verschiedenen Anströmwinkel gegeben (siehe [3]). Anströmwinkel ist der Winkel der Zuströmung relativ zur Profillängsachse. Diese Eintrittsdaten sind wie die Anströmparameter der Untersuchungen von *Zierke* und *Deutsch*, um die numerischen Ergebnisse mit den Experimenten vergleichen zu können. Die verwendeten Winkel der Anströmung sind in Abb.2.3 dargestellt. Die Strömung wird für drei verschiedene Inzidenzwinkel $i = \beta_1 - \kappa_1$ berechnet.

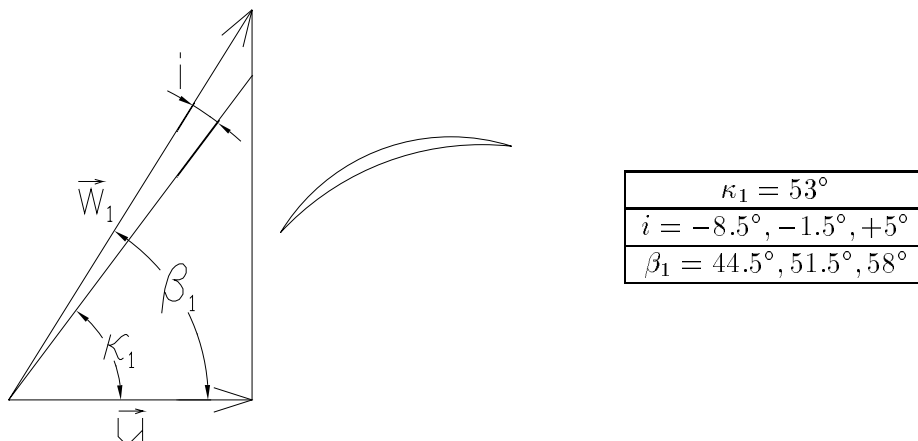


Abbildung 2.3: Anströmwinkel

Die Dichte und kinematische Viskosität der Luft, und die von *Zierke* und *Deutsch* gemessene Eintrittsgeschwindigkeit und Turbulenzgrad entnimmt man Tab.2.1.

$\rho[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$	$\nu[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}]$	$w_1[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$	$Tu_1[\%]$
1.205	$1.5 \cdot 10^{-5}$	33	0.18

Tabelle 2.1: Eintrittsrandbedingungen

Die Reynoldszahl ermöglicht den Vergleich von ähnlichen Strömungen mit verschiedenem Größenmaßstab und beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften in der Strömung. Die Sehnenlänge wird als charakteristische Länge angenommen und somit wird die Reynoldszahl mittels

$$Re_1 = \frac{w_1 S}{\nu} \simeq 500000 \quad (2.4)$$

berechnet. Das Fluid ist ein übergreifender Begriff für Flüssigkeiten und Gase in der Strömungsmechanik. Dabei unterscheidet man zwischen kompressiblen und inkompressiblen Fluiden. Als inkompressibel gelten alle Flüssigkeiten und als kompressibel alle Gase und Dämpfe. Da sich aber die Dichte von Gasen und Dämpfen bei Strömungen im Bereich $w < 100 \text{ m/s}$ kaum verändert, werden sie unter diesen Bedingungen auch als inkompressibel betrachtet. Die Machzahl ist ein Maß für die Schallausbreitung. Sie spielt eine Rolle bei den kompressiblen Fluiden und bei Überschallströmungen ($Ma > 1$). Die Machzahl ist das Verhältnis zwischen Strömungsgeschwindigkeit und der örtlichen Schallgeschwindigkeit des Fluids. Dabei kann man Fluide ab $Ma = 0,3$ nicht mehr als inkompressibel ansehen. Das vorliegende Fluid kann als inkompressibel betrachtet werden.

Kapitel 3

Grundgleichungen

Mit der Berechnung einer ebenen stationären inkompressiblen Strömung sollen die Geschwindigkeitskomponenten u , v und der Druck p in Abhängigkeit von den Koordinaten x und y ermittelt werden. Die Gleichungen, die gelöst werden müssen, um die drei Unbekannten zu finden, sind die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung in zwei Richtungen (Navier-Stokes Gleichung). Für eine ebene stationäre inkompressible Strömung besteht das Gleichungssystem aus drei partiellen Differentialgleichungen für die drei Unbekannten u , v , und p , die für vorgegebene Randbedingungen gelöst werden müssen. Wird eine kompressible Strömung betrachtet, so hat man eine weitere Unbekannte, und zwar die Dichte ρ . Dazu braucht man eine weitere Gleichung: die Energiegleichung. Für die numerische Lösung mit einem Rechner braucht man eine dimensionslose Schreibweise dieser Gleichungen. Dimensionslose Größen werden hier mit einem hochgestellten Stern gekennzeichnet. Bei der Tragflügelströmung werden häufig die Größen der Zuströmung als charakteristische Größen verwendet. Die charakteristische Länge ist die Sehnenlänge, die Anströmgeschwindigkeit ist die charakteristische Geschwindigkeit. So ergibt sich:

$$x^* = \frac{x}{S} \quad y^* = \frac{y}{S} \quad (3.1)$$

$$u^* = \frac{u}{w_1} \quad v^* = \frac{v}{w_1} \quad (3.2)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.3)$$

Und die Navier-Stokes Gleichungen lauten:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho w_1^2} \frac{\partial p}{\partial x^*} + \frac{\nu}{S w_1} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.4)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho w_1^2} \frac{\partial p}{\partial y^*} + \frac{\nu}{S w_1} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.5)$$

Führt man den dimensionlosen Druck und die Reynoldszahl ein, kann man diese Formeln besser darstellen. Für den dimensionlosen Druck gilt:

$$p^* = \frac{p}{\rho w_1^2} \quad (3.6)$$

Und die endgültige Schreibweise der dimensionslosen Navier-Stokes Gleichungen:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.7)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.8)$$

Kapitel 4

Turbulente Strömungen

4.1 Allgemeine Eigenschaften

Analyse und Simulation der Turbulenz gehören zu den schwierigsten Aufgaben der Strömungsmechanik. Bei großen Reynoldszahlen bildet sich eine völlig irreguläre chaotische Strömung mit den folgenden charakteristischen Eigenschaften aus:

1. Instationarität und Dreidimensionalität.
2. Regellosigkeit.
3. Nichtlinearität. Wegen der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichungen können sich kleine Störungen in der Strömung verstärken.
4. Diffusivität. Der Transport in turbulenten Strömungen mittels Wirbel erhöht die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Impuls, Masse und Wärme.
5. Wirbeligkeit.
6. Energievernichtung. Turbulente Strömungen brauchen immer Energiezufuhr von außen, weil die Energie durch viskose Reibung aufgezehrt wird.

4.2 Strömungsgleichung und Reynolds'sche Gleichungen

Theoretisch könnten die Navier-Stokes-Gleichungen auf einem feinen Gitter diskretisiert und gelöst werden, um perfekt die Strömung aufzulösen und darzustellen. Dieser Vorgang heißt "direkte numerische Simulation". Leider müssen jedoch die kleinsten, dissipativen Wirbel im turbulenten Strömungsfeld erfaßt werden. Um technische Anwendungen mit Hilfe dieser direkten Simulation richtig zu lösen, werden so viele Gitterpunkten benötigt, dass die Rechenleistung und der Speicherplatz heutiger Computer nicht ausreicht. Da der mittlere Durchfluß oder der Strömungswiderstand vielmehr als die Details einer turbulenten Strömung interessieren, sind die makroskopischen mittleren Werte von Interesse. Deshalb wird man im allgemeinen versuchen, zumindest die Hauptströmung auf einem Gitter mit einer befriedigenden Zahl von Punkten zu berechnen und die Effekte nicht auflösbarer Wirbel anderweitig geeignet zu modellieren. Aus diesem Grunde werden der Berechnung turbulenter Strömungen die zeitgemittelten Transportgleichungen, die sogenannten *Reynolds'schen* Gleichungen zugrunde gelegt. Die *Reynolds'schen* Gleichungen ergeben sich durch Aufspaltung der Momentanwerte der abhängigen Größen in zeitlich konstante Mittelwerte und turbulente Schwankungsanteile mit anschließender Zeitmittelung der Transportgleichungen. Die

Geschwindigkeitskomponenten sind bei statistisch stationären turbulenten Strömungen unregelmäßigen zeitlichen dreidimensionalen Schwankungen (siehe Abb.4.1) mit hoher Frequenz unterworfen.

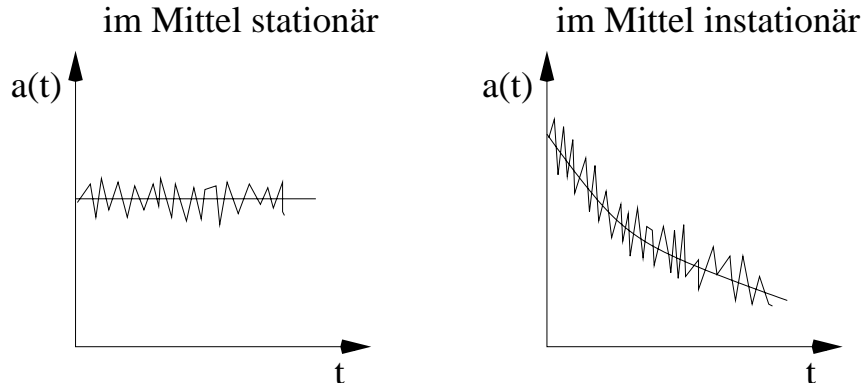


Abbildung 4.1: Verlauf einer beliebigen Größe in turbulenter Strömung

Durch Überlagerung des zeitlichen Mittelwertes und eines Schwankungsanteiles werden die Momentanwerte dieser Größen dargestellt.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (4.1)$$

Der zeitliche Mittelwert für eine beliebige Größe "a" wird aus der folgenden Beziehung gerechnet.

$$\bar{a} = \frac{1}{\Delta T} \int_t^{t+\Delta T} a(x, y, z, t) dt \quad (4.2)$$

Die Integrationszeit muß selbstverständlich groß sein im Vergleich zum Zeitmaßstab der Schwankungen, weil die Mittelwerte von der Zeit unabhängig sein müssen und, die Mittelwerte der Schwankungsgrößen null sein sollen. Normalerweise muß das Mittelungsintervall nur so groß gewählt werden, daß sich der Mittelwert bei einer Vergrößerung nicht mehr ändert. Durch eine zeitliche Mittelwertbildung lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (4.3)$$

Die Form der Navier-Stokes Gleichung für zeitgemittelte turbulente Strömungen wird *Reynolds'sche Gleichung* genannt. Sie stellt die Bewegungsgleichung für die Mittelwerte der Strömungsgrößen in einer turbulenten Strömung dar, so wie die Navier-Stokes Gleichung die Bewegungsgleichung für die Momentanwerte darstellt.

$$\bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \overline{v'_k v'_j} \right) \quad (4.4)$$

oder

$$\bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \rho \overline{v'_k v'_j} \right) \quad (4.5)$$

Infolge der Mittelung der nichtlinearen konvektiven Glieder treten neue Ausdrücke auf, die den erhöhten Impulsaustausch durch turbulente Schwankungsbewegungen darstellen. Diese neuen Glieder haben die Form

$$-\rho \overline{v'_k v'_j}. \quad (4.6)$$

Zusammen bilden diese Ausdrücke einen symmetrischen Tensor zweiter Stufe

$$-\rho \overline{v'_k v'_j} = (\tau_{jk})_t \quad (4.7)$$

$$(\tau_{jk})_t = \begin{pmatrix} \overline{v_1'^2} & \overline{v_1' v_2'} & \overline{v_1' v_3'} \\ \overline{v_2' v_1'} & \overline{v_2'^2} & \overline{v_2' v_3'} \\ \overline{v_3' v_1'} & \overline{v_3' v_2'} & \overline{v_3'^2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Diese neun Komponenten von denen nur sechs unabhängig sind, werden turbulente- oder Reynoldsspannungen genannt, da sie wie Spannungen auf das Fluid wirken. Oft wird dieser Tensor wie ein echter Spannungstensor betrachtet, wo in der Hauptdiagonalen die Normalspannungen dargestellt werden. Die anderen Plätze sind natürlich von den Schubspannungen besetzt. Aus diesem Grund wird der Tensor auch mit den üblichen Komponenten der Elastizitätstheorie bezeichnet:

$$(\tau_{jk})_t = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Diese Korrelationsglieder stellen weitere Unbekannte dar, so daß das System nicht geschlossen ist. Um ein geschlossenes System zu erhalten, müssen diese Korrelationsterme durch ein Turbulenzmodell mit bekannten Größen des Geschwindigkeitsfeldes in Verbindung gebracht werden.

4.3 Definition des Turbulenzgrads

Die Charakterisierung der Freistromturbulenz erfolgt über den Turbulenzgrad, der wie folgt definiert wird:

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{u_\infty} \quad (4.10)$$

Wir nehmen eine isotrope Turbulenz an. Die Formel (4.10) vereinfacht sich zu

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_\infty}. \quad (4.11)$$

Übliche Werte des Turbulenzgrades liegen zwischen 0.1% und 15%. Ein Verdichtergitter hat kleine Turbulenzgrade in der reibungsfreien Strömung und große in der Nähe fester Wände und besonders im Nachlauf.

4.4 Turbulenzmodellierung

4.4.1 Einleitung

Zur Schließung des Gleichungssystem werden die neuen Terme in den Erhaltungsgleichungen mit bekannten mittleren Größen des Strömungsfeldes über halbempirische Modelle, sogenannte Turbulenzmodelle, verknüpft. Diese Modelle werden abhängig von der Zahl der verwendeten Transportgleichungen für charakteristische Turbulenzgrößen in Null-, Ein-, Zweigleichungsmodelle und Reynoldsspannungsmodelle eingeteilt, wobei Komplexität und Allgemeingültigkeit mit der Zahl der Gleichungen zunehmen. Mit Ausnahme der Reynoldsspannungsmodelle verwenden alle Modellgruppen das Prinzip der Wirbelviskosität (eddy-viscosity),

bei dem der turbulente Austausch in Analogie zum molekularen Transport mit dem mittleren Geschwindigkeitsgradienten verknüpft wird. Bei diesen Wirbelviskositätsmodellen werden nämlich die Reynoldsspannungen über die Einführung einer turbulenten Viskosität zu dem Tensor der Formänderungsgeschwindigkeiten in Bezug gebracht und können zu dem molekularen Spannungstensor addiert werden. Die sogenannte kinetische Turbulenzenergie wird wie folgt definiert:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_k'^2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (4.12)$$

Die turbulente kinetische Energie einer Strömung setzt sich aus den kinetischen Schwankungsenergien in allen drei Raumrichtungen zusammen (Schwankungen sind immer dreidimensional). Die halbempirische Formel von *Boussinesq*, wo die Reynoldsspannungen in Abhängigkeit von der turbulenten Viskosität dargestellt sind, ermöglicht die Reduktion der unbekannten Reynoldsspannungen.

$$(\tau_{jk})_t = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{jk}. \quad (4.13)$$

wobei δ_{jk} das Kroneckerdelta ist. Aufgabe jedes Turbulenzmodells ist nun, die Wirbelviskosität eindeutig zu definieren. Es wird angenommen, daß sie nur vom Ortsvektor abhängt

$$\nu_t = \nu_t(x, y, z). \quad (4.14)$$

Die Wirbelviskosität ist jedoch im Gegensatz zur molekularen Viskosität keine Materialeigenschaft des Fluids, sondern ihr Wert ist abhängig vom Ort. Sie wird durch die Turbulenzstruktur an dem jeweiligen Ort bestimmt. Die Reynoldsspannungen in Glg.(4.8) hängen jetzt nur von der Wirbelviskosität ab; wird sie definiert, können die differentiellen Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik numerisch gelöst werden.

4.4.2 Verfahrensmöglichkeiten

Da die Turbulenzmodelle auf experimentellen Ergebnissen mit bestimmten Reynolds-, Machzahlbereichen, Druckgradienten, Oberflächenrauigkeiten basiert sind, ist ihre Auswahl von wesentlicher Bedeutung, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Gleichzeitig sollte auch das ausgewählte Modell eine gute Wirtschaftlichkeit haben. Aus dem Ziel der Berechenbarkeit turbulenter Strömungen ergeben sich nämlich einige allgemeine Anforderungen an ein Turbulenzmodell, die sich mit den folgenden Aussagen umschreiben lassen:

- großer Anwendungsbereich
- Genauigkeit
- geringer Rechenaufwand
- Einfachheit

Ein komplexeres Modell ist nur dann angebracht, wenn der vergrößerte Rechenaufwand durch Universalität und Genauigkeit kompensiert wird. Es sollte daher bei der Berechnung immer erst von dem einfachsten Modell ausgegangen werden, da der Rechenaufwand mit zunehmender Komplexität des Modells stark ansteigt.

4.4.3 Zweigleichungsmodelle

Diese Modelle verwenden zwei Transportgleichungen, eine für die kinetische Turbulenzenergie und eine für den Längenmaßstab oder besser eine Kombination von Länge und Geschwindigkeitsmaßstab. Die Modelle mit einer Gleichung nur für einen Längenmaßstab haben nämlich den Nachteil einer beschränkten Allgemeingültigkeit. Hier werden zwei verschiedene Modelle dargestellt: das k - ϵ und das k - ω Turbulenzmodell.

4.4.3.1 k - ϵ Turbulenzmodell

Ein häufig verwendetes Zweigleichungsmodell ist das Standard k - ϵ Turbulenzmodell nach *Launder* und *Spalding* [12] [22]. Dieses Modell ist nur für hohe Reynoldszahlen geeignet, weil die Modellierung unter der Annahme vernachlässigter molekularer Viskosität erfolgt. Aus diesem Grund sind Anwendungen in Bereichen wie Transition und in der Nähe von festen Wänden nicht möglich. In der Grenzschicht müssen entweder besondere Wandfunktionen oder Modifikationen des Modells eingeführt werden. Die turbulente Viskosität ist

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (4.15)$$

mit einer turbulenten Dissipationrate

$$\epsilon = \nu \frac{\overline{\partial u_i \partial u_i}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4.16)$$

Sind nun k und ϵ bekannt, kann man die Wirbelviskosität durch Glg.(4.15) berechnen. Sie lassen sich mit zwei zusätzlichen Transportgleichungen ermitteln. Die Transportgleichung für k lautet

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) \right] + P - \epsilon, \quad (4.17)$$

und für die Dissipationsrate gilt

$$\bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}. \quad (4.18)$$

P ist der Produktionsterm und er ist wie folgt definiert

$$P = \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}. \quad (4.19)$$

Die Transportgleichungen der Turbulenzvariablen führen fünf neue Konstanten ein, die aus Experimenten und Computeroptimierungen resultieren. Sie sind in Tab.4.1 dargestellt.

C_μ	σ_k	σ_ϵ	C_1	C_2
0.09	1.00	1.30	1.44	1.92

Tabelle 4.1: Konstanten des k - ϵ Turbulenzmodells [12]

4.4.3.2 Grenzschichtmodellierung

Grundlegende Voraussetzung für die Anwendung des Standard k - ϵ Modelles sind hohe Reynoldszahlen. In unmittelbarer Wandnähe ist die molekulare Viskosität jedoch von gleicher Größenordnung wie die Wirbelviskosität, so daß dort diese Modellannahme nicht mehr erfüllt

ist. Der wandnahe Bereich wird daher mittels sogenannter Wandfunktionen überbrückt. Nach dem Newtonschen Schubspannungsansatz gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad (4.20)$$

wobei τ_w die Schubspannung an der Wand ist. Die Dicke der viskosen Unterschicht, wo die Zähigkeitskräfte nicht vernachlässigbar sind, ist zwar sehr klein im Vergleich zur gesamten turbulenten Strömung, aber sehr wichtig für eine technische Betrachtung (z.B. Energieverluste). Zwei zulässige Vereinfachungen in der Unterschicht werden angenommen und zwar, dass der Mittelwert des Druckes an der Wand konstant ist und die Größen nur von y abhängen. Da man das Problem mit dimensionslosen Größen betrachten will, ist die Einführung eines neuen Parameters nützlich. Man definiert die Schubspannungsgeschwindigkeit wie folgt:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.21)$$

Jetzt kann das universelle Wandgesetz postuliert werden:

universelles Wandgesetz: Innerhalb eines schichtförmigen Gebiets, das auf einer Seite von einer Wand begrenzt wird und dessen Dicke klein gegen die Abmessungen des ganzen Strömungsfeldes ist, wird die gemittelte Geschwindigkeitsverteilung nur durch die Schubspannungsgeschwindigkeit, die kinematische Viskosität und y bestimmt.

Sind die Annahmen dieses Gesetzes erfüllt, dann ist es immer anwendbar. Um das Problem ab jetzt dimensionslos zu betrachten, werden der dimensionslose Wandabstand und die dimensionslose Geschwindigkeit eingeführt.

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \quad (4.22)$$

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad (4.23)$$

Der dimensionslose Wandabstand kann mit Hilfe einer geeigneten Funktion die gemittelte Geschwindigkeitsverteilung beschreiben, weil er die von dem universellen Wandgesetz gefragten Variablen enthält. Ein Ähnlichkeitgesetz wurde von *Prandtl* angegeben:

$$\bar{u} = u_\tau f(y^+) \quad (4.24)$$

Die Grenzschicht läßt sich nach Abb.4.2 in drei Bereiche unterteilen:

- | | | |
|----------------------------|----------------|--------------------------------------|
| 1: viskose Unterschicht | $0 < y^+ < 5$ | $u^+ = y^+$ |
| 2: Übergangsbereich | $5 < y^+ < 30$ | |
| 3: logarithmischer Bereich | $y^+ > 30$ | $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$ |

Wobei immer $\kappa=0.4$ und $C=5.5$ für hydraulisch glatte Oberflächen gilt.

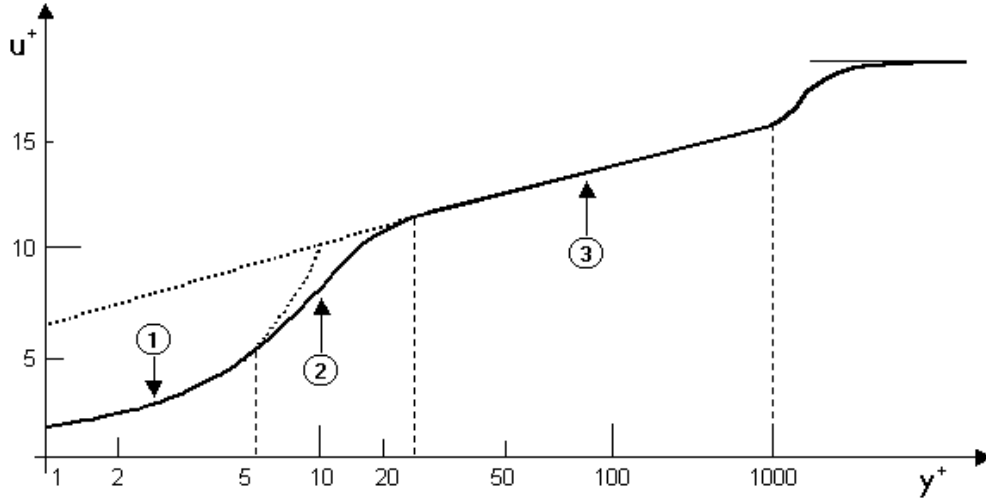


Abbildung 4.2: Das universelle Wandgesetz

4.4.3.3 k - ω Turbulenzmodell

Dieses Modell unterscheidet sich vom k - ϵ Turbulenzmodell, weil hier Modifikationen zur Berücksichtigung des Verhaltens der Turbulenzvariablen in der viskosen Unterschicht eingebracht werden. *Wilcox* [18] [20] sieht bei der Aufstellung der Längenmaßgleichung die größten Unsicherheiten und leitet demzufolge eine neue Längenmaßgleichung ab, die insbesondere zur Beschreibung von Strömungen mit Druckgradienten geeignet sein soll. Eine spezifische Dissipationsrate wird gewählt:

$$\omega = \frac{\epsilon}{k\alpha^*} \quad (4.25)$$

Das Geschwindigkeitsmaß wird wie im k - ϵ Turbulenzmodell durch die kinetische Schwankungsenergie repräsentiert Glg.(4.12), wobei die Dissipationsrate durch die neue Variable ω ausgedrückt wird

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) \right] + P - \beta^* k \epsilon. \quad (4.26)$$

Auch in der Gleichung des Längenmaßes wird die spezifische Dissipationsrate verwendet

$$\bar{u} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \frac{\omega^2}{k}. \quad (4.27)$$

Die in Glg.(4.25), Glg.(4.26) und Glg.(4.27) vorgeschlagenen Konstanten sind in Tab.4.2 zusammengefaßt.

σ_k	σ_ω	α	α^*	β	β^*
2	2	5/9	1	9/100	3/40

Tabelle 4.2: Konstanten des k - ω Turbulenzmodells [20]

Wilcox führt eine getrennte Analyse für die viskose Unterschicht und den Außenbereich der Grenzschicht durch, denn keine Approximation ist für die gesamte turbulente Grenzschicht gültig. Der Anteil der Grenzschicht in dem das logarithmische Wandgesetz gültig ist, wird als ein Überlappungsbereich betrachtet, der die Übergangsbedingungen zwischen viskoser

Unterschicht und Außenbereich liefert. Viele verschiedene Strömungen wurden untersucht und mit dem Standard k - ϵ Turbulenzmodell verglichen. Strömungen ohne Druckgradient ergeben ähnliche Ergebnisse, bei Strömungen mit Druckgradient ist das k - ω Turbulenzmodell genauer. Die verbesserte Beschreibung resultiert aus der Einführung der Variablen ω . Wird eine Rücktransformation der ω -Gleichung in die ϵ -Gleichung durchgeführt, ergibt sich in der Längenmaßgleichung

$$T_{KD} = -2 \left[\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right] \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \frac{1}{y}. \quad (4.28)$$

Dieser Term fehlt in der Standardformulierung des k - ϵ Turbulenzmodells, er reduziert das Längenmaß in Wandnähe. Bei Strömungen in denen die Schwankungsenergie konstant bleibt, wie beispielsweise Gleichgewichtsströmungen ohne Druckgradient, verschwindet dieser Term.

Kapitel 5

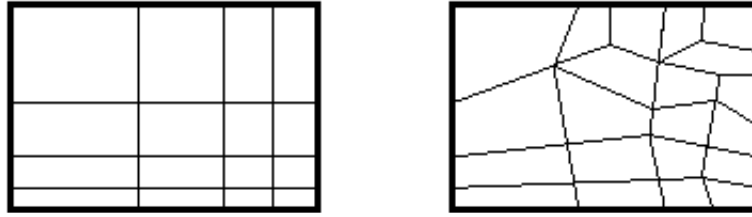
Numerisches Lösungsverfahren

5.1 Netzstruktur

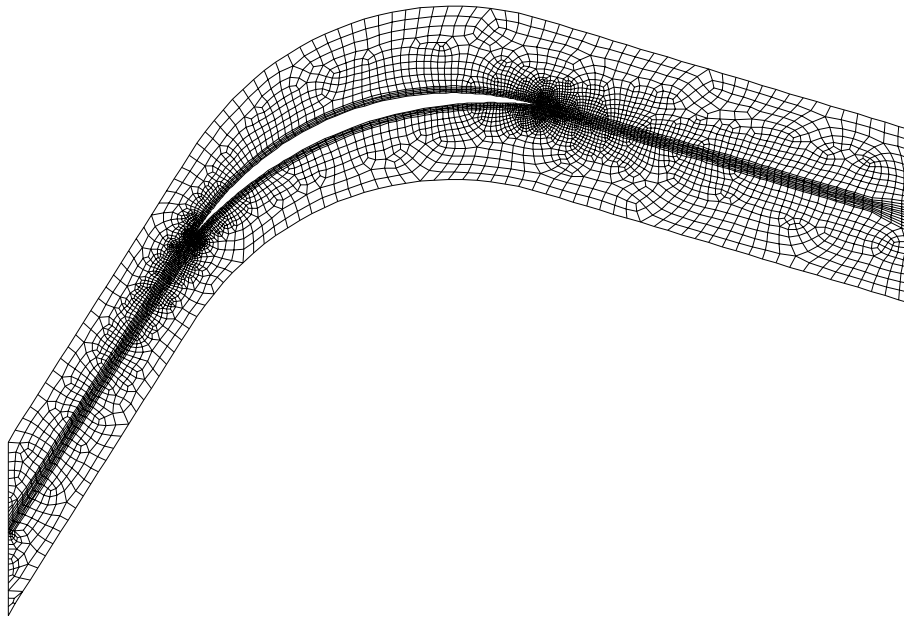
Bei der Strömungssimulation wird das Berechnungsgebiet durch ein Netz oder Gitter diskretisiert. An ausgewählten Punkten des Gebiets werden die verschiedenen Größen durch Näherungsverfahren berechnet. Eine Gesamtlösung ergibt sich dann durch Interpolation zwischen den Gitterpunkten. Ein in diesem Gebiet häufig eingesetztes Verfahren zur Berechnung komplexer Strukturen ist die Finite-Elemente-Methode. An das Gitternetz für die Simulation werden zwei Anforderungen gestellt: das Gitter muß so fein sein, daß die Genauigkeit der Lösung garantiert wird. Gleichzeitig soll die Rechenzeit nicht durch eine zu hohe Zahl von Gitterpunkten unnötig erhöht werden. Die Qualität der Lösung hängt im wesentlichen von der Güte des verwendeten Rechnernetzes ab. Es muß also zunächst ein geeignetes Berechnungsnetz generiert werden, das den Bedingungen des anschließend verwendeten Approximationsverfahrens genügt. Finite-Elemente-Verfahren verwenden im zweidimensionalen Fall geometrische Elemente mit ähnlicher Geometrie, um das Integrationsgebiet zu diskretisieren. Normalerweise handelt es sich dabei um Dreiecke oder Vierecke. FIDAP unterteilt das globale Rechenggebiet in n lokale Integrationsgebiete, die hier eine viereckige Gestalt haben. Ein Netz kann auf zwei verschiedene Arten gebildet werden: strukturiertes und unstrukturiertes Netz (siehe Abb.5.1).

Ein **Finite-Elemente Netz** wird als **strukturiert** bezeichnet, wenn sämtliche inneren Elementknoten von der gleichen Anzahl von Elementen umgeben sind. Die festen Beziehungen zwischen den Elementen haben den Vorteil, daß der Vorgang keine komplexen Datenbasen benötigt. Außerdem ermöglicht die hohe Qualität der Elemente normalerweise eine gute Genauigkeit der Ergebnisse. Leider sind diese Netze nur für einfache Geometrie verwendbar, die lokale Anpassungsfähigkeit ist niedrig und eine automatische Generierung ist nur auf einfachen Gebieten möglich.

Zur Vermeidung der Nachteile der strukturierten Netze werden heutzutage **unstrukturierte Netze** eingesetzt. Eine lokale Anpassung des Netzes ist hier einfach zu realisieren, ohne das gesamte Netz zu verfeinern. In den letzten Jahren wurden außerdem vielen automatische Vernetzungsalgorithmen für unstrukturierte Vierecksnetze entwickelt. Der Nachteil liegt darin, daß die Genauigkeit der Ergebnisse nicht so gut wie mit strukturierten Netzen ist.

Abbildung 5.1: *strukturiertes und unstrukturiertes Netz*

In Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die Berechnung der Strömung mittels eines unstrukturierten Netzes, dargestellt in Abb.5.2, durchgeführt.

Abbildung 5.2: *Das verwendete Netz*

Wie schon in Kap.4 erklärt, wird beim $k-\epsilon$ Turbulenzmodell die Wandgrenzschicht durch ein logarithmisches Wandgesetz überbrückt, das zunächst einen Zusammenhang zwischen dimensionslosem Wandabstand und einer dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeit erstellt. Um die Gültigkeit der Wandfunktion perfekt einzuhalten, müssen bei der Lösung der Gleichungen der Geschwindigkeitsgrenzschicht zwanzig Punkte innerhalb dieser Grenzschicht liegen und außerdem sollte der Wandabstand des ersten Punkts des Gitters so gewählt werden, dass y^+ den Wert 30 annimmt. Der dimensionslose Wandabstand für die innerste Zellgrenze ist für gute Rechenergebnisse zwischen 30 und 100 zu wählen (siehe [7] [8] [?]).

Der erste Wandabstand hängt so von dem Anstellwinkel und von der Profilseite (Saugseite, Druckseite) ab, so dass ein gemittelter dimensionsloser Wert von y^+ zwischen 30 und 100 nicht immer eingehalten werden kann. Der verwendete erste Wandabstand ist in Tab.5.1 dargestellt.

	$\Delta_1^* [-]$	$\Delta_1 [\text{mm}]$
i=-8.5	0.0025	0.5715
i=-1.5	0.003	0.6858

Tabelle 5.1: Der verwendete erste Wandabstand

Das Rechennetz ist im Bereich der Vorder- und Hinterkante stark verdichtet. In Abb.5.3 und Abb.5.4 sind die "boundary-edges" der Vorder- und Hinterkante vergrößert dargestellt.

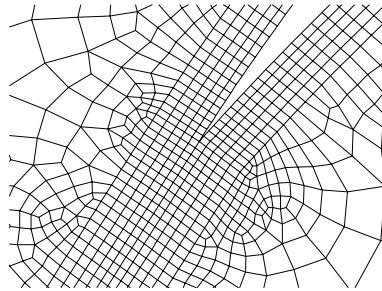


Abbildung 5.3: Vergrößerung im Vorderkantenbereich

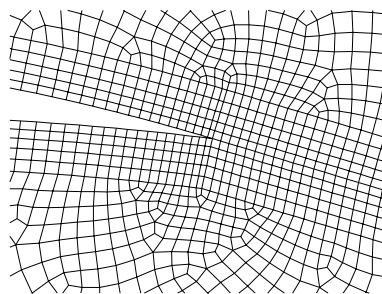


Abbildung 5.4: Vergrößerung im Hinterkantenbereich

Diese Verfeinerung ist notwendig, um die Grenzschichtphänomene oder starke Gradienten zu beschreiben. Um die Gleichungen für die Geschwindigkeitsgrenzschicht lösen zu können, muß nämlich das Gitter an den Rändern möglichst eng sein. Außerdem ist in der Nähe gekrümmter Festkörperberandungen eine besondere Zwangsverfeinerung notwendig, wie Abb.5.5 zeigt, weil eine direkt an der Festkörperberandung gelegene Zelle nicht unabhängig von seinem in Normalrichtung angrenzenden Nachbar verfeinert werden kann.

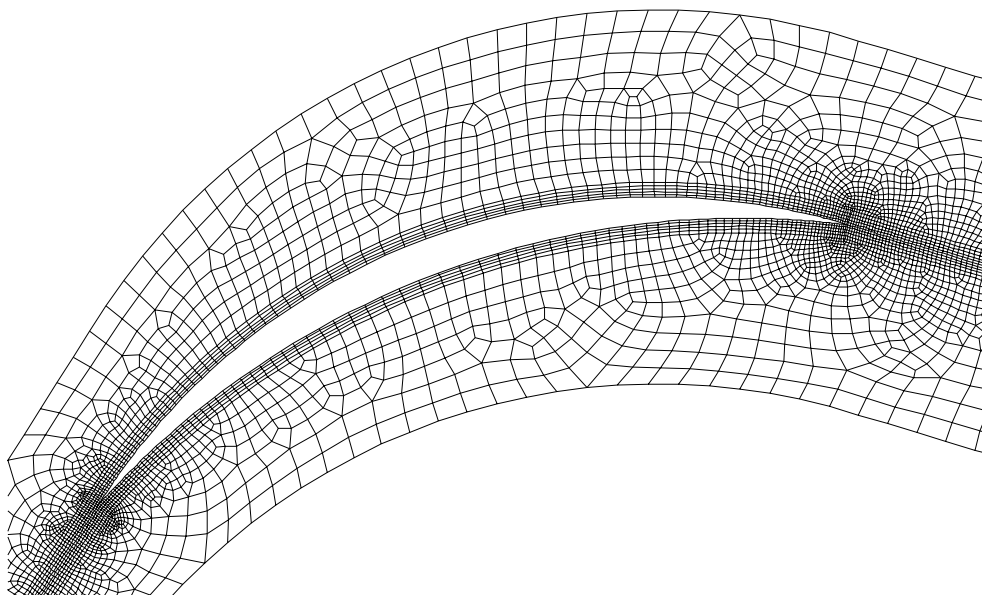


Abbildung 5.5: Vergrößerung des Rechennetzes im Profilbereich

Aus Genauigkeitsgründen muß nämlich an gekrümmten Oberflächen gesorgt werden, daß die Berandungspunkte des Netzes auf der Körperoberfläche zu liegen kommen (siehe Abb.5.6).

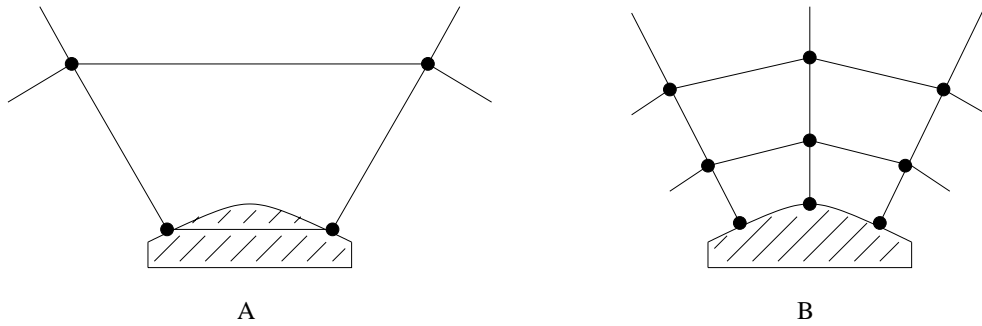


Abbildung 5.6: ungünstige (A) und günstige (B) Netzverfeinerung und Netzanpassung

Zur Berechnung der Strömung wird ein Netz mit insgesamt 6686 Elementen bei $i = -8.5^\circ$ und 6668 Elementen bei $i = -1.5^\circ$ verwendet, wobei die beschriebene Verfeinerung so gesteigert wird, daß sich je 100 Gitterpunkte auf der Profiloberseite bzw. Profilunterseite befinden.

5.2 Lösungsverfahren

Die Grundgleichungen werden nicht mit Hilfe des Finite-Elemente Verfahrens direkt gelöst, sondern andere Differentialgleichungen, die schwache Lösungen genannt werden, vorher gesucht und dann gelöst. Die verwendete Methode, mit der die neuen Gleichungen gefunden werden, heißt "Methode der gewichteten Residuen". Die Grundgleichung wird hier mit den sogenannten Gewichtsfunktionen multipliziert und nachher integriert:

$$\int_A \text{Gewichtsfunktion} \times \text{Differentialgleichung} \cdot dA = 0, \quad (5.1)$$

wobei A das Berechnungsgebiet darstellt. Diese Gewichtsfunktionen sind erforderlich, um mehrere Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten zur Verfügung zu haben. Mittels der Ansatzfunktionen werden die zu berechnenden Funktionen u, v, p, k, ϵ approximiert. Sie beschreiben die Verteilung der Unbekannten über ein Element und werden in einem elementbezogenen lokalen Koordinatensystem $(\xi, \eta, \text{Abb.}(5.7))$ formuliert, damit sie nur von der Geometrie abhängen. Die Zahl der Knotenpunkte pro Element bestimmt die Ansatzfunktion und deren Grad. Um die Umströmung der DCA-Schaufel zu berechnen, wurden 4-knotige Elemente mit stetig linearer Interpolation der Geschwindigkeiten verwendet. Der Druck ist konstant innerhalb eines Elementes. Das bedeutet, ein Element hat vier Knoten, um die Geschwindigkeit zu berechnen. Dieser Gradunterschied erfüllt die *Brezzi-Babusca* Bedingung [8], die sagt, daß die Ansatzfunktion für den Druck eine geringere Ordnung als die Ansatzfunktion für die Geschwindigkeitskomponenten haben muß, um Instabilitäten zu vermeiden. Die verwendeten Ansatzfunktionen für die Geschwindigkeit sind:

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

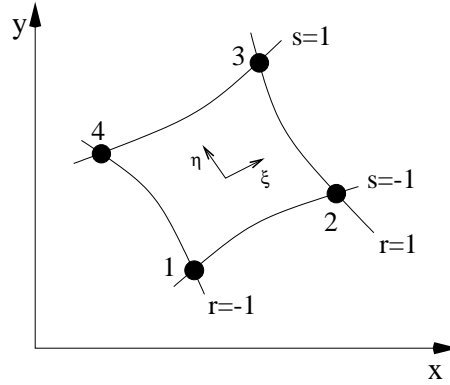


Abbildung 5.7: Das vierknotige Element

Die Ansatzfunktionen sind sehr wichtig, weil sie den Zusammenhang zwischen den zwei Koordinatensystemen bestimmen. Es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Die Matrix \mathbf{J} , die den Zusammenhang zwischen den lokalen und globalen Koordinaten angibt, wird Jacobi-Matrix genannt. Diese Matrix wird mittels der Ansatzfunktionen berechnet.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} y_i \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Es muß sichergestellt werden, daß \mathbf{J} innerhalb des Elementes invertierbar ist. Das bedeutet, daß die Abbildung zwischen den lokalen und globalen Koordinaten eindeutig und umkehrbar ist. Die Güte dieser Matrix beeinflusst stark die Genauigkeit der Approximation. Die Genauigkeit der Finite-Elemente-Berechnung hängt natürlich auch von den Elementformen ab. Unstrukturierte Vierecksnetze weisen sehr unterschiedliche Elementabmessungen und Elementverzerrungen auf. FIDAP kontrolliert mit verschiedenen Methoden die Elementeneigenschaften; im allgemeinen müssen die Viereckselemente möglichst quadratisch sein.

In der Regel werden physikalische Probleme durch Differentialgleichungen beschrieben. Die Differentialgleichungen können direkt aus einer Erhaltungsaussage (Masse und Impuls) abgeleitet werden oder werden an einem infinitesimal kleinen Element in Verbindung mit einer Erhaltungsaussage aufgestellt. Zur Beschreibung der physikalischen Probleme dienen unabhängige Variablen, auf welche die Beschreibung bezogen ist (Raumkoordinaten) und abhängige Variablen, die sich auf die unabhängigen Variablen beziehen und den jeweiligen Zustand beschreiben. Die unabhängigen Variablen werden bei vielen Problemen, insbesondere der Strömungsmechanik, auf ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem bezogen. Die Differentialgleichungen werden für ein Lösungsgebiet aufgestellt:

$$\mathbf{D}(\vec{w}) = \vec{R} \quad (5.5)$$

Die Matrix \mathbf{D} besteht aus den Differentialoperatoren, den nicht linearen Anteilen der abhängigen Variablen und Koeffizienten, die Fluid- und Systemeigenschaften beschreiben. Der Vektor \vec{w} enthält die zu bestimmenden abhängigen Variablen und der Vektor \vec{R} ist der inhomogene Anteil und beschreibt äußere Einwirkungen. Wir können sie in Form des Ritz'schen Ansatzes approximieren

$$w^*(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i(x, y), \quad (5.6)$$

wobei q_i unbekannte Koeffizienten und n die Knotenzahl sind. Ein Fehler entsteht:

$$R = \mathbf{D}(w^*) \neq 0 \quad (5.7)$$

Die Methode der gewichteten Residuen setzt das folgende Integral gleich null

$$\int_V R g_i dV = 0, \quad (5.8)$$

wobei V der Berechnungsbereich ist und g_i die sogenannten Gewichtsfunktionen. Unterschiedliche Gewichtsfunktionen werden von verschiedenen Methoden verwendet. Das von FIDAP verwendete Verfahren ist das sogenannte *Galerkin*-Finite-Elemente Verfahren, das als Gewichtsfunktionen die Ansatzfunktionen verwendet

$$g_i = \phi_i \quad (5.9)$$

Und zwar:

$$\int_V \mathbf{D}(w^*) \phi_i dV = 0 \quad (5.10)$$

Jetzt können die Koeffizienten in Glg.(5.6) durch eine numerische Lösung dieser Gleichung (FIDAP) errechnet werden, womit eine Näherungslosung vorliegt.

5.3 Anfangs- und Randbedingungen

Für eine eindeutige Lösung in einem begrenzten Gebiet sind noch zusätzliche Anfangs- und Randbedingungen erforderlich. Besondere Aufmerksamkeit brauchen jedoch die Randbedingungen, weil sie die Genauigkeit der Ergebnisse und das Konvergenzverhalten stark beeinflussen.

5.3.1 Anfangsbedingungen

Die Anfangswerte stellen normalerweise kein Problem dar. Sie werden im allgemeinen in Form einer grobe Schätzung der Lösung vorgenommen. Die einfachste Anfangsbedingung wäre, die Strömung aus der Ruhe anzufahren. Das ist jedoch nicht empfohlen, weil es nicht gut mit dem Turbulenzmodell verträglich ist. Ein ruhender Zustand ist nämlich nicht turbulent und deshalb wären die Turbulenzgrößen nicht berechenbar. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wird als Anfangsgeschwindigkeit in dem ganzen Gebiet die Eintrittsgeschwindigkeit angenommen. k und ϵ der Zuströmung werden auch konstant in dem Strömungsfeld gesetzt. Mit Hilfe des Turbulenzgrades der Zuströmung ist die Berechnung der kinetischen Turbulenzenergie am Eintritt möglich. Unter Berücksichtigung der Glg.(4.10) und Glg.(4.12) ist die turbulente kinetische Energie

$$k_1 = \frac{3}{2}(w_1 T u_1)^2. \quad (5.11)$$

Verwendet man in dieser Gleichung die dimensionlose Eintrittsgeschwindigkeit, erhält man die dimensionslose kinetische Turbulenzenergie am Eintritt

$$k_1^* = \frac{k_1}{w_1^2} = \frac{3}{2}(T u_1)^2. \quad (5.12)$$

Entsprechend den Messungen von *Zierke* und *Deutsch* wurde der Turbulenzgrad der Zuströmung $T u_1 = 0.18\%$ verwendet.

Die Bestimmung der turbulenten Dissipationsrate kann auf zwei unterschiedlichen Wegen erfolgen.

1. Die erste Möglichkeit bestimmt die turbulente Dissipationrate über das sogenannte Turbulenzlängenmaß, das die Größe der energietragenden Wirbel im Strömungsfeld entspricht. Mit den Annahmen des Turbulenzmodells wird die turbulente Dissipationsrate am Eintritt ermittelt

$$\epsilon_1 = C_\mu \frac{k_1^{\frac{3}{2}}}{\delta}. \quad (5.13)$$

Im dimensionslosen Fall folgt

$$\epsilon_1^* = \frac{\epsilon_1 S}{w_1^3} = C_\mu \frac{k_1^{\frac{3}{2}} \sigma}{\left(\frac{\delta}{t}\right)}, \quad (5.14)$$

mit

$$\left(\frac{\delta}{t}\right) = 0.01. \quad (5.15)$$

σ ist die Solidity, t die Teilung und δ das turbulente Längenmaß.

2. Die Dissipationsrate kann auch über das sogenannte Viskositätsverhältnis bestimmt werden:

$$\epsilon_1^* = C_\mu \frac{Re_1 k_1^{*2}}{\left(\frac{\nu_t}{\nu}\right)} \quad (5.16)$$

Dabei ist Re_1 die mit der Eintrittsgeschwindigkeit und mit der Sehnenlänge gebildete Reynoldszahl.

Die im vorliegenden Fall verwendeten Eintrittsrandbedingungen für die turbulenten Transportgrößen sind in Tab.5.2 zusammengefasst. Die turbulente Dissipationsrate wurde mit einem turbulenten Längenmaß von 1% der Teilung ermittelt, was einem Viskositätsverhältnis von $\nu_t/\nu \approx 5$ entspricht.

$k_1^*[-]$	$\epsilon_1^*[-]$
$4.86 \cdot 10^{-6}$	$2.06 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 5.2: Eintrittsrandbedingungen für die dimensionslosen turbulenten Transportgrößen

5.3.2 Randbedingungen

Man unterscheidet zwischen drei Hauptbedingungen und zwar:

- feste Ränder
- Ein- und Ausströmrand
- periodische Ränder

5.3.2.1 Feste Ränder

Man hat die Haftbedingung, weil keine Ausblase- und Absaugeffekte auftreten. Für die Geschwindigkeit gilt also

$$u = v = 0. \quad (5.17)$$

Im Fall des k - ϵ Turbulenzmodells werden diese Randbedingungen durch die Wandfunktion bereitgestellt. Die Randbedingungen für k und ϵ hängen von dem Turbulenzmodell ab.

5.3.2.2 Ein- und Ausströmrand

Hier findet Massentransport über die Berandung statt. Da der Einströmrand genügend weit stromauf des eigentlich interessierenden Gebiets liegt, gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Die Strömung im Bereich des Einströmrandes ist eine reine Parallelströmung.
- Reibungseffekte können im Bereich des Einströmrandes vernachlässigt werden.

Unter diesen Annahmen kann man den Zustand am Einströmrand mit Hilfe der klassischen eindimensionalen Strömungsmechanik betrachten. Am Ausströmrand werden die Spannungsvektoren gleich null gesetzt. Im vorliegenden Fall entspricht das praktisch der Vorgabe eines konstanten statischen Druckes. Als abströmseitige Randbedingungen für k und ϵ werden die Normalableitungen gleich null gesetzt. D.h., es gilt

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0. \quad (5.18)$$

5.3.2.3 Periodizitätsbedingungen

Die Periodizitätsbedingung ermöglicht, das Integrationsgebiet auf eine Gitterteilung zu beschränken. Sie läßt sich unter der Bedingung, daß auf den periodischen Rändern entsprechende Gitterpunkte existieren, numerisch durch das Addieren der entsprechenden Gleichungen verwirklichen. Auf diese Weise werden die beiden periodischen Punkte zu einem Punkt im Inneren des Gebietes zusammengefaßt.

5.4 Beeinflussung der Konvergenz

5.4.1 Relaxationsfaktoren

Das nichtlineare Gleichungssystem muss iterativ gelöst werden. Ein typisches System ist in Glg.(5.19) dargestellt.

$$\mathbf{K}(\vec{u}) \vec{u} = \vec{F} \quad (5.19)$$

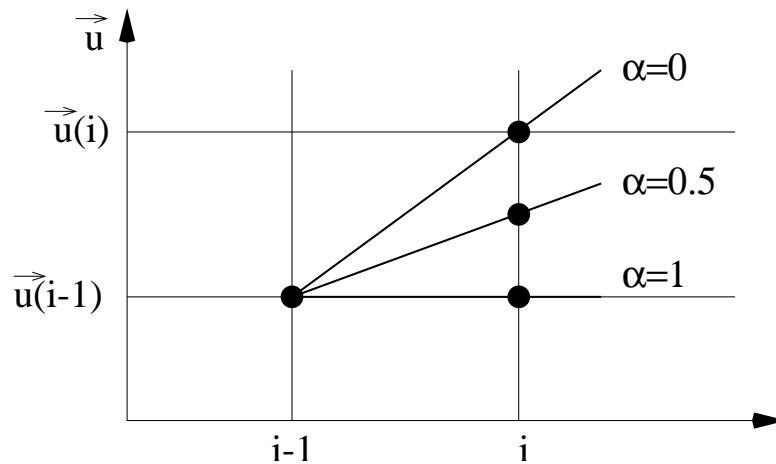
Die gesuchte iterative Lösung ist

$$\vec{u} = \mathbf{K}(\vec{u})^{-1} \vec{F}. \quad (5.20)$$

In diesem Fall ist es oft notwendig, Korrekturen ins Iterationsschema einzuführen, um günstige Konvergenzrate und Stabilität zu gewährleisten. Die Relaxationsfaktoren schaffen einen neuen Lösungsvektor durch Interpolation der Vektoren zwischen dem aktuellen Iterationsschritt i und dem vorhergehenden Iterationsschritt $i-1$. Die verwendete Formel ist in Glg.(5.21) dargestellt

$$\vec{u}_{rel} = \alpha \vec{u}_{i-1} + (1 - \alpha) \vec{u}_i, \quad (5.21)$$

wobei α der Relaxationsfaktor ist. Ist α größer als eins, werden die Korrekturen verstärkt und für α kleiner als eins gedämpft. In der Praxis sind im Fall von nichtlinearen Gleichungssystemen die Korrekturen immer gedämpft und man spricht von Unterrelaxation.

Abbildung 5.8: Abhängigkeit der Lösungsvektors von α bei gedämpften Korrekturen

Bei Unterrelaxation variiert α zwischen null und eins (siehe Abb.5.8); setzt man $\alpha=1$, ist die aktuelle Lösung wie die vorhergehende. Ist $\alpha=0$, werden keine Korrekturen eingeführt. Die Wahl des Relaxationsfaktors für jede Unbekannte spielt eine wesentliche Rolle. Ein niedriger Wert bedeutet instabiles und schnelles Iterationsverfahren, im Gegensatz läuft der Vorgang mit α Nahe gegen eins stabiler und langsamer. Es gibt keine allgemeine Methode, die eine Schätzung des richtigen Relaxationfaktors für nichtlineare Differentialgleichungen zulässt.

5.4.2 Konvergenzkriterien

Ein wichtiges Konvergenzkriterium ist

$$\frac{\|\vec{u}_i - \vec{u}_{i-1}\|}{\|\vec{u}_i\|} \leq \epsilon, \quad (5.22)$$

wobei die Glieder der Lösungsvektor nach der i -ten bzw. $(i-1)$ -ten Iteration sind. ϵ ist der erlaubte relative Fehler. Dieses Kriterium ist häufig sehr effektiv. Ist allerdings die Rechenschrittlänge sehr klein, wird automatisch auch der Unterschied zwischen zwei Iterationen klein. Das kann dazu führen, daß das Kriterium bereits befriedigt wird, obwohl die Ergebnisse wahrscheinlich noch weit entfernt von der wirklichen Lösung sind. Es ist daher eine effektivere Methode, die Größe des residualen Vektors zu beurteilen. Wenn der Lösungsvektor sich dem wirklichen Lösungsvektor \vec{u} nähert, muß der residuale Vektor R dem Wert null näherkommen. Deshalb ist das folgende Kriterium effektiv:

$$\frac{\|R_i\|}{\|R_0\|} \leq \epsilon' \quad (5.23)$$

Kapitel 6

Transition

6.1 Grenzschichtgrößen

Zur Beurteilung der in diesem Kapitel behandelten Berechnungen transistionaler Strömungen werden lokale und integrale Parameter herangezogen, die den Zustand der Grenzschicht charakterisieren.

Formparameter sind wichtige Größen in der Grenzschichttheorie. Sie charakterisieren die stark vom Druckgradienten abhängigen Geschwindigkeitsprofile. Die Formparameter werden aus den Grenzschichtdicken δ_1 , δ_2 und δ_3 gebildet.

$$H_{12} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad H_{23} = \frac{\delta_2}{\delta_3} \quad H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2} \quad (6.1)$$

Für die Verdrängungsdicke δ_1 , die Impulsverlustdicke δ_2 , und die Energieverlustdicke δ_3 gilt:

$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy \quad (6.2)$$

$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy \quad (6.3)$$

$$\delta_3 = \int_{y=0}^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left[1 - \left(\frac{u}{u_{\infty}}\right)^2\right] dy \quad (6.4)$$

Der Formparameter H_{12} lässt beispielsweise Rückschlüsse auf den Grenzschichtzustand zu und weist in laminarer Grenzschicht höhere Werte auf als in turbulenter. Der laminar-turbulente Grenzschichtumschlag wird durch einen Abfall des Formparameters H_{12} identifizierbar. Ein Formparameter $H_{12} \approx 4$ deutet auf Ablösung hin. u_{∞} ist die Geschwindigkeit am Grenzschichttrand, oft auch als u_{δ} bezeichnet.

6.2 Entstehung der Turbulenz

Die Entstehung der Turbulenz (Transition) in einer Grenzschicht ist ein dreidimensionaler, instationärer Vorgang, der derzeit noch nicht vollständig beschreibbar ist. Die Transition kann über drei verschiedene Phänomene stattfinden, und zwar natürliche Transition, Transition über eine laminare Ablöseblase und Bypass Transition (Abb.6.1) [14] [19]. Bis heute fehlen direkte Berechnungen wegen der Komplexität des Vorgangs: Es wird versucht, zumindest die wichtigsten Einflussparameter für den Übergang mit Messergebnissen zu korrelieren.

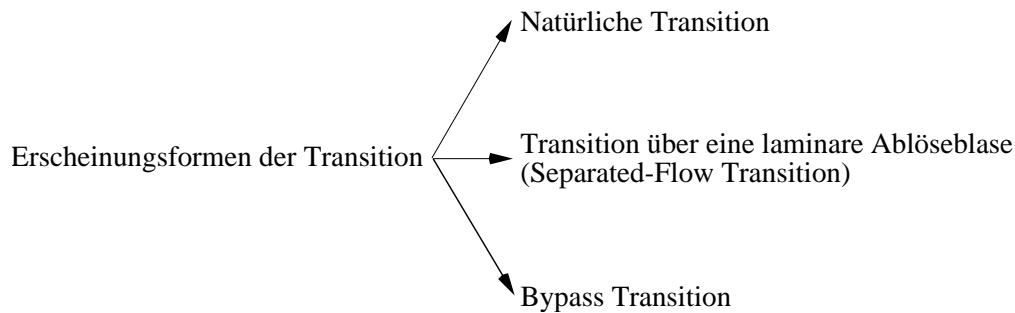


Abbildung 6.1: Erscheinungsformen der Transition

Nach dem heutigen Stand der Forschung wird die Transition laminar-turbulent von folgenden Parametern beeinflusst (Tab.6.1):

Parameter	Einfluß des Parameters auf auf den Beginn der Transition
Turbulenzgrad des Außenströmung	+
Reynoldszahl	+
positiver Druckgradient der Anströmung	+
negativer Druckgradient der Anströmung	-
Machzahl der Anströmung	?
Oberflächenrauigkeit	+
Temperatur der Oberfläche	-
Oberflächenkrümmung	vernachlässigbar

Tabelle 6.1: Einflussgrößen der Transition

Ein positiver Einfluß bedeutet eine Verschiebung des Transitionsgebietes in Richtung Profilverderrante. Eine Machzahlvariation ändert primär die Profildruckverteilung, d.h., eine Modifikation des Druckgradienten für die Grenzschicht. Aus diesem Grund ist die Untersuchung des Machzahleinflusses schwer. Bei hohen Freistromturbulenzgraden spielt der Einfluss der Profilkümmung eine untergeordnete Rolle. Die konkave Druckseite eines Schaufelprofils besitzt jedoch eine stabilisierende Wirkung auf die Grenzschicht, d.h., die Transition wird unterdrückt, während die konvexe Saugseite einen destabilisierenden Einfluss auf die Grenzschicht ausübt, d.h., Transition wird dadurch gefördert.

6.2.1 Natürliche Transition

Der Übergang laminar-turbulent läßt sich in drei Phasen einteilen.

primäre Instabilität: Diese Form der Instabilität ergibt sich durch zunehmende Energieaufnahme ausgewählter Störspektren. Bei dieser Form des Stabilitätsverlustes bildet sich ein lokal instabiles, instationäres Strömungsfeld mit in Strömungsrichtung fortschreitend komplexer werdender Struktur und sich ändernden Längen- und Zeitmaßstäben bis hin zum abschließenden Turbulenzbereich. Ein bekanntes Beispiel ist der Stabilitätsverlust einer zweidimensionalen, laminaren, stationären Grenzschichtströmung aufgrund der Tollmien-Schlichting-Wellen. Diese Wellen werden als zweidimensionale Störungen in einer zweidimensionalen Grenzschicht aufgrund von Reibungswirkung angefacht. Eine Grenzschicht wird dadurch bei Überschreiten einer kritischen Reynolds-

zahl instabil

$$Re_{in} \geq Re_{KRIT} = \frac{u_\delta \delta_2}{\nu} \Big|_{KRIT} \quad (6.5)$$

Die gewählte Reynoldszahl ist oft die Impulsverlustdicken-Reynoldszahl Re_{δ_2} , wobei die charakteristische Länge die Impulsverlustdicke δ_2 ist.

zweite Phase: Die Tollmien-Schlichting Wellen gehen in dreidimensionale Görtler-Wirbel über, deren Intensität mit der Lauflänge zunimmt.

dritte Phase: In der stark gestörten laminaren Grenzschicht bilden sich dann an willkürlichen Stellen Turbulenzfleckchen. Turbulenzfleckchen sind zunächst kleine, turbulente Strömungsgebiete in der laminaren Grenzschicht, die stromab wandern und anwachsen, bis die laminare Strömung vollständig turbulent ist. In diesem Strömungsbereich findet der eigentliche Umschlag statt. Ab dem Schubspannungsminimum treten verstärkt Turbulenzfleckchen auf. Entlang der Lauflänge bildet sich die typische turbulente Grenzschicht. Ab dem Schubspannungsmaximum ist die Grenzschicht voll turbulent.

In Abb.6.2 sind die Stadien der natürlichen Transition dargestellt.

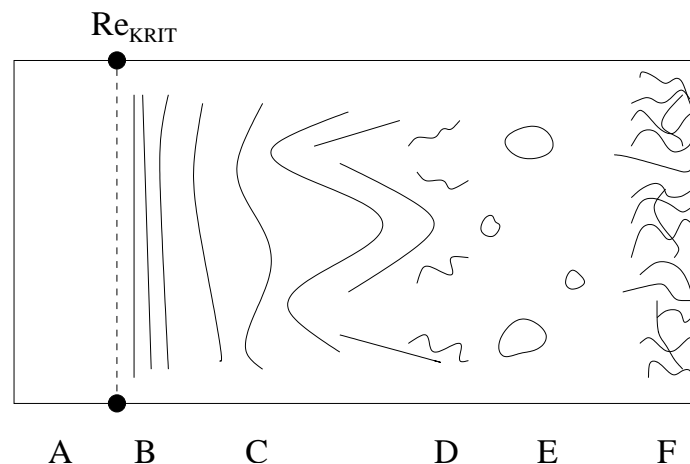


Abbildung 6.2: Stadien der Transition (natürliche Transition)

Wobei:

A: laminarer Zustand

B: 2D-Tollmien-Schlichting-Welle

C: 3D-Görtler-Wirbel

D: Zusammenbruch

E: Turbulenzfleckchen

F: turbulenter Zustand

Bei der natürlichen Transition werden vier charakteristische Punkte definiert:

- Instabilitätspunkt
- Schubspannungsminimum
- Schubspannungsmaximum
- Transitionspunkt oder mittlerer Transitionspunkt

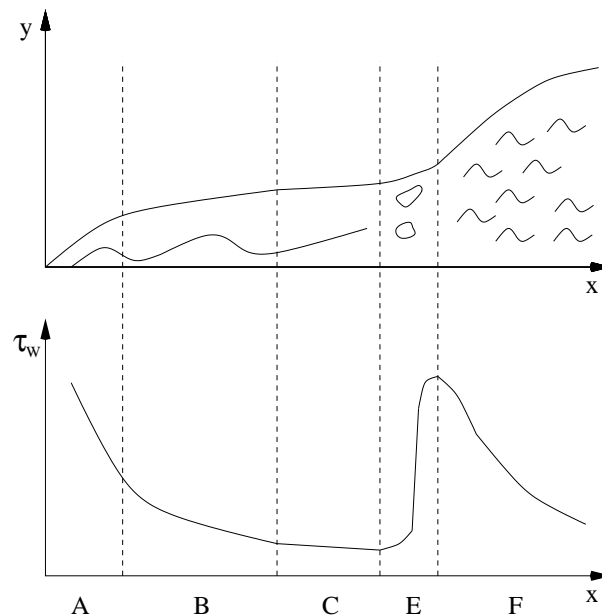


Abbildung 6.3: Schubspannungsverlauf bei natürlicher Transition

Das Schubspannungsminimum (siehe Abb.6.3) wird Transitionsbeginn genannt und wird durch die untere Transitionsreynoldszahl Re_{tr_u} charakterisiert. Das Transitionsende (Schubspannungsmaximum) wird auch mit einer Reynoldszahl bezeichnet und mit der oberen Transitionsreynoldszahl Re_{tr_o} . Zwischen diesen zwei wichtigen Punkten nimmt der Formparameter stark ab, weil die Impulsverlustdicke überproportional steigt. Der Transitionspunkt (mittlerer Transitionspunkt) wird zur Vereinfachung der Untersuchung definiert und er liegt entweder an der Stelle des größten Schubspannungsgradienten oder er ist das Schubspannungsmaximum.

6.2.2 Transition über eine laminare Ablöseblase

Neben der natürlichen Transition existiert noch eine zweite Art die als Transition über eine laminare Ablöseblase bezeichnet wird und an Strömungen mit starken Verzögerung, wie sie beispielsweise für hochbelastete Verdichtergitter typisch sind, beobachtet werden kann. Dieser Transitionsmechanismus entsteht, wenn die Strömung dem hohen Druckgradienten nicht mehr folgen kann. Ist die Stabilitätsgrenze unterschritten, löst die laminare Strömung in diesem Punkt (Ablösepunkt) ab. Die abgelöste Grenzschicht wird durch eine Erhöhung des Impulstransport von der Außenströmung turbulent. In dem Wiederanlegepunkt legt sich die Grenzschicht voll turbulent wieder an das Schaufelprofil an. Das Gebiet zwischen Ablösepunkt und Wiederanlegepunkt wird Ablöseblase genannt. Diese Blase kann kurz oder lang sein; die Profildruckverteilung wird bei großen Blasen stark beeinflusst.

Der Transitionmechanismus ist heute noch nicht völlig bekannt. Hier werden auch vier Punkte definiert:

- Ablösepunkt
- Instabilitätspunkt
- Transitionspunkt
- Wiederanlegepunkt

Dieses Mal ist es sehr schwer, diese Punkte mittels des Schubspannungsverlaufs festzulegen. Daher wird die Profildruckverteilung zur Bestimmung verwendet. Ein großer Anteil der Blase ist von einem Druckplateau gekennzeichnet (siehe Abb.6.4): der Beginn des Plateaus ist der Ablösepunkt, das Ende ist der Umschlagpunkt. Der Wiederanlegepunkt ist der Schnittpunkt der durch eine Blase veränderten Druckverteilung mit der unveränderten, potentialtheoretischen Druckverteilung stromab des Druckgebietes.

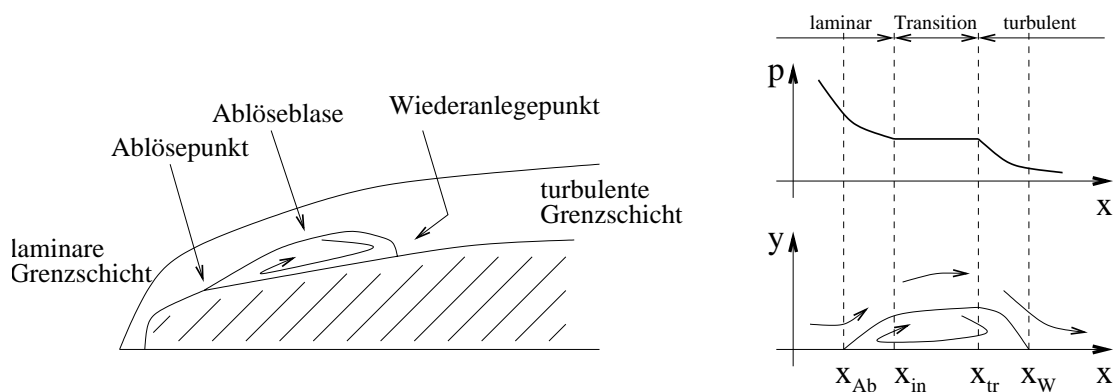


Abbildung 6.4: Transition über eine laminare Ablöseblase

6.2.3 Bypass Transition

Die wohl wichtigste Erscheinungsform des laminar-turbulenten Umschlages in Turbomaschinen ist die Bypass Transition, deren Auftreten insbesondere bei hoher Freistromturbulenz zu erwarten ist. Wie der Name schon sagt, werden dabei die frühen Phasen der Transition, die für die natürliche Transition signifikant sind, übersprungen, und es kommt zur unmittelbaren Bildung des turbulenten Grenzschichtgeschwindigkeitsprofils innerhalb der laminaren Grenzschicht.

6.3 Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle

Mit Hilfe eines Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelles, das zur Beschreibung der Turbulenzstruktur zwei halbempirische Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ϵ löst, kann die Wirbelviskosität bestimmt werden. Das Standard k - ϵ Turbulenzmodell kann nur unter der Voraussetzung einer vollturbulenten Strömung, in der große Turbulenz-Reynolds-Zahlen vorherrschen (Glg.(6.10) und (6.11)), angewendet werden. In den Grenzschichten entlang der Schaufelprofile ist diese Voraussetzung jedoch nicht mehr erfüllt, weil in unmittelbarer Wandnähe die molekulare Viskosität von gleicher Größenordnung ist wie die Wirbelviskosität. In vielen Fällen können die Grenzschichten nicht mehr mit Wandgesetzen wiedergegeben werden. Ein typisches Beispiel ist die laminar-turbulente Transition. Das Standard k - ϵ Turbulenzmodell kann mit verschiedenen Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodellen modifiziert werden, daß es für den wandnahen Strömungsbereich gültig ist. Um den Einfluß der molekularen Viskosität in Wandnähe auf das Strömungsverhalten zu berücksichtigen, wurden die molekularen Diffusionsglieder in den Transportgleichungen für k und ϵ beibehalten und die Modellkonstanten mit den sogenannten Low-Reynolds-Number Funktionen multipliziert. Im vollturbulenten Strömungsgebiet, d.h., im Bereich hoher Turbulenz-Reynolds-Zahlen und vernachlässigbarem Viskositätseinfluß, streben die Funktionen gegen eins. Dadurch liegt wieder das Standard k - ϵ Turbulenzmodell vor, in dem das Turbulenzverhalten wieder von den fünf Konstanten, die in Tab.4.1 dargestellt sind, bestimmt wird. Genau wie das Standard k - ϵ Turbulenzmodell lösen die Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle durch die Modellierung der Wirbelviskosität mit Hilfe der beiden halbempirischen Transportgleichungen für k und ϵ das Schließungsproblem der Reynolds-Gleichungen. So liegt letztendlich ein geschlossenes System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen vor, das numerisch gelöst werden kann. Die am meisten verwendeten Low-Reynolds-Number k - ϵ Turbulenzmodelle werden hier vorgestellt [17] [11] [9].

1. *Jones und Launder* (1972-1973)
2. *Launder und Sharma* (1974)
3. *Lam und Bremhorst* (1981)
4. *Chien* (1982)
5. *Nagano und Hishida* (1987)
6. *Myong und Kasagi* (1988)
7. *Nagano und Tagawa* (1990)
8. *Yang und Shih* (1992)

Der Unterschied zwischen diesen Modellen liegt nur in der Definition der Funktionen, Zusatzterme und Werte der numerischen Konstanten. Immer gültig ist die folgende Gleichung der Wirbelviskosität. Diese lautet

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6.6)$$

mit

$$\check{\epsilon} = \epsilon - D, \quad (6.7)$$

wobei D ein Zusatzterm ist, der in einigen Modellen verwendet wird, um eine modifizierte Dissipationsvariable zu ermöglichen. Die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie lautet

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho \check{\epsilon} \end{aligned} \quad (6.8)$$

und die Transportgleichung für die Dissipationsrate

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + \left[C_1 f_1 \mu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho C_2 f_2 \epsilon \right] \frac{\epsilon}{k} + E, \quad (6.9) \end{aligned}$$

wobei E eine andere Zusatzvariable ist. Modellkonstanten, Zusatzterme und Funktionen sind in den Tabellen 6.3 und 6.2 dargestellt. Zwei Turbulenz-Reynoldszahlen sind wie folgt definiert:

$$Re_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon} \quad (6.10)$$

$$Re_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu} \quad (6.11)$$

Modell	C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ϵ	D	E
Standard	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0	0
<i>Jones und Launder</i>	0.09	1.45	2.0	1.0	1.3	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2\nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2} \right)^2$
<i>Launder und Sharma</i>	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$2\nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2} \right)^2$
<i>Lam und Bremhorst</i>	0.09	1.44	1.92	1.0	1.3	0	0
<i>Chien</i>	0.09	1.35	1.80	1.0	1.3	$2\nu \frac{k}{y^2}$	$2\mu \frac{\epsilon}{y^2} \exp(-0.5y^+)$
<i>Nagano und Hishida</i>	0.09	1.45	1.90	1.0	1.3	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$	$\nu \mu (1 - f_\mu) \left(\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2} \right)^2$
<i>Myong und Kasagi</i>	0.09	1.40	1.80	1.4	1.3	0	0
<i>Nagano und Tagawa</i>	0.09	1.45	1.90	1.4	1.3	0	0
<i>Yang und Shih</i>	0.09	1.45	1.92	1.0	1.3	0	$2\nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 u_\infty}{\partial y^2} \right)^2$

Tabelle 6.2: Low-Reynolds-Number k - ϵ Modellkonstanten und Zusatzterme

Modell	f_μ	f_1	f_2
Standard	1.0	1.0	1.0
Jones und Launder	$\exp\left(\frac{-3.4}{1+Re_T/50}\right)$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$
Launder und Sharma	$\exp\left(\frac{-3.4}{(1+Re_T/50)^2}\right)$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$
Lam und Bremhorst	$[1 - \exp(-0.0160Re_y)]^2 \left(1 + \frac{19.5}{Re_T}\right)$	$1 + \left(\frac{0.06}{f_\mu}\right)^3$	$1 - \exp(-Re_T^2)$
Chien	$1 - \exp(-0.0115y^+)$	1.0	$1 - 0.22 \exp\left(-\frac{Re_T^2}{36}\right)$
Nagano und Hishida	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26.5}\right)\right]^2$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$
Myong und Kasagi	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{70}\right)\right] \left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{Re_T}}\right)$	1.0	$\left\{1 - 0.22 \exp\left[-\left(\frac{Re_T^2}{36}\right)^2\right]\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{5}\right)\right]^2$
Nagano und Tagawa	$\left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26}\right)\right]^2 \left(1 + \frac{4.1}{Re_T^{0.75}}\right)$	1.0	$\left\{1 - 0.3 \exp\left[-\left(\frac{Re_T}{6.5}\right)^2\right]\right\} \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{6}\right)\right]^2$
Yang und Shih	$[1 - \exp(-1.5 \cdot 10^{-4} Re_y - 5 \cdot 10^{-7} Re_T^3 - 10^{-10} Re_y^5)]^{-0.5}$	1.0	$1 - 0.22 \exp\left(-\frac{Re_T^2}{36}\right)$

Tabelle 6.3: Low-Reynolds-Number k - ϵ Funktionen

6.3.1 Modellerweiterungen

Die in den Turbomaschinen aufgrund der hohen Freistromturbulenz auftretende Bypass-Transition wird vom k - ϵ Turbulenzmodell durch einen diffusiven Transport von Turbulenzenergie aus der Freiströmung in die laminare Grenzschicht simuliert. Wenn ausreichend turbulente kinetische Energie in der Grenzschicht vorhanden ist, wird ein sich selbst verstärkender Prozeß (Abb.6.5) angefach. Durch mehr turbulente kinetische Energie in der Grenzschicht nimmt dort auch die Wirbelviskosität zu, welche ein Anwachsen des Produktionstermes in der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie zur Folge hat, insbesondere in Wandnähe, weil dort die größten Geschwindigkeitsgradienten auftreten. Der Quellterm produziert jetzt zusätzlich turbulente kinetische Energie in der Grenzschicht.

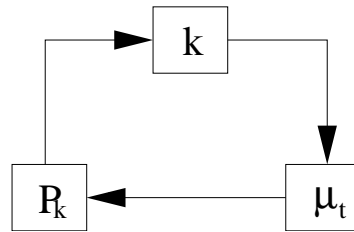


Abbildung 6.5: Rückkopplungsmechanismus für die turbulente Produktionsrate

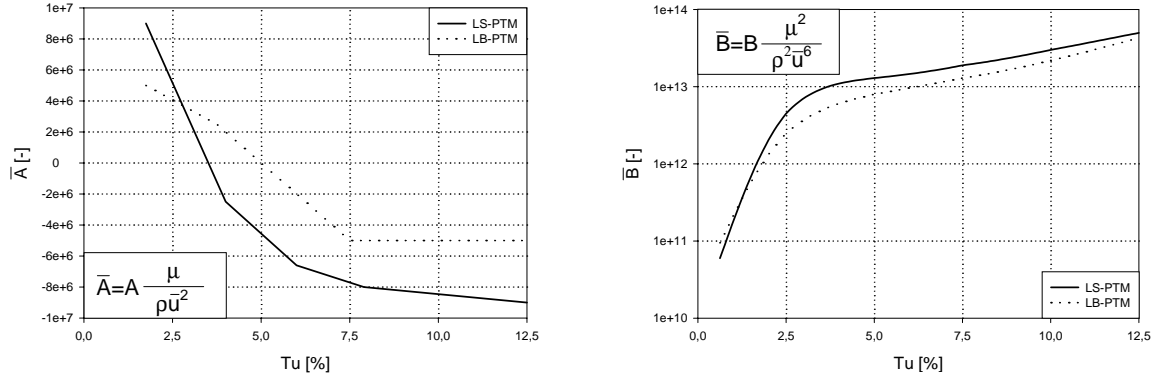
Dieser rückgekoppelte Mechanismus facht die Turbulenzenergie in der Grenzschicht immer weiter an und führt schließlich zum laminar-turbulenten Umschlag in der Strömung. Der Produktionsterm in der Transportgleichung für die kinetische Turbulenzenergie spielt so bei der Simulation des laminar-turbulent Umschlags eine wichtige Rolle, die durch Low-Reynolds-Number k - ϵ Modellerweiterungen besser berücksichtigt werden kann. Die zwei hier vorgeschlagenen Modellerweiterungen sind von *Patankar* und *Schmidt* als Erweiterungen von den in Abschnitt 6.3 diskutierten Modelle von *Launder* und *Sharma* bzw. *Lam* und *Bremhorst* präsentiert.

9. LS-PTM (1988)

10. LB-PTM (1988)

PTM bedeutet "Produktion Term Modification". Im LS-PTM-Modell wird die Zuwachsrate des Produktionsterms von Beginn der Rechnung an limitiert. Die maximal zulässige Zunahme des Produktionsterms von einer Gitterlinie zur nächsten wird durch zwei freie Parameter A und B festgelegt, die direkt vom lokalen Außenturbulenzgrad abhängen. Ihre Verläufe sind in Abb.6.6 dargestellt.

$$\Delta P_{k,max} = (AP_k + B) \frac{\Delta x}{\bar{u}} \quad (6.12)$$

Abbildung 6.6: Variation der Parameter A und B mit dem lokalen Außenturbulenzgrad [17]

Im LB-PTM-Modell wird der Produktionsterm zunächst bis zur bestimmten Reynoldszahl $Re_{\delta_2} = 125$ unterdrückt. Dadurch verschwindet zuerst der Produktionsterm, und dann wird seine Zuwachsrate mittels Glg.(6.12) limitiert. Es ist zu beachten, daß diese Modellerweiterung nicht die Funktionen in Tabelle 6.3 verwendet, sondern die Werte der Originalversion des Modells von *Lam* und *Bremhorst*, die in Tab.6.4 dargestellt sind.

Modell	f_μ	f_1	f_2
<i>Lam</i> und <i>Bremhorst</i>	$[1 - \exp(-0.0163 Re_y)]^2 \left(1 + \frac{20}{Re_T}\right)$	$1 + \left(\frac{0.0055}{f_\mu}\right)^3$	$1 - \exp(-Re_T^2)$

Tabelle 6.4: Original-Low-Reynolds-Nunber-Funktionen im Modell von *Lam* und *Bremhorst*

Außerdem werden die numerischen Probleme, die durch kleine Zahlen entstehen können, durch die Einführung einer "kleinen Zahl" vermieden, und zwar

$$f_2 = 1 - \exp\left(-Re_T^2 - 10^{-10}\right). \quad (6.13)$$

Diese Modifikation verhindert, daß durch programmtechnische Probleme der Vernichtungsterm der ϵ -Gleichung null wird.

6.3.2 Anfangs- und Randbedingungen

6.3.2.1 Anfangsbedingungen

Zur Berechnung transistionaler Strömungen müssen die Startverteilungen aller Größen in der Grenzschicht, und zwar Geschwindigkeit, turbulente kinetische Energie und Dissipationsrate, vorgegeben werden. Natürlich muß das vorgegebene Gebiet eine laminare Grenzschicht darstellen. Das Profil der Geschwindigkeit kann durch den Potenzansatz nach Pohlhausen errechnet werden. Hier ist die Grenzschichtdicke δ notwendig, die durch die Impulsverlustdicke ausgerechnet werden kann. Deshalb kommt diese Größe an der Startstelle in Frage. Der Potenzansatz nach Pohlhausen lautet

$$\frac{u}{u_\infty} = \left[\frac{y}{\delta} - 2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{y}{\delta} \right)^4 \right] + \frac{\lambda}{6} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^3, \quad (6.14)$$

wobei λ der Pohlhausenparameter ist

$$\lambda = \frac{\delta^2 \rho}{\mu} \frac{du_\infty}{dx}. \quad (6.15)$$

Erheblich schwieriger ist die Bereitstellung realistischer Startprofile für die turbulente kinetische Energie und die Dissipation in einer laminaren Grenzschicht. Da keine ausreichenden experimentellen Daten bekannt sind, aus denen diese Verteilungen abgeleitet werden können, müssen sie rein empirisch vorgegeben werden. Die Gleichung für das Startprofil der turbulenten kinetischen Energie stellt sicher, daß k an der Wand zu Null wird, dann quadratisch mit dem Wandabstand anwächst und schließlich stetig in den am Grenzschichtrand vorgegebenen Wert übergeht. Der Wert für k_∞ an der Startstelle wird dabei durch den lokalen Turbulenzgrad und die Freistromgeschwindigkeit festgelegt. Die Startverteilung der turbulenten kinetischen Energie kann so durch die Beziehung von *Rodi* und *Scheurer* ermittelt werden

$$k = k_\infty \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2. \quad (6.16)$$

Durch den lokalen Turbulenzgrad und die Freistromgeschwindigkeit wird

$$k_\infty = \frac{3}{2} T u^2 u_\infty^2 \quad (6.17)$$

festgelegt. Die Verteilung der Dissipationsrate wird durch die folgende Formel ermittelt:

$$\epsilon = a k \frac{du}{dy} \quad (6.18)$$

Hier wird angenommen, daß die Dissipation proportional der Produktion ist. Der Strukturkoeffizient a ist

$$a = - \frac{\overline{u'v'}}{k}. \quad (6.19)$$

Mit Ausnahme der Modellvariante von *Lam* und *Bremhorst* wird der Wert von a 0.3 angenommen, der eine Gleichgewichtsgrenzschicht darstellt. In der Modellvariante von *Lam* und *Bremhorst* liegt dieser Wert zwischen 0.25 und 2 und er ist vom Turbulenzgrad und von der Impulsverlustdicken-Reynoldszahl abhängig. Der Verlauf ist in Abb.6.7 dargestellt.

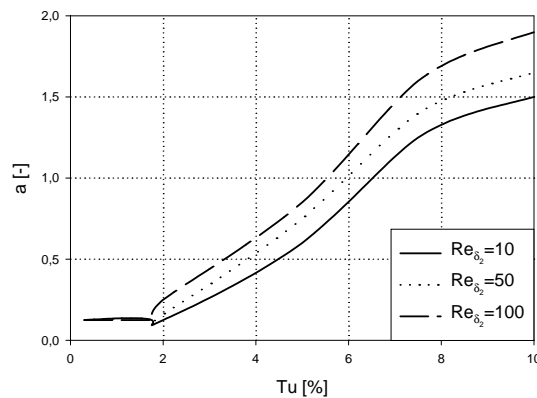


Abbildung 6.7: Abhängigkeit des Strukturkoeffizienten a von der Außenturbulenz und der Impulsverlustdicken-Reynoldszahl an der Startstelle der Rechnung [17]

6.3.2.2 Randbedingungen

Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems müssen Randbedingungen für alle abhängigen Variablen entlang der Wand und in der Außenströmung vorgegeben werden. Aufgrund der

Haftbedingung an der Wand verschwinden dort die mittleren Geschwindigkeitskomponenten in Strömungsrichtung:

$$u = 0 \quad (6.20)$$

In Normalenrichtung ist die mittlere Geschwindigkeitskomponente auch null, da die Wand undurchlässig ist:

$$v = 0 \quad (6.21)$$

Die turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten streben an der Wand aufgrund der Haftbedingung gegen Null, woraus sich die Randbedingung für die turbulente kinetische Energie ableiten lässt:

$$k = 0 \quad (6.22)$$

Die Randbedingung für die Dissipationsrate hängt vom gewählten Modell ab. Sie sind in Tab.6.5 dargestellt.

Modell	Randbedingung
<i>Jones und Launder</i>	$\epsilon_W = 0$
<i>Launder und Sharma</i>	$\epsilon_W = 0$
<i>Lam und Bremhorst</i>	$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right)_W = 0$
<i>Chien</i>	$\epsilon_W = 0$
<i>Nagano und Hishida</i>	$\epsilon_W = 0$
<i>Myong und Kasagi</i>	$\epsilon_W = \nu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)_W$
<i>Nagano und Tagawa</i>	$\epsilon_W = \nu \left(\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}\right)_W$
<i>Yang und Shih</i>	$\epsilon_W = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y}\right)_W$

Tabelle 6.5: Low-Reynolds-Number k - ϵ Randbedingungen für die turbulente Dissipationsrate

6.4 k - ω Turbulenzmodell

Wilcox [22] modifiziert sein k - ω Turbulenzmodell, dessen Beschreibung in Abschnitt 4.4.3.3 schon erledigt worden ist, um die Transitionseffekte und die Strömungen mit kleinen Reynoldszahlen besser zu beschreiben. Die Konstanten des k - ω Turbulenzmodells hängen jetzt von der Turbulenz-Reynoldszahl ab. α^* ist nicht mehr eins, sondern

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0^* + Re_T/R_k}{1 + Re_T/R_k}, \quad (6.23)$$

mit einer Turbulenz-Reynoldszahl

$$Re_T = \frac{k}{\omega \nu}. \quad (6.24)$$

Auch die anderen Modellkonstanten α und β^* werden modifiziert

$$\alpha = \frac{5}{9} \frac{\alpha_0 + Re_T/R_\omega}{1 + Re_T/R_\omega} (\alpha^*)^{-1} \quad \beta^* = \frac{9}{100} \frac{5/18 + (Re_T/R_\beta)^4}{1 + (Re_T/R_\beta)^4} \quad (6.25)$$

Die weiteren Modellkonstante sind in Tab.6.6 definiert

β	$\sigma^* = \sigma$	α_0^*	α_0	R_β	R_k	R_ω
3/40	1/2	$\beta/3$	1/10	8	6	2.7

Tabelle 6.6: Konstanten des modifizierten k - ω Turbulenzmodells [22]

6.5 Transitionskriterien

Neben den Turbulenzmodellen finden im Turbomaschinenbau die Integralverfahren Anwendung. Diese Verfahren integrieren die Grenzschichtgleichungen innerhalb der Grenzschicht, deshalb können keine Geschwindigkeitsprofile errechnet werden, sondern nur gemittelte Größen im Gebiet. Da alle diese Methoden unterschiedliche Korrelationen in laminarer und turbulenter Strömung verwenden, braucht man beim laminar-turbulent Umschlag ein Kriterium, dass das Transitionsgebiet festlegt. Ziel der Transitionskriterien ist eine kritische Reynoldszahl zu ermitteln, die durch die bekannten Einflußgrößen der Transition (Tab.6.1) errechnet wird, um den Umschlagpunkt zu bestimmen. Liegt die lokale Reynoldzahl in der Grenzschicht unter der berechneten Transitionsreynoldszahl, liegt laminare Grenzschichtströmung vor, überschreitet sie diese, ist die Strömung turbulent. Eigentlich findet der Übergang vom laminaren zum turbulenten Zustand nicht an einem bestimmten Punkt statt, sondern der Vorgang braucht tein mehr oder weniger großes Gebiet. Trotzdem wird als Ort der Transition die Stelle des mittleren Transitionspunktes definiert. Die hier betrachteten Transitionskriterien, [15], [16] sind grundsätzlich in vier unterschiedlichen Formen aufgebaut, die von den Einflußgrößen abhängen:

$$\begin{aligned}
 Re_{\delta_2, tr} &= f(Re_x) \\
 Re_{\delta_2, tr} &= f(Tu) \\
 Re_{\delta_2, tr} &= f(\lambda, Tu) \\
 Re_{\delta_2, tr} &= f(H_{32})
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

6.5.1 Transitionskriterien mit der Reynoldszahl

Die hier vorgestellten Kriterien (*Michel*, *Smith-Gamberoni*) sind aufgrund von dem Gültigkeitsbereich, der kleine Reynoldszahlen benötigt, nicht für die Turbomaschinen geeignet.

- Kriterium nach *Michel*. Das folgende empirische Kriterium gilt bei niedrigem Turbulenzgrad und kleinen Geschwindigkeiten. Mit der Impulsverlustdicke wird eine Transitionsreynoldszahl als Funktion der Lauflängen-Reynoldszahl gebildet:

$$Re_{\delta_2, tru} = 1.535 Re_{x, tr}^{0.444} \tag{6.27}$$

- Kriterium nach *Smith* und *Gamberoni*. Dieses halbempirische Kriterium, das durch die Tollmien-Schlichting-Theorie aufgebaut worden ist, bestätigt die Gültigkeit des Kriteriums nach *Michel* und lautet

$$Re_{\delta_2, tru} = 1.174 Re_{x, tr}^{0.46} \tag{6.28}$$

6.5.2 Transitionskriterien mit dem Turbulenzgrad

- Kriterium nach *Hall* und *Gibbings*. Die Transitionsreynoldszahl hängt hier von dem Turbulenzgrad der Außenströmung ab. Im diesen Transitionskriterien unterscheidet man zwischen unterer Transitionsreynoldszahl und oberer Transitionsreynoldszahl:

$$Re_{\delta_2, tru} = 190 + \exp(6.88 - 103 Tu_{lok}) \tag{6.29}$$

$$Re_{\delta_2, tr_o} = 190 + \exp(7.70 - 44.75 Tu_{lok}) \quad (6.30)$$

6.5.3 Transitionskriterien mit Turbulenzgrad und Druckgradient

- Korrelation nach *Granville*. Dieses Kriterium ist eigentlich das einzige, das auf physikalischen Gründen basiert. Der Instabilitätspunkt bei natürlicher Transition wird erreicht, da die Grenzschichtströmung durch anwachsende Störungen belastet wird. Die Folge dieser Störungen nach dem Instabilitätspunkt ist eine Differenz zwischen Instabilitätsreynoldszahl und Transitionsreynoldszahl

$$\Delta Re_{\delta_2, tr} = Re_{\delta_2, tr_u} - Re_{\delta_2, in}. \quad (6.31)$$

Die Instabilitätsreynoldszahl wird durch die folgende Gleichung ausgerechnet:

$$\log_{10} Re_{\delta_2, in} = 2.42 - 24.2 (H_{32} - 1.572) \quad (6.32)$$

Der inkompressible Formparameter wird durch den lokalen Pohlhausenparameter bestimmt:

$$H_{32} = 1.572 + \frac{\lambda}{1.272} \quad (6.33)$$

Die Reynoldszahldifferenz wird bestimmt aus

$$\Delta Re_{\delta_2, tr} = [450 + 400 \exp(60\bar{\lambda})] f(Tu_1). \quad (6.34)$$

Die physikalische Gleichung des gemittelten Pohlhausenparameters ist

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{x_{tru}}^{x_{tr, in}} \lambda(x) dx}{\int_{x_{tru}}^{x_{tr, in}} dx}. \quad (6.35)$$

Dieser gemittelte Pohlhausenparameter soll die Effekte des Druckgradienten zwischen dem Instabilitätspunkt und dem Schubspannungsminimum erfassen, weil der Ort der Transition wesentlich von der Geschichte dieser Größe abhängt. Wegen Schwierigkeiten dieser Gleichung wird oft folgende Näherungsform verwendet:

$$\bar{\lambda} = \frac{4}{45} - \frac{1}{5} \left[\frac{\left(\frac{u\delta_2}{\nu}\right)_{tr} - \left(\frac{u\delta_2}{\nu}\right)_{in}}{x_{tr} - x_{in}} \right] \quad (6.36)$$

Der Einfluß des Turbulenzgrads wird durch die Hilfsfunktion f berücksichtigt:

$$\begin{cases} f(Tu_1) = 0.33 Tu_1 & 0\% \leq Tu_1 \leq 4\% \\ f(Tu_1) = \frac{2}{1000} (10 - Tu_1) & 4\% \leq Tu_1 \leq 10\% \\ f(Tu_1) = 0 & Tu_1 > 10\% \end{cases}$$

- Kriterium nach *Duhnam*. Eine Erweiterung des Kriteriums nach *Granville* wird von *Duhnam* vorgestellt, das jedoch den lokalen Pohlhausenparameter und den Turbulenzgrad verwendet:

$$Re_{\delta_2, tr_u} = \left[0.27 + 0.73 \exp(-0.8 \overline{Tu}) \right] \left(550 + \frac{680}{1 + \overline{Tu} - 21\lambda} \right) \quad (6.37)$$

Wobei \overline{Tu} eine arithmetische Mittelung des lokalen und des Anström-Turbulenzgrades ist:

$$\overline{Tu} = \frac{1}{2} (Tu + Tu_1) \quad (6.38)$$

- Kriterium nach *Arnal*. Genau wie *Granville* basiert diese Korrelation auf der Reynoldszahldifferenz in Glg.(6.31), die den Einfluß der Grenzschichtentwicklung vor dem unteren Transitionspunkt berücksichtigt. Hier wird jedoch zur Ermittlung der Instabilitäts-Reynoldszahl der lokale Formparameter der Grenzschicht verwendet:

$$Re_{\delta_2, tr_u} = \exp \left(\frac{52}{H_{12}} - 14.8 \right) \quad (6.39)$$

Die folgende Gleichung gilt zur Berechnung der Reynoldszahldifferenz:

$$\Delta Re_{\delta_2, tr} = -206 \exp(25.7\bar{\lambda}) [\ln(0.168Tu) - 2.77\bar{\lambda}] \quad (6.40)$$

- Kriterium nach *Abu* und *Ghannam*. Hier wird versucht, den Druckgradient durch einen Extremwert des Pohlhausenparameters statt des gemittelten Integralwertes zu berücksichtigen. Die Transitionsreynoldszahl wird wie beim Kriterium nach *Duhnam* durch den gemittelten Turbulenzgrad ermittelt. Dazu gibt es eine Funktion, die vom Pohlhausenparameter abhängt. Man unterscheidet zwischen positiven und negativen Druckgradienten:

$$\begin{cases} f(\lambda_{ex}) = 6.91 + 12.75\lambda_{ex} + 63.64\lambda_{ex}^2 & \lambda < 0 \\ f(\lambda_{ex}) = 6.91 + 2.48\lambda_{ex} + 12.27\lambda_{ex}^2 & \lambda > 0 \end{cases}$$

Jetzt ist die Berechnung der unteren Transitionsreynoldszahl möglich:

$$Re_{\delta_2, tr_u} = 163 + \exp \left[f(\lambda_{ex}) - \frac{f(\lambda_{ex})}{6.91} \overline{Tu} \right] \quad (6.41)$$

Und die obere Transitionsreynoldszahl lautet

$$Re_{\delta_2, tr_o} = 540 + 183.5 \left(Re_L \cdot 10^{-5} - 1.5 \right) (1 - 1.4\lambda), \quad (6.42)$$

wobei Re_L eine Reynoldszahl ist, die von der Transitionslänge abhängt. Die folgende Gleichung wird zur Berechnung dieser Reynoldszahl vorgeschlagen:

$$Re_L = 211.46 Re_{\delta_2, in}^{1.25} \quad (6.43)$$

- Kriterium nach *Seyb*. Der Gültigkeitsbereich dieser Korrelation berücksichtigt den Turbulenzgrad der Anströmung, und zwar $0.1\% \leq Tu_1 \leq 4.0\%$. Wird diese Annahme erfüllt, lautet die untere Transitionsreynoldszahl

$$Re_{\delta_2, tr_u} = \frac{1000}{1.2 + 0.7Tu_1} + 10 \left(\frac{0.09 + \lambda}{0.0106 + 0.036Tu_1} \right). \quad (6.44)$$

6.5.4 Transitionskriterien mit dem Formparameter

- Kriterium nach *Thiede*. Sowohl der lokale Formparameter als auch der gemittelte Formparameter werden verwendet. Die Gleichung des gemittelten Formparameters wird durch die integrale Mittelung zwischen dem Instabilitätspunkt und der unteren Transitionsreynoldszahl gebildet:

$$\overline{H_{32}} = \frac{\int_{x_{tr_u}}^{x_{tr,in}} H_{32}(x) dx}{\int_{x_{tr_u}}^{x_{tr,in}} dx} \quad (6.45)$$

Noch einmal wird die Reynoldszahldifferenz in Glg.(6.31) angewendet. Durch den lokalen Formparameter wird die Instabilitätsreynoldszahl errechnet:

$$\log_{10} Re_{\delta_2, in} = 4.556 - 76.87 (1.670 - H_{32})^{1.542} \quad (6.46)$$

Der gemittelte Formparameter dient zur Berechnung der Reynoldszahldifferenz

$$\begin{cases} \log_{10} \Delta Re_{\delta_2, in} = 1.6435 - 24.2 \left(1.515 - \overline{H_{32}} \right) & 1.515 \leq \overline{H_{32}} \leq 1.56 \\ \log_{10} \Delta Re_{\delta_2, in} = 3.312 - 967.5 \left(1.515 - \overline{H_{32}} \right) & 1.56 \leq \overline{H_{32}} \leq 1.625 \end{cases}$$

- Kriterium nach *Wortmann*. Die Transitionsreynoldszahl wird immer durch den Formparameter ermittelt

$$Re_{\delta_2, tr_u} = \exp (34.2 H_{32} - 46.78) . \quad (6.47)$$

- Kriterium nach *Eppler*. *Eppler* grenzt die Gültigkeit des Kriteriums von *Wortmann* um eine mögliche auftretende Transition in Form einer Ablöseblase ein. Die Berücksichtigung des turbulenten Wiederanlegens bewirkt eine Verschiebung des Umschlagspunktes:

$$\begin{cases} Re_{\delta_2, tr_u} = \exp (18.4 H_{32} - 21.74) & H_{32} \leq 1.585 \\ Re_{\delta_2, tr_u} = \exp (34.2 H_{32} - 46.78) & H_{32} > 1.585 \end{cases}$$

6.5.5 Transitionskriterien für die Ablöseblase

- Kriterium nach *Rannacher*. Diese Transitionsart wird stark von der Außenströmung beeinflusst. Wenn dieser Einfluß sich nur auf den Bereich der Blase beschränkt, ist das Umschlaggebiet ganz kurz, man spricht in diesen Fall von einer kurzen Ablöseblase: dafür ist dieses Kriterium geeignet. Außerdem werden drei weitere Annahmen zugrunde gelegt:

1. Die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung außerhalb der Ablöseblase bleibt unverändert erhalten.
2. Die Geschwindigkeit im laminaren Teil der Blase entspricht dem Wert der Ablösestelle und bleibt konstant (Abb.6.8).
3. Die Geschwindigkeit im turbulenten Teil der Blase verläuft linear.

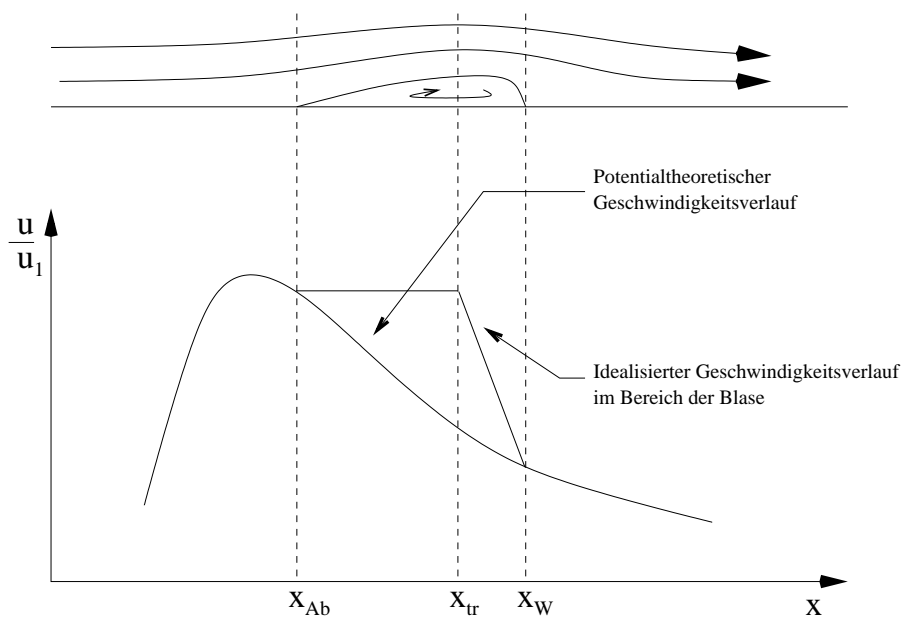


Abbildung 6.8: *Blasenmodell*

Beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze, die vom inkompressiblen Formparameter festgelegt wird ($H_{32} = 1.51509$), löst die Strömung ab. Die Summe der Koordinate des Instabilitätspunkts und die Länge der freien Scherschicht "a" (siehe Abb.6.9) ergibt die Koordinate des Transitionspunkts:

$$x_{tr} = x_{Ab} + a \quad (6.48)$$

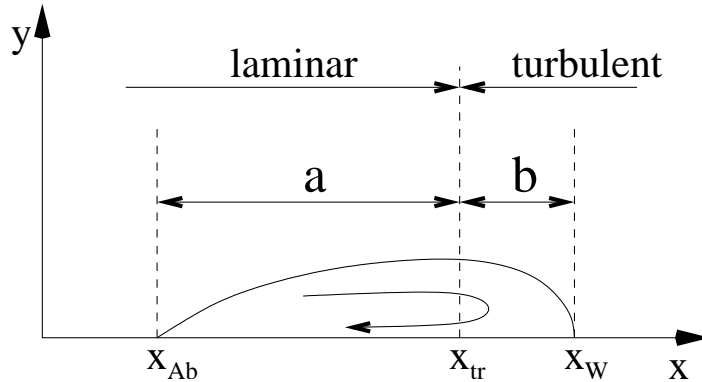


Abbildung 6.9: charakteristische Längen der Ablöseblase

6.5.6 Anwendbarkeit der Korrelationen

Da die Korrelationen mit Daten aus den unterschiedlichsten Strömungen erstellt wurden, muss dem Gültigkeitsbereich eines Kriteriums große Aufmerksamkeit gewidmet werden. In der Tab.6.7 werden einige Angaben zum Gültigkeitsbereich der einzelnen Transitionskriterien gegeben.

Kriterium	Gültigkeitsbereich
<i>Michel</i>	Tragflügelprofile bei sehr geringen Turbulenzgraden
<i>Smith und Gamberoni</i>	Tragflügelprofile in störungsarmer Anströmung
<i>Hall und Gibbings</i>	ebene Platte in inkompressibler Strömung
<i>Granville</i>	ebene Platte und Tragflügelprofile
<i>Duhnam</i>	ebene Platte und Tragflügelprofile
<i>Arnal</i>	zweidimensionale, inkompressible Strömungen
<i>Abu und Ghannam</i>	ebene Platte in inkompressibler Strömung mit $0.5\% \leq Tu \leq 5.0\%$
<i>Seyb</i>	zweidimensionale Strömungen in Turbinengittern mit $0.5\% \leq Tu \leq 5.0\%$
<i>Thiede</i>	Tragflügelprofile in turbulenzarmer Strömung
<i>Wortmann</i>	große Formparameter
<i>Eppler</i>	große Formparameter

Tabelle 6.7: Anwendbarkeit der Kriterien

Kapitel 7

Berechnungsergebnisse

7.1 Experimentelle und numerische Vergleichsdaten

Da in einer realen Turbomaschine die einzelnen Einflußfaktoren nicht von einander getrennt werden können, ist es sinnvoll, Untersuchungen im vereinfachten Modell durchzuführen. Aus diesem Grunde wird die Strömung in einem vereinfachten Modell eines ebenen Verdichtergitters untersucht. Der für die Untersuchung verwendete Unterschallwindkanal besteht aus den Baugruppen Gebläse, Beruhigungskammer, Düse und Messstrecke. Das von *Zierke* und *Deutsch* gewählte Verdichtergitter besteht aus einem ebenen Strömungskanal mit profilierten Seitenwänden und fünf eingebauten Verdichterschaufel. In Abb.7.1 ist das Verdichtergitter mit den Winkeldefinitionen dargestellt.

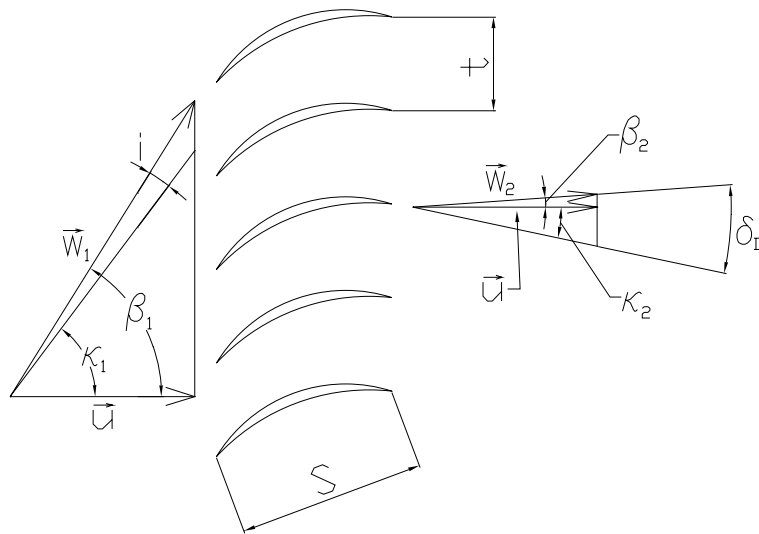


Abbildung 7.1: Das Verdichtergitter

Die experimentelle Arbeit von *Zierke* und *Deutsch* liefert neben den integralen Größen noch lokale Daten [4] [5] [6], wie Druckverteilungen, Geschwindigkeiten, etc., welche sich besonders für die Verifikation eines numerischen Codes eignen. Für einen Vergleich mit den eigenen Berechnungen waren vor allem der Verlauf des Druckbeiwertes über dem Umfang und die Geschwindigkeit im Nachlauf interessant. Außerdem sind in Tab.7.1 und Tab.7.2 die wichtigsten experimentellen Daten und die Abmessungen zu sehen.

$i[^\circ]$	-8.5	-1.5	+5
$\beta_1[^\circ]$	44.5	51.5	58.0
$\beta_2[^\circ]$	-0.6	2.1	4.0
w_1 [m/s]	33.28	32.88	33.11
\bar{w}_2 [m/s]	23.74	20.48	17.59
Re_1 [-]	$5.07 \cdot 10^5$	$5.01 \cdot 10^5$	$5.05 \cdot 10^5$

Tabelle 7.1: Daten des Verdichtergitters (Experiment)

S [mm]	228.6
t [mm]	106.8
$\gamma[^\circ]$	20.5
$\kappa_1[^\circ]$	53.0
$\kappa_2[^\circ]$	-12.0

Tabelle 7.2: Abmessungen des Verdichtergitters

Die Eigenschaften des betrachteten DCA Profils wurden auch von andere Autoren numerisch untersucht. Die verwendeten numerischen Codes sind in der entsprechenden Literatur verfügbar. Inkompressible Rechnungen wurden von *Hobson* und *Lakshminarayana* [9] bei $i = -1.5^\circ$ und $i = +5^\circ$ vorgestellt, wobei das Low-Reynolds-Nummer Turbulenzmodell von *Lam* und *Bremhorst* verwendet wurde. *Kunz* und *Lakshminarayana* [11] berücksichtigen die Effekte der Kompressibilität durch eine Modifikation des Modells von *Chien*. Der betrachtete Inzidenzwinkel ist $i = -1.5^\circ$. *Chen*, *Lien* und *Leschziner* [1] haben die Strömung bei $i = -1.5^\circ$ durch ein nichtlineares Wirbelviskositätsmodell berechnet. Diese Autoren beschreiben die Strömung als schwer berechenbar, obwohl die Ergebnisse im allgemeinen gute Übereinstimmung aufweisen.

7.1.1 Instrumentierung der Experimente

Zur Untersuchung des Strömungsverhaltens des Verdichtergitters wurden unterschiedliche Messtechniken eingesetzt:

Druckverteilungsmessung: Am Schaufelgitter wird die Druckverteilungsmessung entlang der Schaufelkontur durchgeführt. Sie dient zur Überprüfung der Geschwindigkeitsverteilung auf Saug- und Druckseite und damit der Grenzschichtentwicklung. Der Datenerfassungsteil beinhaltet in wesentlichen Komponenten zur Umsetzung der Druckinformationen. Pneumatische Kanäle werden auf die jeweiligen Druckaufnehmer aufgeschaltet und in analoge Spannungssignale umgewandelt. Für die Druckverteilungsmessung ist die sogenannte Messschaufel ausgeführt. Sie besitzt auf Saug- und Druckseite jeweils in Schaufelhöhenmitte eine Reihe von Bohrungen senkrecht zur Profiloberfläche, die den statischen Druckverlauf längs der Profilkontur liefern. Im Mittelschnitt auf der Druckseite befinden sich 22 Bohrungen, auf der Saugseite 20. Die Lage der Bohrungen zeigt Tab.7.3.

Abstand von der Profilvorderkante in % der axialen Sehnenlänge	
Saugseite	Druckseite
1.0	1.0
2.0	3.0
3.0	4.0
6.0	5.0
12.2	6.0
18.3	12.2
24.5	12.2
30.7	24.5
36.8	30.7
43.0	36.8
49.2	43.0
55.3	49.2
61.5	55.3
67.7	61.5
73.8	67.7
80.0	73.8
82.5	82.5
88.3	85.4
94.5	88.3
97.3	91.3
-	94.5
-	97.3

Tabelle 7.3: Druckbohrungen in der Schaufel auf der Saug- und Druckseite

Messungen mittels einer 5-Loch-Sonde: Die verwendete 5-Loch-Sonde dient zur Messung des 3-D-Strömungsvektors in Unterschallströmungen.

Meßgrößen:

- statischer Druck
- Totaldruck
- Strömungsgeschwindigkeit
- Strömungswinkel

In der Zuströmung zum Gitter ca. 150 mm vor der Gittereintrittsebene werden diese Größen vermessen.

Zur experimentellen Ermittlung von Verlust- und Umlenkeigenschaften des ebenen Gitters werden auch mit Hilfe der 5-Loch-Sonde Nachlaufmessungen im Mittelschnitt durchgeführt. Der messtechnische Aufbau ermöglicht die Traversierung der Sonde über eine oder mehrere Teilungen in einer zur Gitteraustrittsebene parallelen Ebene und die Messung der örtlichen Abströmgrößen.

Der Druck wird in derselben Ebene auch mit einer Pitotsonde aufgenommen und mit den Daten der 5-Loch-Sonde verglichen. Diese Daten sind in Tab.7.4 dargestellt.

	p_1 [Pa]	p_{t1} [Pa]	\bar{C}_{p2} [-]
$i = -8.5^\circ$	-315.8	351.6	0.421
$i = -1.5^\circ$	-382.0	269.6	0.473
$i = +5.0^\circ$	-414.3	246.1	0.463

Tabelle 7.4: Druck am Eintritt und am Austritt der Verdichtergitters

Messungen mittels einer Hitzdraht-Sonde: Die Hitzdrahtmesstechnik hat sich für die Messung turbulenter Strömungen wegen ihres kleinen Messvolumens und ihrer Zuverlässigkeit bei der Messung turbulenter Größen gut bewährt. Die Meßtechnik basiert auf der Änderung der Wärmeverlustleistung eines erhitzten Sensors bei der Veränderung der Strömungs- und damit der Kühlgeschwindigkeit. Der Sensor bildet einen Teil einer im Anemometer eingebauten Wheatstoneschen Brücke. Die Brücke wird so abgeglichen, dass der Sensor auf die gewünschte Temperatur überhitzt wird. Die aufgrund von Geschwindigkeitsschwankungen verursachten Änderungen der Fühltemperatur bewirken eine Änderung des Fühlerwiderstandes und somit eine Verstimmung der Wheatstoneschen Brücke. Der Regelverstärker kompensiert die Brückenverstimmung durch Veränderung der Spannung an der Brücke, so dass der Sensor durch den veränderten Stromfluß auf die ursprüngliche Temperatur und auf den ursprünglichen Widerstand zurückkehrt. Die am Regelverstärker anliegende Spannung stellt das Messsignal dar.

Meßgrößen:

- Turbulenzgrad

Die aus der Düse austretende Strömung zeichnet sich durch ein gleichmäßiges mittleres Geschwindigkeitsprofil aus. Die Verteilung des Turbulenzgrad ist ebenfalls gleichmäßig und beträgt ca. 0.18%.

Messungen mittels einer LDA: Die Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) ist ein optisches Meßverfahren, das die berührungslose Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit in transparenten Flüssigkeiten oder Gasen gestattet. Das Meßverfahren zeichnet sich durch eine hohe Genauigkeit, einen weiten Meßbereich und gutes räumliches und zeitliches Auflösungsvermögen aus. Am Meßort, dem Schnittpunkt von zwei Laserstrahlen, bildet sich ein Interferenzstreifenmuster aus. In der gasförmigen Strömung mittransportierte mikroskopische Partikel ($1\text{--}10\text{ }\mu\text{m}$) reflektieren beim Durchqueren des Meßortes das Laserlicht mit einer der Strömungsgeschwindigkeit und dem Interferenzstreifenabstand proportionalen Frequenz. Das rückgestreute Licht wird in der Optik in ein elektrisches Signal umgewandelt. Die Frequenzbestimmung erfolgt mit einer Spektralanalyse. Mit dem bekannten Interferenzstreifenabstand wird aus der gemessenen Frequenz die Strömungsgeschwindigkeit berechnet.

Die Vorteile: berührungsloses Meßverfahren, keine Beeinflussung der Messung durch Druck und Temperatur, keine Beeinflussung der Strömung, hohe zeitliche Auflösung, kalibrierungsfreies Messverfahren, nahezu punktförmiges Messvolumen und hohe Meßgenauigkeit. Voraussetzung für die Laser-Doppler-Anemometrie ist ein transparentes Fluid, mikroskopische Partikel in der Strömung und optische Zugänglichkeit zum Fluid.

Mittles Laser-Doppler-Anemometrie wurden Messungen an Saug- und Druckseite und im Nachlauf durchgeführt. Meßgrößen:

- Strömungsgeschwindigkeit
- Turbulenzgrad

Ölanstrichmethode: Eine einfache und schnelle Möglichkeit, um die Strömungszustände an der Profiloberfläche qualitativ zu ermitteln, stellt die Ölanstrichtechnik dar. Dafür werden die zu untersuchenden Flächen mit einem Gemisch von fluoreszierendem Farbpulver, Petroleum und Weißöl bestrichen und anschließend der Windkanalströmung ausgesetzt. Aufgrund der an der Wand vorliegenden Wandschubspannungen werden die Farbteilchen in Strömungsrichtung mitgerissen. In Gebieten hoher Wandschubspannung wird mehr Farbe abtransportiert, während in Bereichen niedriger Wandschubspannung, wie z.B. beim Auftreten von Ablöseblasen, mehr Farbe erhalten bleibt. Die flüchtigen Lösungsmittel verdunsten während der Meßzeit und es bleibt ein Farbmuster an der Profiloberfläche erhalten, das Aufschluß über die Strömungsphänomene in unmittelbarer Wandnähe gibt. Die Farbe wird anschließend fotografiert. Man kann mit dieser Methode einen guten Gesamtüberblick über die Strömungsverhältnisse in Wandnähe (Grenzschichtbereich) erhalten. Dies trifft vor allem für Wirbelsysteme zu, wenn man Aussagen über Beschleunigungen bzw. Verzögerungen an der Ablöse- bzw. Wiederanlegelinie und im Transitionsbereich treffen will.

7.2 Konvergenz

Die Rechnungen lieferten eine nicht besonders gute Konvergenz, jedoch lagen die relativen Fehler in allen Fällen deutlich unter 10^{-3} , wobei die Residuen des Druckes und der Turbulenzenergie am kritischsten waren. Die Relaxationsfaktoren für die Geschwindigkeitskomponenten, Druck, Turbulenzenergie und Dissipation sind in Tabelle 7.5 dargestellt.

u	v	p	k	ϵ
0.7	0.7	0.8	0.8	0.8

Tabelle 7.5: verwendete Relaxationsfaktoren

In Bild 7.2 und 7.3 -dem Konvergenzverlauf in Abhängigkeit von den Iterationen- ist zu erkennen, wie die Anzahl der benötigten Iterationen für das Erreichen eines maximal zugelassenen relativen Fehlers von 10^{-3} ist. Der Fall mit $i = -8.5^\circ$ erfordert 655 Iterationen, während mit $i = -1.5^\circ$ 822 Schritte benötigt werden.

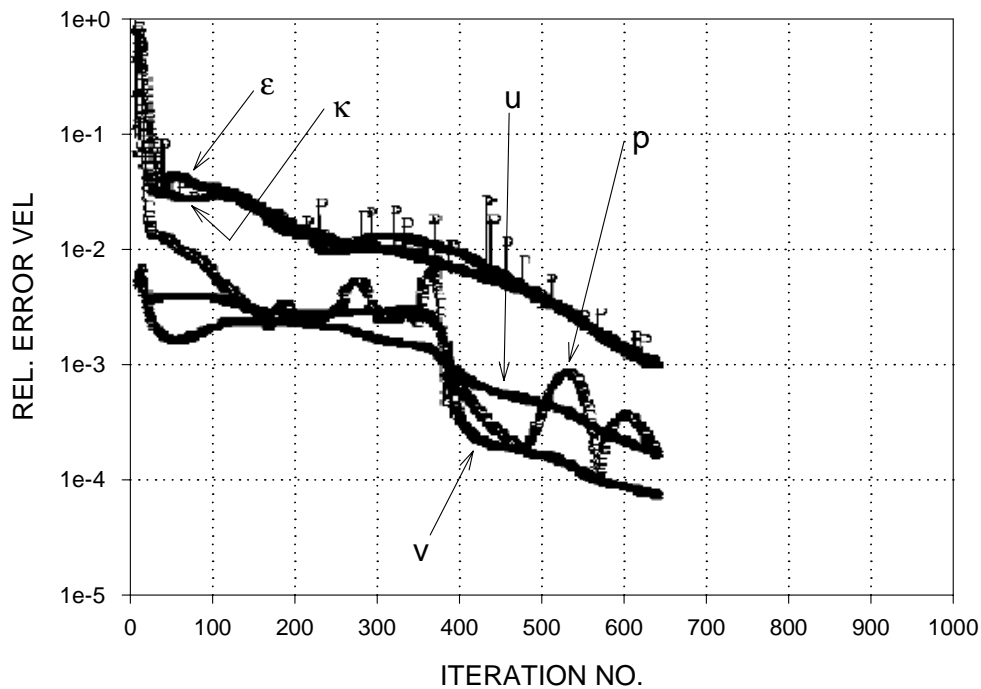


Abbildung 7.2: Iterationsverhalten des Verfahrens für $i = -8.5^\circ$

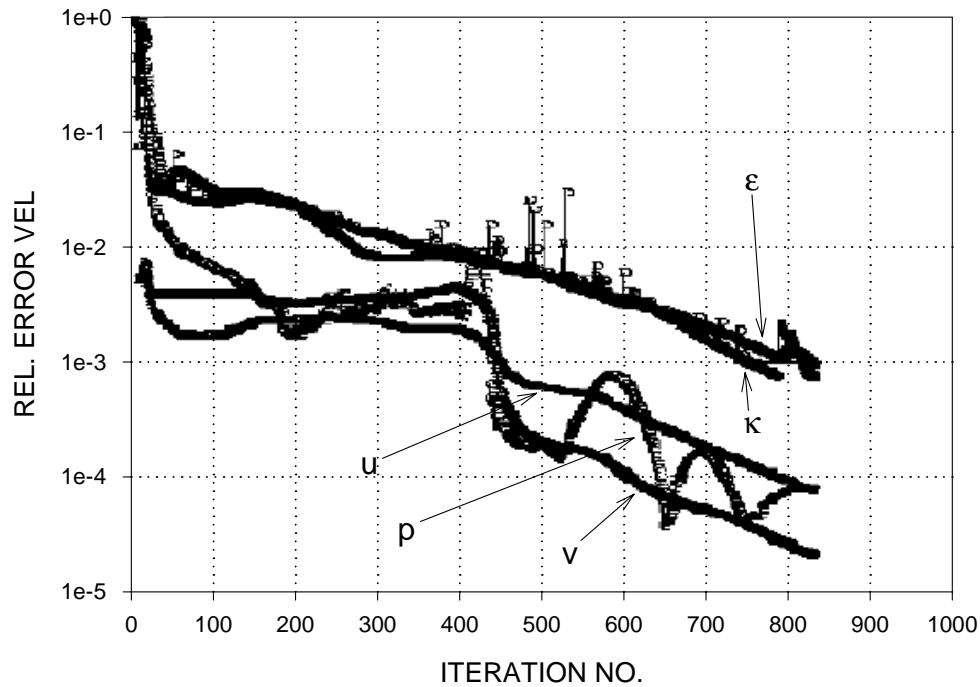


Abbildung 7.3: Iterationsverhalten des Verfahrens für $i = -1.5^\circ$

Besondere Probleme sind bei der Inzidenz $i = +5^\circ$ entstanden. Diese Ergebnisse, deuten auf prinzipielle Schwierigkeiten einer stationären Berechnung für ein instationäres Problem hin.

Eine Berechnung des turbulenten Testfalls mit dem $k-\omega$ Turbulenzmodell konnte aufgrund des schlechten Konvergenzverhaltens nicht durchgeführt werden.

7.3 Lokale Strömungsgrößen

7.3.1 Stromlinien

Die Strömung wird durch Stromlinien dargestellt, d.h. Linien, die in jedem Punkt tangential zum Geschwindigkeitsvektor liegen. Man beachte, dass aufgrund der Definition die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zu einer Stromlinie immer Null ist, so dass kein Massenfluss durch eine Stromlinie hindurch stattfindet. Jeder feste Körper oder jede feste Grenze muss demnach durch eine Stromlinie repräsentiert sein. Die Stromlinienverläufe in Abb.7.4 und Abb. 7.5 zeigen keine Ablösung.

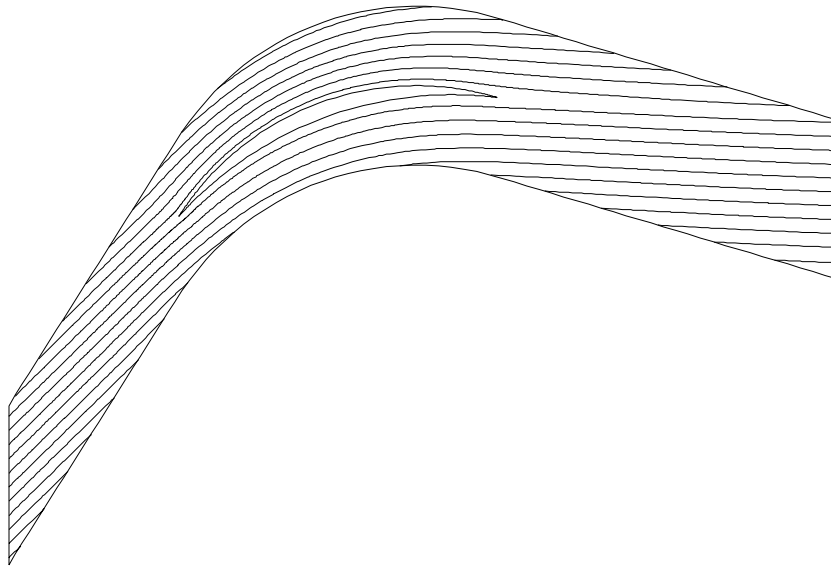


Abbildung 7.4: Verlauf der Stromlinien bei $i = -8.5^\circ$

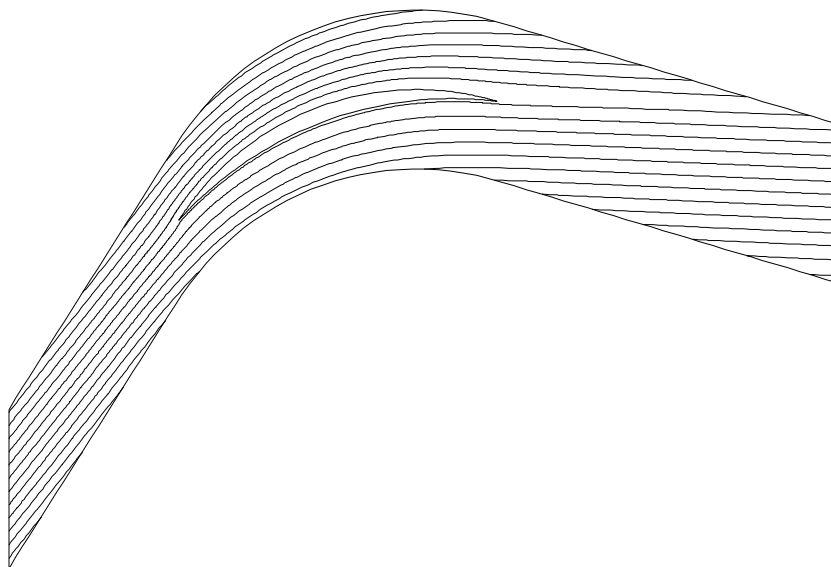


Abbildung 7.5: Verlauf der Stromlinien bei $i = -1.5^\circ$

7.3.2 Geschwindigkeitsvektoren

Sehr anschauliche und detaillierte Strömungsanalysen gestatten die Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren, ab Abb.7.6 bis Abb.7.9. Dabei ermöglicht die Analyse der Gestalt der Geschwindigkeitsprofile und damit der Grenzschichtbelastung die Beurteilung der Eigenschaften der Beschaukelung. Für Verdichterbeschaukelungen ist diese Analyse besonders wertvoll, da sich auf diese Weise der Einfluß der endlichen Hinterkantendicke auf die Ausdehnung der Nachlaufströmung gemäß Abschnitt 7.3.6 und demzufolge auf die Verluste der Beschaukelung beurteilen läßt. Die negative Inzidenz von $i = -8.5^\circ$ wirkt sich deutlich auf die Strömung an der Vorderkante aus. Der Staupunkt liegt auf der Saugseite des Profils. Abb.7.6 zeigt die Umströmung im Bereich der Vorderkante bei $i = -8.5^\circ$.

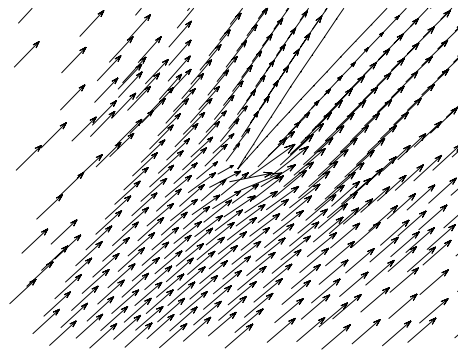


Abbildung 7.6: Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Vorderkante bei $i = -8.5^\circ$

In Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen findet im Bereich der Hinterkante keine Rückströmung statt. Die Geschwindigkeitsvektoren in Abb.7.7 zeigen ebenfalls keine Ablösung an.

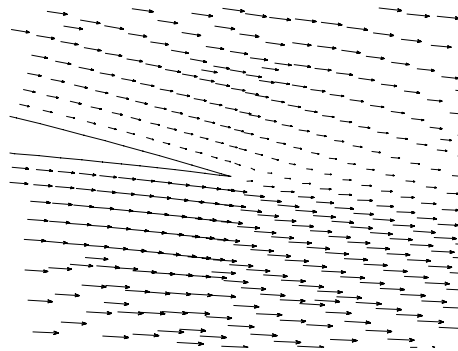


Abbildung 7.7: Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Hinterkante bei $i = -8.5^\circ$

Abb.7.8 und 7.9 stellen die Strömung an der Vorderkante und an der Hinterkante bei $i = -1.5^\circ$ dar. Obwohl in diesem Fall die Zuströmung am Eintritt in das Rechengebiet ebenfalls mit negativer Inzidenz stattfindet ($i = -1.5^\circ$) liegt der Staupunkt auf der Druckseite des Profils. D.h., die lokale Anströmung an der Vorderkante erfolgt mit positiver Inzidenz, was sich auf die Belastung der saugseitigen Grenzschicht besonders ungünstig auswirkt. Der Effekt lässt sich durch die sog. induzierte Inzidenz erklären, die in dem hoch belasteten Verzögerungsgitter besonders deutlich auftritt. In Abb.7.9 ist keine Rückströmung an der Saugeite erkennbar, obwohl das den Experimenten widerspricht.

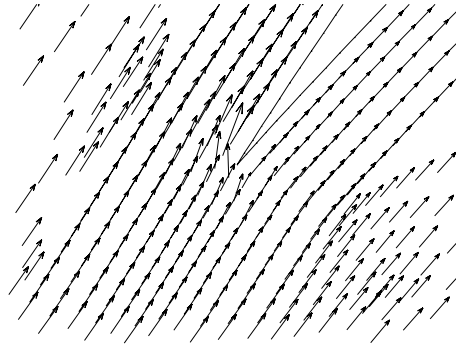


Abbildung 7.8: Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Vorderkante bei $i = -1.5^\circ$

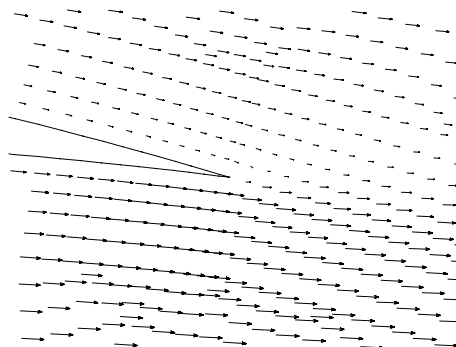


Abbildung 7.9: Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Hinterkante bei $i = -1.5^\circ$

7.3.3 Geschwindigkeitsprofile an Saug- und Druckseite

In diesem Abschnitt werden die gemessenen und berechneten Geschwindigkeitsprofile für $i = -8.5^\circ$ an Saug- und Druckseite gegenübergestellt. Dazu werden vier Auswertungsebenen an der Saugseite und fünf auf der Druckseite herausgegriffen. Die Lage der Auswertungsebenen zeigt Abb.7.10 während in Tab.7.6 ihre Abstände von der Profilverderrante in Prozent der Sehnenlänge ausgegeben sind.

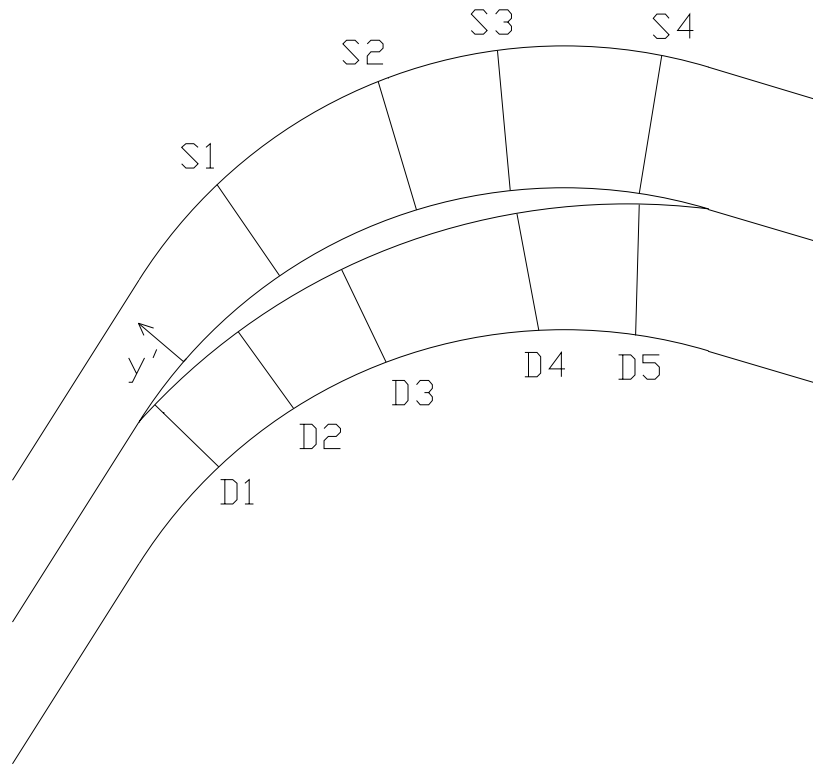


Abbildung 7.10: Lage der Auswertungsebenen an Saug- und Druckseite

	Saugseite				Druckseite				
Auswertungsebenen	S1	S2	S3	S4	D1	D2	D3	D4	D5
Abstand von der Profilverderrante in % der axialen Sehnenlänge	30.1	55.0	70.6	90.3	4.3	20.5	40.0	70.3	89.7

Tabelle 7.6: Abstände der Auswertungsebenen von der Profilverderrante an Saug- und Druckseite

In den Abb.7.11 bis 7.19 sind die berechneten und gemessenen Geschwindigkeitsprofile an Saug- und Druckseite für $i = -8.5^\circ$ dargestellt. Die Diagramme zeigen auf der Abszisse die auf die Zuströmgeschwindigkeit bezogene lokale Geschwindigkeit w/w_1 . Auf der Ordinate ist der auf die Sehnenlänge bezogene Normalabstand y'/S aufgetragen.

Die Geschwindigkeitsprofile in den vier Auswertungsebenen auf der Saugseite sind in den Abb.7.11 bis 7.14 dargestellt. Grundsätzlich erkennt man eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, wobei die berechneten Geschwindigkeiten tendenziell etwas zu klein ausfallen. Die abnehmende Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht ist ein potentialtheoretischer Effekt und lässt sich auf die

Umlenkung der Strömung im Schaufelhand zurückführen. Auf Grund der starken Beschleunigung am Beginn der Saugseite ist die Strömung anfänglich laminar. Der folgende Druckanstieg führt bei etwas der halben Sehnenlänge zu einer Ablösung mit anschließender laminar-turbulent Transition. Weiter stromabwärts ist dann die Grenzschicht voll turbulent. Diese Vorgänge können notiergemäß durch das Standard $k-\epsilon$ Turbulenzmodell mit Wandfunktionen nicht wiedergegeben werden. Trotzdem wird die Zunahme der Grenzschichtdicke von der Berechnung qualitativ gut beschrieben.

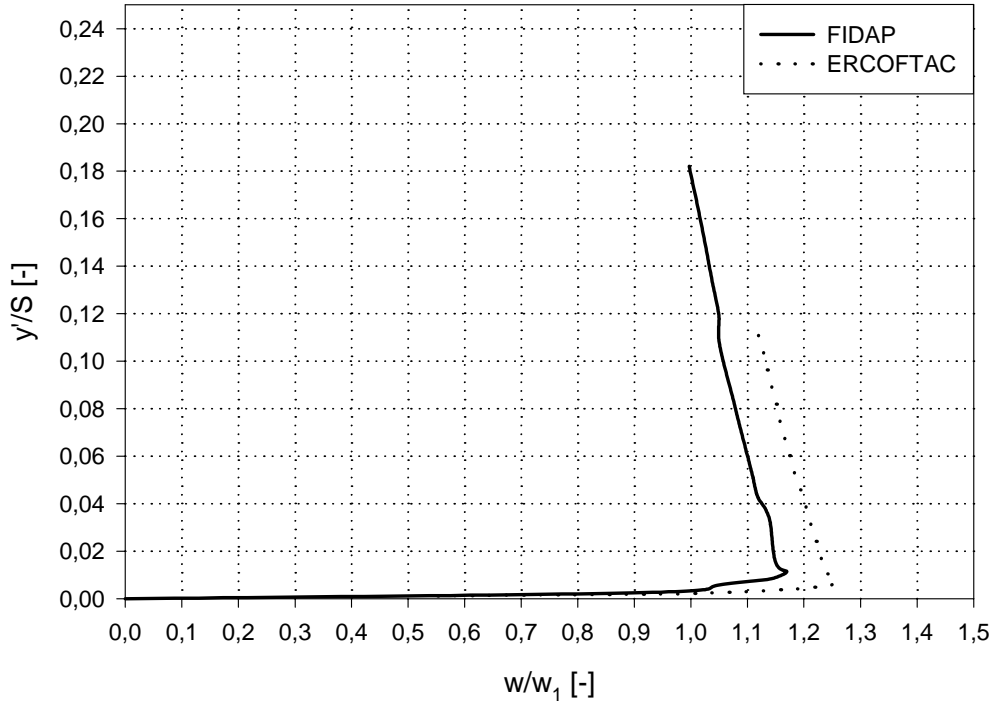
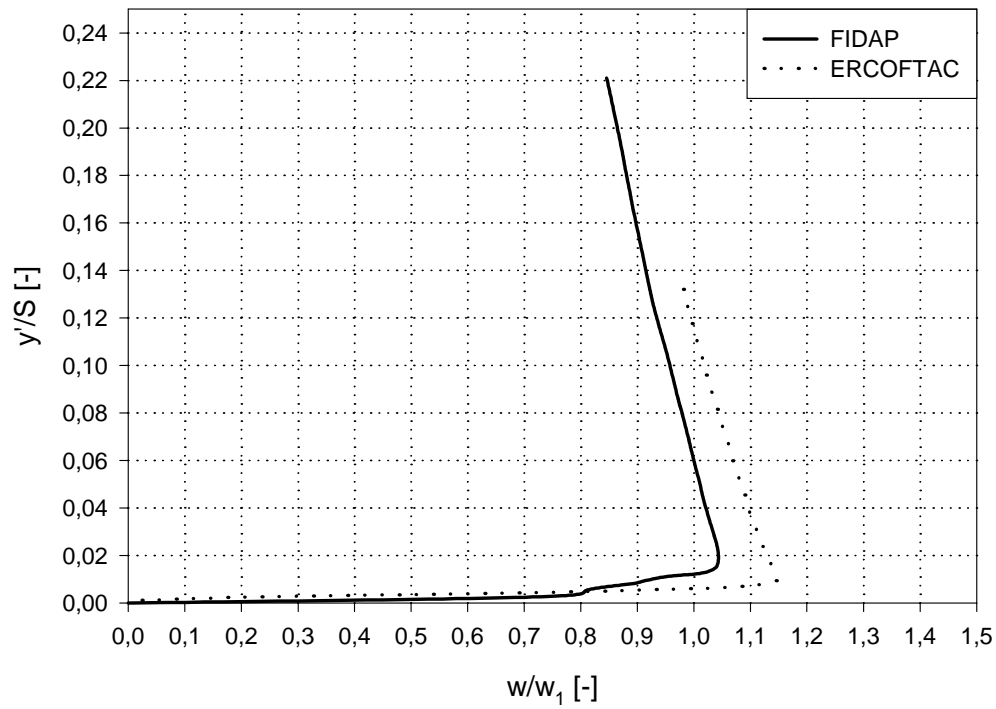
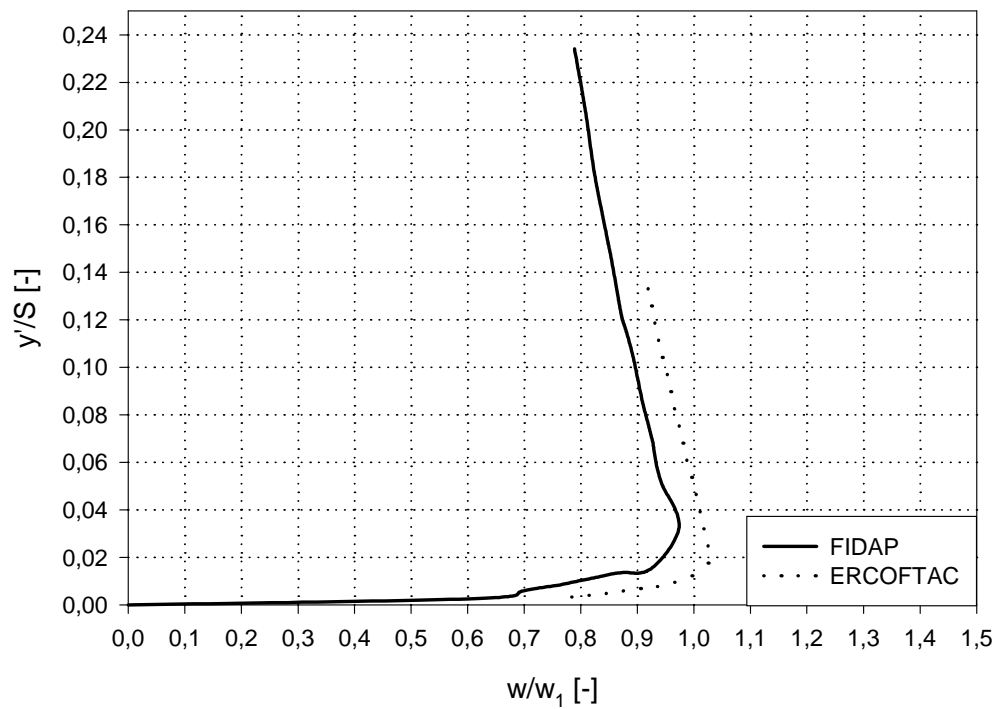


Abbildung 7.11: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S1

Abbildung 7.12: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S2Abbildung 7.13: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S3

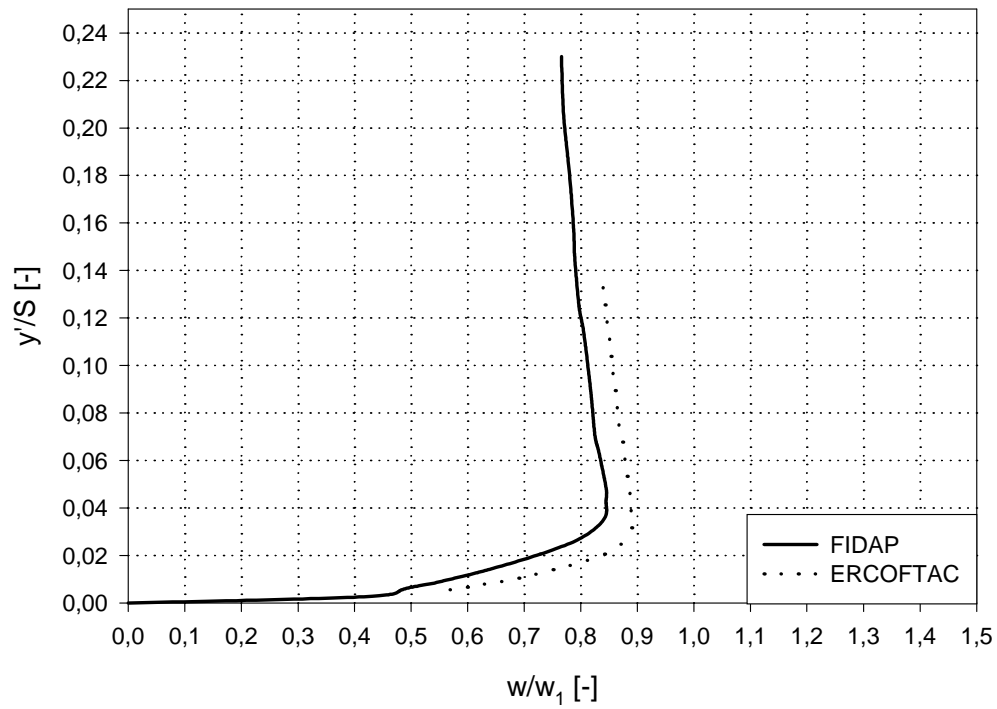


Abbildung 7.14: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S4

Die Geschwindigkeitsprofile in den fünf Auswertungsebenen auf der Druckseite sind in den Abb.7.15 bis 7.19 dargestellt. Insgesamt lässt sich an der Druckseite eine bessere Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Geschwindigkeitsprofile erkennen. Das hängt vermutlich damit zusammen, dass die druckseitige Grenzschicht praktisch von Beginn turbulent ist. Noch einer kleinen Ablöseblase an der Vorderkante erfolgt natürlich unmittelbar der laminar-turbulent Übergang. Anstieg der Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht ist wiederum auf den potentialtheoretischen Effekt durch die Umlenkung im Schaufelhand zurückzuführen. In der Ebene D1 (Abb.7.15) ist die Grenzschicht noch extrem dünn. Die mangelnde Auflösung durch das Finite-Elemente Netz macht sich durch Oszillationen in der Geschwindigkeitsverteilung bemerkbar. Weiter stromabwärts kommt es zu einem deutlichen Anstieg der Grenzschichtdicke, der auch von der Rechnung gut wiedergegeben wird.

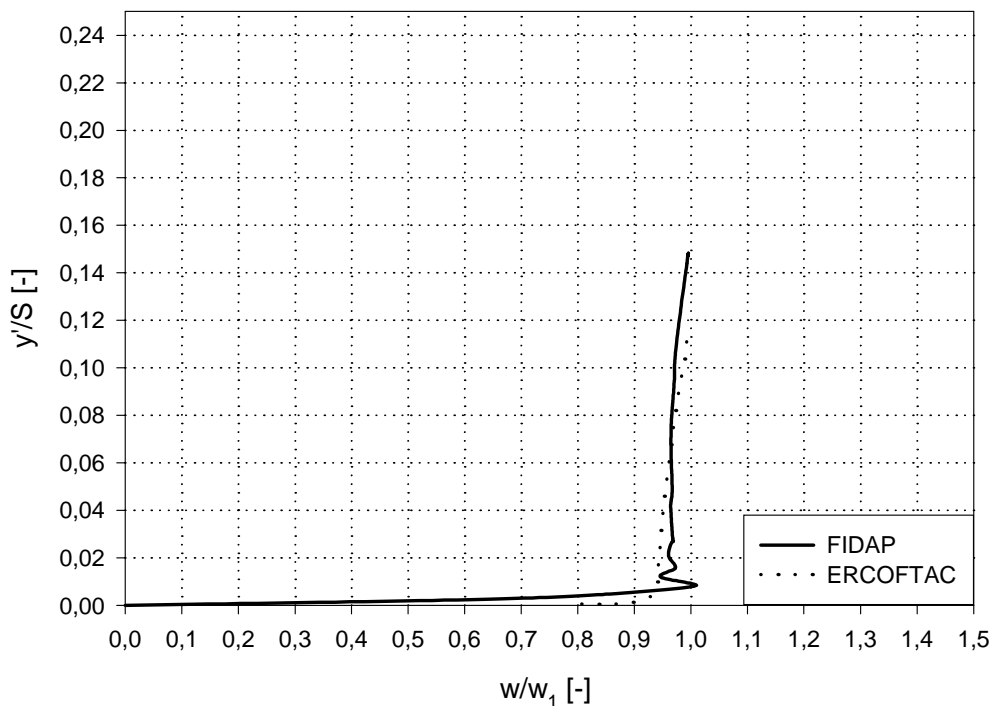
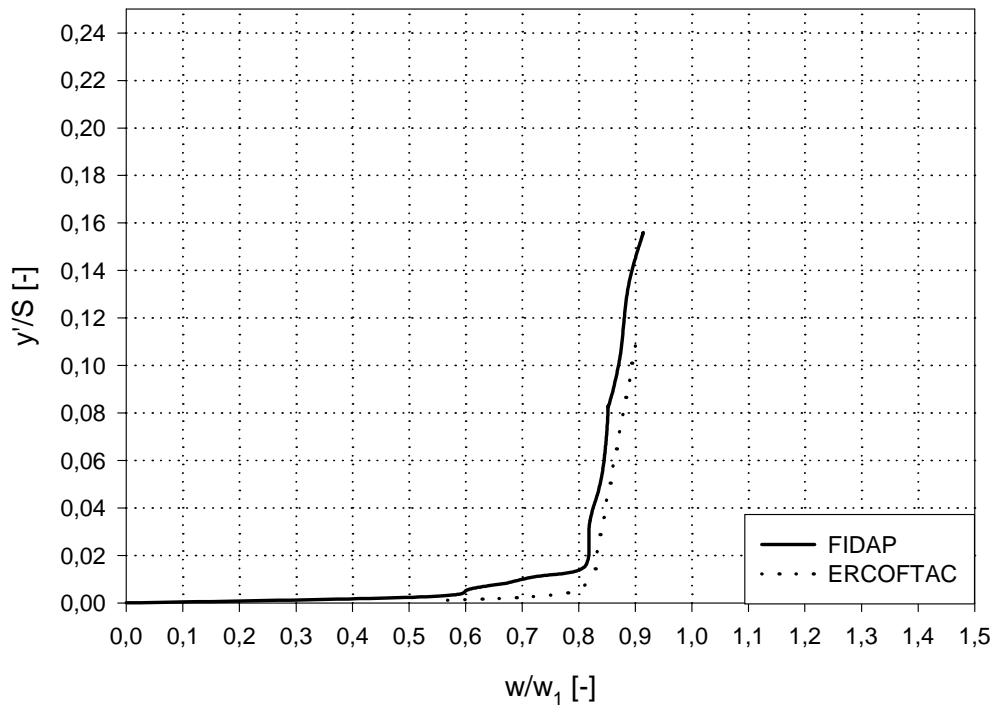
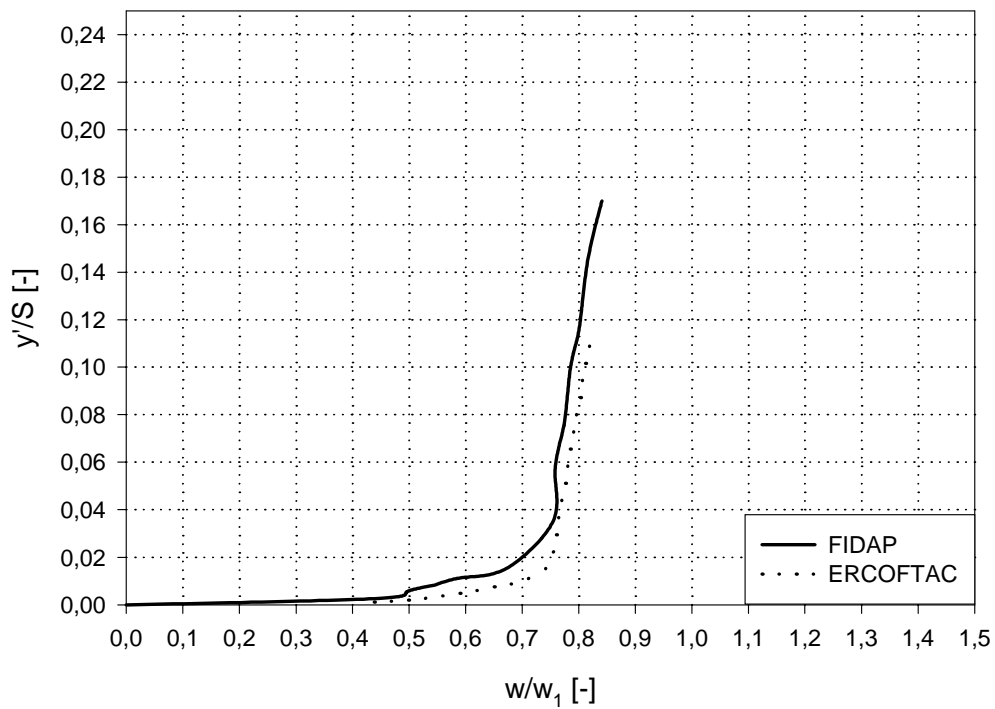
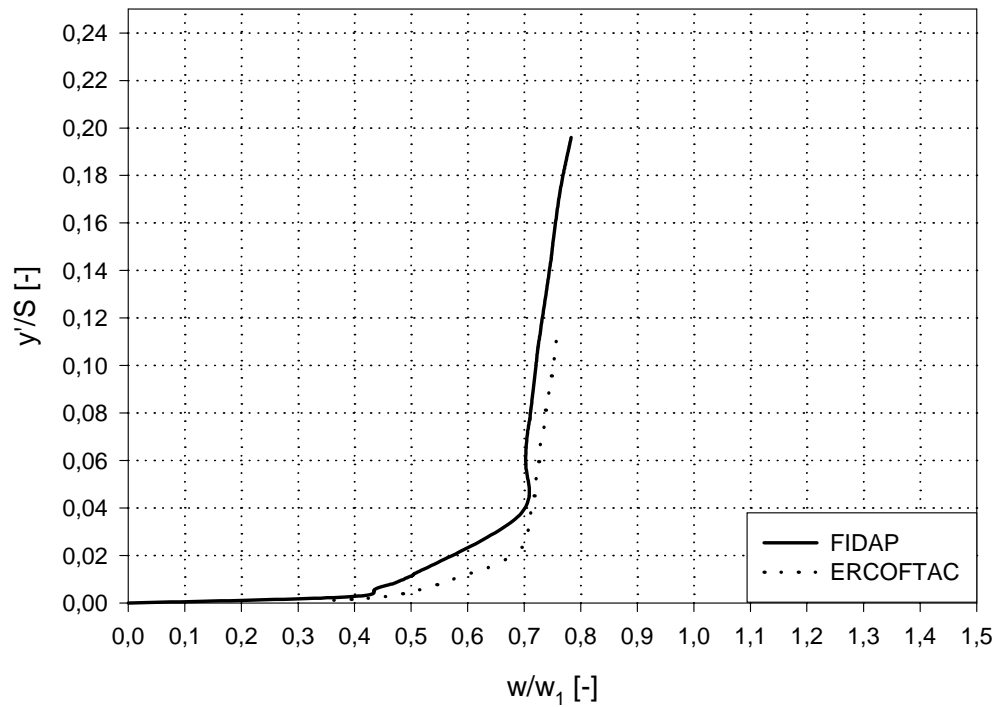
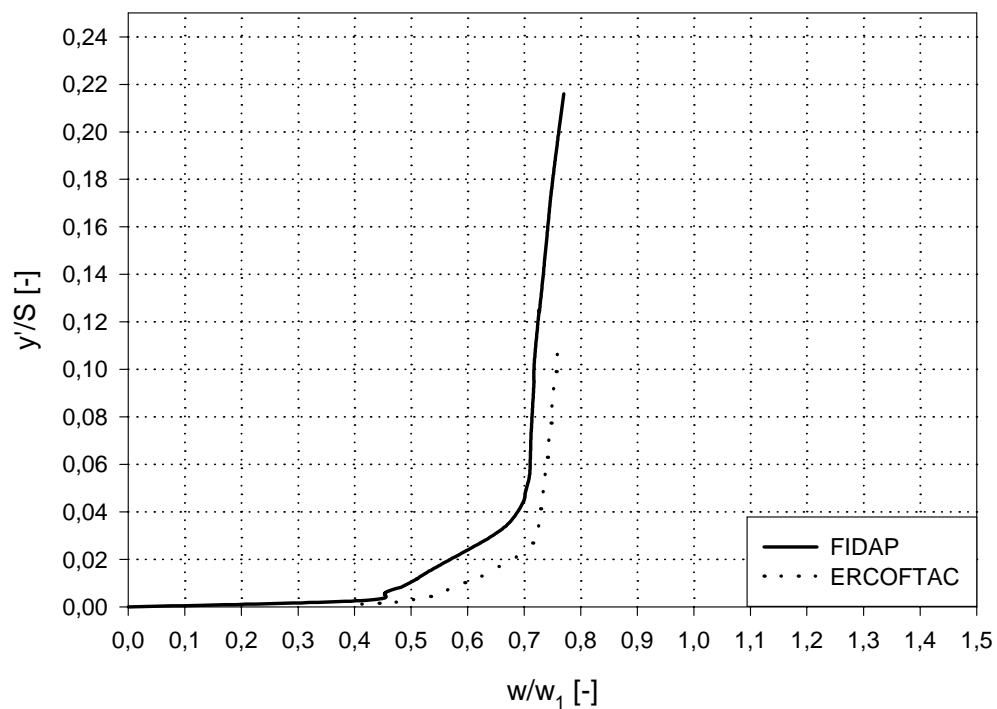


Abbildung 7.15: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D1

Abbildung 7.16: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D2Abbildung 7.17: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D3

Abbildung 7.18: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D4Abbildung 7.19: Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D5

7.3.4 Profildruckverteilung

Der Druckverlauf ist eine der wichtigsten Randbedingungen für die Entwicklung der Grenzschichtströmung. Ob eine Grenzschicht an Dicke abnimmt oder zunimmt, ob sie an der Wand haftet oder ablöst, ist im wesentlichen an den Druckverlauf geknüpft, den sie entlang ihres Weges erfährt. Die Druckverteilung ist durch die Geometrie des Gitters und die Anströmverhältnisse bedingt. In der dimensionslosen Darstellung wird der Druckbeiwert (Druckkoeffizient) über dem Profil angegeben:

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho w_1^2} \quad (7.1)$$

In der Zuströmung ist somit $C_p=0$. Für ein Profil ergeben sich für die Saug- und die Druckseite zwei Kurven, deren geschlossenes Integral dem Auftrieb entspricht.

In Abb.7.20 ist der statische Druckkoeffizient über der bezogenen Sehnenlänge für den Fall $i = -8.5^\circ$ dargestellt. In diesem Fall liegt der Staupunkt an der Saugseite. Die Profilverderrkante wird umströmt und es kommt zu einem starken Druckanstieg am Beginn der Druckseite. Die gemessene Druckverteilung zeigt bei etwa $x^*=0.05$ eine konstante Verteilung, was auf eine Ablöseblase schließen lässt. Diese Ablösung wird durch die Rechnung nicht wiedergegeben. Geht man davon aus, dass es durch die Ablösung zu einem Grenzschichtumschlag kommt so ist die druckseitige Grenzschicht ab etwa $x^*=0.1$ turbulent. Dieser Umstand wird durch die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung bestätigt. Stärkere Abweichungen zwischen gemessener und berechneter Druckverteilung treten auf der Saugseite auf. Durch die starke Beschleunigung am Beginn der Saugseite dürfte die Grenzschicht dort laminar sein, was durch die Rechnung nicht wiedergegeben werden kann. Stärkere Abweichungen treten auch auf dem Rest der Saugseite auf, wo es trotz eines starken Druckanstieges in diesem Fall zu keiner Ablösung kommt.

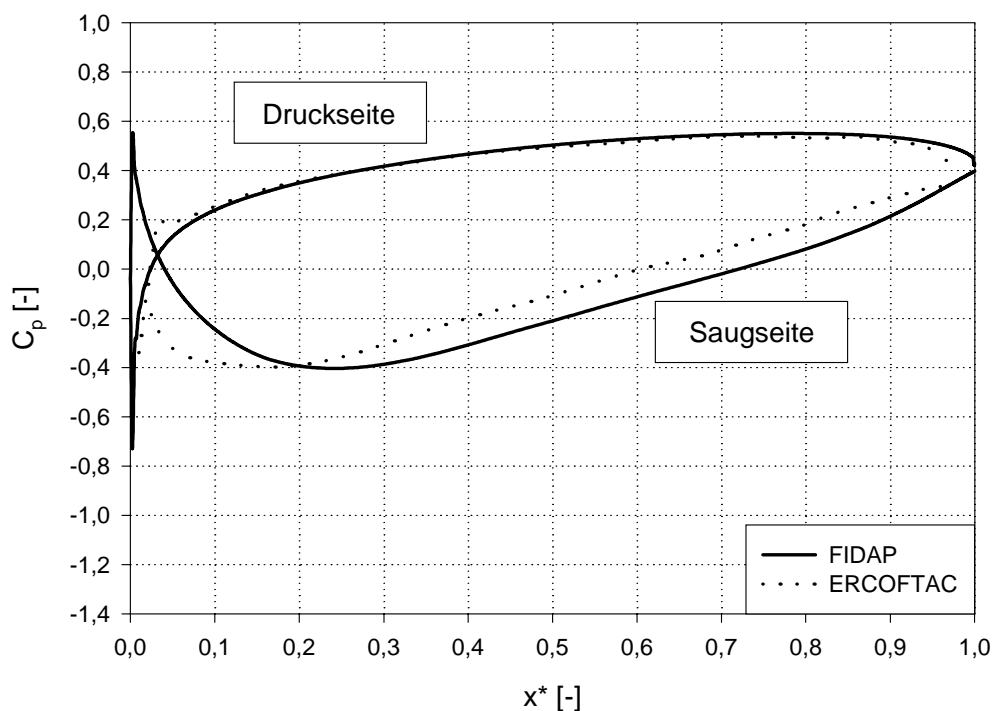


Abbildung 7.20: Profildruckverteilung bei $i = -8.5^\circ$

Abb.7.21 zeigt die Profilverteilung bei $i = -1.5^\circ$. Nun liegt der Staupunkt auf der Druckseite, gefolgt von einer kurzen Strecke mit stark beschleunigter Strömung. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist auf der Druckseite bis zu $x^*=0.5$ sehr gut. Nach der Umströmung der Vorderkante führt der starke Druckanstieg zu einer Ablösung, welche hier ebenfalls durch die Rechnung nicht wiedergegeben wird. Die anschließende Beschleunigung fällt in der Rechnung schwächer aus. Der anschließende Druckanstieg führt bei etwa $x^*=0.8$ zur saugseitigen Grenzschichtablösung, was durch das Druckplateau zum Ausdruck kommt. Diese Ablösung wird durch die Rechnung nicht wiedergegeben.

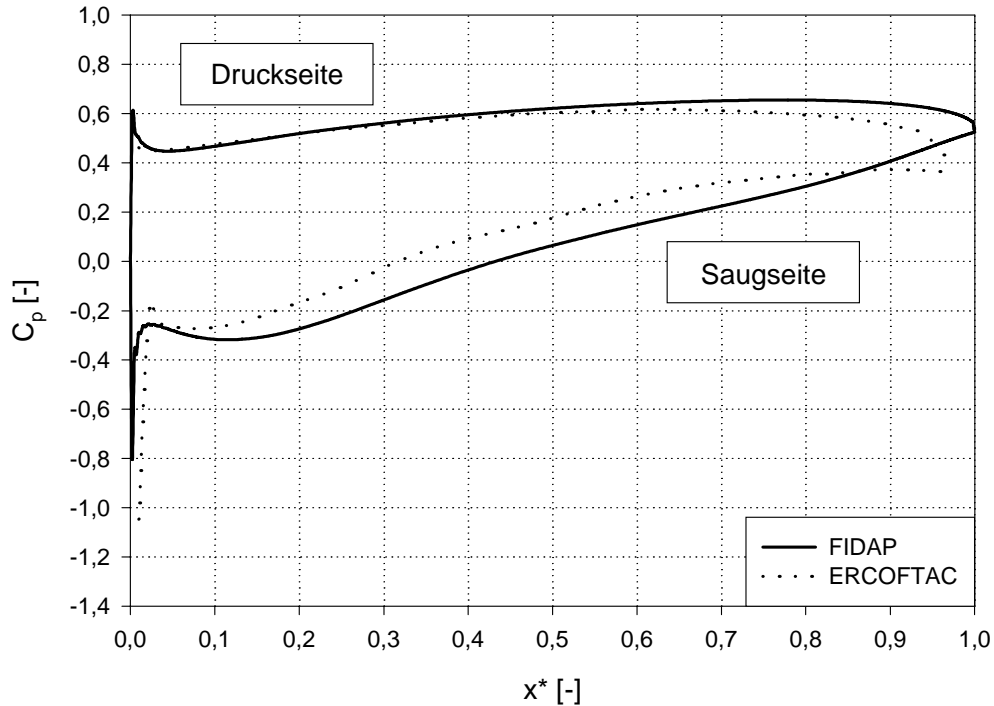


Abbildung 7.21: Profildruckverteilung bei $i = -1.5^\circ$

7.3.5 Statischer Druckkoeffizient

Die statischen Druckkoeffizienten nach Glg.(7.1) sind für $i = -8.5^\circ$ und $i = -1.5^\circ$ in den Abb.7.22 bzw. Abb.7.24 dargestellt. Die periodischen Randbedingungen werden durch den Verlauf der Isobaren an den periodischen Rändern verdeutlicht.

Zusätzlich sind in Abb.7.23 und Abb.7.25 die Isobaren im Bereich der Vorderkante vergrößert dargestellt. Theoretisch ist die Lage des Staupunktes durch $C_p=1.0$ gekennzeichnet. Obwohl der maximale statische Druckkoeffizient $C_p=1.0$ nicht erreicht wird, erkennt man die unterschiedliche Lage der Staupunkte bei $i = -8.5^\circ$ (Saugseite) und $i = -1.5^\circ$ (Druckseite).

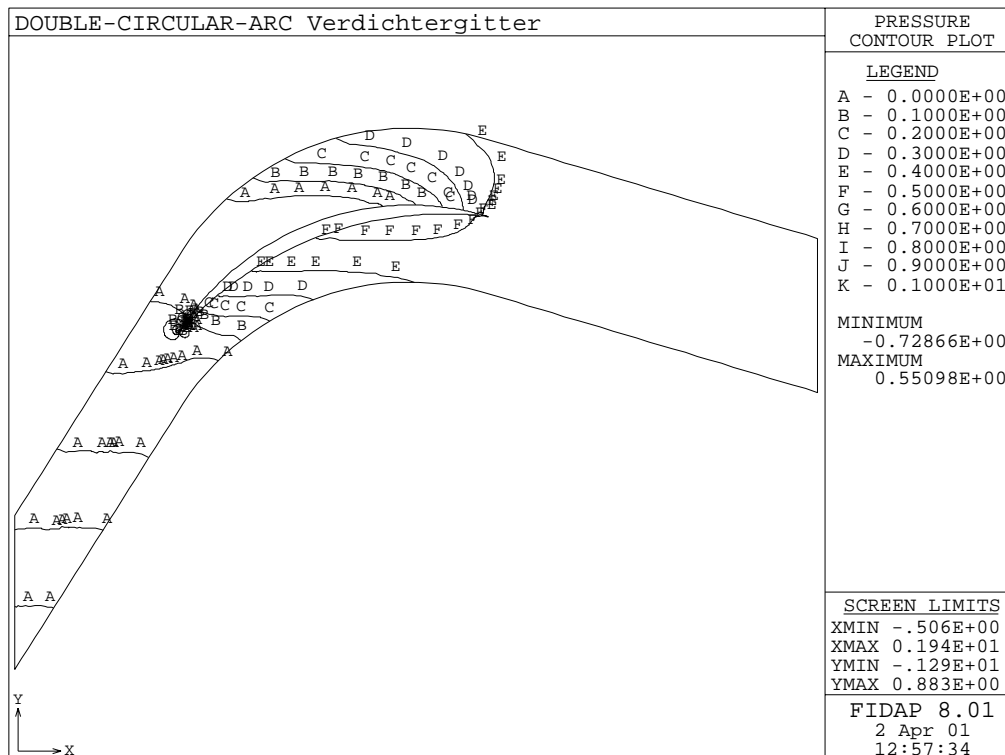


Abbildung 7.22: Statischer Druckkoeffizient bei $i = -8.5^\circ$

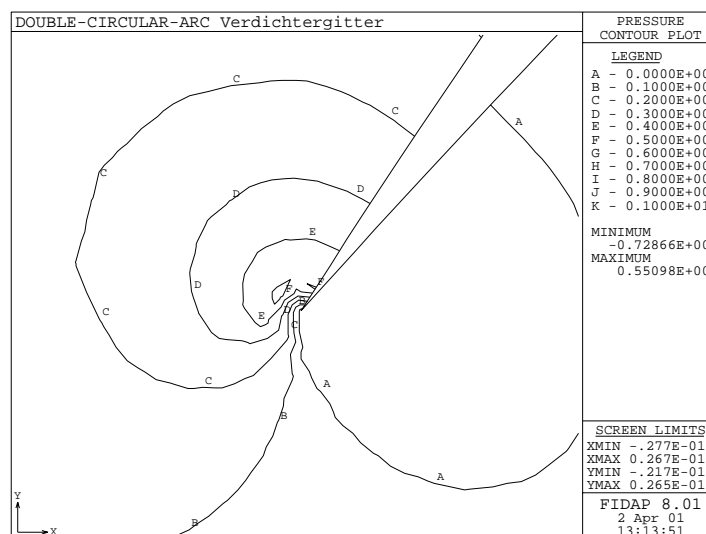


Abbildung 7.23: Statischer Druckkoeffizient im Vorderkantenbereich bei $i = -8.5^\circ$

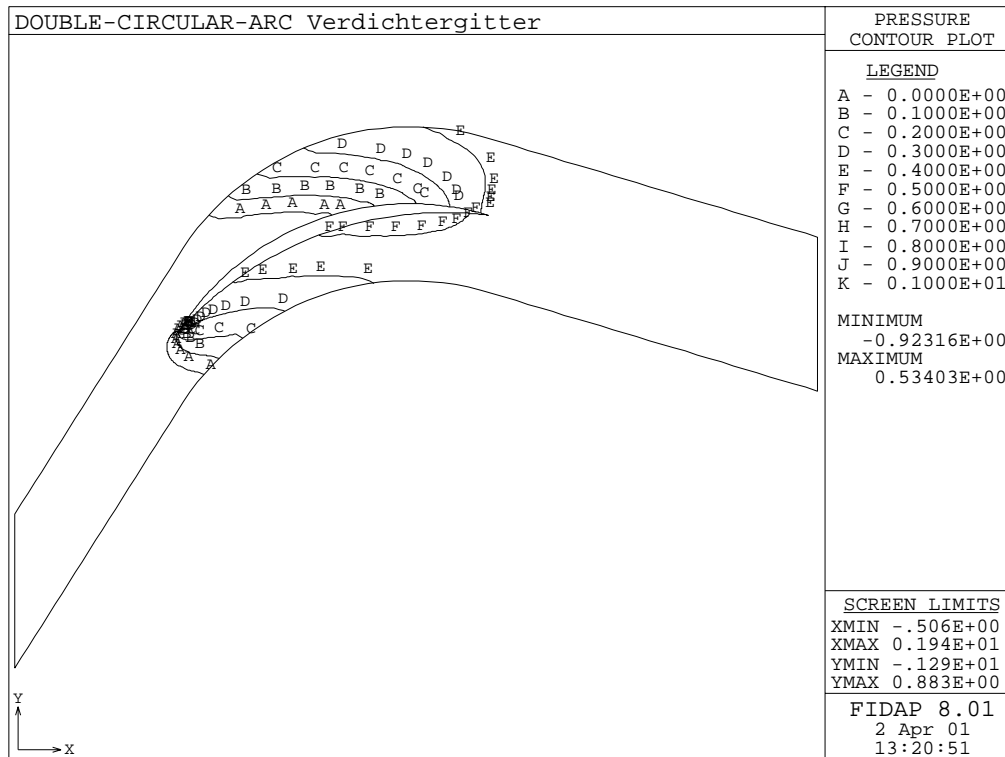


Abbildung 7.24: Statischer Druckkoeffizient bei $i = -1.5^\circ$

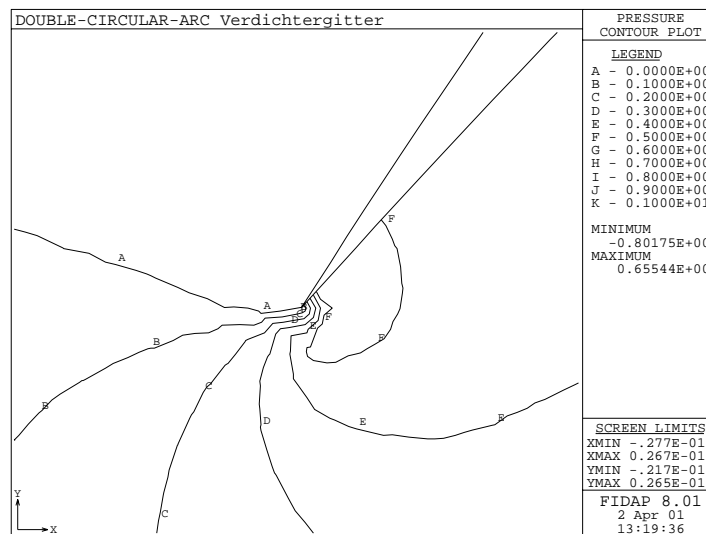


Abbildung 7.25: Statischer Druckkoeffizient im Vorderkantenbereich bei $i = -1.5^\circ$

7.3.6 Geschwindigkeitsverteilung in der Nachlaufströmung

Für die Ermittlung der Profilverluste ist die Geschwindigkeitsverteilung in den Ebenen parallel zum Gitteraustritt von Interesse. Dazu wurden von *Zierke* und *Deutsch* LDA-Messungen bei 106% und 109.7% der axialen Sehnenlänge im Gitternachlauf durchgeführt. Weiters Traversierungen mit einer pneumatischen Fünfflochsonde bei 131.9% der axialen Sehnenlänge. In Abb.7.26 und Tab.7.7 ist die Lage, der mit E1, E2 und E3 bezeichneten Nachlaufebenen dargestellt. Dabei steht die x' -Achse normal zur Gitterhinterfront, die y' -Achse verläuft in der Gitterhinterfront. Positive Werte von y' liegen hinter der Druckseite des Profils, wogegen negative y' -Werte hinter der Saugseite liegen.

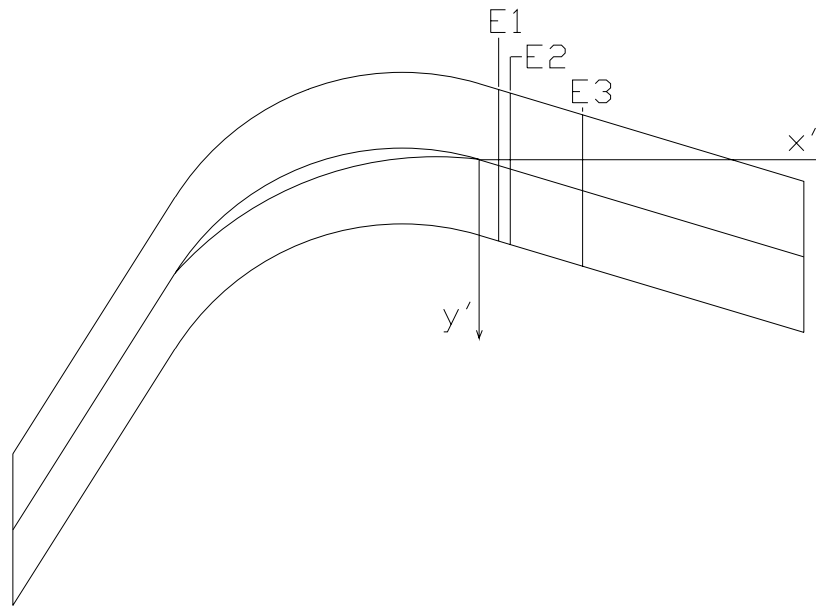
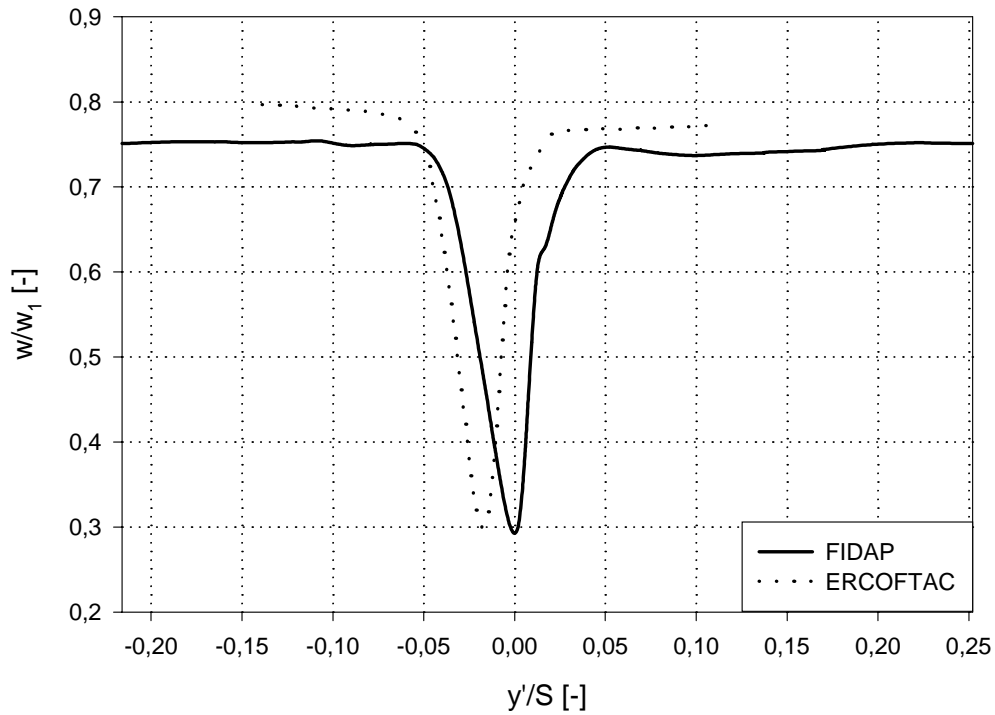
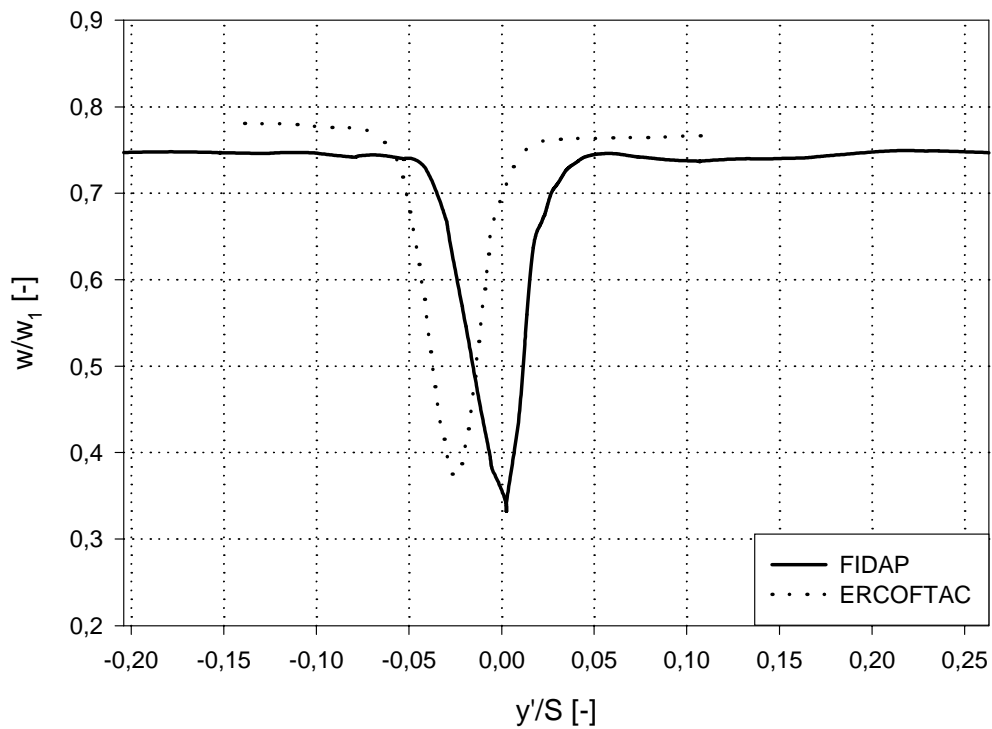


Abbildung 7.26: Lage der Auswertungsebenen im Nachlauf

Auswertungsebenen	E1	E2	E3
Abstand von der Profilvorderkante in % der axialen Sehnenlänge	106.0	109.7	131.9

Tabelle 7.7: Abstände der Auswertungsebenen von der Profilvorderkante im Nachlauf

Die Geschwindigkeitsverteilungen in den drei Nachlaufebenen sind für $i = -8.5^\circ$ in den Abb.7.27 bis 7.29 dargestellt. Dabei ist die lokale Koordinate y' auf die Sehnenlänge S bezogen. Die lokale Geschwindigkeit w ist mit der Zuströmgeschwindigkeit w_1 dimensionslos gemacht. Generell ist zu erkennen, dass die berechneten Profile gegenüber den gemessenen Profilen in Richtung y' verschoben sind. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die saugseitige Profilgrenzschicht nicht richtig berechnet wird, wodurch es rechnerisch zu einer stärkeren Strömungsumlenkung kommt. Sowohl die gemessenen als auch die berechneten Nachlaufdellen zeigen ein nahezu symmetrischen Verhalten. Das Geschwindigkeitsniveau der saugseitigen Strömung wird vor allem bei E1 und E2 zu tief berechnet. Ursache dafür dürfte die unterschiedliche Versperrungswirkung zwischen gemessener und berechneter Saugseitengrenzschicht sein.

Abbildung 7.27: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E1Abbildung 7.28: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E2

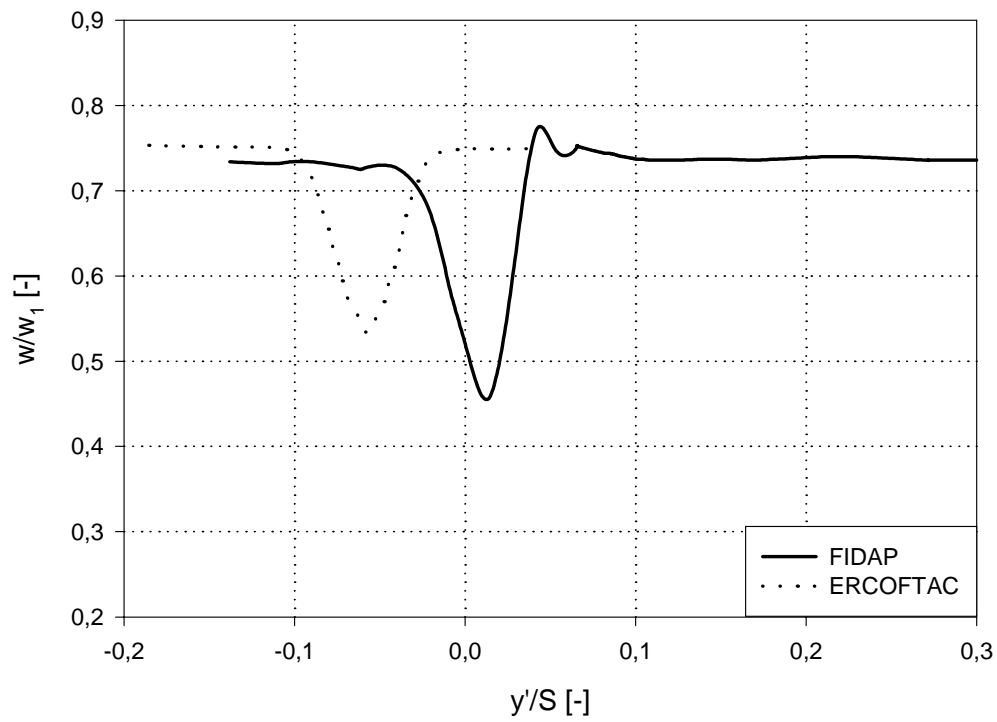


Abbildung 7.29: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E3

Während bei $i = -8.5^\circ$ die Form der Nachlaufdellen recht gut berechnet wurde, ist das bei $i = -1.5^\circ$ nicht der Fall. Die entsprechenden Geschwindigkeitsverteilungen sind in den Abb.7.30 bis Abb.7.32 dargestellt. Die gemessenen Nachlaufdellen sind gegenüber den berechneten wesentlich breiter und tiefer. Bei E1 und E2 treten in der Mitte der gemessenen Nachlaufdelle negative Geschwindigkeiten auf, was auf die saugseitige Strömungsablösung schließen läßt. Diese Ablösung konnte nicht berechnet werden. Die Unterschiede im Geschwindigkeitsniveau der ungestörten Strömung und die Verschiebung der berechneten Nachlaufdellen in Richtung y' ist noch deutlicher ausgeprägt, als bei $i = -8.5^\circ$. Weiters zeigen die berechneten Nachlaufdellen eine gewisse Unsymmetrie, wobei erwartungsgemäß die druckseitige Flanke steiler ausfällt.

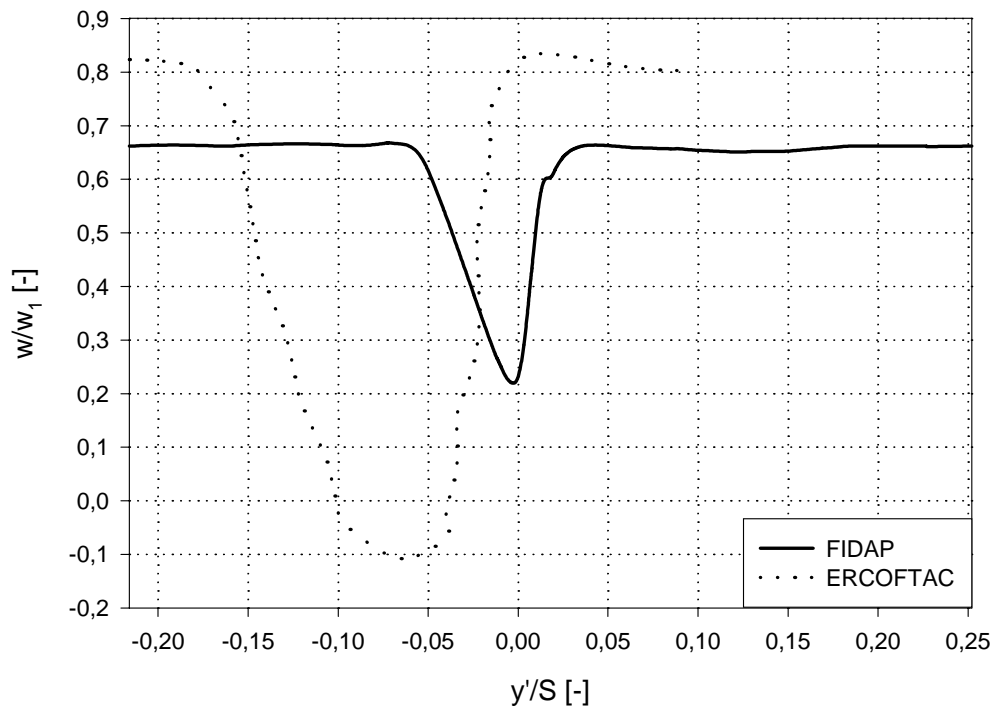
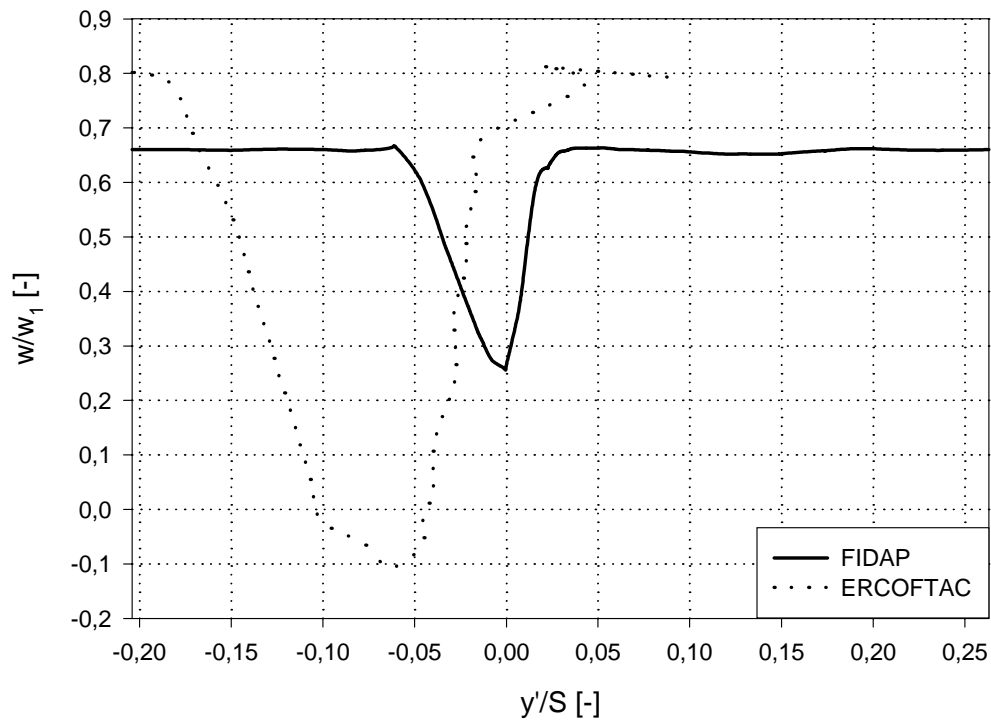
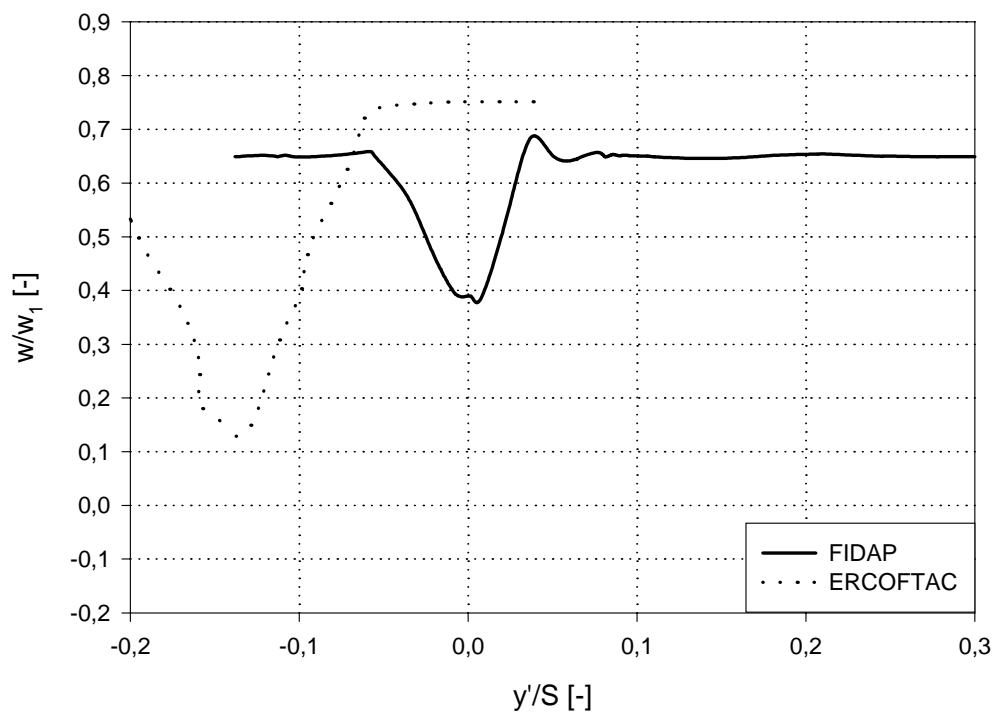


Abbildung 7.30: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E1

Abbildung 7.31: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E2Abbildung 7.32: Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E3

7.4 Grenzschichtgrößen

7.4.1 Dimensionsloser Wandabstand y^+

Der dimensionslose Wandabstand für die innerste Zellgrenze sind für das $k-\epsilon$ Turbulenzmodell zwischen 30 und 100 zu wählen. Die Randwerte sind davon jedoch ausgenommen. Er ist keine von vornherein bestimmbare Größe, da die Schubspannungsgeschwindigkeit mit eingeht. Aus diesem Grund kann man erst nach einer durchgeführten Berechnung bewerten, ob der Wandabstand Δ klein genug gewählt war oder ein verfeinertes Berechnungsnetz generiert werden muss.

Die Verteilungen des dimensionslosen Wandabstandes y^+ ist für die beiden Inzidenzwinkel $i = -8.5^\circ$ und $i = -1.5^\circ$ in Abb.7.33 und 7.34 dargestellt.

Der dimensionslose Wandabstand berechnet sich aus

$$y^+ = \frac{u_\tau \Delta}{\nu} \quad (7.2)$$

mit der Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (7.3)$$

Die Dicke Δ der wandnächsten Elementschicht wird durch die Wandelemente eingestellt und ist konstant für Druck- und Saugseite. Wie aus den beiden Abbildungen ersichtlich ist, kann die Bedingung

$$30 < y^+ < 100 \quad (7.4)$$

weitgehend eingehalten werden.

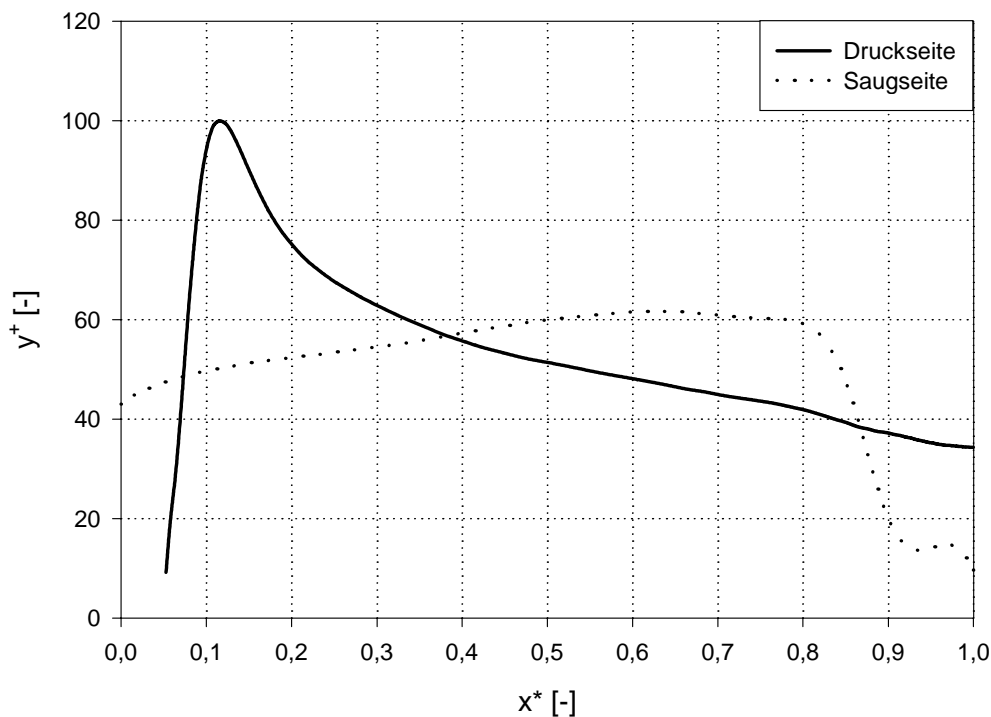
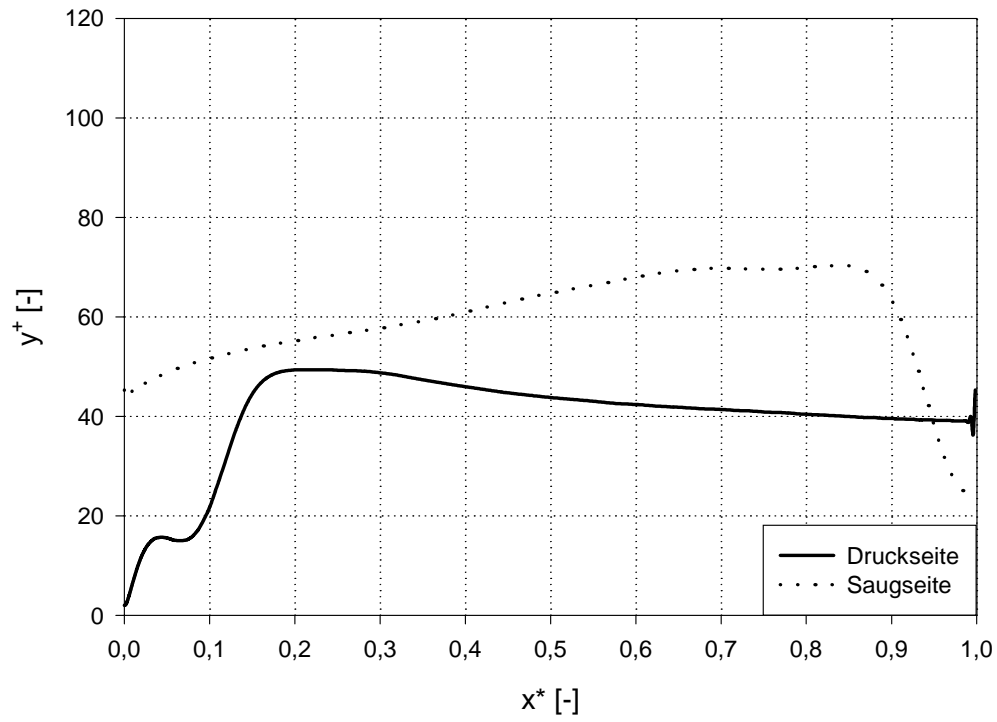


Abbildung 7.33: Der y^+ -Verlauf bei $i = -8.5^\circ$

Abbildung 7.34: Der y^+ -Verlauf bei $i = -1.5^\circ$

7.4.2 Formparameter

Die Formparameter und deren verknüpfte Größen wurden schon in Abschnitt 6.1 präsentiert. Hier werden die von *Zierke* und *Deutsch* ausgewerteten Daten, und zwar Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke und Formparameter, dargestellt und diskutiert. Diese Größen sind einzeln in den Abb.7.35 bis 7.46 dargestellt. Die Grenzschichtparameter wurden von den Autoren aus den Meßdaten mittels Splines oder Wandfunktionen berechnet. Sie sollen hier dargestellt werden, um das tatsächliche Verhalten der Grenzschichten an Druck- und Saugseite bei den beiden Inzidenzwinkeln zu dokumentieren. Auf die entsprechende Darstellung der mit FIDAP berechneten Grenzschichtgrößen wurde verzichtet, da diese nicht direkt vorliegen.

In den Abb.7.35 und 7.36 sind Verdrängungs- und Impulsverlustdicke auf der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$ dargestellt. Die Verdrängungsdicke steigt ab $x^*=0.3$ deutlich an, was auf eine Ablösung schließen läßt. Das läßt sich auch aus dem Verlauf des Formparameters H_{12} in Abb.7.37 erkennen. Die Grenzschicht ist zuerst laminar und löst auf Grund des Druckanstieges bei $x^*=0.5$ ab. Durch die Ablösung kommt es zu einem laminar/turbulent Umschlag. Die Grenzschicht legt sich bei $x^*=0.6$ wieder an und ist nun voll turbulent.

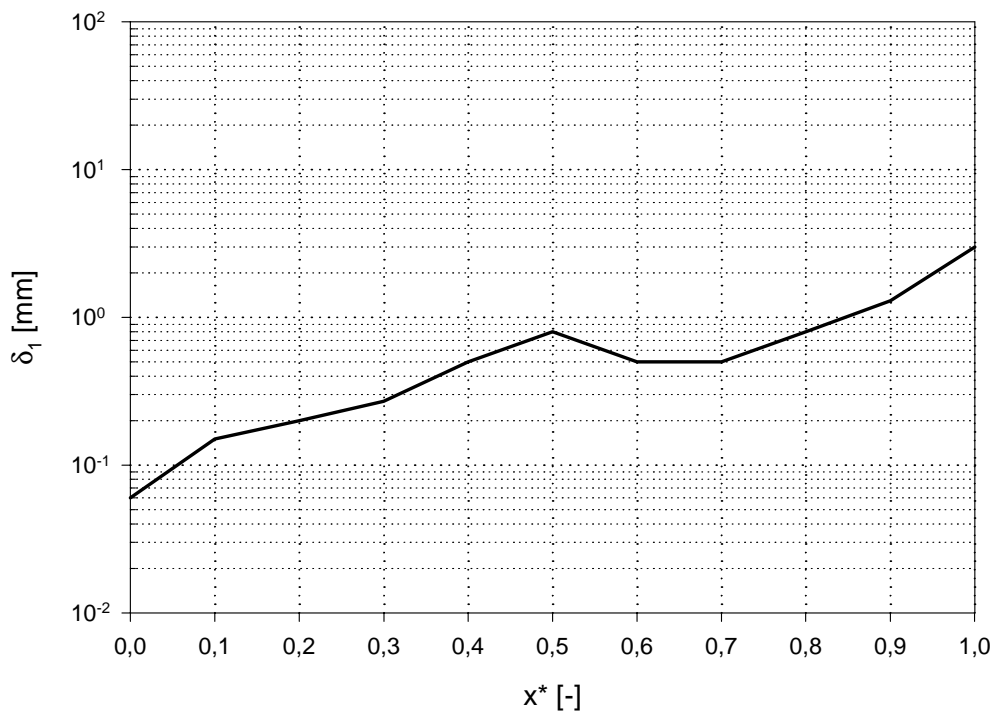
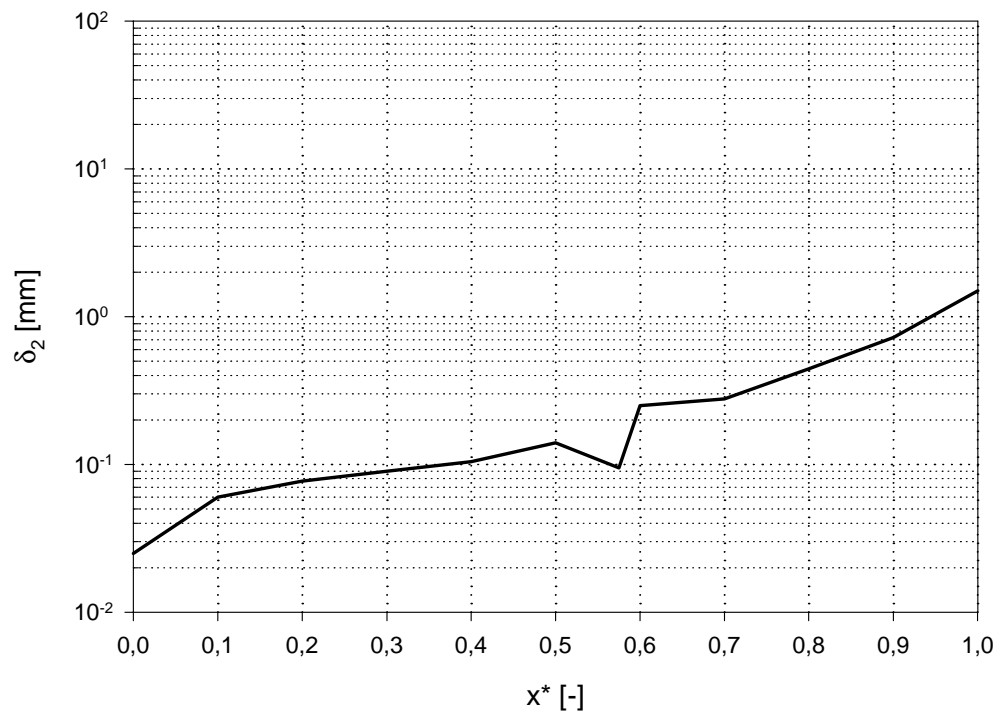
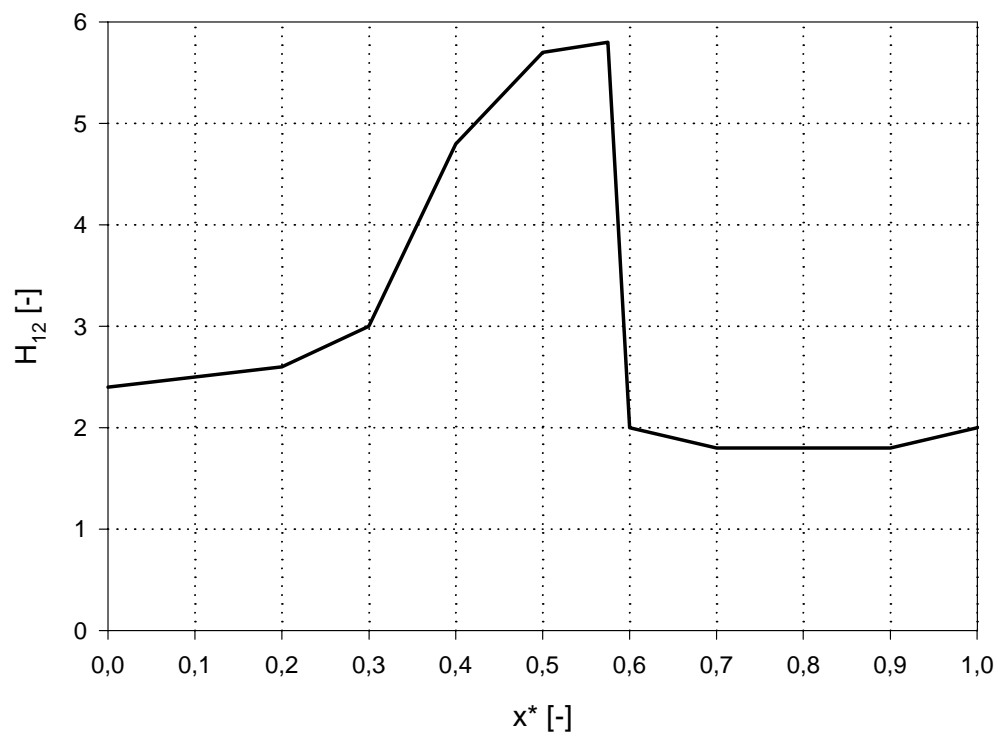


Abbildung 7.35: Verdrängungsdicke an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$

Abbildung 7.36: Impulsverlustdichte an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$ Abbildung 7.37: Verlauf des Formparameters H_{12} an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$

In den Abb.7.38 und 7.39 sind Verdrängungs- und Impulsverlustdicke auf der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$ dargestellt. Man erkennt ein Anwachsen der Grenzschicht entsprechend der verzögerten Strömung. Ab etwa $x^*=0.8$ wird die Strömung wieder beschleunigt, die Grenzschichtdicke nimmt entsprechend ab. Der Formparameter H_{12} in Abb.7.40 weist auf eine durchwegs turbulente Grenzschicht hin.

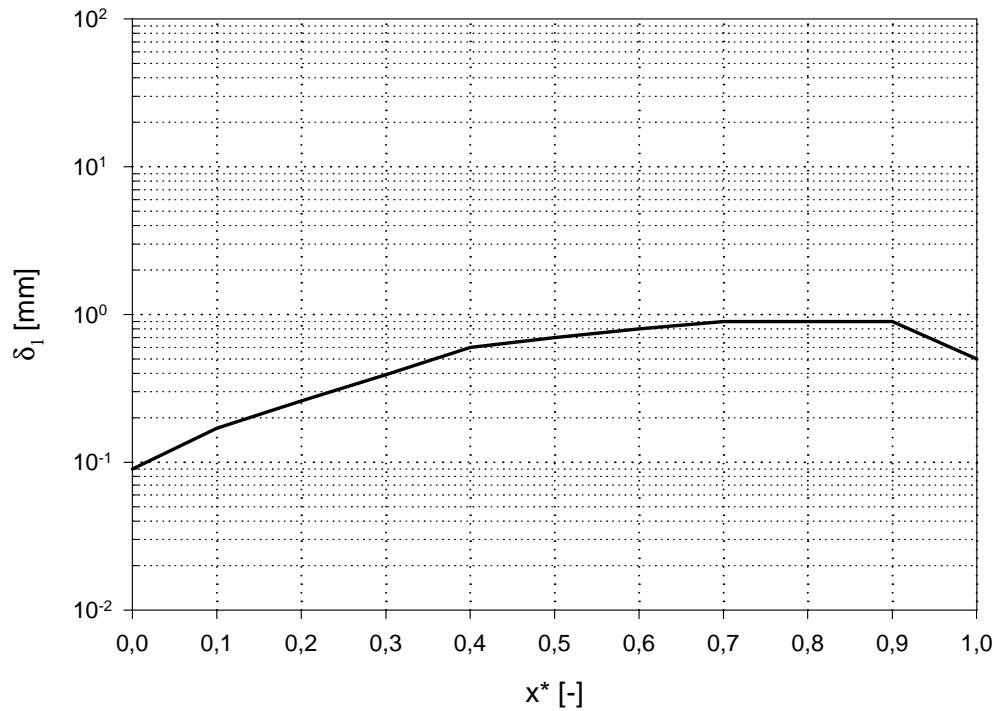
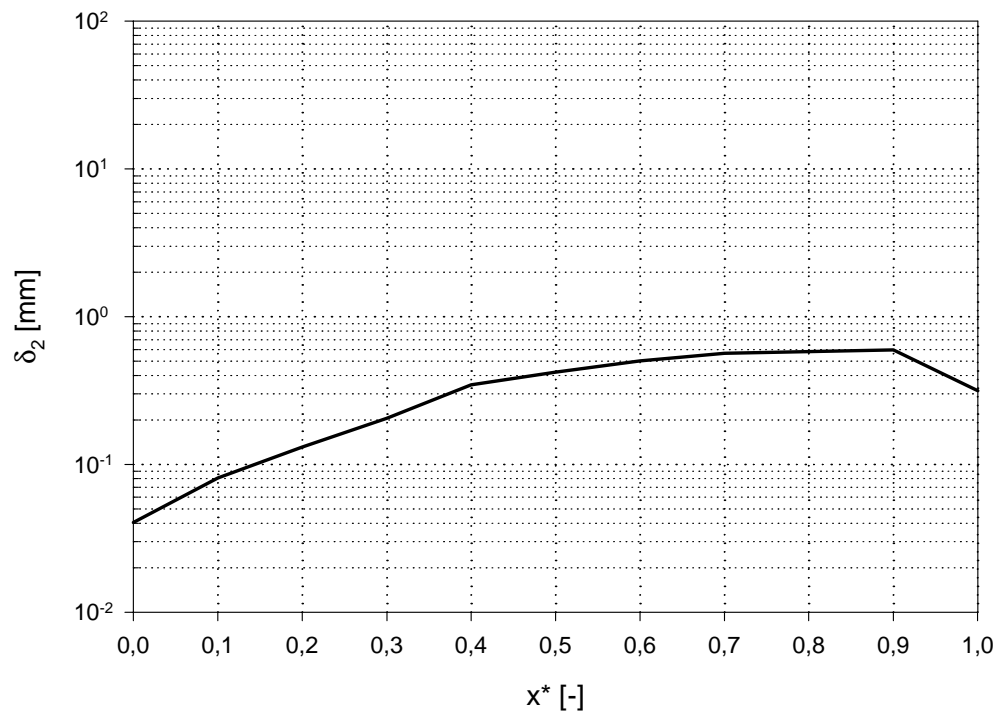
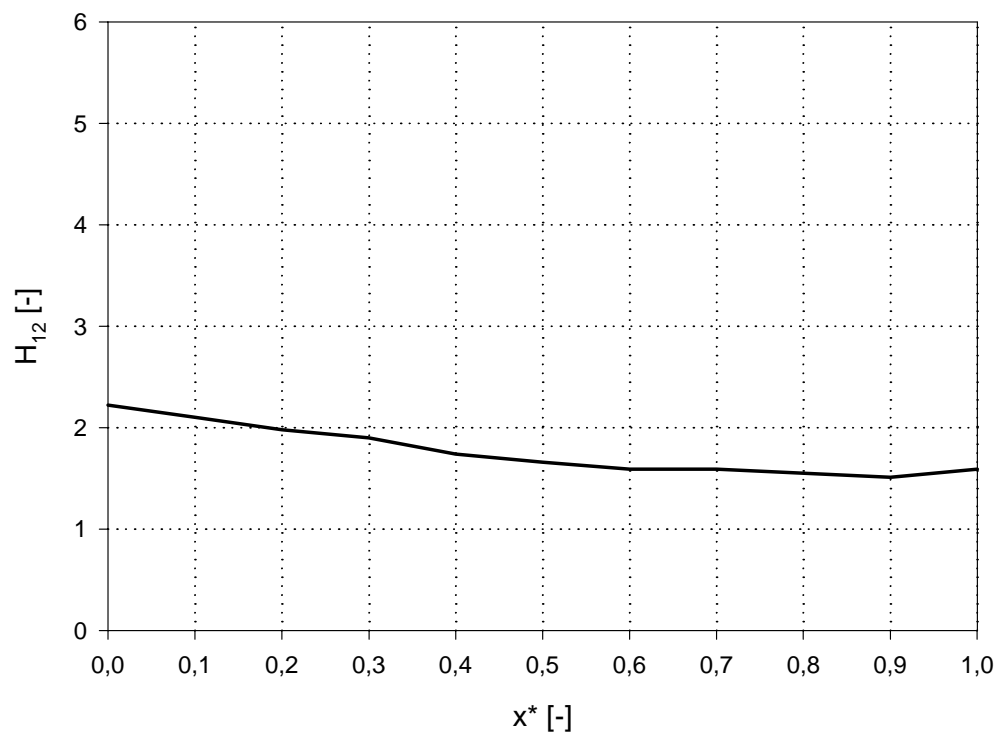


Abbildung 7.38: Verdrängungsdicke an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$

Abbildung 7.39: Impulsverlustdichte an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$ Abbildung 7.40: Verlauf des Formparameters H_{12} an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$

Wie bereits ausgeführt, kommt es bei $i = -1.5^\circ$ zu einer massiven saugseitigen Ablösung. Die entsprechenden Verläufe von Verdrängungs- und Impulsverlustdicke in Abb.7.41 und 7.42 zeigen einen entsprechend starken Anstieg. Der Verlauf des Formparameters H_{12} in Abb.7.43 zeigt an, dass die Grenzschicht von Beginn an turbulent ist und bei etwa $x^*=0.8$ ablöst. Ein Anlegen findet stromabwärts nicht mehr statt.

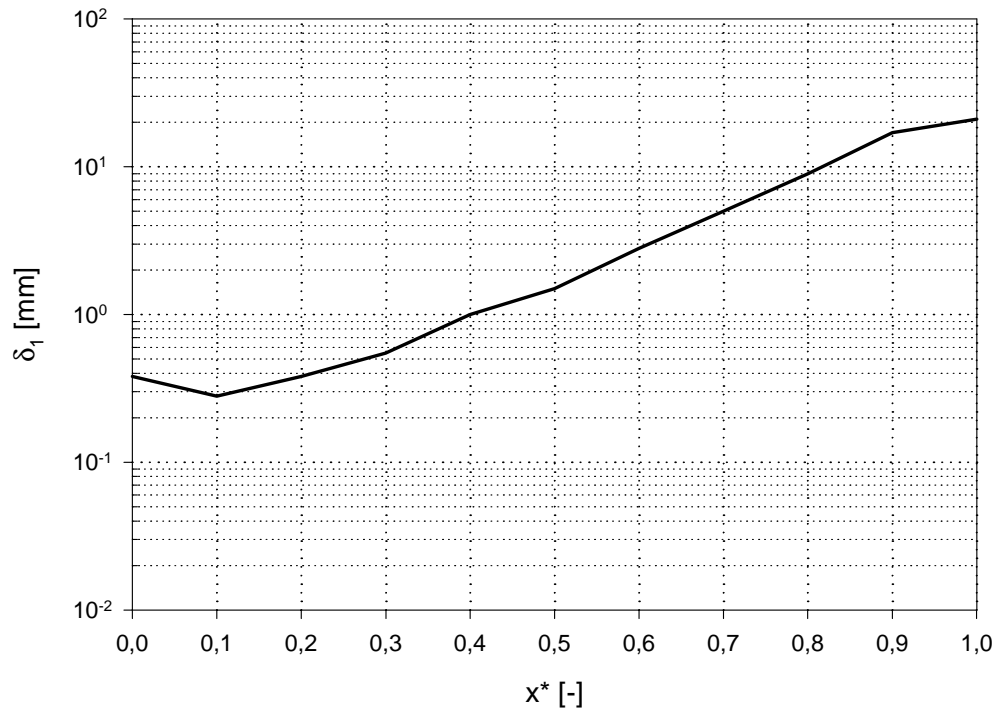
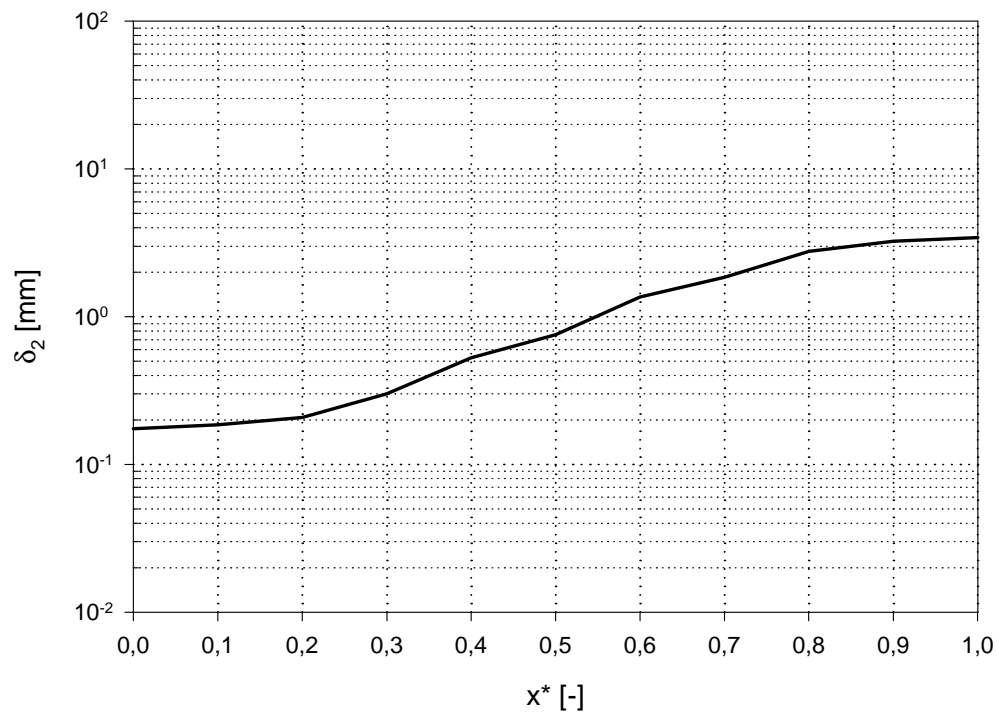
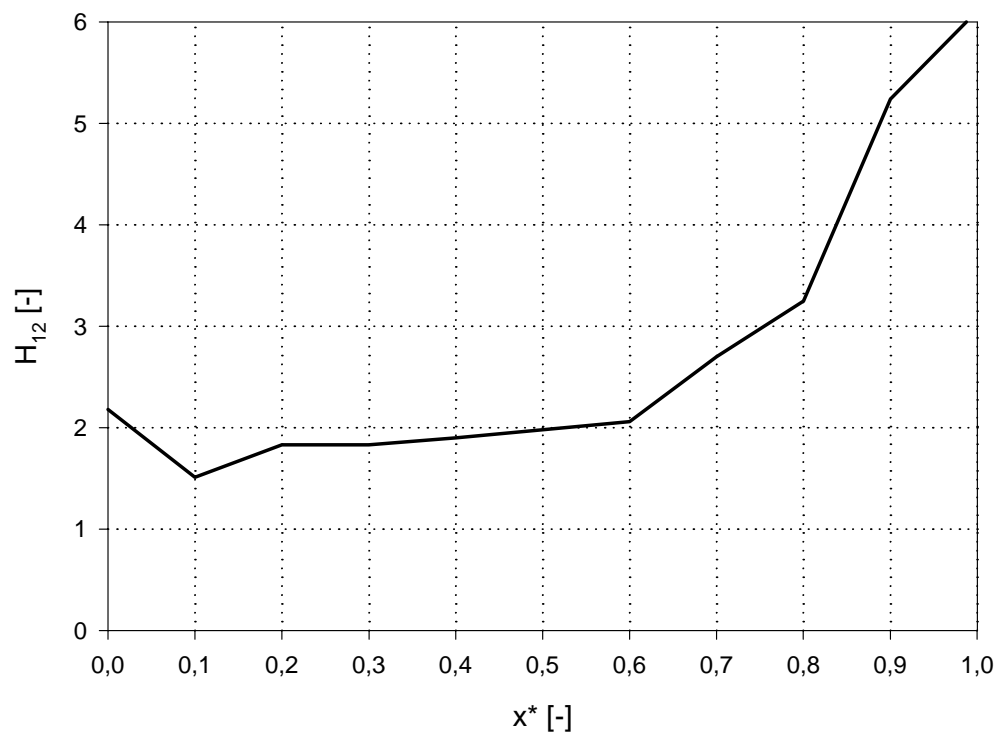


Abbildung 7.41: Verdrängungsdicke an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$

Abbildung 7.42: Impulsverlustdichte an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$ Abbildung 7.43: Verlauf des Formparameters H_{12} an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$

In den Abb.7.44 und 7.45 sind Verdrängungs- und Impulsverlustdicke auf der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$ dargestellt. Aus dem Verlauf der Verdrängungsdicke ist keine Ablösung erkennbar. Entsprechend der verzögerten Strömung steigt die Verdrängungsdicke zuerst an, um ab $x^* \approx 0.5$ wieder abzunehmen. Ursache dafür ist die Beschleunigung ab etwa $x^* = 0.5$. Aus dem Verlauf des Formparameters H_{12} in Abb.7.46 ist zu erkennen, dass die Grenzschicht anfänglich laminar ist und es bei etwa $x^* = 0.3$ zu einer Ablösung kommt. Anschließend legt sich die Grenzschicht wieder an und geht allmählich von laminar in turbulent über.

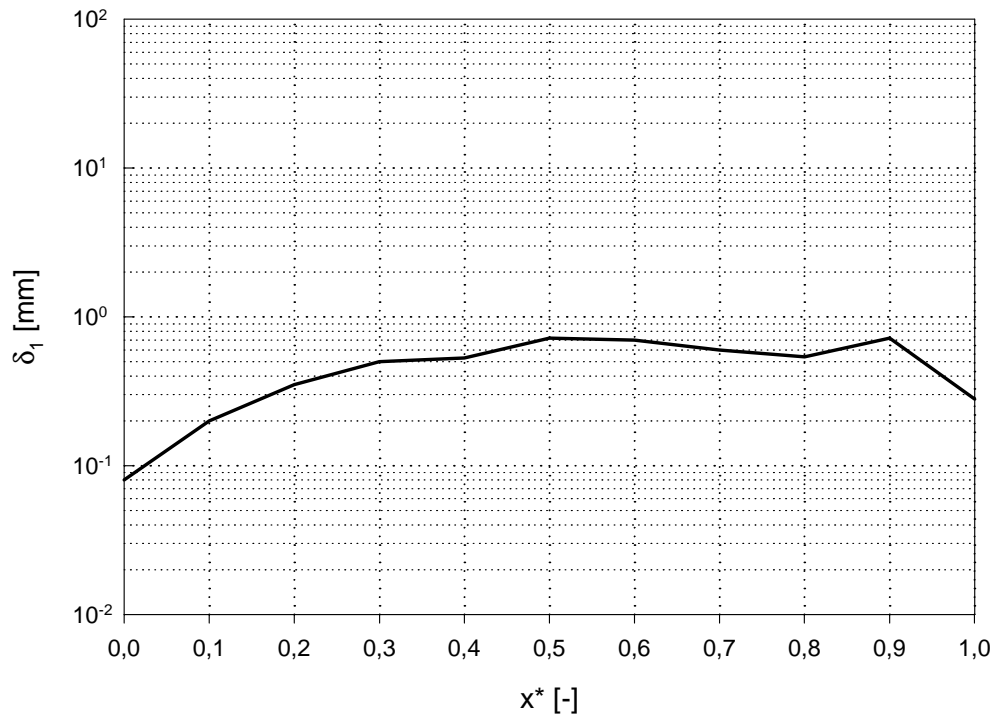
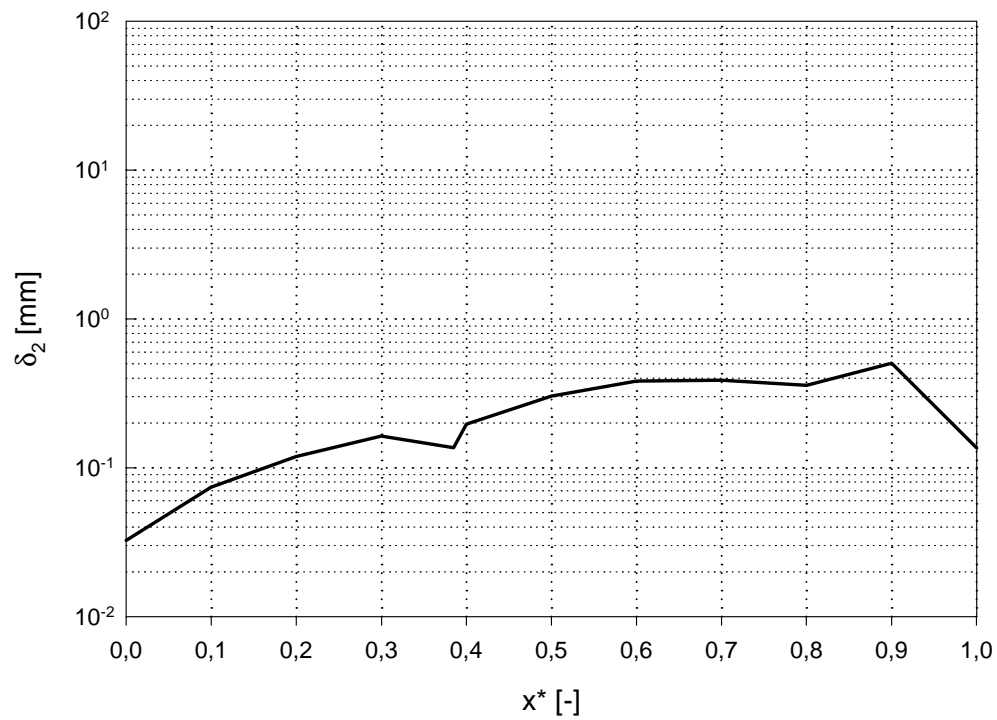
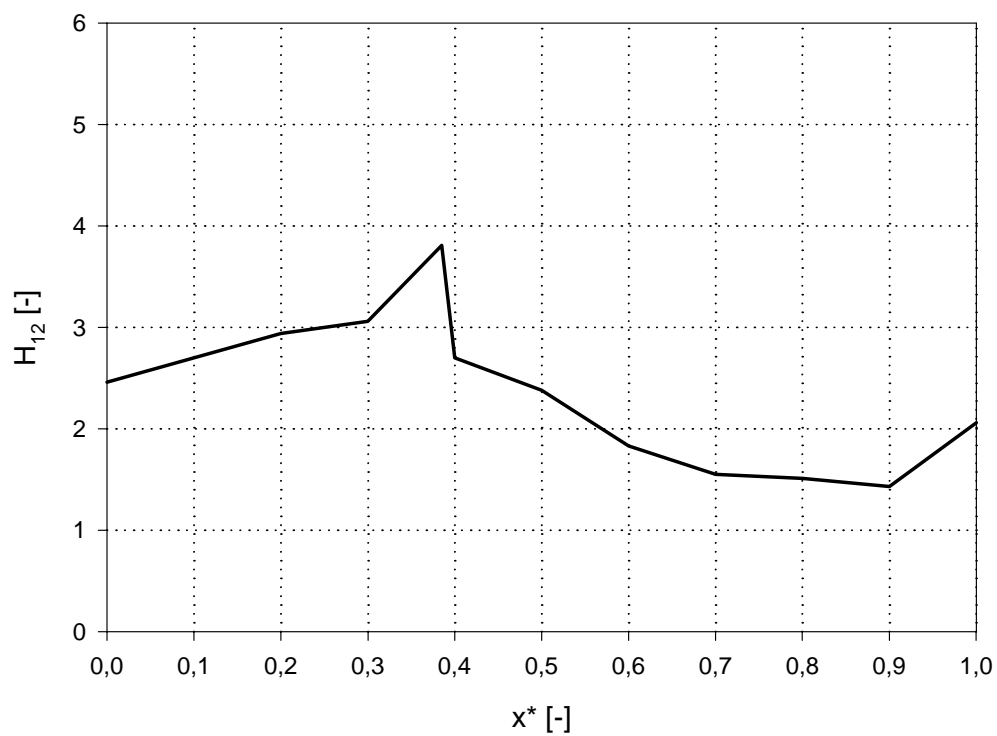


Abbildung 7.44: Verdrängungsdicke an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$

Abbildung 7.45: Impulsverlustdicke an der Druckseite bei $i = -1,5^\circ$ Abbildung 7.46: Verlauf des Formparameters H_{12} an der Druckseite bei $i = -1,5^\circ$

7.4.3 Schubspannungsbeiwert

Ein weiterer, lokaler Parameter, der zur Transitionserkennung in Messung und Rechnung herangezogen wird, ist der ebenfalls dimensionslose Schubspannungsbeiwert C_f , der aus der Wandschubspannung τ_w , der Dichte ρ sowie einer Referenzgeschwindigkeit u_{ref} über

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_{ref}^2} \quad (7.5)$$

gebildet wird. Als Referenzgeschwindigkeit wird üblicherweise die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand u_δ verwendet. Da die Grenzschichtdicke δ aber eine geometrisch unbestimmte Größe ist, ist die Bestimmung dieser quadratisch in Glg.(7.5) eingehenden Größe mit Schwierigkeiten verbunden. Daher wird oft auch von einem Schubspannungsparameter C_{f0} Gebrauch gemacht, der mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit am Eintritt in das Rechengebiet gebildet wird.

Dargestellt ist in den Diagrammen 7.47 bis Abb.7.50 die dimensionslose Wandschubspannung

$$\tau_w^* = \frac{\tau_w}{\rho w_1^2}. \quad (7.6)$$

Aus den Verläufen ist ersichtlich, dass die Wandschubspannungen in keinem Falle null wird, d.h., dass keine Ablösung berechnet wurde.

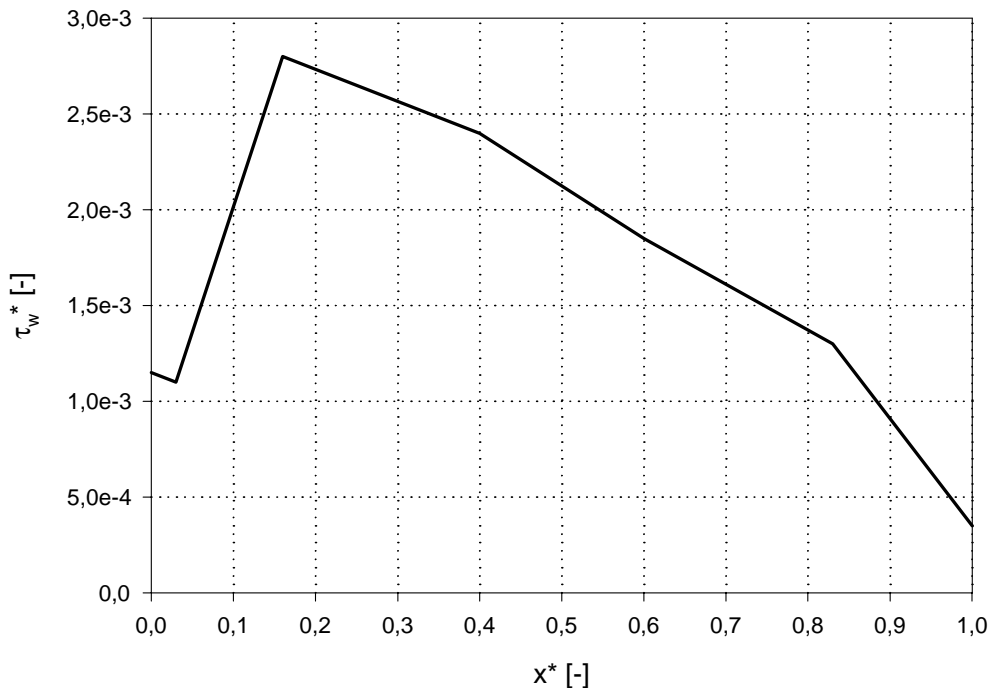
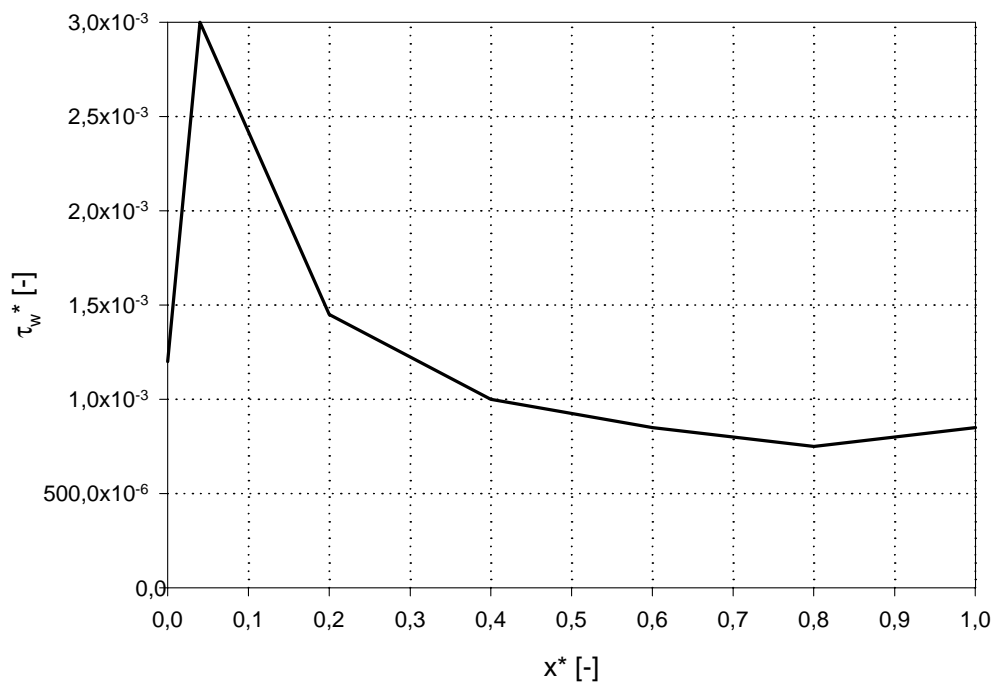
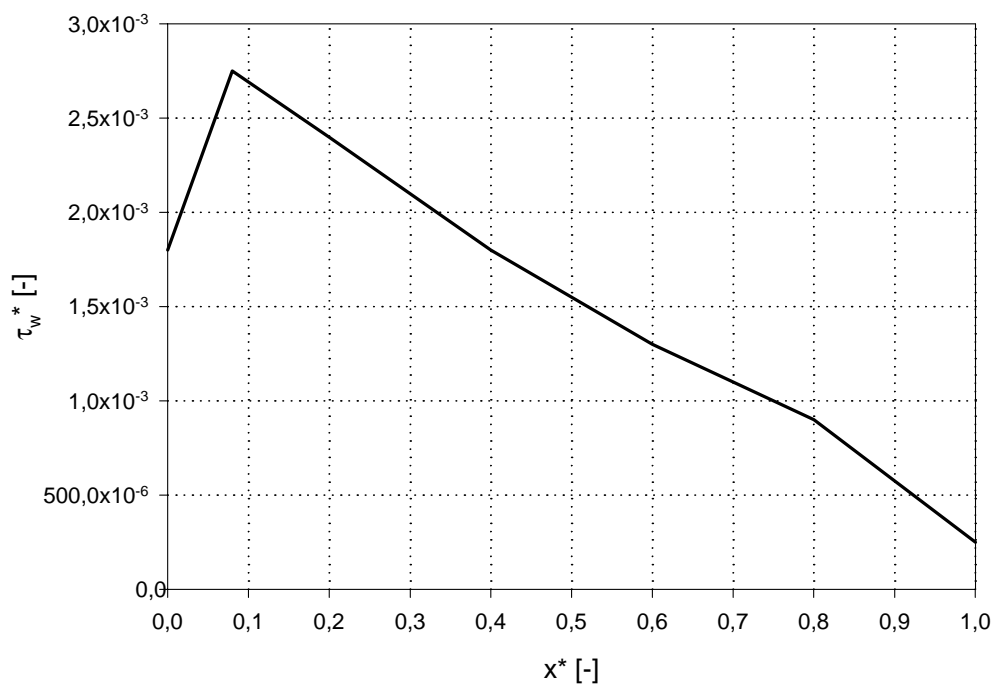


Abbildung 7.47: Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$

Abbildung 7.48: Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$ Abbildung 7.49: Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$

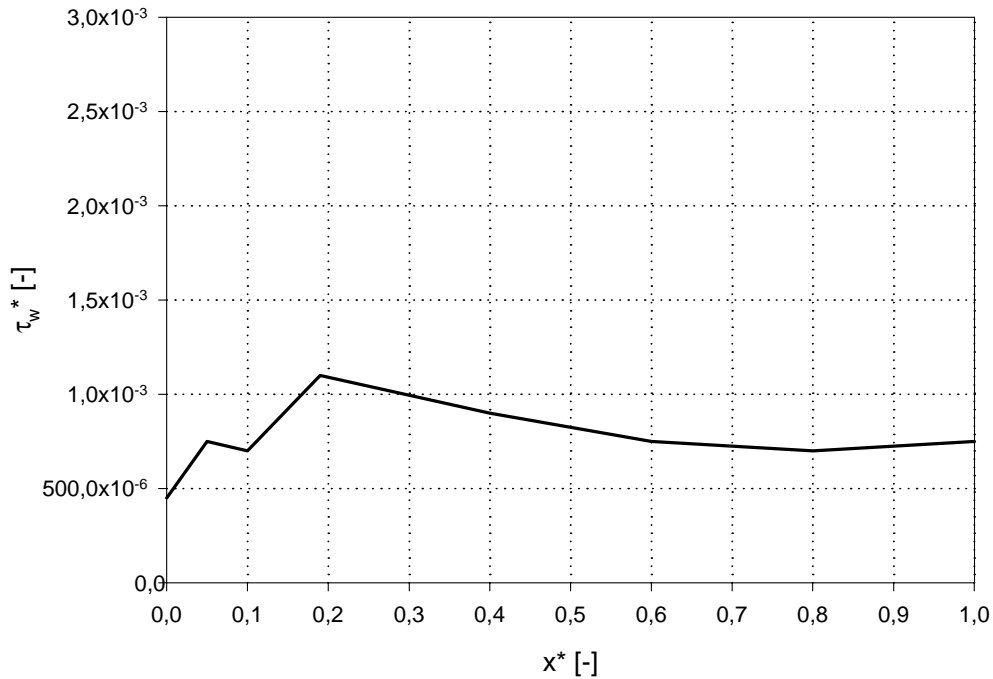


Abbildung 7.50: Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$

Die Geschwindigkeit am Grenzschichtrand ist notwendig, um den Schubspannungsbeiwert zu berechnen. Da der Totaldruck konstant angenommen wird, hat man die Möglichkeit, die gesuchte Größe u_δ durch den statischen Druckkoeffizienten über der bezogenen Sehnenlänge zu ermitteln. Der Totaldruck ist konstant und lautet für den Grenzschichtrand bzw. für die Zuströmung

$$p_t = p + \rho \frac{u_\delta^2}{2} = p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2}. \quad (7.7)$$

Mit der Definition des statischen Druckkoeffizient (Glg.(7.1)) folgt daraus

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2} = 1 - \left(\frac{u_\delta}{w_1}\right)^2 = 1 - u_\delta^{*2}. \quad (7.8)$$

D.h., die dimensionslose Geschwindigkeit am Grenzschichtrand kann aus dem statischen Druckkoeffizient mittels

$$u_\delta = \sqrt{1 - C_p^{*2}} \quad (7.9)$$

berechnet werden. Die entsprechenden Darstellungen für Saug- und Druckseite bei $i = -8.5^\circ$ finden sich in den Abb.7.51 bis 7.54. Die Übereinstimmung mit den aus den Messungen gewonnenen dimensionslosen Geschwindigkeiten am Grenzschichtrand ist relativ gut, besonders an der Druckseite.

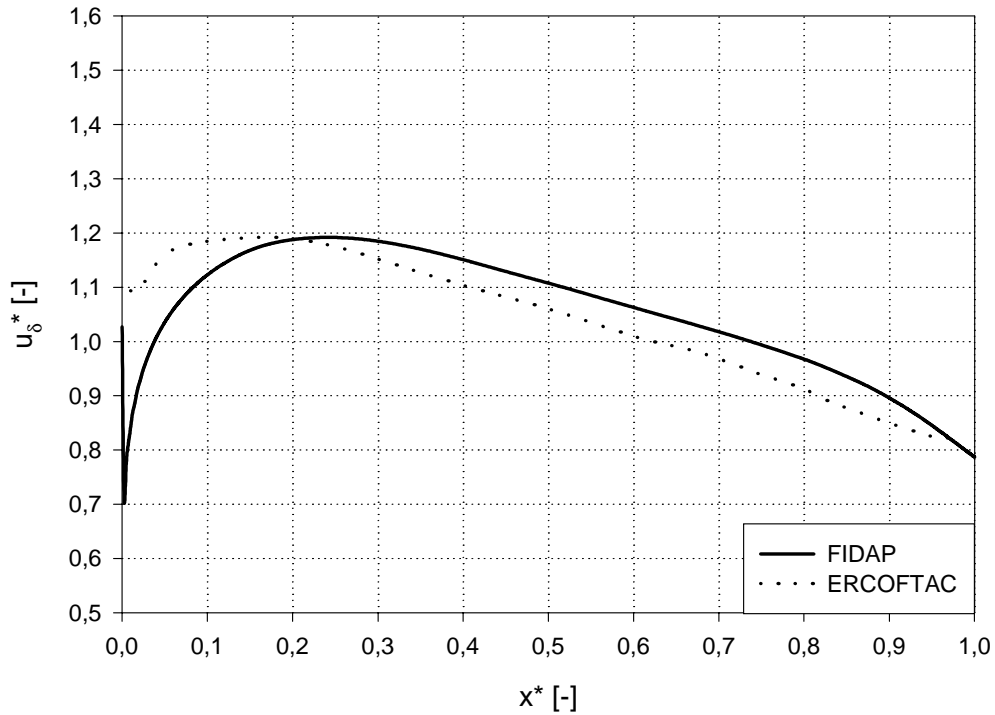


Abbildung 7.51: Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichttrand an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$

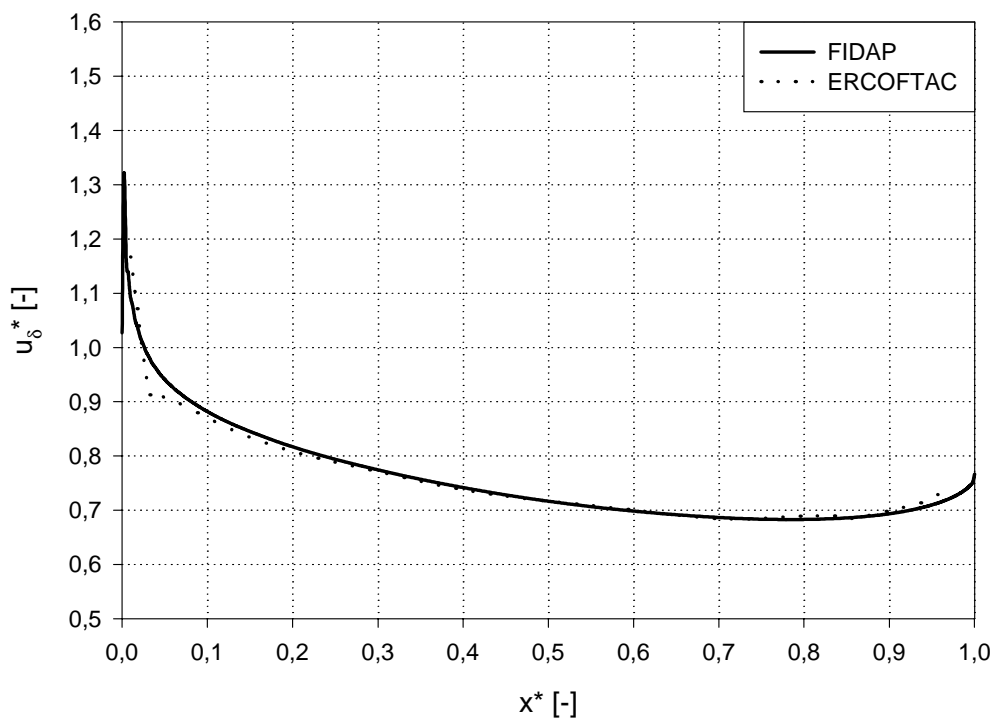


Abbildung 7.52: Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichttrand an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$

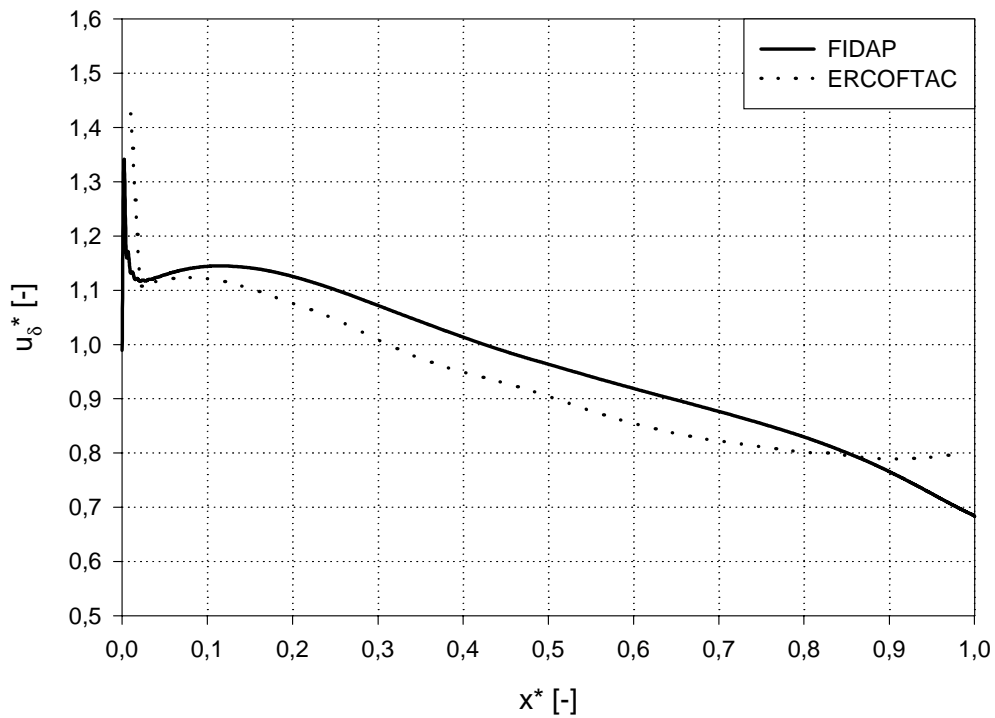


Abbildung 7.53: Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichttrand an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$

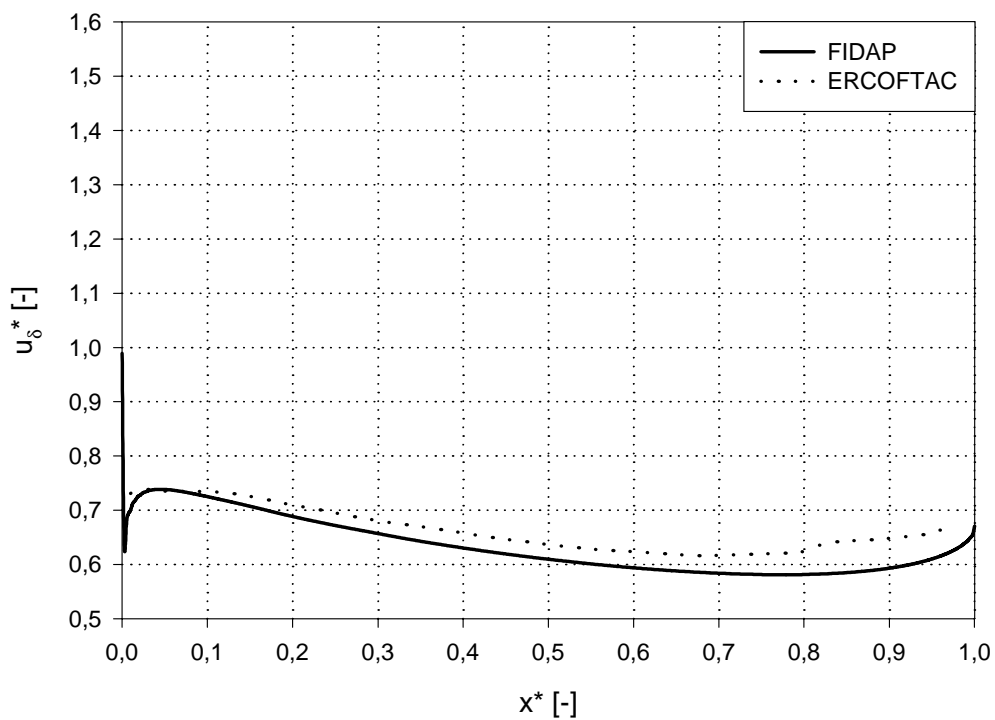


Abbildung 7.54: Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichttrand an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$

Die Abb.7.55 bis 7.58 zeigen den Verlauf des Schubspannungsbeiwertes C_f als Funktion der bezogenen Sehnenlänge. Durch die gemessenen bzw. berechneten Schubspannungsbeiwerte werden die bereits weiter gemachten Aussagen hinsichtlich laminar-turbulent Übergang und Ablösung untermauert.

Abbildung 7.55 zeigt die Schubspannungsbeiwerte der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$. Der Verlauf der Messwerte zeigt die anfänglich laminare Grenzschicht, die Ablösung bei $x^* \approx 0.45$ und den nachfolgenden laminar-turbulent Übergang. Auf Grund der Wandfunktionen des Standard $k-\epsilon$ Modells zeigen die berechneten Schubspannungsbeiwerte durchwegs einen turbulenten Verlauf.

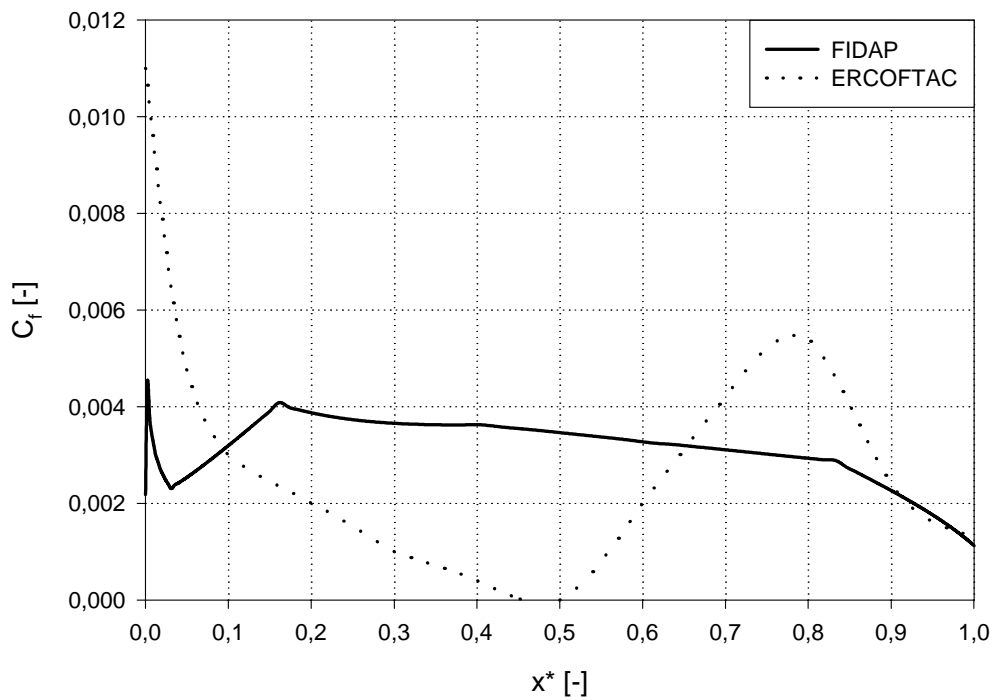


Abbildung 7.55: Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$

Deutlich besser fällt die Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Schubspannungsbeiwerten für $i = -8.5^\circ$ auf der Druckseite aus (Abb.7.56). Hier ist die Grenzschicht auch in der Realität durchgehend turbulent.

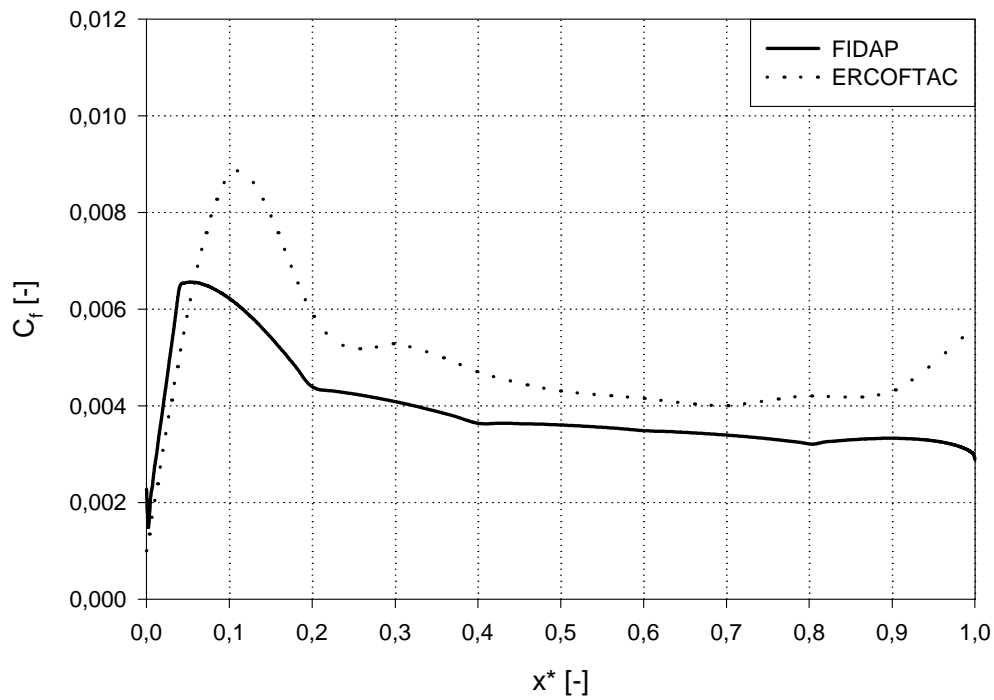


Abbildung 7.56: Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$

Abbildung 7.57 zeigt den Verlauf des Schubspannungsbeiwertes bei $i = -1.5^\circ$ auf der Saugseite. Die Ablösung bei $x^* \approx 0.8$ ist durch den verschwindenden Schubspannungsbeiwert zu erkennen. Diese Ablösung wird von der Berechnung nicht wiedergegeben.

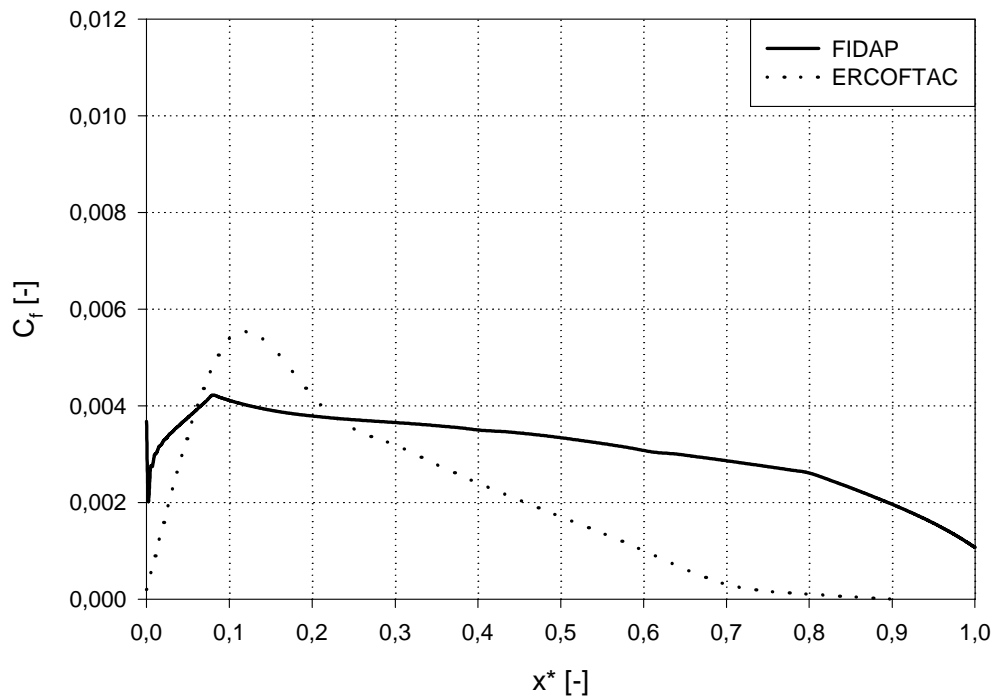


Abbildung 7.57: Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$

Schließlich zeigt Abb.7.58 den Verlauf des Schubspannungsbeiwertes bei $i = -1.5^\circ$ auf der Druckseite. Die anfänglich laminare Grenzschicht löst bei $x^* \approx 0.4$ ab und geht anschließend in eine turbulente über. Wiederum kann dieses Verhalten von der Rechnung nicht wiedergegeben werden.

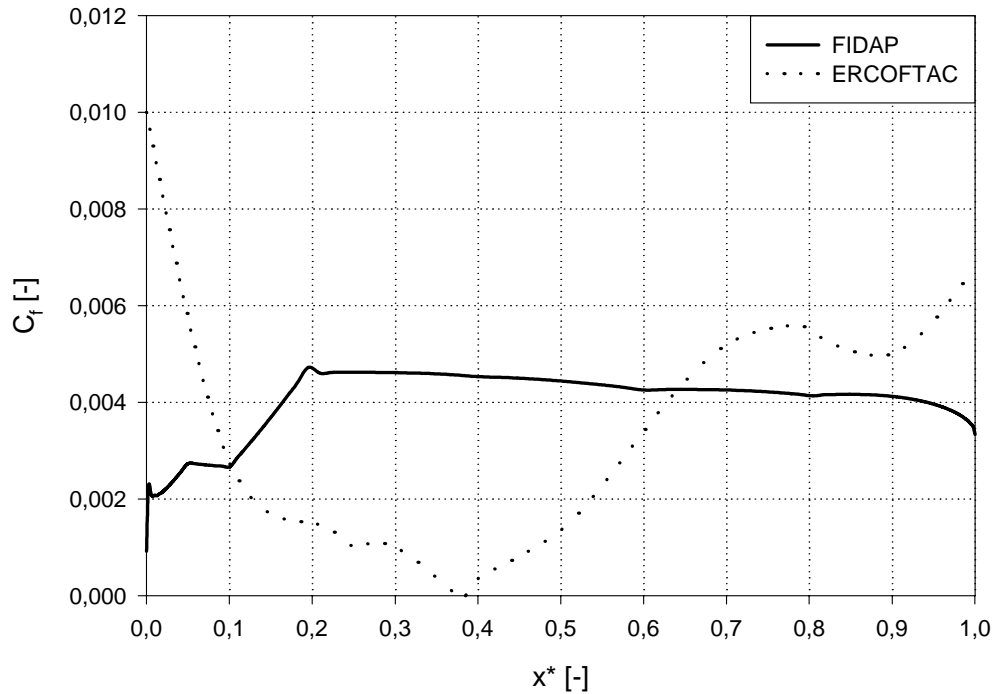


Abbildung 7.58: Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$

7.5 Über der Teilung gemittelte Strömungsgrößen

Für jeden Zuströmwinkel β_1 wurden in der Nachlaufebene E3, Abb.7.26, jeweils über eine Teilung t folgende Größen in Abhängigkeit von y' ermittelt:

- Der örtliche Gesamtdruck $p_{t2}(y')$
- Die örtliche Geschwindigkeit $w_2(y')$
- Der örtliche Abströmwinkel $\beta_2(y')$

Durch die örtliche Gesamtdruckdifferenz $\Delta p_t(y') = p_{t1} - p_{t2}(y')$ wurde der Totaldruckkoeffizient berechnet.

$$\omega(y') = \frac{\Delta p_t(y')}{p_{t1}} \quad (7.10)$$

Die lokalen Strömungsgrößen wurden anschließend in mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Größen umgerechnet. So ermittelt man den gemittelten Totaldruckverlustbeiwert $\bar{\omega}$ und den gemittelten Abströmwinkel $\bar{\beta}_2$. Die zwei Größen sind in Glg.(7.11) bzw. Glg.(7.12) dargestellt.

$$\bar{\omega} = \frac{\int_0^t \omega(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^t w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.11)$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\int_0^t \beta_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^t w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.12)$$

Die gemittelten Größen sind in Tab. 7.8 zusammengefaßt.

	$\bar{\omega}$ [-]		$\bar{\beta}_2$ [°]	
	FIDAP	ERCOFTAC	FIDAP	ERCOFTAC
$i = -8.5^\circ$	0.032	0.028	-3.2	-0.6
$i = -1.5^\circ$	0.032	0.094	-2.5	+2.1
$i = +5.0^\circ$	-	0.151	-	+4.0

Tabelle 7.8: Gemittelte Strömungsgrößen

Abb.7.59 zeigt den Verlauf des teilungsgemittelten Totaldruckverlustbeiwert $\bar{\omega}$ über dem Zuströmwinkel β_1 . Entgegen den Erfahrungen mit Verdichtergittern aus NACA65-Profilen zeigt der Totaldruckverlustbeiwert hier kein Minimum in Bereich der inzidenzfreien Zuströmung ($\beta_1 = 53^\circ$). Hingegen steigt der Totaldruckverlustbeiwert kontinuierlich mit dem Zuströmwinkel an. Zurückzuführen dürfte dieser Umstand auf das komplexe Grenzschichtverhalten sein, das sehr stark vom Zuströmwinkel beeinflusst ist. Dieses Grenzschichtverhalten (laminar/turbulent-Übergang) wird von den Berechnungen unzureichend wiedergegeben. Der berechnete Totaldruckverlustbeiwert ist im Gegensatz zum experimentellen Ergebnis unabhängig vom Zuströmwinkel.

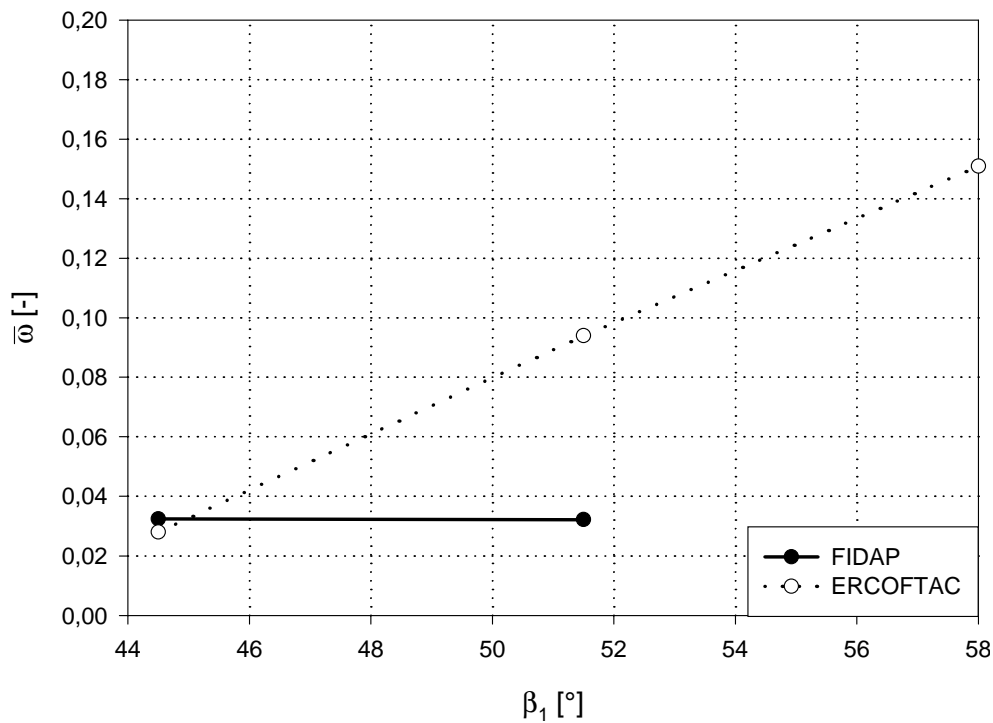


Abbildung 7.59: Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel

Abbildung 7.60 zeigt den teilungsgemittelten Abströmwinkel $\bar{\beta}_2$ über über dem Zuströmwinkel β_1 . Es ist ersichtlich, dass der Abströmwinkel mit dem Zuströmwinkel leicht zunimmt. Dieser Trend wird auch von den berechneten Werten wiedergegeben. Allerdings fallen die berechneten teilungsgemittelten Abströmwinkel gegenüber den Meßwerten um etwa $3^\circ \div 4^\circ$ zu klein aus. Ursache dafür sind die unterschiedlichen Grenzschichtzustände (Ablösung), vor allem auf der Saugseite.

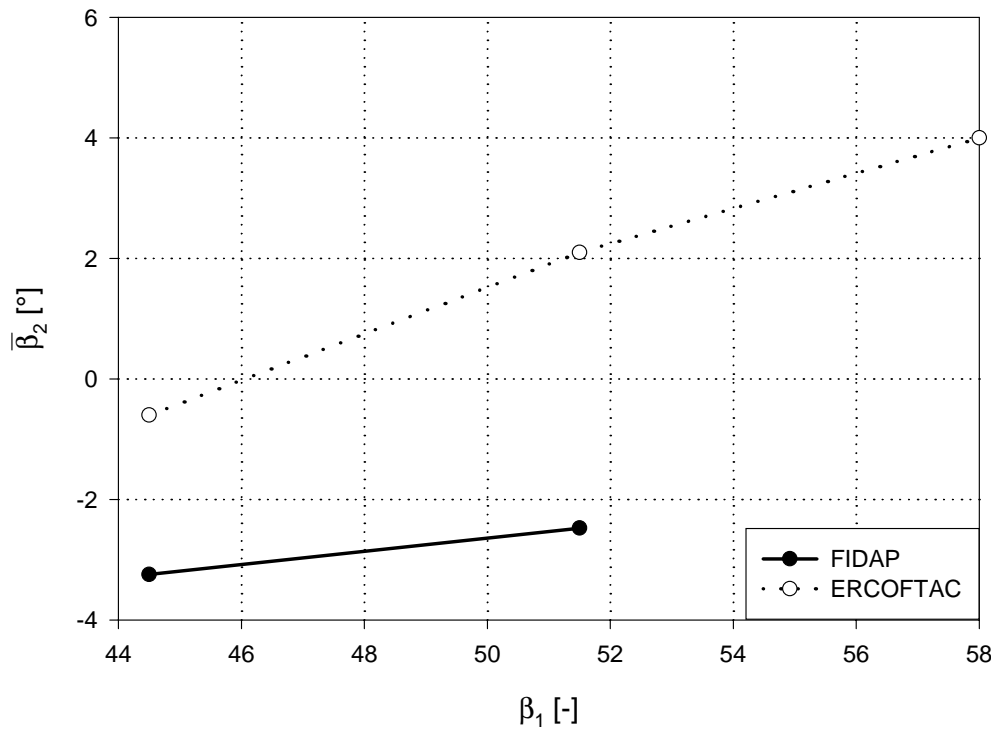


Abbildung 7.60: Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel

7.6 Diffusionsfaktor

Es wurden in der Vergangenheit Versuche durchgeführt [10] [13], um die höchstmöglichen Werte des Druckanstieges in einem Schaufelgitter zu erhalten. Ziel dieser Versuche war, die kritische Umlenkung vor einer Ablösung zu erhalten. *Lieblein, Schwenk* und *Broderick* (1953) haben ein halbempirisches Kriterium für die Schaufelbelastung ermittelt, um eine turbulente Ablösung vorauszusagen. Nach diesem Kriterium entsteht eine Ablösung der Strömung von der Saugseite der Schaufeloberfläche, wenn ein sogenannter Diffusionsfaktor, (Glg.(7.13)) die Grenze $D=0,6$ überschreitet. Die Definition des Diffusionsfaktors lautet

$$D = 1 - \frac{\bar{w}_2}{w_1} + \frac{w_{1u} - \bar{w}_{2u}}{2\sigma w_1} = 1 - \frac{\cos(\beta_1)}{\cos(\bar{\beta}_2)} + \frac{\sin(\beta_1) - \cos(\beta_1) \tan(\bar{\beta}_2)}{2\sigma}, \quad (7.13)$$

wobei

$$\bar{w}_2 = \frac{\int_0^t w_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^t w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.14)$$

ist. Abb.7.61 zeigt den Verlauf des Diffusionsfaktors in Abhängigkeit vom Anströmwinkel. Daraus ist ersichtlich, dass die Grenze $D > 0.6$ für das Verdichtergitter aus DCA-Profilen zu hoch ist. Entsprechend der Messung trat bereits bei $\beta_1 = 51.5^\circ$ ($i = -1.5^\circ$) saugseitige Ablösung auf, was einem Diffusionsfaktor $D = 0.555$ entspricht. Schließlich sind die Profildruckverteilungen zwischen Verdichtergitter aus NACA65- und DCA-Profilen unterschiedlich, was sich auf das saugseitige Grenzschichtverhalten auswirkt.

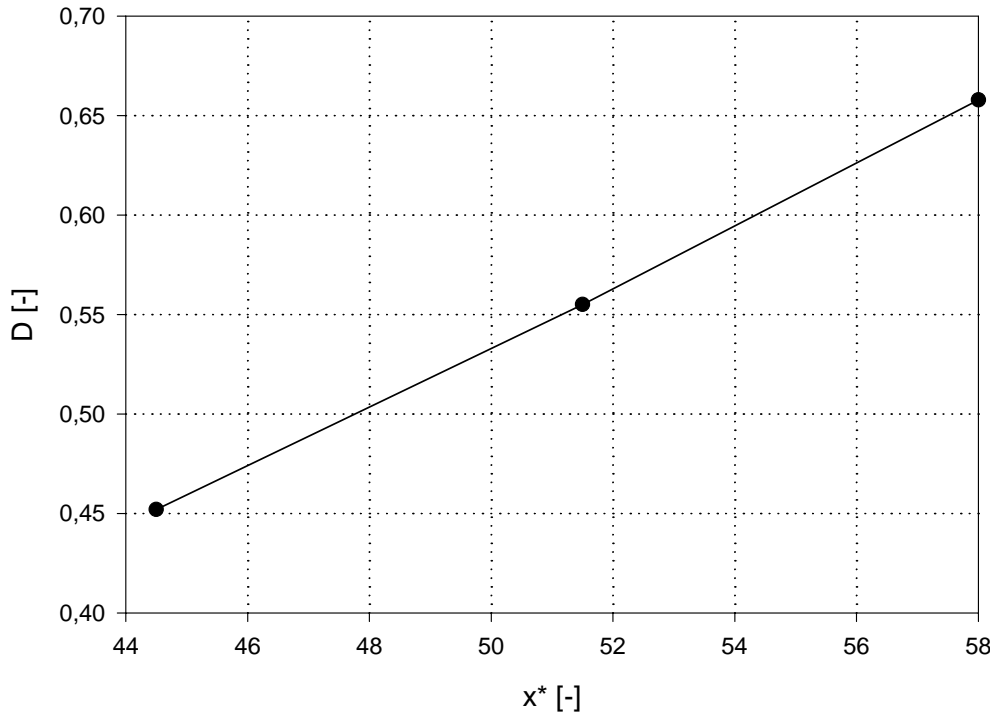


Abbildung 7.61: Diffusionsfaktor in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit der numerischen Simulation der Strömung in einem ebenen Verdichtergitter aus DCA-Profilen. Für dieses Verdichtergitter stehen umfangreiche Meßdaten im Rahmen eines ERCOFTAC-Testfalles zur Verfügung. Bei drei unterschiedlichen Zuströmwinkeln wurden Profildruckverteilungen, Geschwindigkeitsverteilungen an Saug- und Druckseite und die Nachlaufdübeln in drei Ebenen hinter dem Gitter gemessen. Die Strömung im Verdichtergitter ist gekennzeichnet durch transitionale Grenzschichten mit erheblichen Ablösungen. Aus diesem Grund wurde in dieser Diplomarbeit auch ein Überblick über das Themengebiet Transition gegeben. Auf Grund der Einschränkungen des verwendeten CFD-Programmes (FIDAP) konnte zur Turbulenzmodellierung allerdings nur das Standard $k-\epsilon$ Modell mit Wandfunktionen eingesetzt werden. Diese mangelhafte Turbulenzmodellierung dürfte auch der Grund für teilweise erhebliche Abweichungen zwischen Messung und Rechnung sein. Die spitze Profilverdichterkante führt in allen drei Fällen zu lokalen Ablösungen, die von der Rechnung nicht wiedergegeben werden. Bemerkenswert ist, dass es selbst bei einem Rückenstoß von $i = -1.5^\circ$ lokal an der Vorderkante zu einer positiven Inzidenz kommt. Während die Strömung an der Profildruckseite von der Rechnung gut wiedergegeben wird, sind die Abweichungen an der Profilsaugseite erheblich. Während im Experiment bei $i = -1.5^\circ$ saugseitig Ablösung auftritt, konnte diese von der Rechnung nicht wiedergegeben werden. Für die globale Beurteilung des Verdichtergitters können die teilungsgemittelten Abströmgrößen herangezogen werden. Auf Grund der mangelhaften Vorhersage des Grenzschichtverhaltens haben die berechneten Totaldruckverlustbeiwerte keine Aussagekraft. Die teilungsgemittelten Abströmwinkel werden durchwegs um $3^\circ \div 4^\circ$ zu klein berechnet. D.h., dass die Umlenkung im Verdichtergitter in der Realität entsprechend geringer ausfällt.

Ausblick

Die Berechnungen in der vorliegenden Diplomarbeit wurden unter der Voraussetzung von inkompressibler Strömung durchgeführt. Dies war deshalb notwendig, weil auch die experimentellen Untersuchungen bei sehr tiefen Machzahlen ($Ma_1 \approx 0.1$) durchgeführt wurden. Da die Verdichtergitter aus DCA-Profilen eigentlich für transonische Strömungen entwickelt wurden, wäre eine numerische Simulation im transonischen Bereich (z.B. $Ma_1 = 0.7 \div 1.2$) von Interesse.

Die teilweise erheblichen Abweichungen zwischen Rechnung und Messung sind hauptsächlich auf die mangelhafte Modellierung der transitionalen Grenzschichten zurückzuführen. Ziel von weiteren Simulationen sollte daher eine verbesserte Turbulenzmodellierung bis hin zur Berücksichtigung des laminar/turbulent Umschlages sein.

Literaturverzeichnis

- [1] *Chen, W.L. Lien, F.S., Leschziner, M.A.*: Computational prediction of flow around highly loaded compressor-cascade blades with non-linear eddy-viscosity models. International Journal of Heat and Fluid Flow 19, (1998)
- [2] *Cumpsty, N.A.*: Compressor Aerodynamics. Longman Scientific & Technical , (1989)
- [3] *Deutsch, S. Zierke, W.C.*: The Measurement of Boundary Layers on a Compressor Blade in Cascade: Part 1-A Unique Experimental Facility. Journal of Turbomachinery, Vol.109, (Oktober 1987)
- [4] *Deutsch, S. Zierke, W.C.*: The Measurement of Boundary Layers on a Compressor Blade in Cascade: Part 2-Suction Surface Boundary Layers. Journal of Turbomachinery, Vol.110, (Oktober 1988)
- [5] *Deutsch, S. Zierke, W.C.*: The Measurement of Boundary Layers on a Compressor Blade in Cascade: Part 3-Pressure Surface Boundary Layers and the Near Wake. Journal of Turbomachinery, Vol.110, (Januar 1988)
- [6] *Zierke, W.C. Deutsch, S.*: The Measurement of Boundary Layers on a Compressor Blade in Cascade: Part 4-Flow Fields for Incidence Angles of -1.5 and -8.5 Degrees. Journal of Turbomachinery, Vol.112, (April 1990)
- [7] *FLUENT*: Benutzerhandbuch zu FIDAP 8.0, (1988)
- [8] *Griebel, M.*: Numerische Simulation in der Strömungsmechanik. Vieweg, (1995)
- [9] *Hobson, G. V. Lakshminarayana, B.*: Prediction of Cascade Performance Using an Incompressible Navier-Stokes Technique. Journal of Turbomachinery, Vol.113, (Oktober 1991)
- [10] *Horlock, J.H.*: Axialkompressoren. Braun, (1967)
- [11] *Kunz, R.F. Lakshminarayana, B.*: Explicit Navier-Stokes Computation of Cascade Flows Using the $k-\epsilon$ Turbulence Model. AIAA Journal, Vol.30, (Januar 1992)
- [12] *Launder, B.E. Spalding, D.B.*: The Numerical Computation of Turbulent Flows. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, (1974)
- [13] *Lieblein, S. Schwenk, F.C. Broderick, R.L.*: Diffusion Factor for Estimating Losses and Limiting Blade in Axial-Flow-Compressor Blade Elements. NACA RM E53DO1, (1953)
- [14] *Mayle, R.E.*: The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines. Journal of Turbomachinery, Vol.113, (Oktober 1991)
- [15] *Neunert, P.A.*: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Vorgabe einer grenzschichtoptimierten Geschwindigkeitsverteilung für aerodynamisch hochbelastete Verdichtergitter. München, Univ. d. Bundeswehr, (1987)

- [16] *Römer, N.*: Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Umschlagverhalten der Profilgrenzschicht an Verdichter- und Turbinengittern. München, Univ. d. Bundeswehr, (1990)
- [17] *Rudnik, R.*: Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Zweigleichungs-Turbulenzmodellen bei Profilmströmungen. Berlin, Techn. Univ., (1997)
- [18] *Sieger, K.*: Vergleich der Leistungsfähigkeit erweiterter k, ϵ -Turbulenzmodelle bei der Berechnung transistionaler Grenzschichten an Gasturbinenschaufeln. Karlsruhe, Techn. Univ., (1993)
- [19] *Walker, G.J.*: The Role of Laminar-Turbulent Transition in Gas Turbine Engines: A Discussion. Journal of Turbomachinery, Vol.115, (April 1993)
- [20] *Wilcox, D.C.*: Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. AIAA Journal, Vol.26, (November 1988)
- [21] *Wilcox, D.C.*: Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model. AIAA Journal , Vol.32, (Februar 1992)
- [22] *Wilcox, D.C.*: Turbulence Modeling for CFD. La Canada, California: DCW Industries, Inc., (1993)
- [23] *Zapp, T.*: Strömungsmessungen in einem einfach beschaufelten Kanal mit gekrümmten Wänden. Aachen, RWTH, (1996)

Anhang A

FIDAP-Eingabefile

```
TITLE
DOUBLE-CIRCULAR-ARC Verdichtergitter
//
//STAFFELUNGSWINKEL
$stw=20.5
//
//ANSTROEMMWINKEL
$beta1=44.5
//
//KINET. TURBULENZENERGIE
$k=0.00000486
//
//KINET. DISSIPATION
$eps=0.000000206
//
//
FI-GEN ( ELEMENT=1, POINT=1, CURVE=1, SURFACE=1, NODE=0, MEDGE=1, MLOOP=1,
MFACE=1, BEDGE=1, SPAVE=1, MSHELL=1, MSOLID=1 )
//
WINDOW(CHANGE= 1, MATRIX )
      1.000000    0.000000    0.000000    0.000000
      0.000000    1.000000    0.000000    0.000000
      0.000000    0.000000    1.000000    0.000000
      0.000000    0.000000    0.000000    1.000000
      -0.30589    1.24257    -0.74876    0.41259    -1.16135    1.16135
      45.000000    45.000000    45.000000    45.000000
//
//
//ERSTELLUNG DER PROFILPUNKTE
//
//
$A=0.0
$B=0.0
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw),
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw) )
//
//
```

```
$C=1
$D=0
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw),
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw) )

//
//
$E=0.5
$F=-0.659
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($E)*COS($stw)-($F)*SIN($stw),
                                Y = ($F)*COS($stw)+($E)*SIN($stw) )

//
//
$G=0.5
$H=-0.9568
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($G)*COS($stw)-($H)*SIN($stw),
                                Y = ($H)*COS($stw)+($G)*SIN($stw) )

//
//
POINT( SELECT, ID )
3
1
2
CURVE( ADD, ARC, CENTER2POINTS )
//
POINT( SELECT, ID )
4
1
2
CURVE( ADD, ARC, CENTER2POINTS )
//
//
//
//ERSTELLUG DER GITERRANDPUNKTE
//
//
WINDOW(CHANGE= 1, MATRIX )
1.000000    0.000000    0.000000    0.000000
0.000000    1.000000    0.000000    0.000000
0.000000    0.000000    1.000000    0.000000
0.000000    0.000000    0.000000    1.000000
-1.57632    2.57632    -2.15539    0.95909    -3.15000    3.15000
45.000000    45.000000    45.000000    45.000000

//
//
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw),
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw)+0.2336 )

//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw),
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw)+0.2336 )

//
```

```

POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw),
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw)-0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw),
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw)-0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($E)*COS($stw)-($F)*SIN($stw),
                                Y = ($F)*COS($stw)+($E)*SIN($stw)+0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($E)*COS($stw)-($F)*SIN($stw),
                                Y = ($F)*COS($stw)+($E)*SIN($stw)-0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw)-0.5,
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw)-0.5*TAN(37.19+($stw))
                                )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw)-0.5,
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw)-0.5*TAN(37.19+($stw))
                                +0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($A)*COS($stw)-($B)*SIN($stw)-0.5,
                                Y = ($B)*COS($stw)+($A)*SIN($stw)-0.5*TAN(37.19+($stw))
                                -0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw)+1,
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw)-TAN(37.19-($stw))
                                )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw)+1,
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw)-TAN(37.19-($stw))
                                +0.2336 )
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = ($C)*COS($stw)-($D)*SIN($stw)+1,
                                Y = ($D)*COS($stw)+($C)*SIN($stw)-TAN(37.19-($stw))
                                -0.2336 )
//
//
//ERSTELLUNG DER CURVES
//
//
POINT( SELECT, ID )
9
5
6
CURVE( ADD, ARC, CENTER2POINTS )
POINT( SELECT, ID )
10
7
8
CURVE( ADD, ARC, CENTER2POINTS )
POINT( SELECT, ID )

```



```

12
5
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
11
1
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
13
7
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
15
6
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
14
2
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
16
8
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
12
11
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
11
13
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
15
14
CURVE( ADD, LINE )
POINT( SELECT, ID )
14
16
CURVE( ADD, LINE )
//
CURVE( SELECT, ID )
5
3
8
CURVE( JOIN, LABEL="OBEN" )
CURVE( SELECT, ID )
7
4
10
CURVE( JOIN, LABEL="UNTEN" )
//

```

```
//
//ERZEUGUNG DES MESHEDGES
//
CURVE( SELECT, ID )
1
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=100, RATIO=1.05, 2RATIO=1.05, PCENTR=0.5 )
//
CURVE( SELECT, ID )
2
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=100, RATIO=1.05, 2RATIO=1.05, PCENTR=0.5 )
//
CURVE( SELECT, ID )
6
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=90, RATIO=0.975 )
//
CURVE( SELECT, ID )
9
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=90, RATIO=0.975 )
//
CURVE( SELECT, ID )
11
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=15, RATIO=0.91 )
//
CURVE( SELECT, ID )
12
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=15, RATIO=1.07 )
//
CURVE( SELECT, ID )
13
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=15, RATIO=0.90 )
//
CURVE( SELECT, ID )
14
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=15, RATIO=1.1 )
//
CURVE( SELECT, ID )
15
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=80, RATIO=1 )
//
CURVE( SELECT, ID )
16
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=80, RATIO=1 )
//
//ERZEUGUNG DER MESHLOOPS
//
CURVE( SELECT, ID )
6
1
9
13
```

```
15
11
MLOOP( ADD, LABEL="SAUG", PAVE )
//
CURVE( SELECT, ID )
6
2
9
14
16
12
MLOOP( ADD, LABEL="DRUCK", PAVE )
//
//
//ERZEUGUNG DES MESHFACE
//
//
WINDOW(CHANGE= 1, MATRIX )
      1.000000      0.000000      0.000000      0.000000
      0.000000      1.000000      0.000000      0.000000
      0.000000      0.000000      1.000000      0.000000
      0.000000      0.000000      0.000000      1.000000
      -2.30000      3.30000      -2.60000      1.60000      -5.25000      5.25000
      45.000000      45.000000      45.000000      45.000000
//
//
POINT( ADD, COORDINATES, X = -2, Y = +1.5 )
POINT( ADD, COORDINATES, X = 3, Y = +1.5 )
POINT( ADD, COORDINATES, X = 3, Y = -2.5 )
POINT( ADD, COORDINATES, X = -2, Y = -2.5 )
//
POINT( SELECT, ID )
17
18
CURVE( ADD, LINE )
//
POINT( SELECT, ID )
18
19
CURVE( ADD, LINE )
//
POINT( SELECT, ID )
19
20
CURVE( ADD, LINE )
//
POINT( SELECT, ID )
20
17
CURVE( ADD, LINE )
//
```

```
//
CURVE( SELECT, ID )
  17
  18
  19
  20
SURFACE( ADD, WIREFRAME, EDG1CNT=1,
          EDG2CNT=1,
          EDG3CNT=1,
          EDG4CNT=1 )

//
SURFACE( SELECT, ID )
  1
MLOOP( SELECT, ID )
  2
MFACE( ADD, BASE=0.02, USESPAVE )
//
SURFACE( SELECT, ID )
  1
MLOOP( SELECT, ID )
  1
MFACE( ADD, BASE=0.02, USESPAVE )
//
//
//ERZEUGUNG DER BOUNDARY EDGES
//
WINDOW(CHANGE= 1, MATRIX )
  1.000000    0.000000    0.000000    0.000000
  0.000000    1.000000    0.000000    0.000000
  0.000000    0.000000    1.000000    0.000000
  0.000000    0.000000    0.000000    1.000000
  -1.57632    2.57632    -2.15539    0.95909    -3.15000    3.15000
  45.000000    45.000000    45.000000    45.000000
//
//
MFACE( SELECT, ID )
  1
CURVE( SELECT, ID )
  2
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
MFACE( SELECT, ID )
  2
CURVE( SELECT, ID )
  1
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
MFACE( SELECT, ID )
  1
CURVE( SELECT, ID )
  6
```

```

BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
MFACE( SELECT, ID )
2
CURVE( SELECT, ID )
6
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
MFACE( SELECT, ID )
1
CURVE( SELECT, ID )
9
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
MFACE( SELECT, ID )
2
CURVE( SELECT, ID )
9
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.1, LAYERS=5 )
//
//
//VERNETZUNG
//
//
MFACE( SELECT, ID )
1
ELEMENT( SETDEFAULTS, NODES=4 )
MFACE( MESH, PAVE, ENTITY="FLUIDP" )
//
MFACE( SELECT, ID )
2
ELEMENT( SETDEFAULTS, NODES=4 )
MFACE( MESH, PAVE, ENTITY="FLUIDS" )
//
//
//ERSTELLUNG DER RANDELEMENTE
//
MEDGE( SELECT, ID )
1
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="SAUGSEITE" )
//
MEDGE( SELECT, ID )
2
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="DRUCKSEITE" )
//
MEDGE( SELECT, ID )
5
6
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )

```

```
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="INLET" )
//
MEDGE( SELECT, ID )
7
8
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="OUTLET" )
//
MEDGE( SELECT, ID )
9
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="RANDOBEN" )
//
MEDGE( SELECT, ID )
10
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=2 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="RANDUNTEN" )
//
//
END( )
////////////////////////////////////
//
FIPREP
//
PROBLEM( 2-D, STEADY, NONLINEAR, TURBULENT )
//
EXECUTION( NEWJOB )
//
PRESSURE( PENALTY = 1.0E-6, DISCONTINUOUS )
//
SOLUTION( SEGR=3000, VELC=0.001, SCHANG=0.0, CR=10000,
CGS=10000, NCGC=1E-6, PRECON=21 )
//
RELAXATION
0.7  0.7  0.0  0.8  0.0  0.0  0.8  0.8
//
OPTIONS( UPWINDING )
//
EXTRAPOLATE( OFF )
//
ENTITY( FLUID, NAME="FLUIDP"      )
ENTITY( FLUID, NAME="FLUIDS"      )
ENTITY( PLOT,  NAME="INLET"        )
ENTITY( PLOT,  NAME="OUTLET"       )
ENTITY( PLOT,  NAME="RANDUNTEN"    )
ENTITY( PLOT,  NAME="RANDOBEN"     )
ENTITY( WALL,  NAME="DRUCKSEITE"    )
ENTITY( WALL,  NAME="SAUGSEITE"    )
//
$w1x=COS($beta1)
$w1y=SIN($beta1)
```

```
//
BCNODE( UX, CONSTANT=$w1x, ENTITY="INLET" )
BCNODE( UY, CONSTANT=$w1y, ENTITY="INLET" )
BCNODE( VELOCITY, CONSTANT=0.0, ENTITY="DRUCKSEITE" )
BCNODE( VELOCITY, CONSTANT=0.0, ENTITY="SAUGSEITE" )
BCNODE( KINETIC, CONSTANT=$k, ENTITY="INLET" )
BCNODE( DISSIPATION, CONSTANT=$eps, ENTITY="INLET" )
//
BCPERIODIC( ALL, ENTITY, INCLUSIVE, REFERENCE="RANDUNTEN", PERIODIC="RANDOBEN",
R1NODE=520, R2NODE=521, P1NODE=441, P2NODE=442 )
//
//
ICNODE( KINETIC, CONSTANT=$k, ALL )
ICNODE( DISSIPATION, CONSTANT=$eps, ALL )
ICNODE( UX, CONSTANT=$w1x, ALL )
ICNODE( UY, CONSTANT=$w1y, ALL )
//
POSTPROCESS( ALL, RESIDUAL )
//
DENSITY( CONSTANT=1.0 )
//
VISCOSITY( K.E., CONSTANT=1.988E-6, CLIP=1.0E6 )
//
RENUMBER( PROFILE )
//
END
////
//
CREATE( FISOLV )
```

Abbildungsverzeichnis

2.1	<i>Schaufelgeometrie</i>	3
2.2	<i>Dickenverteilung</i>	4
2.3	<i>Anströmwinkel</i>	4
4.1	<i>Verlauf einer beliebigen Größe in turbulenter Strömung</i>	9
4.2	<i>Das universelle Wandgesetz</i>	14
5.1	<i>strukturiertes und unstrukturiertes Netz</i>	17
5.2	<i>Das verwendete Netz</i>	17
5.3	<i>Vergrößerung im Vorderkantenbereich</i>	18
5.4	<i>Vergrößerung im Hinterkantenbereich</i>	18
5.5	<i>Vergrößerung des Rechennetzes im Profilbereich</i>	18
5.6	<i>ungünstige (A) und günstige (B) Netzverfeinerung und Netzanpassung</i>	19
5.7	<i>Das vierknotige Element</i>	20
5.8	<i>Abhängigkeit der Lösungsvektors von α bei gedämpften Korrekturen</i>	24
6.1	<i>Erscheinungsformen der Transition</i>	26
6.2	<i>Stadien der Transition (natürliche Transition)</i>	27
6.3	<i>Schubspanungsverlauf bei natürlicher Transition</i>	28
6.4	<i>Transition über eine laminare Ablöseblase</i>	29
6.5	<i>Rückkopplungsmechanismus für die turbulente Produktionsrate</i>	33
6.6	<i>Variation der Parameter A und B mit dem lokalen Außenturbulenzgrad [17]</i> .	34
6.7	<i>Abhängigkeit des Strukturkoeffizienten a von der Außenturbulenz und der Impulsverlustdicken-Reynoldszahl an der Startstelle der Rechnung [17]</i>	35
6.8	<i>Blasenmodell</i>	40
6.9	<i>charakteristische Längen der Ablöseblase</i>	41
7.1	<i>Das Verdichtergitter</i>	42
7.2	<i>Iterationsverhalten des Verfahrens für $i = -8.5^\circ$</i>	47
7.3	<i>Iterationsverhalten des Verfahrens für $i = -1.5^\circ$</i>	48
7.4	<i>Verlauf der Stromlinien bei $i = -8.5^\circ$</i>	49
7.5	<i>Verlauf der Stromlinien bei $i = -1.5^\circ$</i>	49
7.6	<i>Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Vorderkante bei $i = -8.5^\circ$</i>	50
7.7	<i>Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Hinterkante bei $i = -8.5^\circ$</i>	50
7.8	<i>Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Vorderkante bei $i = -1.5^\circ$</i>	51
7.9	<i>Geschwindigkeitsvektoren im Bereich der Hinterkante bei $i = -1.5^\circ$</i>	51
7.10	<i>Lage der Auswertungsebenen an Saug- und Druckseite</i>	52
7.11	<i>Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S1</i>	53
7.12	<i>Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S2</i>	53
7.13	<i>Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S3</i>	54
7.14	<i>Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene S4</i>	54
7.15	<i>Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D1</i>	55

7.16	Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D2	56
7.17	Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D3	56
7.18	Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D4	57
7.19	Geschwindigkeitsprofil bei $i = -8.5^\circ$, Auswertungsebene D5	57
7.20	Profildruckverteilung bei $i = -8.5^\circ$	58
7.21	Profildruckverteilung bei $i = -1.5^\circ$	59
7.22	Statischer Druckkoeffizient bei $i = -8.5^\circ$	60
7.23	Statischer Druckkoeffizient im Vorderkantenbereich bei $i = -8.5^\circ$	60
7.24	Statischer Druckkoeffizient bei $i = -1.5^\circ$	61
7.25	Statischer Druckkoeffizient im Vorderkantenbereich bei $i = -1.5^\circ$	61
7.26	Lage der Auswertungsebenen im Nachlauf	62
7.27	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E1	63
7.28	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E2	63
7.29	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -8.5^\circ$, Ebene E3	64
7.30	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E1	65
7.31	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E2	66
7.32	Geschwindigkeit im Nachlauf bei $i = -1.5^\circ$, Ebene E3	66
7.33	Der y^+ -Verlauf bei $i = -8.5^\circ$	67
7.34	Der y^+ -Verlauf bei $i = -1.5^\circ$	68
7.35	Verdrängungsdicke an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	69
7.36	Impulsverlustdichte an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	70
7.37	Verlauf des Formparameters H_{12} an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	70
7.38	Verdrängungsdicke an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	71
7.39	Impulsverlustdichte an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	72
7.40	Verlauf des Formparameters H_{12} an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	72
7.41	Verdrängungsdicke an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	73
7.42	Impulsverlustdichte an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	74
7.43	Verlauf des Formparameters H_{12} an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	74
7.44	Verdrängungsdicke an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	75
7.45	Impulsverlustdichte an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	76
7.46	Verlauf des Formparameters H_{12} an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	76
7.47	Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	77
7.48	Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	78
7.49	Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	78
7.50	Verlauf der dimensionslosen Schubspannung an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	79
7.51	Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichtrand an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	80
7.52	Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichtrand an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	80
7.53	Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichtrand an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	81
7.54	Verlauf der dimensionslosen Geschwindigkeit am Grenzschichtrand an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	81
7.55	Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Saugseite bei $i = -8.5^\circ$	82
7.56	Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Druckseite bei $i = -8.5^\circ$	83
7.57	Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Saugseite bei $i = -1.5^\circ$	84
7.58	Verlauf des Schubspannungsbeiwertes an der Druckseite bei $i = -1.5^\circ$	85
7.59	Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel	87
7.60	Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel	88
7.61	Diffusionsfaktor in Abhängigkeit vom Anströmwinkel	89

Tabellenverzeichnis

2.1	Eintrittsrandbedingungen	5
4.1	Konstanten des k - ϵ Turbulenzmodells [12]	12
4.2	Konstanten des k - ω Turbulenzmodells [20]	14
5.1	Der verwendete erste Wandabstand	17
5.2	Eintrittsrandbedingungen für die dimensionslosen turbulenten Transportgrößen	22
6.1	Einflussgrößen der Transition	26
6.2	Low-Reynolds-Number k - ϵ Modellkonstanten und Zusatzterme	31
6.3	Low-Reynolds-Number k - ϵ Funktionen	32
6.4	Original-Low-Reynolds-Number-Funktionen im Modell von <i>Lam</i> und <i>Bremhorst</i>	34
6.5	Low-Reynolds-Number k - ϵ Randbedingungen für die turbulente Dissipationsrate	36
6.6	Konstanten des modifizierten k - ω Turbulenzmodells [22]	37
6.7	Anwendbarkeit der Kriterien	41
7.1	<i>Daten des Verdichtergitters (Experiment)</i>	43
7.2	<i>Abmessungen des Verdichtergitters</i>	43
7.3	Druckbohrungen in der Schaufel auf der Saug- und Druckseite	44
7.4	<i>Druck am Eintritt und am Austritt der Verdichtergitters</i>	45
7.5	verwendete Relaxationsfaktoren	47
7.6	Abstände der Auswertungsebenen von der Profilvorderkante an Saug- und Druckseite	52
7.7	Abstände der Auswertungsebenen von der Profilvorderkante im Nachlauf	62
7.8	<i>Gemittelte Strömungsgrößen</i>	86