

DIPLOMARBEIT

**Berechnung der ebenen turbulenten Strömung in einem
NACA 65-Verdichtergitter**

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. R.WILLINGER

durch
Markus TRENKER
Lacknergasse 34
A-1170 Wien

Wien, 4. Februar 1999

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich dem Institutsvorstand Herrn *o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hermann Haselbacher* meinen Dank für die gebotene Möglichkeit zur Abfassung einer Diplomarbeit an diesem Institut aussprechen.

Desweiteren möchte ich mich bei Herrn *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger*, der trotz eigener Belastung durch die Fertigstellung seiner Dissertation, mir und meiner Arbeit die bestmögliche Betreuung zukommen ließ, bedanken.

Mein Dank gilt ferner Herrn *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Klaus Leeb* für unzählige konstruktive Diskussionen bezüglich der elektronischen Datenverarbeitung.

Schließlich danke ich allen weiteren Mitarbeiterinnen, Mitarbeitern und in diesem Zeitraum ebenfalls am Institut tätigen Diplomanden für die ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Diese Arbeit ist in Dankbarkeit meinen Eltern gewidmet.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Berechnung der ebenen turbulenten Strömung in einem NACA 65-Verdichtergitter. Die Berechnungsergebnisse werden mit Meßdaten aus dem Bericht NACA 1368 verglichen.

Zu Beginn wird die Systematik der Bezeichnungsweise der von der NACA entwickelten Profile zusammengefaßt. Gewisse Merkmale der Profile, die sich auch in den Bezeichnungen wiederfinden, werden mit Hilfe der klassischen Theorie der Singularitätenbelegung erläutert.

Anschließend werden die Charakteristiken des Verdichtergitters aus dem Bericht NACA 1368 erstellt. Unter Charakteristik eines Schaufelgitters versteht man dabei dessen Umlenkungs- und Verlusteigenschaften. Weiters werden als Versuchsergebnisse die auf den NACA-Messungen basierenden Mellor-Charts herangezogen.

Als Einleitung für das folgende Rechenverfahren werden Grundbegriffe turbulenter Strömungen erläutert. Zur Modellierung der Turbulenz wird hierbei das Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modell verwendet. Die bekannten Erhaltungsgleichungen der laminaren Strömung werden daraufhin um die beiden Bilanzgleichungen für k und ε erweitert.

Danach werden die Grundlagen des zur Berechnung verwendeten CFD-Softwarepaketes FIDAP, welches auf Basis der Methode der Finiten-Elemente die reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen löst, angeführt.

Aus den berechneten lokalen Strömungsgrößen werden geeignete Mittelwerte gebildet. Diese Mittelwerte beschreiben Abströmwinkel und Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit des Anströmwinkels. Beim Abströmwinkel besteht gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment. Der Totaldruckverlust wird dagegen deutlich zu hoch berechnet. Um bessere Übereinstimmung zwischen den errechneten und gemessenen Größen zu erzielen, wurde in weiterer Folge die zusätzliche numerische Diffusion des Finiten-Elemente Verfahrens der Aufgabenstellung angepaßt. Es zeigte sich hierbei der starke Einfluß der zusätzlichen numerischen Diffusion sowohl auf das Ergebnis als auch auf die Stabilität des gesamten Rechenverfahrens.

Nach erfolgreicher Abstimmung des Rechenverfahrens konnte eine deutliche Annäherung zwischen den Berechnungs- und Versuchsergebnissen erreicht werden.

Den Abschluß bilden Vorschläge für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Kompressoraerodynamik.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Aufgabenstellung	1
2	Systematik der NACA 65-Profile	3
2.1	Profilgeometrie	3
2.2	Bestimmung der Skelettlinie	5
2.3	Bestimmung der Dickenverteilung	7
3	Aufbereitung der vorhandenen Meßdaten	9
3.1	Bearbeitung der NACA-Meßdaten	9
3.2	Der Auslegungspunkt („Point of Design“)	11
3.3	Die Mellor-Diagramme	14
4	Eigenschaften turbulenter Strömungen	16
5	Beschreibung des Rechenverfahrens	19
5.1	Grundgleichungen	19
5.2	Grenzschichtmodellierung	23
6	Numerisches Lösungsverfahren	26
6.1	Finite-Elemente-Methode	26
6.2	Netzgenerierung	29
6.2.1	Rand- und Anfangsbedingungen	33
6.3	Beeinflussung der Konvergenz	36
6.3.1	Relaxation	36
6.3.2	Das Upwinding bzw. Streamline Upwinding	37

7	Berechnungsergebnisse	42
7.1	Lokale Strömungsgrößen	42
7.1.1	Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren	42
7.1.2	Darstellung des statischen Druckkoeffizienten	46
7.1.3	Profildruckverteilung	50
7.1.4	Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Profil	54
7.1.5	Dimensionsloser Wandabstand y^+	56
7.2	Mittelungsverfahren	58
7.3	Diffusionsfaktor	58
7.4	Gemittelte Strömungsgrößen	59
8	Zusammenfassung und Ausblick	66
A	FIDAP-Eingabefile	68

Formelzeichen

Lateinische Zeichen

a	Parameter der Skelettlinie
A	Auftriebskraft
$A_0..A_n$	Fourierkoeffizienten
c	Profilsehnenlänge
C_A	Auftriebsbeiwert
C_D	Widerstandsbeiwert
C_p	statischer Druckbeiwert
C_μ	Konstante
ΔC_p	Differenz zwischen statischen Druckbeiwerten
C_1, C_2	Konstanten im $(k - \varepsilon)$ -Modell
C, C_1	Konstante
d	maximale Profildicke
D	Diffusionsfaktor
D	Differentialoperator
$DTOL$	Konvergenzschranke
D	Rohrdurchmesser
\vec{F}	Vektor der Randbedingungen
f	maximale Profilwölbung
f^*	Fehler
g	Gewichtsfunktionen
h	charakteristische Elementabmessung
i	Inzidenzwinkel
i	Laufvariable
$k(x)$	Wirbeldichte
k	kinetische Turbulenzenergie
\tilde{k}	Upwindingfaktor
\mathbf{k}	Upwindingtensor
\mathbf{K}	globale Systemmatrix
l_t	turbulentes Längenmaß
L	charakteristische Länge
n	Laufvariable
p	statischer Druck
p_t	Totaldruck
Pe	Pecletzahl
q_i	Ansatzfunktionen
q	Staudruck

r	Radius
r	Koordinate im Einheitsraum
R	Gaskonstante
Re	Reynoldszahl
Re_t	turbulente Reynoldszahl
R_ν	Viskositätsverhältnis
s	Schaufelteilung
s	Koordinate im Einheitsraum
t	Zeit
T	Temperatur
Tu	Turbulenzgrad
u	Geschwindigkeitskomponente von w in x -Richtung
\vec{u}	globaler mathematischer Vektor der Unbekannten
u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit
u^+	dimensionslose Geschwindigkeit in Wandnähe
u_m	mittlere Durchflußgeschwindigkeit
$\vec{u}_{rel(n)}$	globaler mathematischer Vektor der Unbekannten beim Relaxationsverfahren
U_∞	Anströmgeschwindigkeit in der Profiltheorie
v	Geschwindigkeitskomponente von w in y -Richtung
w	Geschwindigkeitsbetrag
w	Geschwindigkeitskomponente von w in z -Richtung
Δw_u	Differenz der Umfangskomponenten von w_1 und w_2
x	x -Richtung des kartesischen Koordinatensystems
y	y -Richtung des kartesischen Koordinatensystems
y^+	dimensionloser Wandabstand
$\ \cdot \ $	quadratische Norm

Griechische Zeichen

α	Anstellwinkel
α	Relaxationsfaktor
β	Relativwinkel am Verdichtergitter
γ	Staffelungswinkel
Γ	Zirkulation
δ	Deviationswinkel
δ_{jk}	Kroneckersymbol
ε	Dissipationsrate der kinetischen Turbulenzenergie
ε_p	Penaltyparameter
η	dynamische Viskosität
θ	Strömungsumlenkungswinkel
κ	von Karman'sche Konstante
κ	Isentropenexponent
κ	Metallwinkel
ν	kinematische Viskosität
ν_t	Wirbelviskosität
ρ	Dichte
σ	Solidity
$(\tau_{jk})_{tur}$	Reynolds'scher Spannungstensor
τ_w	Wandschubspannung

τ_{mol}	molekularer Spannungstensor
ϕ	Interpolationsfunktion der Geschwindigkeit
φ	Wölbungswinkel
$\hat{\varphi}$	Hilfsvariable in der Skelettheorie
ψ	Interpolationsfunktion des Druckes
ω	Totaldruckverlustbeiwert

Übersetzte Zeichen

*	dimensionslos
d	Dickenverteilung
s	Skelettlinie
–	gemittelt
'	Schwankungswert
$\vec{}$	Vektor, bzw. mathematischer Vektor

Untergesetzte Zeichen

k, j	Indizes die nach der <i>Einstein</i> 'schen Summationskonvention addiert werden
D	Auslegungspunkt („Point of Design“)
1	Ebene vor dem Schaufelgitter (Zuströmung)
2	Ebene hinter dem Schaufelgitter (Abströmung)
u	Umfangsrichtung
x	Axialrichtung

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Für die Berechnung des Kennfeldes eines vielstufigen Axialverdichters sind die Charakteristiken der einzelnen Schaufelreihen von grundlegender Bedeutung. Unter Charakteristik einer Schaufelreihe versteht man dabei ihre Umlenkungs- und Verlusteigenschaften. Unter Vernachlässigung der Randeffekte genügt die Kenntnis der Charakteristiken des ebenen Schaufelgitters. Das ebene Schaufelgitter erhält man durch Abwicklung eines coaxialen Zylinderschnittes durch das Lauf- und das Leitradd. Allgemein sind Abströmwinkel und Totaldruckverlustbeiwert eines Verdichtergitters abhängig von:

- Zuströmwinkel β_1
- Machzahl der Zuströmung Ma_1
- Reynoldszahl der Zuströmung Re_1
- Turbulenzgrad der Zuströmung Tu_1

Beschränkt man sich auf subsonische Strömung bei kleiner Zuströmmachzahl, so kann der Einfluß der Machzahl vernachlässigt werden. Die Reynoldszahl ist üblicherweise so hoch, daß ihr Einfluß ebenfalls vernachlässigt werden kann. Der Turbulenzgrad der Gitteranströmung wird vom Turbulenzgrad der Abströmung des vorhergehenden Verdichtergitters bestimmt. Dabei spielt auch der instationäre Charakter der Strömung aufgrund der Relativbewegung der Gitter eine Rolle. Man kann davon ausgehen, daß sich der Turbulenzgrad bei Teillasten nur unwesentlich gegenüber dem Turbulenzgrad im Auslegungspunkt ändert. Daher ist auch der Einfluß des Turbulenzgrades von untergeordneter Bedeutung. Das heißt, im vorliegenden Fall werden Umlenkungs- und Verlusteigenschaften des Verdichtergitters mit konstanter Geometrie im wesentlichen von der Richtung der Zuströmung bestimmt. In einem vielstufigen Axialverdichter ändern sich die Zuströmrichtungen zu den einzelnen Gittern bei Abweichungen vom Auslegungspunkt.

Die Geometrie eines ebenen Verdichtergitters wird durch die Profilform, den Staffelungswinkel und durch das Verhältnis von Sehnenlänge zu Schaufelteilung (Solidity) bestimmt. Die Profilform wird dabei hauptsächlich durch den Machzahlbereich, für den das Gitter ausgelegt ist, bestimmt. Bei niederen Machzahlen werden in vielstufigen Axialverdichtern bis heute sehr häufig Profile der sog. NACA 65 -Serie eingesetzt. Bei der Anwendung solcher Profile kann auf ein umfangreiches Datenmaterial zurückgegriffen werden. Es handelt sich dabei um Ergebnisse aus Profildruck- und Nachlaufmessungen in ebenen Gitterwindkanälen.

Den Mittelpunkt der vorliegenden Diplomarbeit soll ein NACA 65 -Profil mittlerer Wölbung in einer typischen Gitterkonfiguration bilden. Mit Hilfe des Finite-Elemente Programmpaketes FIDAP soll die stationäre, ebene, inkompressible, reibungsbehaftete Strömung in diesem Verdichtergitter berechnet werden. Aus den berechneten Daten sollen die Charakteristiken des Verdichtergitters bestimmt werden. Durch Vergleich mit den gemessenen Gittercharakteristiken sollen die Stärken und Schwächen des CFD-Programmes bei der Berechnung von verzögerten Strömungen in Schaufelgittern herausgearbeitet werden. Besonders Augenmerk ist dabei auf die Bestimmung des Betriebsbereiches des Verdichtergitters, ausgedrückt durch die Zuströmwinkel für das Auftreten von Saugseiten- und Druckseitenablösung, zu legen.

Kapitel 2

Systematik der NACA 65-Profile

2.1 Profilgeometrie

In den fünfziger Jahren erkannte das National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) aus einer großen Anzahl von Versuchen, daß sich eine laminare Grenzschicht zwischen Profiloberfläche und freier Strömung positiv auf die aerodynamischen Beiwerte wie zum Beispiel die kritische Machzahl, den Auftriebs- und den Widerstandsbeiwert auswirkt. Die Forderung nach einer laminaren Grenzschicht führte auf eine konstante Druck- beziehungsweise Differenzdruckverteilung entlang der Profillehne. Dies sollte das Kennzeichen der NACA 6-Serie sein.

Die NACA 6-Profilserienbezeichnung besteht üblicherweise aus einer sechsstelligen Nummer mit einer zusätzlichen Angabe zur verwendeten Skelettlinie. Abb.(2.1) zeigt die in der Aerodynamik üblichen Parameter am Profil.

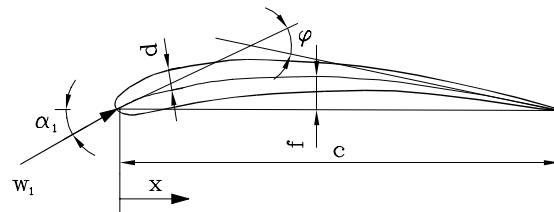


Abbildung 2.1: Charakteristische Abmessungen am Profil

Als Beispiel der NACA-Profilbezeichnungssystematik möge hier die Bezeichnung NACA 65,3-218, $a = 0.5$ entschlüsselt werden, siehe auch [1]:

- 1.Ziffer („6“) bezeichnet die Profilsérie.
- 2.Ziffer („5“) gibt die Lage des Ortes des minimalen Druckes bzw. der maximalen Geschwindigkeit bzw. den Ort des Dickenmaximums in Zehntel der Sehnenlänge an. Gemessen wird die Angabe an einem symmetrischen Profil mit $C_A = 0$ von der Profilhase in Richtung der Profilhinterkante.
- 3.Ziffer („3“) gibt die Abweichung vom Auslegungswert des Auftriebsbeiwertes („Design Lift Coefficient“) in Zehntel an, innerhalb der auf beiden Profelseiten ein günstiger Druckgradient erhalten bleibt.

- Nach dem Bindestrich.
- 1.Ziffer („2“) gibt den Auslegungsauftriebsbeiwert des isolierten Profiles in Zehntel an.
- 2.u.3.Ziffer („18“) gibt das Verhältnis der maximalen Profildicke zur Sehnenlänge in Prozent an.

Die Bezeichnung $a = 0.5$ kennzeichnet die verwendete Skelettlinie. Fehlt diese Angabe, ist dies mit $a = 1$ gleichzusetzen. Der Wert a gibt den Bereich, gemessen von der Profilnase und bezogen auf die Sehnenlänge c an, in dem die Druckverteilung auf der Profiloberfläche konstant ist, d.h. der Druckgradient ist hier gleich Null. Im Bereich $a < x < c$ fällt die Druckverteilung linear zur Hinterkante hin ab, siehe Abb.(2.2).

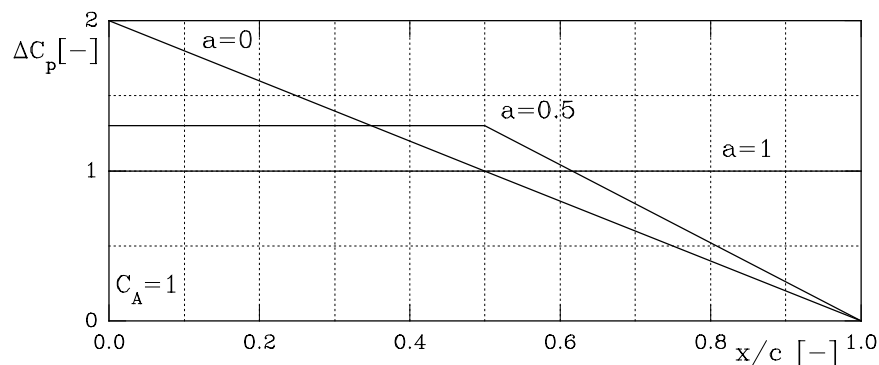


Abbildung 2.2: Druckverteilung auf der Skelettlinie [14]

Das in Abb.(2.2) auftretende ΔC_p wird durch Glg.(2.4) definiert und entspricht einer dimensionslosen Druckdifferenz zwischen Druck- und Saugseite des Profiles. Statt der Angabe „ $a = 0.5$ “ findet man auch manchmal die Bezeichnung „ A_5 “. Wird ein Profil durch lineares Vergrößern oder Verkleinern der ursprünglich bezeichneten Dickenverteilung erzeugt, wird es wie folgt bezeichnet: NACA 65(320)-218, $a = 0.5$. Die Werte außerhalb der Klammer behalten ihre ursprüngliche Bedeutung.

- Die 1.Ziffer in der Klammer („3“) gibt wieder die zulässige Abweichung vom Auslegungsauftriebsbeiwert in Zehnteln an.
- Die 2.u.3. Ziffer („20“) geben das Verhältnis der maximalen Profildicke zur Sehnenlänge der ursprünglichen Dickenverteilung in Prozent an.

Dies sind die gängigsten Bezeichnungen der NACA 6-Serie. Zur weiteren Vertiefung empfiehlt sich die einschlägige Literatur, zum Beispiel [1].

Diese Arbeit wird sich mit Profilen der Klasse NACA 65-... , $a = 1$ beschäftigen. Es soll nun kurz der Weg, wie man mit Hilfe der Singularitätenmethode die Form des Profiles bestimmt, skizziert werden. Der Theorie gemäß wird die Wölbung des Profiles mit der Skeletttheorie, die Dickenverteilung mit der Tropfentheorie behandelt.

2.2 Bestimmung der Skelettlinie

Der Rechengang, aus einer gegebenen Zirkulationsverteilung die Form der Skelettlinie zu bestimmen, wird nach [14] als 1.Hauptaufgabe bezeichnet. Der allgemeine Ansatz für die Zirkulation lautet

$$d\Gamma = k(x)dx,$$

mit $k(x)$ als Wirbeldichte oder Wirbelstärke pro Längeneinheit.

Mit Hilfe des *Biot-Savart*'schen Gesetzes ergeben sich die induzierten Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ auf der Skelettlinie. Für schwach gewölbte Profile sind diese annähernd gleich den Werten auf der Profilschne (y = 0). Die Integrationsvariable wird im folgenden mit ' gekennzeichnet.

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x^*) &= \pm \frac{1}{2} k(x^*) \\ v(x^*) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 k(x^{*'}) d \frac{x^{*'}}{x^* - x^{*'}} \quad \text{mit } x^* = \frac{x}{c} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die kinematische Strömungsbedingung lautet mit α , dem Anstellwinkel des Profiles:

$$U_\infty \left(\alpha - \frac{dy^{*(s)}(x^*)}{dx^*} \right) + v(x^*) = 0, \quad (2.2)$$

Das hochgestellte s bezeichnet die Skelettlinie. U_∞ steht für die Anströmgeschwindigkeit des Profiles.

Setzt man $v(x^*)$ in die kinemat. Strömungsbedingung ein und integriert über x^* , so ergibt sich die dimensionslose y -Koordinate der Skelettlinie $y^{*(s)}(x^*)$ zu

$$y^{*(s)}(x^*) = \alpha x^* - \int_0^1 \frac{k(x^{*'})}{U_\infty} + \ln \left| \frac{x^* - x^{*'}}{x^{*'}} \right| dx^{*'} \quad \text{mit } y^* = \frac{y}{c}. \quad (2.3)$$

Die Differenz der statischen Druckbeiwerte zwischen Ober- und Unterseite des Profiles $\Delta C_p(x^*)$ ergibt sich in [14] zu

$$\Delta C_p(x^*) = 2 \frac{k(x^*)}{U_\infty}. \quad (2.4)$$

Die Profile der NACA 6-Serie wurden für eine konstante Druck- beziehungsweise Geschwindigkeitsverteilung entworfen. So folgt aus Glg.(2.4), daß die Wirbeldichte hier konstant zu setzen ist.

H.Glauert hat für die Wirbeldichte einen *Fourier*'schen Ansatz vorgeschlagen:

$$k(\hat{\varphi}) = 2U_\infty \left(A_0 \tan \frac{\hat{\varphi}}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\hat{\varphi}) \right) \quad \text{mit } \hat{\varphi} = \arccos(2x^* - 1) \quad (2.5)$$

Für die NACA 6-Serie gilt demnach:

$$k = 2U_\infty C \quad \text{mit } C = \text{konstant} \quad (2.6)$$

Die Auftriebskraft ergibt sich allg. nach *Kutta-Joukowski*:

$$A = \rho U_{\infty} b \Gamma \quad (2.7)$$

Die Dichte des Fluids wird mit ρ , die Breite des Flügels bzw. die Länge der Schaufel wird mit b bezeichnet. Mit dem Auftriebsbeiwert

$$C_A = \frac{2A}{\rho b l U_{\infty}^2} \quad (2.8)$$

ergibt sich:

$$C_A = \frac{2}{U_{\infty}} \int_0^1 k(x^*) dx^* = \int_0^1 \Delta C_p(x^*) dx^* \quad (2.9)$$

Setzt man Glg.(2.6) in die allgemeine Gleichung der Skelettlinie Glg.(2.3) mit $\alpha = 0$ ein, so erhält man die Skelettlinie der NACA 6-Serie:

$$y^{*(s)}(x^*) = -\frac{C}{\pi} ((1-x^*) \ln(1-x^*) + x^* \ln x^*) \quad (2.10)$$

Durch Ableitung dieser Gleichung gelangt man zu dem Ergebnis, daß die größte Wölbung bei 50% der Profiltiefe liegt und $f/c = 0.221C$ beträgt. Setzt man Glg.(2.6) in Glg.(2.9) ein, so erhält man den allgemeinen Auftriebsbeiwert der NACA 6-Profile:

$$C_A = 4C = \frac{4\pi f}{c \ln 2} \quad (2.11)$$

Liest man also aus einer NACA 65 Bezeichnung eines Profiles einen isolierten Auftriebsbeiwert heraus, so erhält man daraus C (bzw. f/c) und daraus $y^{*(s)}(x^*)$, vorausgesetzt $a = 1$. $y^{*(s)}(x^*)$ hat an der Profelnase und an der Hinterkante eine senkrechte Tangente, deren Steigung jedoch sehr rasch abnimmt. Dies führte insbesondere bei der Herstellung immer wieder zu Problemen. Als rechnerischen Wert für die Endneigungen werden deshalb diejenigen bei $x^* = 0.005$ bzw. $x^* = 0.995$ verwendet. Statt der ursprünglichen Form der Skelettlinie aus Glg.(2.10), ist es üblich die eines Kreissektors zu verwenden, da diese nur unwesentliche Abweichungen von der analytisch berechneten Form aufweist, siehe Abb.(2.3).

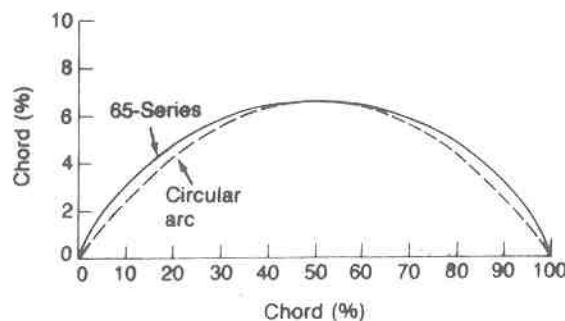
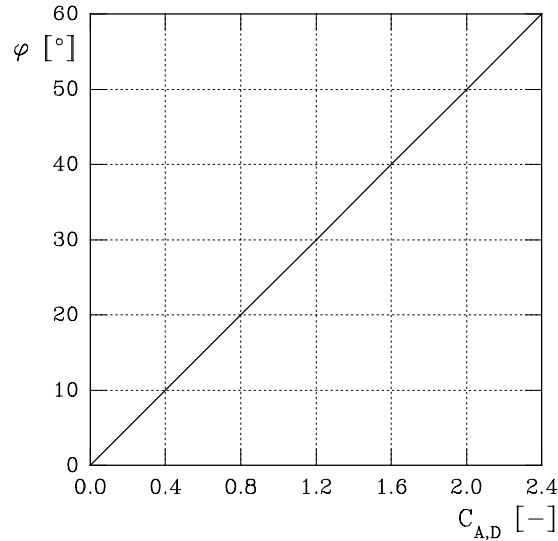


Abbildung 2.3: Vergleich NACA 65-Skelettlinie-Kreisbogensektor [4]

Wird die Form der Skelettlinie geändert, so ändert sich auch deren Auftriebsbeiwert. Abb.(2.4) zeigt die Abhängigkeit der Wölbung des Kreisbogensektors vom Auslegungsauftriebsbeiwert.

Abbildung 2.4: Abhängigkeit $C_{A,D}$ vom Wölbungswinkel des Kreissektors

Die Profilwölbung φ ist in Abb.(2.1) dargestellt.

2.3 Bestimmung der Dickenverteilung

Die Bestimmung der Dickenverteilung mit Hilfe der Tropfentheorie ist prinzipiell ähnlich der Bestimmung der Skelettlinie durch die Skeletttheorie. *J.Allen* hat gezeigt, daß sich eine *Glauert'sche* Reihe in zielführender Weise auch auf die Quellenbelegung der Profillehne anwenden läßt. Trotzdem ist die korrekte Lösung dieses Problems, insbesondere für die NACA 65-Profile, nicht so anschaulich herbeizuführen wie im Falle der Skelettlinie. So möge an dieser Stelle nur eine in [15] gefundene Approximationsfunktion des Tropfens angegeben werden. Die dimensionslose y -Koordinate des Profiltropfens wird mit $y^{*(d)}(x^*)$ bezeichnet und ergibt sich zu

$$y^{*(d)}(x^*) = \frac{d}{c} (1 - x^*) \frac{1.0675\sqrt{x^*} - 0.2758x^* + 2.4478x^{*2} - 2.8385x^{*3}}{1 - 0.1760x^*}. \quad (2.12)$$

Das Profil hätte mit dieser Dickenverteilung eine unendlich spitze Hinterkante, die natürlich nicht herstellbar ist. Es haben sich deshalb verschiedene Möglichkeiten etabliert, das Profil fertigungstechnisch günstiger zu verändern. Zwei dieser Abänderungen werden im folgenden vorgestellt:

- Ab 60% der Sehnenlänge wurde die Kontur linear zu einem Hinterkantenradius von $r/c = 0.8\%$ verjüngt.
- Es wurde ein Tropfen mit $d/c = 0.16\%$ auf $d/c = 0.10\%$ verkleinert und um $y = \pm 0.0015x$ vergrößert. Das Profil hieß NACA 65-010 blower section.

All diese Änderungen hatten strukturelle Vorteile, jedoch zu vernachlässigende aerodynamische Nachteile. Im anschließenden Rechenverfahren wird die ursprüngliche, nicht aufgedickte Profilform untersucht.

Tab.(2.1) zeigt die Abmessungen eines Profiltropfens mit $d/c = 0.10$, einer Skelettlinie mit einem isolierten Auftriebsbeiwert $C_A = 1.0$ und die Dickenverteilung des NACA 65-010 blower section jeweils bezogen auf die Sehnenlänge.

x in % Sehnenlänge c	y_d in %Sehnenlänge c	y_s in % Sehnenlänge c	NACA 65-010 blower section in % Sehnenlänge c
0	0	0	0
0.5	0.772	0.250	0.752
0.75	0.932	0.350	0.890
1.25	1.169	0.535	1.124
2.5	1.574	0.930	1.151
5.0	2.177	1.580	2.222
7.5	2.647	2.120	2.709
10	3.040	2.585	3.111
15	3.666	3.365	3.746
20	4.143	3.980	4.218
25	4.503	4.475	4.570
30	4.760	4.860	4.824
35	4.924	5.150	4.982
40	4.996	5.355	5.057
45	4.963	5.475	5.029
50	4.812	5.515	4.870
55	4.530	5.475	4.570
60	4.146	5.355	4.151
65	3.682	5.150	3.627
70	3.156	4.860	3.038
75	2.584	4.475	2.451
80	1.987	3.980	1.847
85	1.385	3.365	1.251
90	0.810	2.585	0.749
95	0.306	1.580	0.354
100	0	0	0.150

Tabelle 2.1: Geometriedaten aus dem NACA-Report 1368 [6]

In dieser Arbeit soll ein im thermischen Turbomaschinenbau übliches Profil, welches sich durch einen nicht allzu großen C_A -Wert und der üblichen Dickenverteilung auszeichnet, verwendet werden. Es wird deshalb das Profil mit der Bezeichnung NACA 65-(15)10 gewählt. Die Profilgeometrie wird entweder aus [1], in der für alle gängigen Profile Daten vorhanden sind, oder aus Tab.(2.1) durch skalieren der Skelettlinie von $C_A = 1.0$ auf das notwendige $C_A = 1.5$ erhalten. Die Werte der Profildicke in der Tab.(2.1) können direkt übernommen werden. Für welchen Weg man sich entscheidet, ist gleichgültig, da beide Varianten dasselbe Ergebnis liefern. Die so erhaltenen Koordinaten der Skelettlinie und der Dickenverteilung müssen dann nach den Angaben in [1], die wie folgt lauten, addiert werden, da die Dickenverteilung normal auf die Skelettlinie aufzutragen ist.

$$\begin{aligned}
 x_o &= x_s - y_d \sin \xi \\
 y_o &= y_s + y_d \cos \xi \\
 x_u &= x_s + y_d \sin \xi \\
 y_u &= y_s - y_d \cos \xi
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Indizes bedeuten Oberseite (o), Unterseite (u), Dickenverteilung (d) und Skelettlinie (s) des Profils. Der Winkel ξ bezeichnet die Steigung der Tangente im jeweiligen Punkt. Er kann sowohl in [6] als auch in [1] nachgeschlagen werden.

Kapitel 3

Aufbereitung der vorhandenen Meßdaten

3.1 Bearbeitung der NACA-Meßdaten

Das Verdichtergitter („Cascade“) besteht, wie es der Aufgabe entspricht, aus NACA 65-(15)10 Profilen. Die Definitionen der Winkelmessung und deren Bezeichnung wurde aus dem NACA-Report 1368 [6] übernommen und in Abb.(3.1) dargestellt.

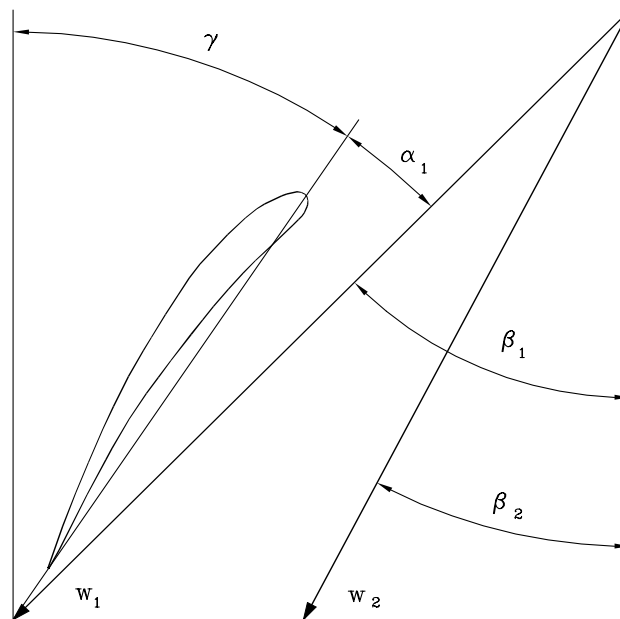


Abbildung 3.1: NACA-Winkeldefinitionen

Das jetzt gesetzte Ziel ist es, aus den im NACA-Report 1368 vorhandenen Daten zwei Diagramme zu erstellen, die für die Verdichterauslegung im thermischen Turbomaschinenbau von entscheidender Bedeutung sind. Das ist ein Diagramm des Abströmwinkels β_2 über dem Anströmwinkel β_1 und ein zweites, nämlich einen im Moment noch nicht definierten Verlustbeiwert ω_1 über dem Anströmwinkel β_1 .

Ein Verdichtergitter wird durch drei Parameter festgelegt:

- Profilgeometrie, hier NACA 65-(15)10
- Staffelungswinkel γ („stagger angle“)
- Solidity $\sigma = c/s$

Das Profil ist ausgewählt, die Solidity wird mit $\sigma = 1$ festgelegt. Der Staffelungswinkel γ ergibt sich, wie in Abb.(3.1) ersichtlich, zu

$$\gamma = \beta_1 - \alpha_1. \quad (3.1)$$

In den Diagrammen des NACA-Reports 1368 tritt der „flow turning angle“ θ auf:

$$\theta = \beta_1 - \beta_2 \quad (3.2)$$

In Verdichtern bleiben im Zylinderschnitt durch eine Schaufelreihe σ und γ konstant. Daraus folgt, daß β_1 und α_1 durch Glg.(3.1) eindeutig einander zugeordnet sind.

Diagramme gibt es im NACA-Report 1368 für vier verschiedene β_1 -Werte, jeweils über einem verschieden großen α_1 -Bereich aufgetragen, siehe Abb. (3.2).

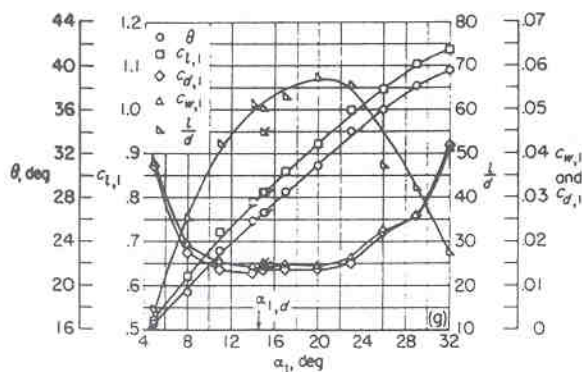


FIGURE 10.—Blade-surface pressure distributions and blade section characteristics for the cascade combination, $\beta_1 = 30^\circ$, $\sigma = 1.00$, and blade section, NACA 65-(15)10.

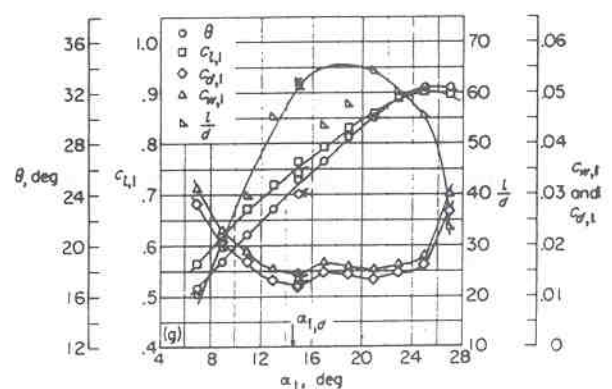


FIGURE 31.—Blade-surface pressure distributions and blade section characteristics for the cascade combination, $\beta_1 = 45^\circ$, $\sigma = 1.00$, and blade section, NACA 65-(15)10.

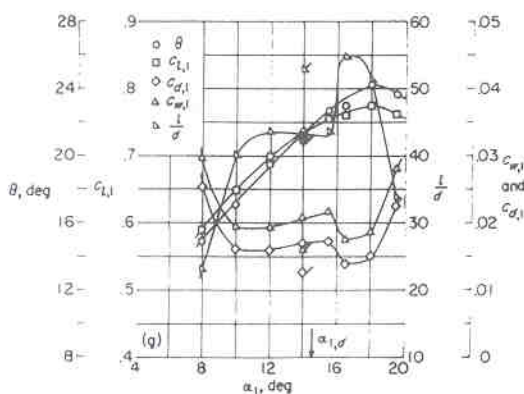


FIGURE 57.—Blade-surface pressure distributions and blade section characteristics for the cascade combination, $\beta_1 = 60^\circ$, $\sigma = 1.00$, and blade section, NACA 65-(15)10.

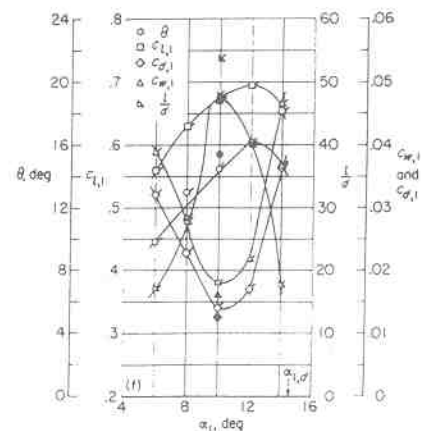


FIGURE 75.—Blade-surface pressure distributions and blade section characteristics for the cascade combination, $\beta_1 = 70^\circ$, $\sigma = 1.00$, and blade section, NACA 65-(15)10.

Abbildung 3.2: NACA-Diagramme des Gitters NACA 65-(15)10, ($\sigma = 1.0$) [6]

3.2 Der Auslegungspunkt („Point of Design“)

Den Auslegungswert des Anstellwinkels α_{1D} kann man durch interpolieren im entsprechenden Diagramm des NACA-Reports 1368 [6] gewinnen. Genauer ist jedoch die Bestimmung nach *Anschütz* [2]. Hier wurden die Meßdaten des NACA-Report 1368 numerisch aufbereitet. Da α_{1D} allgemein nur eine Funktion der Solidity und des Auftriebsbeiwertes ist, gilt nach [2]:

$$\begin{aligned}\alpha_{1D} &= f_1(\sigma) + f_2(\sigma)C_A \quad \text{mit} \\ f_1(\sigma) &= 0.34 + 3.8\sigma - 0.57\sigma^2 \\ f_2(\sigma) &= 2.0 + 6.7\sigma - 1.4\sigma^2\end{aligned}\tag{3.3}$$

Somit ergibt sich ein Auslegungsanstellwinkel $\alpha_{1D} = 14.52^\circ$. Der Staffelungswinkel folgt mit einem repräsentativen β_1 , hier 45° , und dem Auslegungsanstellwinkel $\alpha_1 = 14.52^\circ$ aus Glg.(3.1) zu $\gamma = 30.48^\circ$.

Die NACA definiert den Auslegungspunkt („Point of Design“) als denjenigen Anstellwinkel, bei dem die glatteste Druckverteilung an Profilober- bzw. -unterseite auftritt. Ist die Druckverteilung bei einem bestimmten Anstellwinkel im niederen Machzahlbereich günstig, so wird sich diese Eigenschaft auch im höheren Machzahlbereich bei gleichem Anstellwinkel nicht ändern.

Um ein Diagramm $\beta_1 = f(\beta_2)$ zu erstellen, wird jeweils einer der vier β_1 -Werte aus Abb.(3.2) mit $\gamma = 30.48^\circ$ in Glg.(3.1) eingesetzt. Daraus erhält man jeweils einen zum jeweiligen β_1 -Wert gehörenden α_1 -Wert, mit dem man dann aus dem entsprechenden Diagramm in Abb.(3.2) einen θ - bzw. C_D -Wert gewinnt. Aus den vorhandenen Daten ergibt sich die mögliche Variation von α_1 und daraus mit Glg.(3.1) die Variation des Anströmwinkels:

$$\begin{aligned}7.52^\circ &< \alpha_1 < 19.52^\circ \\ 38^\circ &< \beta_1 < 50^\circ\end{aligned}$$

Die weitere Vorgangsweise kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Die NACA-Report 1368 Daten wurden numerisch aufbereitet und in einem β_1 -Bereich zwischen 38° und 50° mit Hilfe linearer Ansätze verfeinert. Die β_1 -Werte wurden mit Hilfe von Glg.(3.1) in zugehörige α_1 -Werte umgerechnet, aus denen wieder mit Hilfe linearer Ansätze θ - bzw. C_D -Werte für die verfeinerten β_1 -Werte folgten. Aus den gewonnenen θ -Werten folgen mit Glg.(3.2) die zur Darstellung gesuchten β_2 -Werte.

Der Begriff des „Widerstandsbeiwertes“ ist, ebenso wie der des „Anstellwinkels“, im Turbomaschinenbau nicht sehr gebräuchlich. Der Anstellwinkel wurde schon durch Glg.(3.1) eliminiert. Der C_D -Wert wird nach *Vavra* [16] in einen Totaldruckverlustbeiwert ω_2 umgerechnet. (Bei *Vavra* wird dieser Beiwert mit ζ bezeichnet.) Der Index bezieht sich auf den Ort, an dem die Geschwindigkeit bestimmt wird, mit Hilfe der der Totaldruckverlust dimensionslos gemacht wird. Hierbei bezieht sich „1“ auf die Anström-, „2“ auf die Abströmseite der Schaufelreihe. Somit gilt nach *Vavra* [16]:

$$\omega_2 = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{\frac{\rho}{2} w_2^2}\tag{3.4}$$

$$C_D = \frac{\omega_2 \cos^3 \beta_\infty}{\sigma \cos^2 \beta_2}\tag{3.5}$$

Der Winkel β_∞ der vektoriell gemittelten Geschwindigkeit w_∞ folgt bei konstanter Axialgeschwindigkeit aus Abb.(3.3) zu

$$\tan \beta_\infty = \frac{1}{2} (\tan \beta_1 + \tan \beta_2) . \quad (3.6)$$

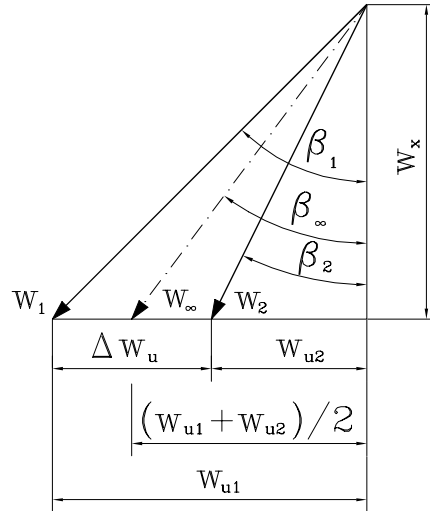


Abbildung 3.3: Geschwindigkeitsdreieck eines Verdichtergitters

Bei der Behandlung von Verdichtern ist es üblich, die Beiwerte auf die Anströmseite zu beziehen. Es muß also der Zusammenhang $C_D\omega_1$ hergestellt werden. Der Totaldruckverlustbeiwert bezogen auf die Anströmseite ist folgendermaßen definiert:

$$\omega_1 = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{\frac{\rho}{2} w_1^2} \quad (3.7)$$

Mit Glg.(3.4) und der geometrischen Beziehung

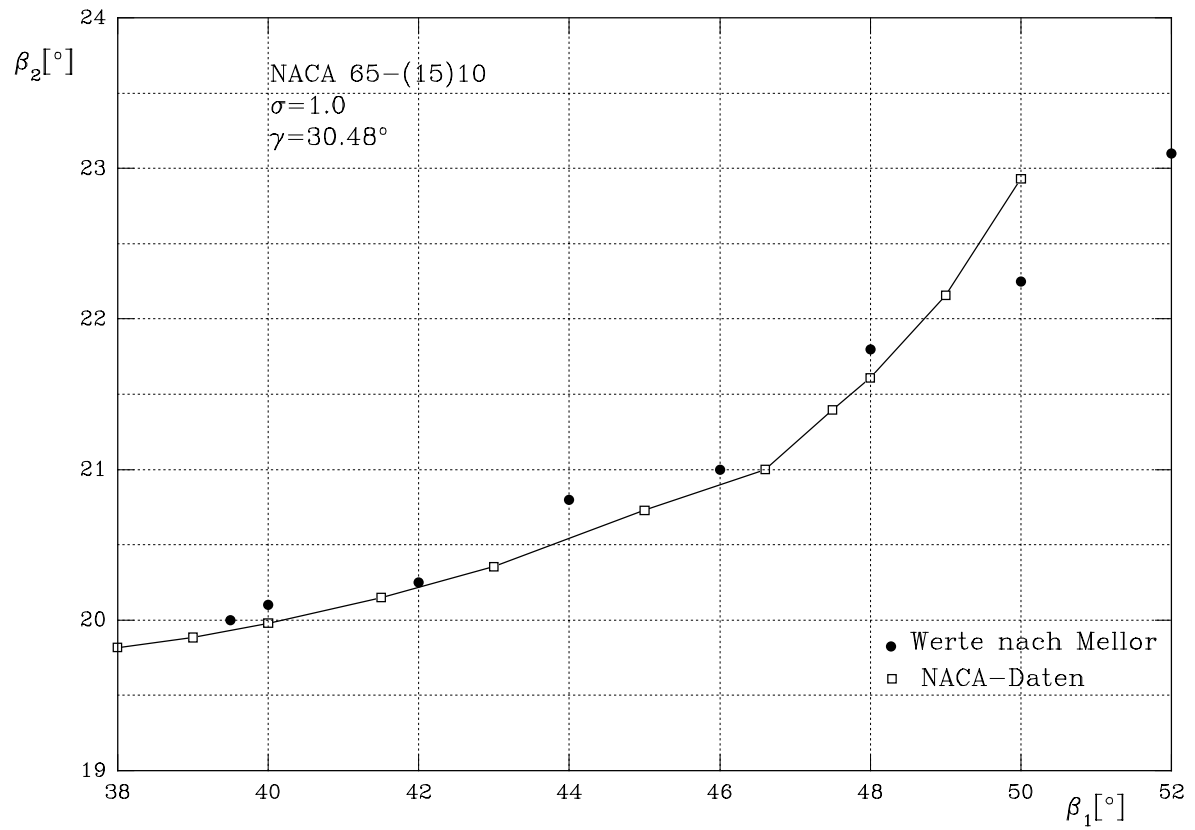
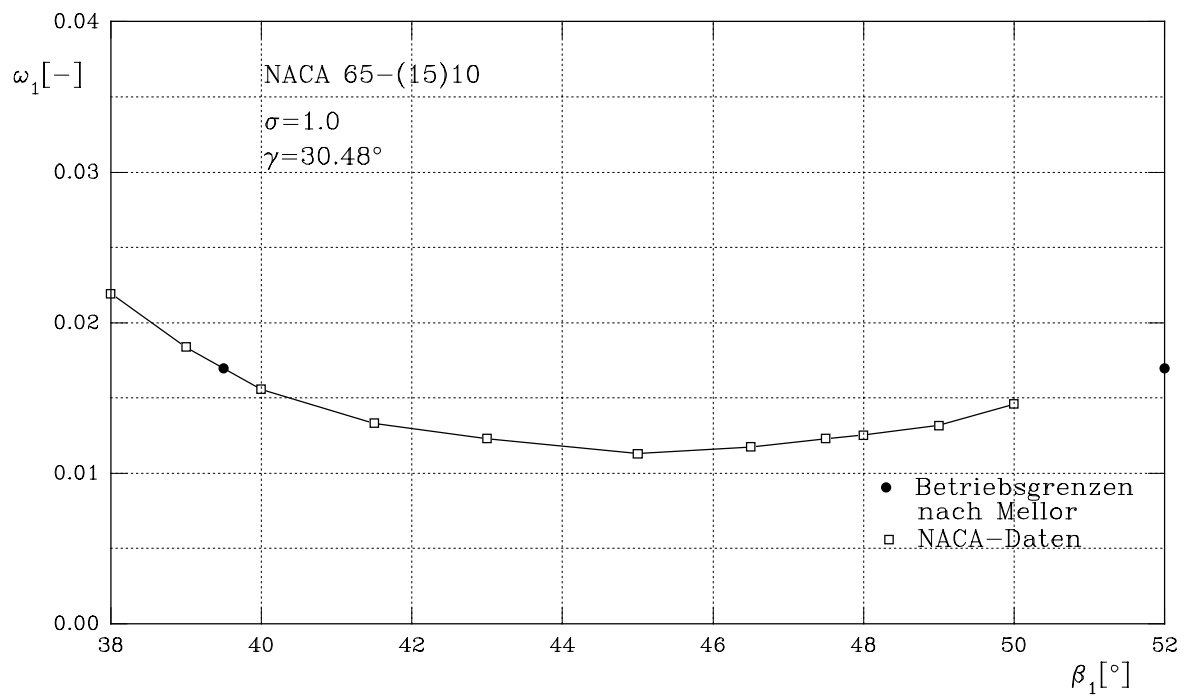
$$w_x = w_1 \cos \beta_1 = w_2 \cos \beta_2 \quad (3.8)$$

(siehe Abb.(3.3)) folgt aus Glg.(3.5):

$$\omega_1 = C_D \sigma \frac{\cos^2 \beta_1}{\cos^3 \beta_\infty} \quad (3.9)$$

Das Endergebnis, das heißt die beiden Zusammenhänge $\beta_2 = f(\beta_1)$ und $\omega_1 = g(\beta_1)$ ist graphisch in Abb.(3.4) und Abb.(3.5) dargestellt.

Die aus dem Mellor-Diagramm, Abb.(3.8), abgelesenen Punkte sind ebenfalls eingezeichnet.

Abbildung 3.4: Abströmwinkel β_2 über Anströmwinkel β_1 Abbildung 3.5: Totaldruckverlustbeiwert ω_1 über Anströmwinkel β_1

3.3 Die Mellor-Diagramme

Die in den Jahren 1938-1957 von der NACA erstellten Testdaten, zusammengefaßt im Report 1368, wurden 1956 von *Mellor* in die sogenannten Mellor-Diagramme verarbeitet, siehe [10]. Der Unterschied zur NACA-Datenverarbeitung bestand darin, daß *Mellor* den Abströmwinkel β_2 über dem Anströmwinkel β_1 mit den Parametern γ und „incidence“ für verschiedene NACA-Profile und variierendem σ darstellte. Die Definition des „incidence“-Winkels i entspricht *nicht* der des Anstellwinkels („angle of attack“) α wie Abb.(3.6) verdeutlicht. Die Darstellung nach *Mellor* ist für die praxisnahe Verdichterauslegung von großer Bedeutung. Vorsicht ist bei den Winkelbezeichnungen geboten, da in den englischen Mellor-Diagrammen, die aus dem NACA-Report geläufigen Winkel β_1 bzw. β_2 mit α_1 bzw. α_2 bezeichnet werden. Abb.(3.8) zeigt das Mellor-Diagramm für das Gitter NACA 65-(15)10, $\sigma = 1$. Die Verwendung der Mellor-Charts zeigt Abb.(3.7). Die hier dargestellte „chordal incidence“ entspricht dem α_1 -Wert im NACA-Report 1368.

Die Betriebsgrenzen in den Mellor-Diagrammen (dicke Kurven) wurden als diejenigen „incidence“-Winkel definiert, bei denen der Totaldruckverlust den 1.5-fachen Wert seines Minimums annimmt. Diese werden mit positiver („stall“) bzw. negativer Ablösung gleichgesetzt.

Die Abweichungen zwischen den Punkten nach Mellor und dem Ergebnis der Auswertung in Abb.(3.4) ist darauf zurückzuführen, daß die zur Darstellung notwendigen Werte durch lineare Interpolationen aus den vorhandenen NACA-Meßwerten errechnet wurden.

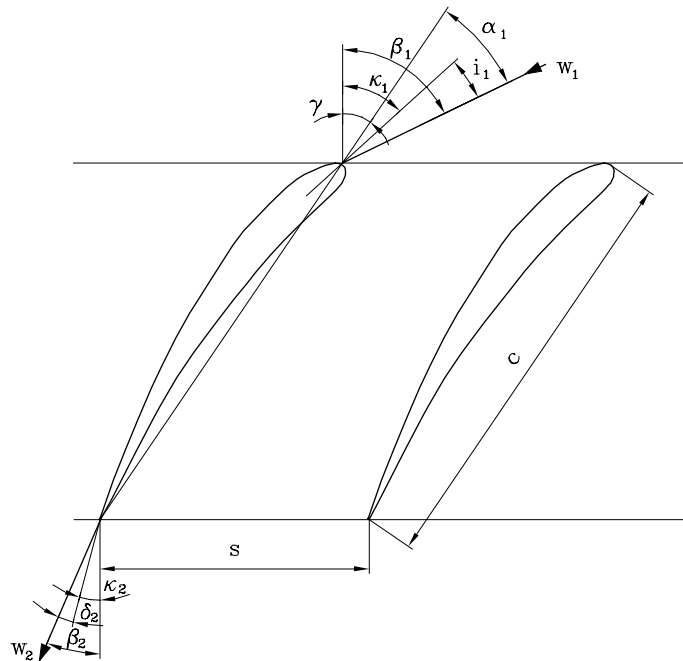


Abbildung 3.6: Definition des incidence-Winkels

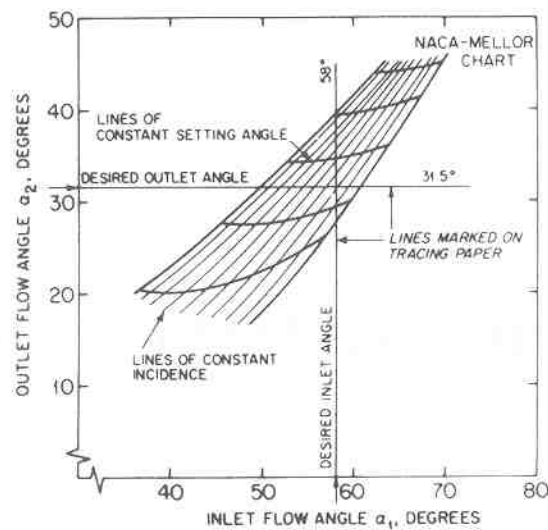
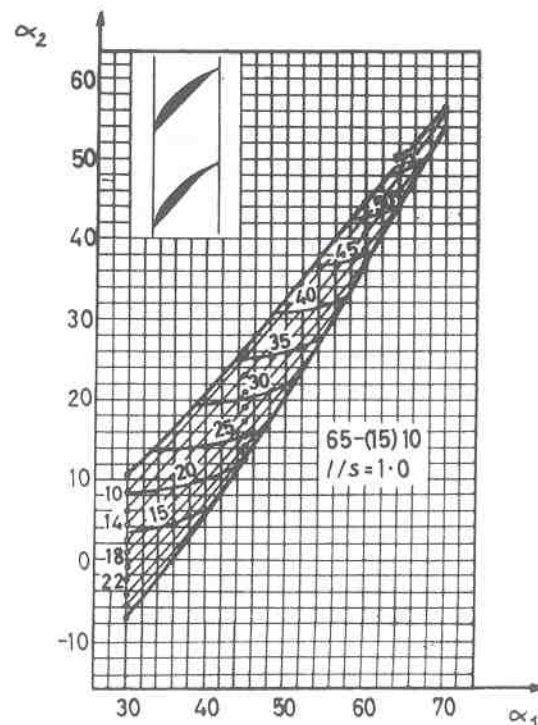


Abbildung 3.7: Verwendung der Mellor-Diagramme [18]

Abbildung 3.8: Mellor-Diagramm für das Verdichtergitter NACA 65-(15)10, ($\sigma = 1.0$) [10]

Aus Abb.(3.8) lassen sich die Betriebsgrenzen ablesen, die in Tab.(3.1) zusammengefaßt sind:

β_1	β_2
39.5°	20°
52.0°	23.1°

Tabelle 3.1: Betriebsgrenzen aus dem Mellor-Diagramm

Kapitel 4

Eigenschaften turbulenter Strömungen

Im Jahre 1883 hat *Osborne Reynolds* mit dem Farbfadenversuch gezeigt, daß eine ursprünglich laminare Strömung unter gewissen Voraussetzungen in eine turbulente Strömung umschlägt. Die für diesen Umschlag maßgeblichen physikalischen Größen wurden in eine dimensionslose Zahl zusammengefaßt, die nach ihm benannt wurde:

$$Re = \frac{u_m D}{\nu} \quad (4.1)$$

Es bezeichnet D den Rohrdurchmesser und u_m die mittlere Durchflußgeschwindigkeit. Die kinematische Viskosität ν steht durch die Dichte des Mediums in direktem Zusammenhang mit der dynamischen Viskosität η :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (4.2)$$

Aus dem Versuch ergab sich, daß der Umschlag von der laminaren Strömung zur turbulenten Strömung bei einer Reynoldszahl von ungefähr 2300 erfolgt. Auch manifestierte er schon damals die Vermutung, daß es sich hierbei um ein Stabilitätsproblem handeln dürfte.

Die folgenden Grundlagen turbulenter Strömungen sind in Anlehnung an [13] angegeben. Turbulente Strömungen sind stets instationär, dreidimensional, wirbelbehaftet und stochastisch (rein zufällig). Für die folgenden Betrachtungen kann das zu untersuchende schlanke Profil als Platte angesehen werden. Die Reynoldszahl wird hier mit der Anströmgeschwindigkeit des Profils w_1 und der Sehnenlänge c zu

$$Re = \frac{w_1 c}{\nu} \quad (4.3)$$

definiert. An der Platte wird sich zu Beginn eine laminare Grenzschicht bilden, deren Dicke und Länge von der Plattenrauigkeit, der Anströmgeschwindigkeit und der Turbulenz der freien Strömung abhängt. Von diesen Parametern hängt auch der Umschlag innerhalb der Grenzschicht von der ursprünglich laminaren Strömung auf eine Strömung turbulenten Charakters ab. Diese Änderung der Strömung wird durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

- eine Zunahme der Grenzschichtdicke
- eine Zunahme des Totaldruckverlustes

Die Turbulenz wird in zwei Gruppen eingeteilt, siehe Abb.(4.1):

- die im Mittel stationäre Strömung (statistisch stationär)
- die im Mittel instationäre Strömung (statistisch instationär)

Für den praktisch wichtigen Fall der statistisch stationären Strömung gilt:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t) \quad (4.4)$$

Es bedeuten hierbei

$u(x, y, z, t)$	der Momentanwert
$\bar{u}(x, y, z)$	der zeitliche Mittelwert
$u'(x, y, z, t)$	der Schwankungswert von u

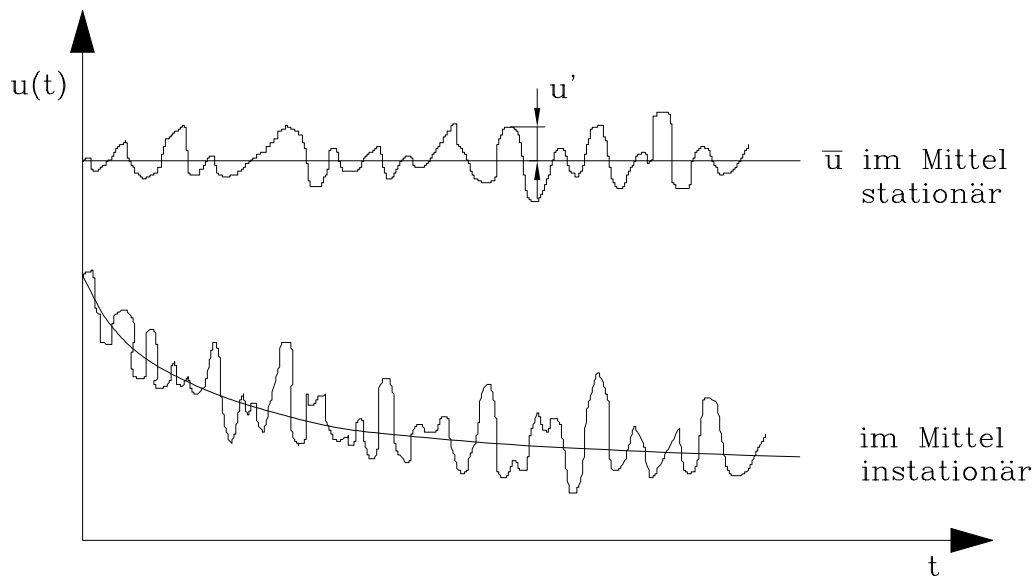


Abbildung 4.1: Verlauf der x -Komponente der Geschwindigkeit an einem festen Punkt

Der zeitliche Mittelwert wird als arithmetischer Mittelwert definiert:

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(x, y, z, t) dt \quad (4.5)$$

Hierbei muß das Zeitintervall Δt hinreichend groß gewählt werden. Aufgrund von Glg.(4.5) ergibt sich der zeitliche Mittelwert einer Schwankungsgröße stets zu Null:

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = \overline{p'} = 0 \quad (4.6)$$

Von Null verschieden sind jedoch die Mittelwerte der Produkte zweier Schwankungswerte. Man definiert

$$k = \frac{1}{2} \overline{v_j'^2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (4.7)$$

als kinetische Energie der Turbulenz bzw. als Turbulenzenergie. Der Turbulenzgrad, hier am Beispiel der Geschwindigkeitskomponente u wird zu

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\overline{u}} \quad (4.8)$$

definiert. Da der Turbulenzgrad ein zentraler, recht unanschaulicher Begriff ist, mögen hier ein paar Richtwerte angegeben werden:

Der Turbulenzgrad ist etwa

1%	hinter einem Turbulenzgitter
10%	in der Nähe einer festen Wand
>10%	in einem turbulenten Freistrahle oder Nachlauf

Die Turbulenz wird nach der Art ihrer Modellierung in drei Gruppen eingeteilt:

- **Isotrope Turbulenz**
Kennzeichen dieser einfachsten Modellierung der Turbulenz ist die Symmetrie aller statistischen Eigenschaften (d.h. $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$). Es liegt ideale Unordnung vor. Für diese Art der Turbulenzform liegen die meisten Ergebnisse vor. Die turbulente Strömung hinter einem Turbulenzgitter ist nahezu isotrop.
- **Homogene Turbulenz**
Alle statistischen Eigenschaften hängen nicht vom Ort ab, sie sind nur zeitabhängig.
- **Anisotrope oder Scherturbulenz**
Dies wäre der Normalfall einer turbulenten Strömung. Alle statistischen Eigenschaften sind sowohl orts- als auch zeitabhängig. Dieser Fall ist der mit Abstand schwierigste theoretisch zu behandelnde.

Zur Erfassung und Behandlung der Turbulenz haben sich zwei Wege als brauchbar erwiesen:

- **Statistische Turbulenztheorie:** Ihr Ziel ist die Untersuchung der turbulenten Nebenbewegungen, um daraus zeitliche Mittelwerte angeben zu können.
- **Halbempirische Turbulenztheorien:** Unter Zuhilfenahme hypothetischer Ansätze, wie zum Beispiel für die Abhängigkeit der scheinbaren turbulenten Schubspannung von der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit, wird jene direkt bestimmt. *Prandtl* hat im Jahre 1925 mit dem Mischungswegansatz den Grundstein zu diesen sog. Schließungsannahmen gelegt. Diese Theorien verfolgen das Ziel, möglichst allgemeine Ansätze zu formulieren.

Während die statistische Turbulenztheorie bei der Behandlung von isotropen und homogenen Turbulenzproblemen gute Ergebnisse liefert, hat sie bis jetzt bei der Behandlung von Scherturbulenzen versagt.

Kapitel 5

Beschreibung des Rechenverfahrens

Um die Berechnung einer ebenen stationären inkompressiblen Strömung durchführen zu können, müssen die folgenden Gleichungen gelöst werden:

5.1 Grundgleichungen

- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

- Impulsgleichung in x -Richtung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

- Impulsgleichung in y -Richtung:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.3)$$

Darin bezeichnen u und v die skalaren Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{w} in x - bzw. y -Richtung des kartesischen Koordinatensystems, ρ die in diesem Fall konstante Dichte des Mediums, p den Druck und ν die kinematische Viskosität. Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich als vorteilhaft die Gleichungen dimensionslos zu machen. Dazu werden eine charakteristische Länge und eine charakteristische Geschwindigkeit benötigt. Dies sollen hier die Sehnenlänge c und die Anströmgeschwindigkeit w_1 sein. Somit gilt z.B. für u und x :

$$u^* = \frac{u}{w_1} \quad x^* = \frac{x}{c} \quad (5.4)$$

Setzt man Glg.(5.4) in Glg.(5.1) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (5.5)$$

Glg.(5.4) in Glg.(5.2) eingesetzt führt zu:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho w_1^2} \frac{\partial p}{\partial x^*} + \frac{\nu}{c w_1} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (5.6)$$

Daraus folgt

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (5.7)$$

mit $p^* = p/(\rho w_1^2)$ und $(cw_1)/\nu = Re$. Somit ergeben sich die dimensionslosen, zweidimensionalen Grundgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da aber turbulente Strömungen grundsätzlich instationär und dreidimensional sind, müssen auch die Grundgleichungen für diesen Fall angeschrieben werden. Aufgrund der Übersichtlichkeit wird hier die Tensorschreibweise gewählt. Es liegt also folgendes Gleichungssystem vor, das in Anlehnung an [13] und [5] weiterbehandelt wird:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k^2} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (5.10)$$

Die Gleichungen gelten in dieser Form sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen. Nun ist man in der Regel aber nicht an den Momentanwerten der Strömungsgrößen, vielmehr aber an ihren zeitlichen Mittelwerten interessiert. Die Grundgleichungen für die zeitlichen Mittelwerte werden als *Reynolds'sche* Gleichungen bezeichnet. Setzt man den Ansatz aus Glg.(4.4) in Glg.(5.9) ein, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k + v'_k) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (5.11)$$

Nach zeitlicher Mittelung verbleibt

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0. \quad (5.12)$$

Da also die Kontinuitätsgleichung sowohl für die Momentanwerte als auch für die zeitlichen Mittelwerte gilt, gilt sie auch für die Schwankungswerte:

$$\frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (5.13)$$

Setzt man die Glg.(4.4) in die Impulsgleichungen (5.10), die auch als Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet werden, ein, so werden sich auf Grund der nichtlinearen konvektiven Terme turbulente Zusatzglieder ergeben. Wird der konvektive Term der Glg.(5.10) mit Hilfe von Glg.(5.9) umgeformt und danach Glg. (4.4) eingesetzt, so ergibt sich

$$v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_j) = \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{v}_k + v'_k)(\bar{v}_j + v'_j)] = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_j + \bar{v}_k v'_j + v'_k \bar{v}_j + v'_k v'_j). \quad (5.14)$$

Nach zeitlicher Mittelung ergibt sich

$$\overline{v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_k v'_j}). \quad (5.15)$$

Wird Glg.(5.10) zeitlich gemittelt und danach Glg.(5.15) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{v_k v_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{v'_k v'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \overline{v_j}}{\partial x_k^2}. \quad (5.16)$$

Hierbei wurde eine im Mittel stationäre Strömung angenommen. Schreibt man obige Gleichung unter Beachtung von Glg.(5.12) um, so erhält man die Bewegungsgleichung für den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit, die *Reynolds'sche* Gleichung der Impulsbilanz:

$$\overline{v_k} \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} - \overline{v'_k v'_j} \right) \quad (5.17)$$

Man bezeichnet

$$-\rho \overline{v'_k v'_j} = (\tau_{jk})_{tur} \quad (5.18)$$

als den turbulenten oder scheinbaren oder *Reynolds'schen* Spannungstensor. In Matrixschreibweise sieht dieser folgendermaßen aus:

$$(\tau_{jk})_{tur} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{v_1'^2} & \overline{v'_1 v'_2} & \overline{v'_1 v'_3} \\ \overline{v'_2 v'_1} & \overline{v_2'^2} & \overline{v'_2 v'_3} \\ \overline{v'_3 v'_1} & \overline{v'_3 v'_2} & \overline{v_3'^2} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Von diesen 9 Komponenten sind wegen $\overline{v'_k v'_j} = \overline{v'_j v'_k}$ 6 Komponenten voneinander unabhängig. Um Glg.(5.17) lösen zu können, muß der *Reynolds'sche* Spannungstensor durch geeignete Turbulenzmodelle modelliert werden. Der Bedarf nach derartigen Modellen würde natürlich entfallen, hätte man derart große und schnelle Rechner, so daß es möglich wäre, ein entsprechend feines Netz zu verwenden, um so alle turbulenten Bewegungen direkt berechnen zu können. Den Zusammenhang zwischen den einzelnen Schwankungsanteilen bezeichnet man als Korrelation. Diese Korrelationen stellen einen Impulstransport durch turbulente Schwankungsbewegungen dar.

Der turbulente Spannungstensor kann wie ein molekularer gedeutet werden. Das heißt, die Glieder in der Hauptdiagonalen stellen Normalspannungen dar, während alle anderen als Schubspannungen gedeutet werden können. Durch das Auftreten dieses turbulenten Spannungstensors ist jedoch das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen. Es treten mehr Unbekannte auf, als Gleichungen vorhanden sind. Im Gegensatz dazu steht das laminare Problem, bei dem die 4 Unbekannten u, v, w, p durch die Kontinuitätsgleichung und die Impulsbilanzen berechnet werden können. Deshalb wird man nun versuchen, für den *Reynolds'schen* Spannungstensor eine Bilanzgleichung zu formulieren, um so das Gleichungssystem wieder zu schließen. Derartige Bilanzgleichungen werden allgemein als Transportgleichungen bezeichnet. Man wird erkennen, daß die Transportgleichungen ihrerseits neue unbekannte Korrelationsfunktionen enthalten. Für jede dieser unbekannten Korrelationsfunktionen läßt sich eine Transportgleichung herleiten, die jedoch wieder neue unbekannte Korrelationen enthält. Die Ordnung der Tensoren in diesen Transportgleichungen wird jeweils um eins erhöht. So enthält die Transportgleichung für $\overline{v'_i v'_j}$ eine Tripelkorrelation $\overline{v'_i v'_j v'_k}$, also einen Tensor dritter Stufe. Das Schließungsproblem läßt sich deshalb auf diesem Weg nicht lösen. Der einzige Weg führt über sogenannte halbempirische Schließungsannahmen, d.h. physikalische Annahmen über die Turbulenz in Form von Turbulenzmodellen.

Boussinesq definierte 1877 in Anlehnung an den *Newton'schen* Ansatz für den molekularen Spannungstensor durch

$$(\tau_{jk})_{tur} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{v_k}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{jk} \quad (5.20)$$

eine scheinbare Zähigkeit $\rho\nu_t$, mit Hilfe der Wirbelviskosität ν_t . Das hier vorkommende k bezeichnet die durch Glg.(4.7) definierte kinetische Turbulenzenergie. ν_t ist im Gegensatz zur molekularen Viskosität keine Stoffgröße, sondern eine Ortsfunktion, die sich im Strömungsfeld ändert. δ_{jk} ist das Kroneckerdelta. Es besitzt eine Schalterfunktion, die 1 gibt, wenn $j = k$ ist, und 0 ist bei $j \neq k$. Um die Wirbelviskosität zu quantifizieren wird das Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modell herangezogen. Daraus folgt:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad C_\mu = 0.09 \quad (5.21)$$

Somit wurde der bei turbulenter Strömung auftretende unbekannte *Reynolds'sche* Spannungstensor zurückgeführt auf die Bestimmung von k und ε , die Dissipationsrate von k .

Um die Elimination der *Reynolds'schen* Spannungen anschaulich darzustellen, wird im folgenden wieder auf die kartesische Darstellung übergegangen. Exemplarisch wird die Vorgangsweise für die x -Richtung im zweidimensionalen Raum vorgestellt.

Ausgangspunkt ist die Glg.(5.17)

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \overline{u'u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{v'u'} \right). \quad (5.22)$$

Die *Reynolds'schen* Spannungen werden mit Glg.(5.20) umgeformt zu

$$-\overline{u'u'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k \quad \text{bzw.} \quad (5.23)$$

$$-\overline{v'u'} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right).$$

Setzt man nun Glg.(5.23) in Glg.(5.22) ein und beachtet, daß ν_t ortsabhängig ist, so ergibt sich unter Verwendung von

$$\frac{\partial}{\partial x} : \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y \partial x} = 0$$

folgende Gleichung:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\bar{p} + \frac{2}{3} k \right)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\nu + \nu_t) 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] \quad (5.25)$$

Wird die Gleichung nun wie anfangs für den laminaren Fall auch dimensionslos gemacht, so ergibt sich

$$\bar{u}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) 2 \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial x^*} \right] + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial y^*} + \frac{\partial \bar{v}^*}{\partial x^*} \right) \right]. \quad (5.26)$$

Re_t bezeichnet hier die turbulente Reynoldszahl

$$Re_t = \frac{w_1 c}{\nu_t}. \quad (5.27)$$

\bar{p}^* bezeichnet den dimensionslosen gemittelten Druck

$$\bar{p}^* = \frac{\bar{p} + \frac{2}{3} k}{\rho} \quad \text{bei} \quad \rho = \text{konstant.} \quad (5.28)$$

Somit ergeben sich allgemein die dreidimensionalen instationären turbulenten reynoldsgemittelten *Navier-Stokes*-Gleichungen, jetzt wieder in Tensorschreibweise, zu:

$$\frac{D\bar{u}_j^*}{Dt} = -\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_t} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial \bar{u}_k^*}{\partial x_j^*} \right) \right] \quad \text{mit } j = 1, 2, 3 \quad (5.29)$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich für das vorliegende zweidimensionale Problem, indem $j = 1, 2$ gilt.

Die modellierten Transportgleichungen für k und ε finden sich unter anderen auch in [12].

Sie lauten:

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \left(\frac{\partial k}{\partial y} \right) \right] + P - \varepsilon \quad (5.30)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right] + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5.31)$$

Der Produktionsterm P ergibt sich zu:

$$P = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5.32)$$

Die Modellkonstanten ergeben sich zu:

$C_\mu[-]$	$\sigma_k[-]$	$\sigma_\varepsilon[-]$	$C_1[-]$	$C_2[-]$
0.09	1.00	1.30	1.44	1.92

Tabelle 5.1: Modellkonstanten des Turbulenzmodelles

Die Werte der Konstanten in Tab.(5.1) sind aus [12] übernommen. Sie gelten für eine große Klasse von Strömungen. Obwohl man des öfteren bei ähnlichen Berechnungen gewisse Variationen dieser Konstanten feststellt, wurde hier darauf verzichtet, von den in [12] angegebenen Werten abzuweichen.

5.2 Grenzschichtmodellierung

Das Standard- $(k - \varepsilon)$ -Turbulenzmodell ist ein sogenanntes High-Reynoldszahl-Modell. Es ist nur in jenen Bereichen des Strömungsfeldes gültig, in denen die Reynoldszahl genügend groß ist, d.h. in denen turbulente Scheinreibung vorherrscht. Daraus folgen die Grenzen dieses Modells. In wandnahen Bereichen nämlich überwiegt die Wirkung der molekularen Viskosität jene der scheinbaren turbulenten Viskosität. Dieser Bereich, der innerhalb der turbulenten Grenzschicht liegt, wird als laminare oder besser als viskose Unterschicht bezeichnet. Bei Annäherung an eine feste Wand werden die Geschwindigkeitsschwankungen und damit auch die *Reynolds*'sche Schubspannung immer kleiner, bis diese direkt an der Oberfläche verschwinden. Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_w. \quad (5.33)$$

Um die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe zu analysieren, legt man eine Schichtenströmung mit $dp_\delta/dx = 0$ zugrunde. p_δ bezeichnet den Druck in der Grenzschicht. Es sind dann alle statistischen Eigenschaften nur mehr von der Querkoordinate y abhängig. Da $\partial \bar{u}/\partial x = 0$

gilt, liefert die Kontinuitätsgleichung (5.12) $\bar{v} = 0$, wenn die Wandgeschwindigkeit $v_w = 0$ angenommen wird. Damit entfallen in der *Reynolds'schen* Gleichung (5.17) die konvektiven Terme und das Druckglied.

Es verbleibt

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right). \quad (5.34)$$

Mit Glg.(5.33) für $y = 0$ folgt nach Integration

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (5.35)$$

Es treten nur die zwei Parameter ν und τ_w/ρ auf. Man bezeichnet

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.36)$$

als Schubspannungsgeschwindigkeit und bildet mit ihrer Hilfe die Größen

- dimensionslose Geschwindigkeit in Wandnähe u^+ :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \quad (5.37)$$

- dimensionsloser Wandabstand y^+ :

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (5.38)$$

In unmittelbarer Nähe der festen Wand kann $\overline{u'v'}$ vernachlässigt werden. Dann liefert Glg.(5.35) nach Integration und unter Beachtung der Haftbedingung $u(y=0) = 0$

$$u^+ = y^+. \quad (5.39)$$

Dies ist die universelle Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der viskosen Unterschicht. Damit wird jene Schicht bezeichnet, in der die molekulare Schubspannung die *Reynolds'sche* Schubspannung bei weitem übersteigt. Mit wachsendem dimensionslosen Wandabstand y^+ nimmt der Anteil von $-\overline{u'v'}$ an der Schubspannung rasch zu, während der molekulare Anteil gleichzeitig immer kleiner wird. Für hinreichend große y^+ liegt der andere Grenzfall

$$-\overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2 \quad (5.40)$$

vor. Nach einer Dimensionsanalyse ergibt sich daraus nach [13]:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{u_\tau}{y}. \quad (5.41)$$

Die darin vorkommende Konstante κ wird als die *v. Karman'sche* Konstante bezeichnet. Nach Integration erhält man

$$\bar{u} = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C_1 \right). \quad (5.42)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Größen folgt das logarithmische Wandgesetz

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C. \quad (5.43)$$

Für den vollturbulenten Bereich liegt somit eine universelle Geschwindigkeitsverteilung der Form von Glg.(5.43) vor. Sie wurde 1932 zuerst von *Prandtl* angegeben.

Das Gesetz von *Reichardt*, Glg.(5.44), verbindet das Gesetz der viskosen Unterschicht und das der turbulenten Übergangsschicht bzw. der vollturbulenten Schicht [7].

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + \kappa y^+) + 7.8 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp(-0.33y^+) \right] \quad (5.44)$$

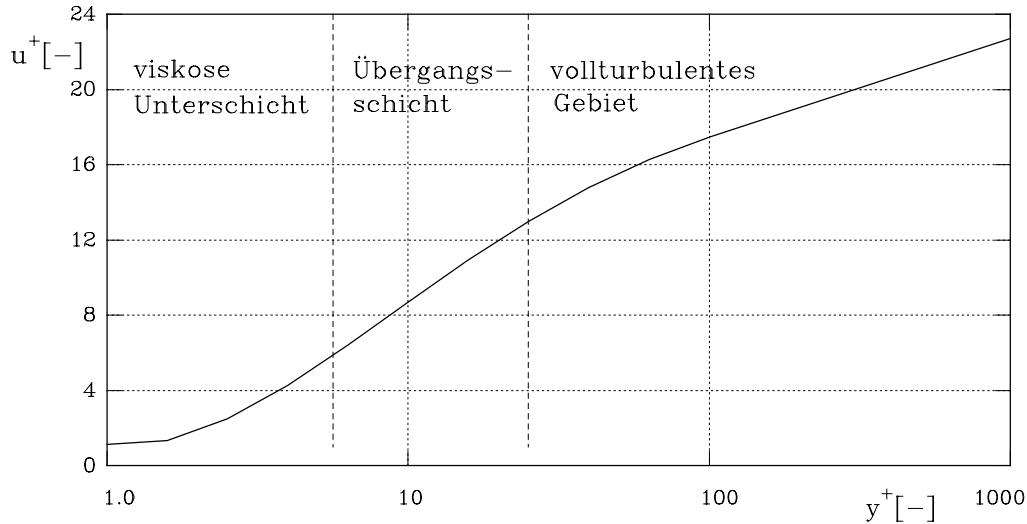


Abbildung 5.1: Das universelle Wandgesetz

Die Konstanten der Glg.(5.41), Glg.(5.44) und Glg.(5.43) wurden experimentell zu $\kappa = 0.4$ und für aerodynamisch glatte Oberflächen $C = 5.5$ ermittelt. Somit lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe in drei Bereiche teilen:

$$\begin{array}{lll} 0 < y^+ < 5: & \text{viskose Unterschicht,} & \tau_{mol} \gg \tau_{tur} \\ 5 < y^+ < 30: & \text{Übergangsschicht,} & \tau_{mol} \approx \tau_{tur} \\ y^+ > 30: & \text{vollturbulente Schicht,} & \tau_{mol} \ll \tau_{tur} \end{array}$$

Obwohl y^+ eigentlich ein dimensionsloser Normalabstand von der Oberfläche ist, ist es manchmal angebracht, es auch als lokale Reynoldszahl zu deuten. Die bisherigen Betrachtungen galten nur für glatte Oberflächen. Für raue Oberflächen hängt die Konstante C von der Rauigkeit ab.

Kapitel 6

Numerisches Lösungsverfahren

6.1 Finite-Elemente-Methode

Die Methode der Finiten Elemente reduziert das Kontinuumsproblem mit unendlich vielen Freiheitsgraden auf ein diskretes Problem mit endlich vielen Freiheitsgraden. Dafür muß zunächst das Kontinuum, hier das Fluid, in eine angemessene Anzahl einfach geformter Elemente, die in diesem Fall zweidimensional sind, unterteilt werden. Die Form der Elemente ist der jeweiligen Aufgabenstellung und den gesuchten Ergebnissen anzupassen. Für das hier zu behandelnde Problem fiel die Wahl auf 9-knotige quadrilaterale Elemente, mit biquadratischer Interpolation der Geschwindigkeiten und stetiger bilinearer Interpolation des Druckes. Diese Reduktion der Ordnung bei der Interpolation des Druckes steht im Einklang mit der *Brezzi-Babuska*-Formulierung. Werden diese Forderungen nicht eingehalten, stellen sich unangenehme Oszillationen im Druckfeld ein. Die Bezeichnung „bi-“ bezieht sich auf die zwei Richtungen im Element, quadrilateral kennzeichnet die vier Seiten des Elementes. Das Element ist in Abb.(6.1) dargestellt. Innerhalb jedes Elementes werden an den Knotenpunkten die abhängigen Variablen, in diesem Fall u, v, p, k, ε errechnet. Grundlage für diese Berechnung bilden die Interpolationsfunktionen, die innerhalb eines Elementes gültig sind. Für das gewählte Element ergeben sich die Interpolationsfunktionen nach [7] für die Geschwindigkeit zu

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}rs(1-r)(1-s) \\ -\frac{1}{4}rs(1+r)(1-s) \\ \frac{1}{4}rs(1+r)(1+s) \\ -\frac{1}{4}rs(1-r)(1+s) \\ -\frac{1}{2}s(1-s)(1-r^2) \\ \frac{1}{2}r(1+r)(1-s^2) \\ \frac{1}{2}s(1+s)(1-r^2) \\ -\frac{1}{2}r(1-r)(1-s^2) \\ (1-r^2)(1-s^2) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Der Druck, der nur an den vier Eckpunkten des Elements berechnet wird, wird bilinear interpoliert:

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Diese beiden Interpolationsfunktionen gelten für alle Elemente des Netzes bis auf diejenigen der ersten Schicht am Profil. Für diese Elemente gibt es spezielle Funktionen die mit Hilfe des

Reichhardt'schen Gesetzes gebildet werden, siehe [8]. Diese Art der Behandlung des Druckes, wird als „mixed formulation“ bezeichnet. Eine weitere Möglichkeit wäre die „penalty formulation“ des Druckes. Hierbei wird die Kontinuitätsgleichung nicht zu Null erfüllt, sondern lautet nach Einführung eines „penalty parameters ε_p “:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\varepsilon_p p \quad \text{mit} \quad 10^{-5} \leq \varepsilon_p \leq 10^{-10} \quad (6.3)$$

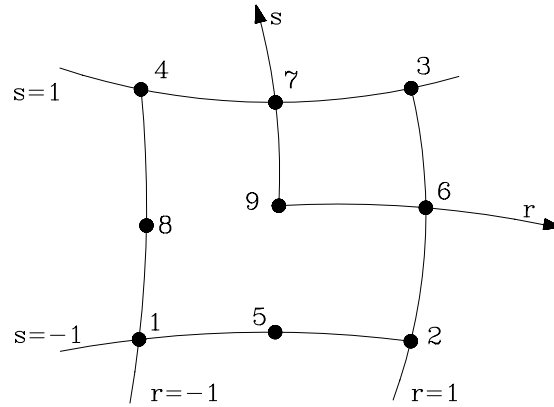


Abbildung 6.1: Das neunknotige Element, dargestellt im isoparametrischen r - s Raum

Durch diese Formulierung wird der Druck aus den Impulsgleichungen eliminiert, kann aber nach Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus der Massenbilanz wieder berechnet werden. Die „penalty-formulation“ ist, unter gewissen Voraussetzungen für ε_p , eine kostengünstige Alternative zur „mixed-formulation“, da eine abhängige Variable weniger durch das Gleichungssystem geführt werden muß. Physikalisch entspricht sie einer sehr geringen Kompressibilität. Um nun das Kontinuumsproblem in ein diskretes Problem überzuführen, bedient sich das Programmpaket FIDAP des *Galerkin*'schen Verfahrens der gewichteten Residuen.

Das Kontinuumsproblem wird wie folgt dargestellt:

$$D(w) = 0 \quad (6.4)$$

mit D als Differentialoperator des Kontinuums mit unendlich vielen Freiheitsgraden und w als gesuchter Funktion. Für w setzt man eine Näherung in Form des *Ritz*'schen Ansatzes

$$w^*(x, y) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(x, y) \quad (6.5)$$

an, wobei q_i unbekannte Koeffizienten und die Funktionen ϕ_i passend gewählte linear unabhängige Ansatzfunktionen sind, die den Randbedingungen des Problems genügen müssen. Sie entsprechen hier den Interpolationsfunktionen des 9-knotigen Elementes. Die Anzahl der Knotenstellen pro Element wird mit N bezeichnet. Setzt man Glg.(6.5) in Glg.(6.4) ein, so entsteht ein Fehler f^* von

$$D(w^*) = f^*, \quad (6.6)$$

der mit größer werdendem N immer kleiner wird. Nach der Methode der gewichteten Residuen muß folgendes Integral über dem Berechnungsbereich V verschwinden:

$$\int_V f^* g_i dV = 0 \quad (6.7)$$

Mit g_i werden die Gewichtsfunktionen bezeichnet. Der Forderung des *Galerkin*'schen Verfahrens entsprechend setzt man für die g_i die Ansatzfunktionen $\phi_i(x, y)$ ein. Es gilt

$$\int_V f^* \phi_i dV = 0, \quad (6.8)$$

beziehungsweise

$$\int_V D(w^*) \phi_i dV = 0. \quad (6.9)$$

Somit werden N Gleichungen für die N Unbekannten q_i erhalten. Nach Einsetzen der aus Glg.(6.9) gewonnenen q_i in Glg.(6.5), ergibt sich eine Näherungslösung für w . Diese konvergiert gegen die exakte Lösung, wenn N gegen Unendlich geht.

Wie wird nun Glg.(6.9) in FIDAP gelöst? In Matrixschreibweise sehen die zu lösenden algebraischen nichtlinearen Gleichungen folgendermaßen aus:

$$\mathbf{K}(\vec{u}) \vec{u} = \vec{F} \quad (6.10)$$

Darin bezeichnen \mathbf{K} die globale Systemmatrix, \vec{u} den globalen mathematischen Vektor der Unbekannten und \vec{F} den mathematischen Vektor der Randbedingungen. FIDAP bietet mehrere verschiedene Verfahren an, um dieses Gleichungssystem zu lösen.

Grundsätzlich gibt es hier zwei verschiedene Gruppen zu unterscheiden:

- die „fully-coupled solver“
- die „segregated solver“

Die erste Gruppe, die man übersetzt als voll gekoppelte Gleichungslöser bezeichnen würde, ist, in Bezug auf die Berechnungszeitdauer, bei größeren Problemen ungünstiger, da die einzelnen Gleichungen aus Glg.(6.10) alle simultan gelöst werden. Um gewisse Konvergenzkriterien zu erfüllen, braucht dieser Gleichungslöser eine kleinere Zahl von zeitmäßig größeren Iterationsschritten. Aufgrund des simultanen LöSENS des Gleichungssystems ergeben sich höhere Ansprüche an die Computerressourcen. Obwohl der „fully-coupled solver“ in den FIDAP-Handbüchern für die vorhandene Problemstellung empfohlen wird, hat die Erfahrung doch gezeigt, daß die Rechendauer hierbei derartige Ausmaße annimmt, daß das Verfahren für den Benutzer unattraktiv wird. Man ist deshalb auf die „segregated solver“ übergegangen. Das Wort „segregated“ bedeutet, daß Glg.(6.10) nicht simultan, sondern entkoppelt gelöst wird. Es gibt dann statt der Glg.(6.10) für die zwei Impulsbilanzen, die Kontinuitätsgleichung und die beiden Transportgleichungen für k und ε jeweils eine Matrixgleichung. Das entkoppelte Verfahren macht es notwendig, den Druck anders als die Geschwindigkeit zu behandeln, da er in der Kontinuitätsgleichung explizit nicht vorkommt. Der Problemstellung entsprechend besteht die Möglichkeit zwischen drei verschiedenen Verfahren zu wählen [9]:

- „pressure protection version“
- „pressure correction version“
- „pressure update version“

Der Unterschied zwischen diesen Behandlungen des Druckes ist, daß die „protection“ und die „update version“ den Druck in jedem Iterationsschritt direkt berechnen, während die „correction version“ nur jeweils eine Druckkorrektur berechnet. Die „pressure protection version“ hat die Eigenschaft, daß, zum Unterschied zur „pressure update version“, die Kontinuitätsgleichung in jedem Iterationsschritt erfüllt wird und nicht erst dann, wenn Konvergenz erreicht wurde. FIDAP empfiehlt, und dieser Empfehlung wurde auch nachgegangen, die „pressure protection version“ vorzuziehen [7].

6.2 Netzgenerierung

Das Programmpaket FIDAP bietet in der hier verwendeten Version 7.52 neben der herkömmlichen zeilenorientierten Eingabe auch die Möglichkeit, mit Hilfe eines GUI-Modus (graphical user interface) bildschirmorientiert Geometrien durch „Windows-ähnliches Klicken“ zu erzeugen. Um bestimmte Größen einfach variieren zu können ist eine parametrische Gestaltung der Eingabedatei notwendig. Dies ist jedoch nur zeilenorientiert möglich.

Das Eingabefile wurde in der FIDAP-internen Sprache erstellt und im Anhang A beigelegt. Die Kontur des Profiles wurde mit Hilfe der in [1] bzw. Tab.(2.1) angegebenen Profilpunkte und durch Verbinden dieser mit Kurven dritter Ordnung erstellt. Als Parameter ergab sich hier der Staffelungswinkel γ . Der Rand des Rechengebietes wurde derart gelegt, daß dieser ein Profil vollständig enthält. Als Alternative würde sich der Kanal zwischen zwei benachbarten Profilen anbieten, so daß das Strömungsgebiet das Profil nicht enthält, jedoch von jeweils einer Druck- bzw. Saugseite begrenzt wird. Es zeigte sich jedoch aus früheren Untersuchungen, daß diese Wahl des Rechengebietes bezüglich der Randbedingungen, die an diesen beiden Rändern periodisch sein müssen, um so unendlich viele Schaufeln simulieren zu können, ungünstige Auswirkungen zufolge hat [17].

Zur eigentlichen Netzgenerierung bietet FIDAP zwei verschiedene Netzarten an:

- das strukturierte Netz („mapped mesh“)
Für das zu vernetzende Gebiet gilt hier die Forderung, aus logischen Vierecken zu bestehen. Die Verbindungslinien zwischen den vier Ecken können hierbei auch Kurven höherer Ordnung sein. Die zweite Bedingung für diese Art von Netz ist die Forderung nach der gleichen Anzahl von Knotenpunkten auf jeweils gegenüberliegenden Seiten.
- das unstrukturierte Netz („paved mesh“)
Die beiden Bedingungen, die für das strukturierte Netz gelten, entfallen hier. Dem Netzgenerierungsmodul wird eine Referenzelementgröße bekanntgegeben, die nach Möglichkeit eingehalten wird. Des weiteren muß angegeben werden, wieviele Knoten auf dem Rand, der das zu vernetzende Gebiet begrenzt, generiert werden sollen.

In dieser Arbeit wurden die Berechnungen mit Hilfe eines unstrukturierten Netzes, dargestellt in Abb.(6.2), durchgeführt.

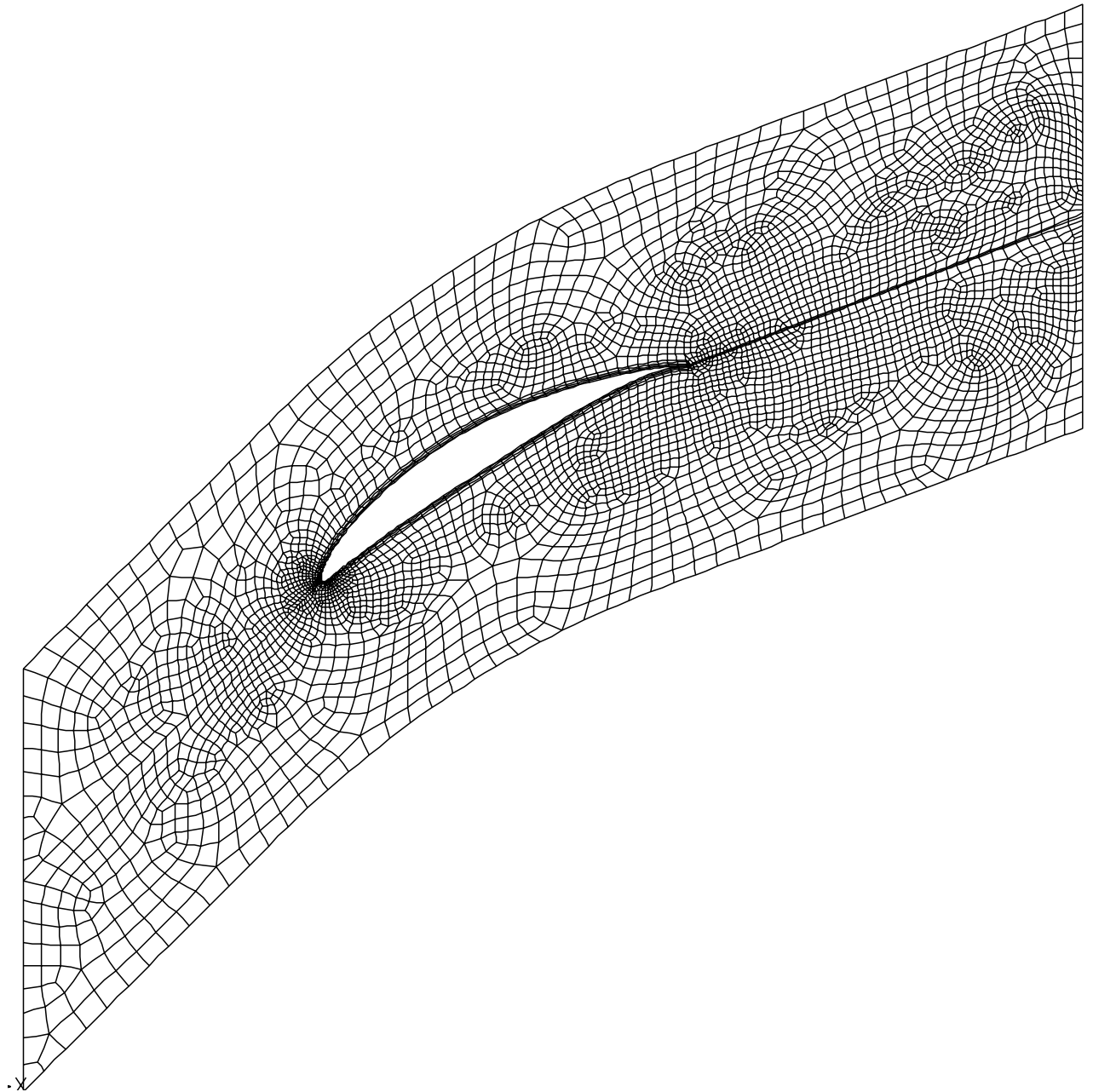


Abbildung 6.2: Das Netz des Rechengebietes

Die Knoten- und Elementzahlen des Netzes aus Abb.(6.2) sind in Tab.(6.1) zusammengefaßt.

Knotenzahl	Elementzahl
17908	4681

Tabelle 6.1: Zusammenfassung der Netzdaten

Die Feinheit der Elemente am Rand und das Referenzmaß der Elementgröße, die jedoch für das ganze zu vernetzende Gebiet gilt, werden vom Benutzer vorgegeben. Auf die jeweilige Form der Elemente innerhalb des Rechengebietes hat der Benutzer keinen Eingriff mehr. Diese Eigenschaft resultierte anfänglich in unzulässigen Elementgeometrien in Bereichen, die besonders fein aufzulösen sind. Es stellte sich heraus, daß es dem Netzgenerator im allgemeinen nicht so einfach möglich ist, von einer relativ groben Elementverteilung am Außenrand auf eine doch recht hoch aufgelöste Elementverteilung am Innenrand und hier wieder insbesondere an Profilverder- und -hinterkante überzugehen. Aus diesem Grund wurden zwei zusätzliche Geraden, die die Profilverderkante mit dem Eintritt bzw. die Profilhinterkante mit dem Austritt verbinden, eingeführt, siehe Abb.(6.2). Aufgrund der unterschiedlichen Elementwahl an den beiden Geraden ist die Gerade zwischen der Profilverderkante und dem Eintritt nicht gut erkennbar. Die Hilfsgeraden haben den Zweck, daß hier gleichfalls wie am Rand des Rechengebietes eine Elementverteilung vorgegeben werden kann, die direkten Eingriff in die hoch aufzulösenden Zonen an der Profilnase und -hinterkante hat, wie Abb.(6.3) zeigt.

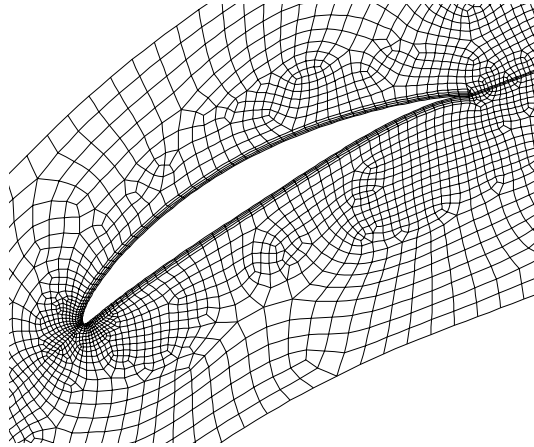


Abbildung 6.3: Vergrößerung des Rechnernetzes im Profilbereich

Durch die Hilfsgeraden wird weiters das nicht einfach zusammenhängende Rechengebiet in zwei durch die Geraden und das Profil gekoppelte einfache Rechengebiete übergeführt. Diese sind numerisch einfacher zu behandeln.

Zum Vergleich wurde auch ein strukturiertes Netz erstellt. Man erkannte hierbei, daß das unstrukturierte Netz besser die von der Geometrie gestellten Forderungen erfüllte. Gleichzeitig wurde ein Nachteil des unstrukturierten Netzes entdeckt, der anfangs nicht augenscheinlich war: Der beim strukturierten Netz übliche Vorgang der sukzessiven Netzverfeinerung, um so die Ergebnisse immer wieder zu verbessern, ist hier nicht mehr so einfach möglich. Diese Erkenntnis deckt sich mit den in [17] beschriebenen Erfahrungen.

Ein Kriterium, ob das Rechenverfahren mit dem erstellten Netz der Aufgabenstellung angepaßt ist, ist die Einhaltung des y^+ -Wertes im oberflächennahen Bereich des Profils. Aus den FIDAP-Handbüchern ist bekannt, daß bei turbulenter Strömung die Dicke der ersten Elementschicht in einem Bereich von $30 \leq y^+ \leq 100$ liegen muß. Um dies zu erreichen, mußten in Wandnähe die von FIDAP zu diesem Zweck bereitgestellten „boundary-edges“, übersetzt Grenzschichten verwendet werden. Auf diese Elemente hat der Benutzer weit mehr Eingriff, als dies beim „paved algorithmus“ üblich ist. Vorgegeben kann hier die Anzahl der wandnahen Schichten, die Dicke des ersten Elements und das Dickenverhältnis der darauffolgenden Schichten werden. Erst durch Anwendung dieser Schichten, erzeugt wurden vier, war es möglich den y^+ -Wert in akzeptable Grenzen zu verweisen.

In Abb.(6.4) und Abb.(6.5) sind die „boundary-edges“ im Bereich der hoch aufzulösenden Profalnase und -hinterkante vergrößert dargestellt.

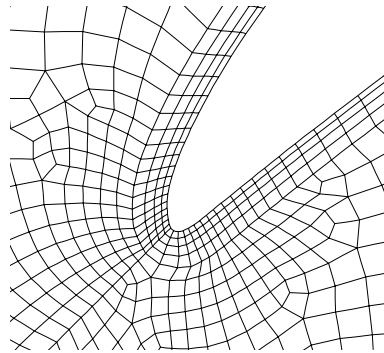


Abbildung 6.4: Vergrößerung im Nasenbereich

Wie Abb.(6.5) zeigt, war es auch notwendig, an der Hilfsgeraden, die Profilhinterkante und Austritt verbindet, zwei Lagen „boundary-edges“ anzubringen, um so den Übergang zwischen den profilnahen Netzschichten und dem regulären Rechnetz zu gestalten.

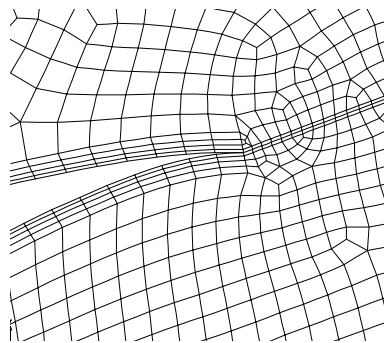


Abbildung 6.5: Vergrößerung im Hinterkantenbereich

Die erste Elementschicht hat aufgrund des dort herrschenden Strömungscharakters besondere Bedeutung. Da hier die Reynoldszahl klein ist, verliert das Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modell seine Gültigkeit. FIDAP verwendet hier deshalb spezielle Elemente, in denen die Modellierung der Turbulenz durch den Mischungswegansatz nach *van Driest* durchgeführt wird [8]. Wäre die Forderung für den y^+ -Wert in der ersten Elementschicht verletzt, würde dies zu verfälschten Ergebnissen führen.

Somit werden also die Reynoldsgleichungen für das ganze Strömungsfeld bis an die festen Wände hin verwendet, die Transportgleichungen für k und ε jedoch nur außerhalb der ersten Elementschicht. Innerhalb erfolgt die Turbulenzmodellierung durch das *van Driest* Modell. Das universelle Wandgesetz nach *Reichhardt* wird benötigt, um die Interpolationsfunktionen der Elemente der ersten Schicht zu modellieren.

6.2.1 Rand- und Anfangsbedingungen

Damit das Programm die Berechnung starten kann, benötigt es noch Angaben über die Rand- und Anfangswerte und, betrachtet man Glg.(5.29), über die Reynoldszahl und die Dichte. Da die Berechnungen mit den Versuchen der NACA [6] verglichen werden sollen, sollten diese Werte auch möglichst mit denen aus den Versuchen übereinstimmen. Dem Bericht zufolge wurde der Großteil der Tests für Gitter mit einer Solidity von 1.0 bei einer Eintrittsgeschwindigkeit w_1 von 95 feet per second, das sind umgerechnet 28.956 m/s, durchgeführt. Des weiteren findet man Hinweise darauf, daß die Tests bei Raumtemperatur, also zirka 293K, stattfanden. Aus diesen Angaben ist es möglich die Machzahl zu bestimmen:

$$Ma_1 = \frac{w_1}{\sqrt{\kappa R T}} \quad (6.11)$$

Der Isentropenexponent κ wird mit 1.4, die Gaskonstante R mit 286J/kgK eingesetzt. So ergibt sich eine Machzahl von $Ma_1 \approx 0.084$. Da sich Kompressibilitätseffekte erst bei Machzahlen von ungefähr $Ma > 0.2$ bemerkbar machen, ist es gerechtfertigt, die Rechnung inkompressibel durchzuführen. Die verwendeten Profile hatten eine Sehnenlänge von 5 inches. Die Reynoldszahl wird im Report 1368 mit $Re_1 = 245000$ angegeben.

Aus der Strömungsmechanik ist bekannt, daß bei einer Reynoldszahl von $Re_1 \approx 2 \cdot 10^5$ der Unterschied in den Ergebnissen zwischen hydraulisch glatten und realen Schaufeln sehr gering ist. Deshalb ist es zulässig, die weiteren Rechnungen für hydraulisch glatte Schaufeln durchzuführen. Da das Medium als inkompressibel betrachtet wird, wird die Dichte konstant gesetzt.

Am Eintritt müssen die Geschwindigkeitskomponenten w_x und w_y , die in den Grundgleichungen den Unbekannten u und v entsprechen, die kinetische Turbulenzenergie k und die Dissipation ε angegeben werden. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich aus der dimensionslosen Anströmgeschwindigkeit und dem Anströmwinkel. Da die NACA in ihrem Bericht keinerlei Angaben bezüglich der Turbulenzgrößen macht, ist es notwendig einige Annahmen zu treffen. Die erste Annahme ist die, daß man die auftretende Turbulenz als isotrop behandelt, d.h. die Schwankungsanteile sind nach allen Richtungen gleich groß. Man erhält aus Glg.(4.7)

$$k = \frac{3}{2} \overline{u'^2}. \quad (6.12)$$

Setzt man Glg.(4.8) in obige Gleichung ein, so gilt

$$k = \frac{3}{2} (\overline{u} Tu)^2. \quad (6.13)$$

Somit ergibt sich die mit der dimensionslosen Eintrittsgeschwindigkeit w_1^* gebildete dimensionslose kinetische Turbulenzenergie k_1^* zu

$$k_1^* = \frac{3}{2} (Tu)^2. \quad (6.14)$$

Eine weitere Annahme muß zur Bestimmung von ε getroffen werden. Zwei Möglichkeiten sollen vorgestellt werden:

- Es wird eine Annahme über das Verhältnis turbulenter zu kinematischer Viskosität, genannt das Viskositätsverhältnis R_ν , getroffen.

$$R_\nu = \frac{\nu_t}{\nu}. \quad (6.15)$$

Aus der Literatur ist bekannt, daß

$$10 < R_\nu < 1000 \quad (6.16)$$

gilt. Wird R_ν nun in Glg.(5.21) eingesetzt, so ergibt sich die dimensionslose Dissipationsrate ε^* zu

$$\varepsilon^* = \frac{C_\mu k^{*2} Re_1}{R_\nu}. \quad (6.17)$$

- Die zweite Möglichkeit verlangt eine Annahme für das turbulente Längenmaß. Dieses Längenmaß, das die Abmessung energiereicher Wirbel beschreibt, wird folgendermaßen definiert:

$$l_t = c \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad c = 0.16 \quad (6.18)$$

In [15] findet sich die Abschätzung

$$l_t \approx 0.018s \quad \text{mit} \quad s \dots \text{Teilung}. \quad (6.19)$$

Mit der dimensionslos gemachten Teilung und der dimensionslosen kinetischen Turbulenzenergie ergibt sich:

$$\varepsilon^* = \frac{ck^{\frac{3}{2}}}{0.018 \left(\frac{s}{c}\right)} \quad (6.20)$$

Da aber $c/s = \sigma$ ist, wird aus Glg.(6.20) mit $\sigma = 1$

$$\varepsilon^* = \frac{ck^{\frac{3}{2}}}{0.018} \quad (6.21)$$

Mit dem erhaltenen ε^* aus Glg.(6.21) wird weiters überprüft, ob die angegebenen Grenzen für R_ν eingehalten wurden. In Tab.(6.2) wurde dies für zwei verschiedene praxisnahe Turbulenzgrade durchgeführt.

$Tu[-]$	$k_1^*[-]$	$\varepsilon^*[-]$	$R_\nu[-]$
1%	0.00015	$1.6 \cdot 10^{-5}$	31
5%	0.00375	$2.4 \cdot 10^{-3}$	129.2

Tabelle 6.2: Turbulenzgrößen bei verschiedenen Turbulenzgraden

Für die weiteren Berechnungen wurde der Turbulenzgrad mit einem Prozent festgelegt, da im NACA-Report 1368 keinerlei Angaben darüber gemacht wurden und dieser Wert in der Literatur sehr häufig für vergleichbare Messungen und auch Rechnungen zu finden ist. Um der Ungewißheit bezüglich des Turbulenzgrades Folge zu tragen, wurde auch eine Rechnung mit einem Turbulenzgrad von fünf Prozent durchgeführt. Die Verlustwerte lagen hier ein wenig höher. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit steigendem Turbulenzgrad

die Grenzschichtdicke an der Profilhinterkante, die für den Verlust maßgeblich ist, dicker wird, siehe [11]. Durch die Verwendung des $(k - \varepsilon)$ -Modells ist es nicht möglich die Lage des Umschlagortes von laminarer zu turbulenter Strömung zu berücksichtigen, d.h. die Grenzschicht wird vom Entstehungsort an als turbulente Grenzschicht behandelt, ist es gerechtfertigt den Turbulenzgrad mit einem Prozent festzulegen, da der Verlust aufgrund des fehlenden laminaren Teiles der Grenzschicht in jedem Fall zu hoch berechnet wird.

In realen Strömungen wandert der Umschlagort, in dem die laminare Strömung in eine turbulente Strömung übergeht, mit zunehmendem Turbulenzgrad in Richtung des Staupunktes an der Profilhase. Dies führt in weiterer Folge zu einer Grenzschichtaufdickung an der Hinterkante [11].

Da die Strömung in einem Verdichtergitter und nicht um ein einzelnes Profil zu untersuchen ist, sind am oberen bzw. unteren Rand des Rechengebietes periodische Randbedingungen vorzugeben. Auf diese Art wird das untersuchte Profil als Bestandteil eines Gitters behandelt. Wichtig für die periodischen Randbedingungen ist die Wahl von Elementen, die an ihren Grenzen stetigen Druck aufweisen. Anders ausgedrückt, ist es bei periodischen Randbedingungen notwendig, den Druck an den Elementgrenzen zu bestimmen. Elemente, in denen der Druck in den *Gauß*'schen Integrationspunkten ermittelt wird, würden an den periodischen Rändern zu Unstetigkeiten führen, da hier der Druck an die Elementgrenzen hinaus extrapoliert werden müßte.

Das elliptische Differentialgleichungssystem erfordert die Vorgabe von Randwerten auch an der Austrittsebene. Um mit den Messungen der NACA möglichst konform zu gehen, bei denen die Abströmung in die freie Atmosphäre erfolgte, wird an der Austrittsebene die sog. „traction-free-condition“ angewendet. Dies ist bei hohen Reynoldszahlen gleichbedeutend mit der Vorgabe eines konstanten statischen Druckes an der Austrittsebene.

Da die zu lösenden Gleichungen nichtlinearen Typs sind, erfolgt ihre Lösung iterativ. Damit das Rechenprogramm mit dem Iterationsvorgang beginnen kann, benötigt es einen mathematischen Vektor aus Startwerten. Dieser wird dem Programm in den Anfangsbedingungen mitgeteilt. Aus früheren Untersuchungen hat man festgestellt, daß die Rechnung relativ unsensibel auf Variationen der Anfangsbedingungen reagiert, wenn diese in angemessenem Rahmen gewählt worden sind. Als gute Wahl hat sich erwiesen, die Unbekannten u, v, p, k, ε jeweils konstant im ganzen Strömungsfeld zu setzen.

Berechnungen werden für Anströmwinkel β_1 zwischen 36° und 54° in Abständen von jeweils 3° durchgeführt. Die Abbruchschranke für das numerische Iterationsverfahren ist folgendermaßen definiert:

$$\frac{\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\|}{\|\vec{u}_n\|} \leq DTOL \quad (6.22)$$

Die Unbekannte \vec{u}_n bezeichnet den mathematischen Lösungsvektor der n -ten Iteration. Der Wert für $DTOL$ wurde mit 10^{-4} festgesetzt.

6.3 Beeinflussung der Konvergenz

Es sollen im folgenden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt werden, um die Konvergenz des Rechenverfahrens zu beeinflussen bzw. zu beschleunigen.

6.3.1 Relaxation

Dieses Verfahren ermöglicht es durch Eingreifen in den iterativen Lösungsprozeß die Stabilität des Verfahrens zu beeinflussen. Das zu lösende Gleichungssystem sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{K}(\vec{u}_{n-1})\vec{u}_n = \vec{F} \quad (6.23)$$

Das Relaxationsverfahren errechnet mit Glg.(6.24) aus dem aktuellen Iterationsschritt n und dem vorhergehenden Iterationsschritt $n-1$ einen neuen mathematischen Lösungsvektor $\vec{u}_{rel,n}$. Dieser wird anstatt des n -ten Iterationsschrittes zur Bestimmung des $n+1$ -ten Iterationsschrittes in Glg.(6.23) verwendet.

$$\vec{u}_{rel,n} = \alpha \vec{u}_{n-1} + (1 - \alpha) \vec{u}_n \quad (6.24)$$

Der Relaxationsfaktor α variiert zwischen den Werten $0 \leq \alpha \leq 1$. Graphisch ist Glg.(6.24) in Abb.(6.6) dargestellt. Setzt man α nahe gegen eins, bedeutet das, daß $\vec{u}_{rel,n}$ nahezu ident mit \vec{u}_{n-1} ist. Diese Wahl von α führt einerseits zu einer längeren Rechendauer bis die Konvergenzschranke unterschritten wird, andererseits läuft der gesamte Iterationsprozeß stabiler gegen die gewünschte Lösung. Den Wert α nahe zu Null gesetzt bedeutet instabileres Iterationsverhalten. Nur in „relativ harmlosen Strömungen“, d.h. Strömungen, die diffusiv dominiert sind, führt diese Wahl des α -Wertes zu verkürzten Rechendauern und befriedigendem Verlauf der Residuen.

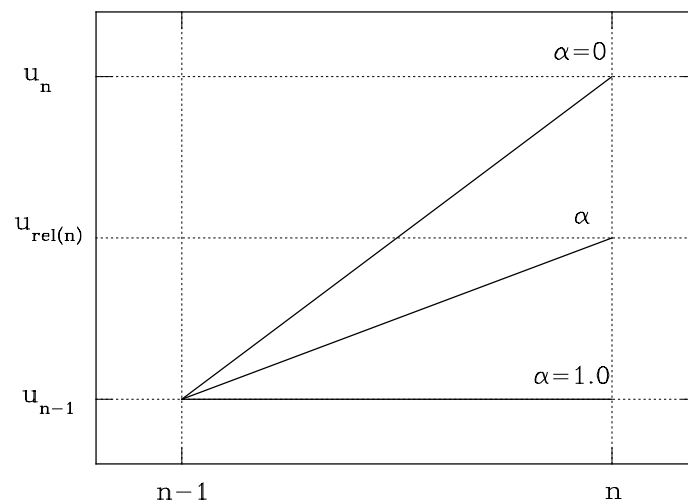


Abbildung 6.6: Lineare Abhängigkeit des Lösungsvektors von α

Die Relaxationsfaktoren mußten bei jeder Rechnung für jede der fünf abhängigen Variablen neu gesetzt werden. In Tab.(6.3) sind sie für die Berechnung beim Auslegungsanströmwinkel angegeben.

abhängige Variable	$u^*[-]$	$v^*[-]$	$p^*[-]$	$k^*[-]$	$\varepsilon^*[-]$
Relaxationsfaktor α	0.3	0.3	0.99	0.3	0.3

Tabelle 6.3: Relaxationsfaktoren der abhängigen Variablen

6.3.2 Das Upwinding bzw. Streamline Upwinding

Wird das *Galerkin*'sche Verfahren der gewichteten Residuen auf konvektionsdominierte Strömungen angewendet, so ergibt sich, anders als bei diffusiven Problemen, eine unsymmetrische Systemmatrix \mathbf{K} . Als konvektiv dominiert wird ein Problem bezeichnet, in dem die Reynoldszahl bzw. die lokale Reynoldszahl, genannt Pecletzahl, groß ist.

$$Pe = \frac{uh}{\nu} \quad (6.25)$$

Hierbei steht u für eine lokale Geschwindigkeit und h für eine charakteristische Länge des Elements. Die Auswirkungen dieser nicht optimal gestalteten Matrix \mathbf{K} stellt man im berechneten Strömungsbild fest. Es sind sogenannte „wiggles“, Oszillationen des Geschwindigkeitsvektors in Betrag und Richtung, entstanden, siehe dazu Abb.(7.36). Um das Entstehen dieser Oszillationen zu verdeutlichen, möge als Beispiel die eindimensionale konvektiv-diffusive Modellgleichung behandelt werden:

$$u \frac{dT}{dx} = \nu \frac{d^2T}{dx^2} \quad (6.26)$$

u bezeichne die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung, ν die Viskosität und T eine skalare Variable wie die Temperatur. Die Lösung muß Glg.(6.26) und den folgenden Randbedingungen genügen:

$$T = 0 \quad \text{bei} \quad x = 0 \quad (6.27)$$

$$T = 1 \quad \text{bei} \quad x = L$$

Die exakte Lösung lautet

$$T(x) = \frac{1 - e^{Pe \frac{x}{L}}}{1 - e^{Pe}}. \quad (6.28)$$

Hierbei ist Pe die in Glg.(6.25) definierte Pecletzahl mit L als charakteristischer Länge. Ist die Pecletzahl niedrig, so ist die Lösung diffusionsdominiert, die rechte Seite der Glg.(6.26) dominiert. Ist das Problem konvektionsdominiert, so ist die Pecletzahl hoch, es dominiert die linke Seite der Glg.(6.26). Im ersten Fall ist die Lösung nahezu linear zwischen den Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = L$ verteilt. Im zweiten Fall hingegen ist die Lösung, ausgenommen eines schmalen Bereiches bei $x = L$ nahezu identisch mit der Randbedingung bei $x = 0$.

Abb.(6.7) zeigt die graphische Darstellung der Lösung aus Glg.(6.28) mit der Pecletzahl als Parameter. Dieses Ergebnis muß nun annähernd auch das Finite-Elemente-Verfahren liefern.

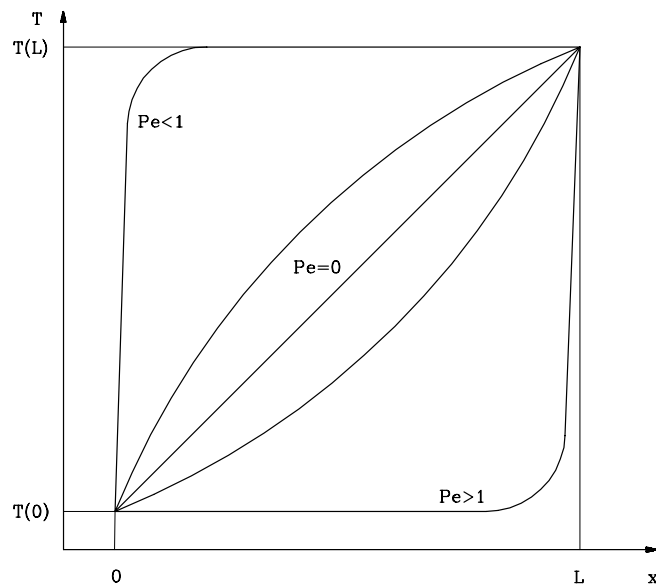


Abbildung 6.7: Lösung der konvektiv-diffusiven Gleichung in Abhängigkeit von Pe

Es wird hier die Modellgleichung mit Hilfe von Taylorreihenansätzen auf eine Differenzengleichung zurückgeführt. Zwei verschiedene Differenzenoperatoren zur Behandlung der Differentialgleichung werden untersucht. Zur Bezeichnung der verwendeten Knotenbezeichnungen siehe Abb.(6.8).

Zentrale Differenzenoperatoren

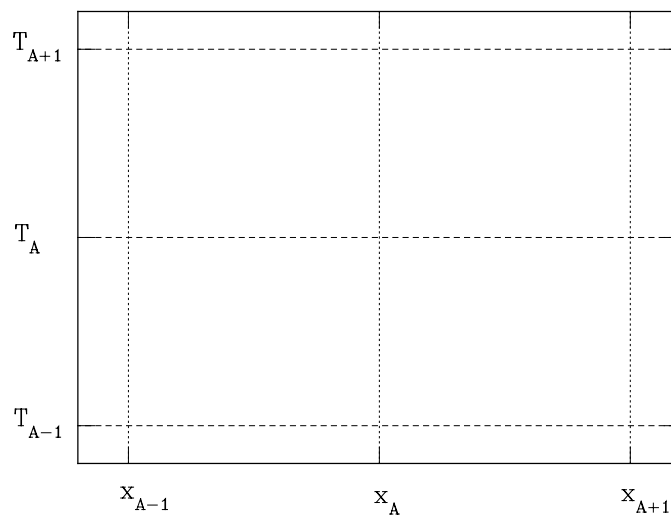


Abbildung 6.8: Bezeichnung der Elementknoten

Entwickelt man T an den Stellen $A + 1$ und $A - 1$ nach Taylor und subtrahiert bzw. addiert die so entstandenen Taylorreihen, so ergibt sich für

- die erste Ableitung nach x an der Stelle A

$$\frac{dT}{dx}_{x_A} \approx \frac{-T_{A-1} + T_{A+1}}{2h} \quad (6.29)$$

- bzw. die zweite Ableitung nach x an der Stelle A

$$\frac{d^2T}{dx^2}_{x_A} \approx \frac{T_{A-1} - 2T_A + T_{A+1}}{h^2} \quad (6.30)$$

Diese Gleichungen werden als zentraler Differenzenoperator erster bzw. zweiter Ordnung bezeichnet. Das \approx -Symbol ist deshalb verwendet, da die Entwicklung nach Taylor nach der ersten bzw. zweiten Ordnung abgebrochen wurde. Das *Galerkin*-Verfahren baut auf diese zentralen Differenzenoperatoren auf.

Upwinding Differenzenoperatoren

Hier beeinflussen nicht wie beim zentralen Differenzenoperator die Stellen $A - 1$ und $A + 1$, sondern nur die stromauf liegende Stelle, das heißt hier die Stelle $A - 1$ die Stelle A . Aus der Taylorentwicklung von T_A aus dem Wert von T_{A-1} ergibt sich die erste Ableitung von T_A . Allgemein angeschrieben:

$$\frac{dT}{dx}_{x_A} \approx \frac{T_A - T_{A-1}}{h} \quad \text{für } u > 0 \quad (6.31)$$

In Abb.(6.9) sind die erhaltenen Lösungen bei Verwendung des zentralen als auch des Upwinding-Operators zur Lösung von Glg.(6.26) graphisch dargestellt. Der Upwindingoperator wurde jedoch immer nur beim konvektiven Term angewendet.

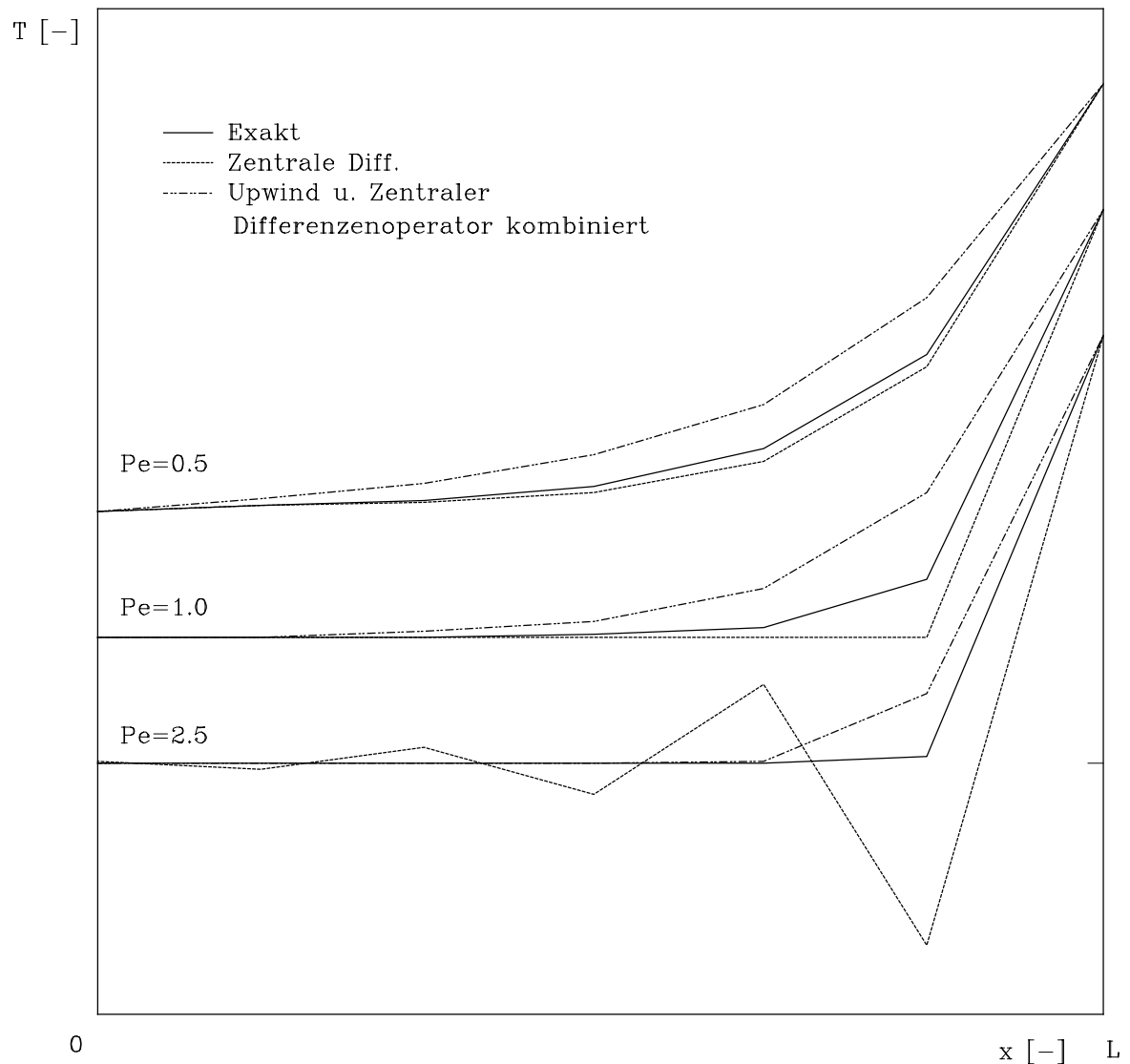


Abbildung 6.9: Vergleich der exakten Lösung mit verschiedenen Differenzenoperatoren

Aus Abb.(6.9) ist zweierlei deutlich zu erkennen:

1. Das Fehlen der Oszillationen bei hoher Pecletzahl, wenn man den konvektiven Term mit Hilfe des Upwindingoperators modelliert.
2. Die Lösung mit dem zentralen Differenzenoperator liegt unterhalb der exakten Lösung, während die Lösung mit Hilfe des zentralen Differenzenoperators für die zweite Ableitung und des Upwindingoperators für die erste Ableitung über der exakten Lösung liegt. Man bezeichnet die erste als unterdiffuse, die zweite als überdiffuse Lösung.

Die Oszillationen entstehen vornehmlich an Stellen, an denen Randbedingungen starke Änderung der Strömung erzwingen. Um diese „wiggles“ zu vermeiden, bietet sich die Netzverfeinerung an eben diesen Stellen an. Dies wäre eine weitere Möglichkeit um das Konvergenzverhalten der Rechnung positiv zu beeinflussen. Für diese lokale Verfeinerung des Netzes wäre der „paved algorithmus“ gegenüber dem „mapped algorithmus“ vorzuziehen. Durch diese Netzverfeinerung würde man eine Senkung der Pecletzahl, und somit eine Verminderung der Konvektionsdominanz erwirken. Bei der Netzverfeinerung werden sehr bald die

durch die verwendete Hardware und Software gesetzten Grenzen erreicht. Es wurden deshalb auf der Basis der Upwinding-Differenzenoperatoren sogenannte „Upwinding-Finite-Elemente“ entwickelt [3]. In diesen Elementen kann der Upwinding-Effekt durch verschiedene Verfahren erreicht werden. Zwei dieser Verfahren sollen im folgenden vorgestellt werden:

- Zusätzliche Diffusion

Die Glg.(6.26) wird um eine zusätzliche numerische Diffusion \tilde{k} erweitert, um so die negative Diffusion des *Galerkin*'schen Verfahrens zu kompensieren.

- Das Verfahren nach *Petrov-Galerkin*

Die Gewichtsfunktionen der Knoten werden modifiziert, sodaß das stromauf liegende Element stärker gewichtet wird als das stromab liegende, wie Abb.(6.10) darstellt.

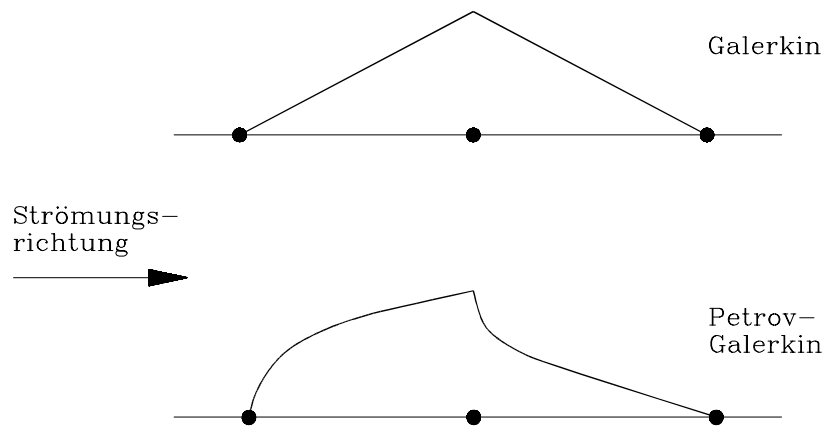


Abbildung 6.10: Gewichtsfunken nach *Galerkin* und *Petrov-Galerkin*

Das verwendete Programmpaket FIDAP bietet mit dem Verfahren der zusätzlichen numerischen Diffusion die Möglichkeit, Oszillationen zu vermeiden und so die errechnete Lösung einer realen Strömung anzupassen.

Für mehrdimensionale Berechnungen muß das Verfahren modifiziert werden, da sich die zusätzliche numerische Diffusion nicht nur in Strömungsrichtung, sondern auch normal zu dieser auswirkt. Dies wird als die „Streamline-Upwinding-Methode“ bezeichnet: Es muß statt \tilde{k} ein Tensor $\tilde{\mathbf{k}}$ entwickelt werden, dessen Wirkung eine zusätzliche numerische Diffusion ist, die nur in Strömungsrichtung wirkt. Dessen Matrix findet sich in [3] zu

$$\tilde{k}_{ij} = \tilde{k} \hat{u}_i \hat{u}_j \quad \text{mit} \quad \hat{u}_i = \frac{u_i}{\|\mathbf{u}\|} \quad \text{und} \quad \|\mathbf{u}\|^2 = u_i u_i. \quad (6.32)$$

Als Beispiel sei hier $\tilde{\mathbf{k}}$ für den Fall, daß die x -Richtung der Strömungsrichtung entspricht, ausgeschrieben:

$$\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{k} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Um die negative Diffusion auszugleichen, wird zur kinematischen Viskosität der mehrdimensionalen konvektiv-diffusiven partiellen Differentialgleichung der Term $\tilde{\mathbf{k}}$ geeignet addiert.

Kapitel 7

Berechnungsergebnisse

7.1 Lokale Strömungsgrößen

7.1.1 Darstellung der Geschwindigkeitsvektoren

Abb.(7.1) erläutert überblicksmäßig die wesentlichen Winkeldefinitionen, den Abstand der Berechnungsebenen vom Profil und definiert die später vorkommende Laufvariable y' .

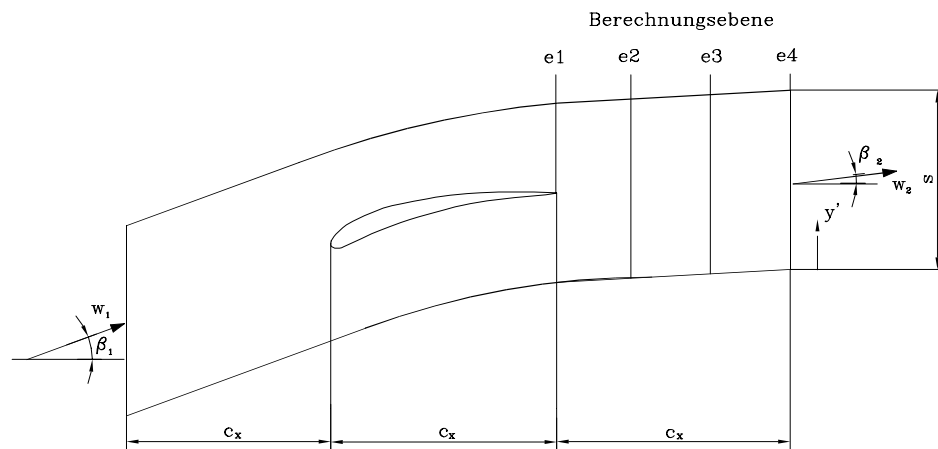


Abbildung 7.1: Graphische Erläuterung einiger wichtiger Definitionen

Die Lage der Berechnungsebenen ist in Tab.(7.1) angegeben.

Berechnungsebene	e1	e2	e3	e4
Abstand von der Profilhinterkante in % der axialen Sehnenlänge	0	30	60	100

Tabelle 7.1: Lage der Berechnungsebenen

Es ist möglich aus den Berechnungsergebnissen, sogenannte „vector-plots“ anzufertigen. Es wird hier die Strömung durch Vektoren abgebildet, deren Länge und Richtung die Strömung charakterisieren. Im folgenden sind für die beiden Grenzen der Variation des Anströmwinkels $\beta_1 = 36^\circ$ bzw. $\beta_1 = 54^\circ$ und für den Designwert des Anströmwinkels $\beta_1 = 45^\circ$ jeweils Nasen- und Hinterkantenströmung vergrößert dargestellt.

Abb.(7.2) zeigt die Umströmung der Profalnase bei einem Anströmwinkel $\beta_1 = 36^\circ$. Gut erkennbar ist die saugseitige Lage des Staupunkts. Aus der relativen Länge der Geschwindigkeitsvektoren zu benachbarten erkennt man die hohe Geschwindigkeit bei der druckseitigen Nasenumströmung.

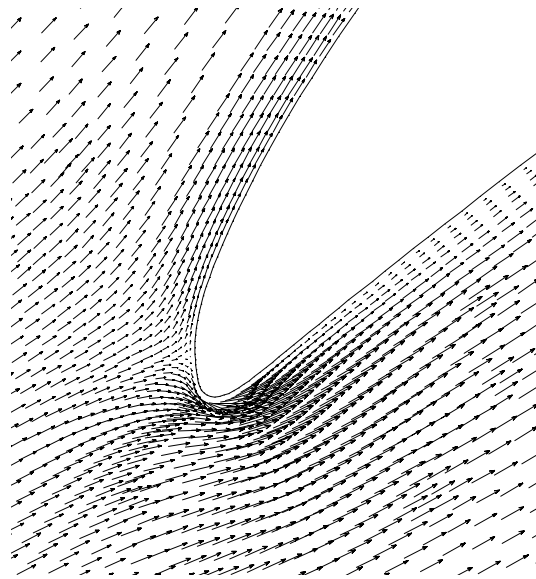


Abbildung 7.2: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 36^\circ$

Die Abb.(7.3) zeigt die Strömung an der Hinterkante des Profils, welches mit einem Anströmwinkel von $\beta_1 = 36^\circ$ angeströmt wird. An der Unterseite des Profils erkennt man die Tendenz der Strömung aufgrund des dort herrschenden höheren Druckes hinter dem Profil durch Expansion in die Saughälfte der Strömung einen Druckausgleich herbeizuführen. Begleitet wird diese Tendenz durch eine, hier noch sehr schwach ausgebildete Ablösung an der Saugseite des Profils.

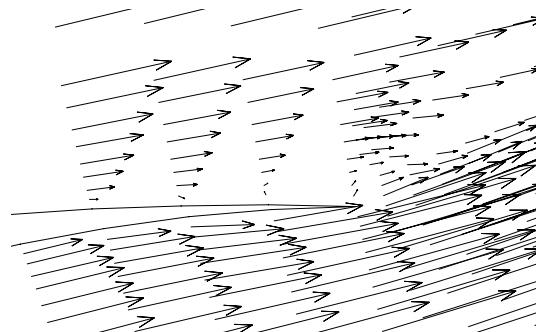


Abbildung 7.3: Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 36^\circ$

Die nächste Abb.(7.4) zeigt die Profalnase im Design-Anströmwinkel $\beta_1 = 45^\circ$. Eine Umströmung der Nase findet hier im Vergleich zu $\beta_1 = 36^\circ$ nicht statt. Die Stromlinie, die mit der

Hilfsgeraden zusammenfällt, siehe Abb.(6.2), ist die Staustromlinie. Die Unregelmäßigkeiten in der Formation der Geschwindigkeitsvektoren kommen durch die Elementknotenverteilung des unstrukturierten Netzes zustande. Rückschlüsse daraus auf die Strömung sind deshalb unzulässig.

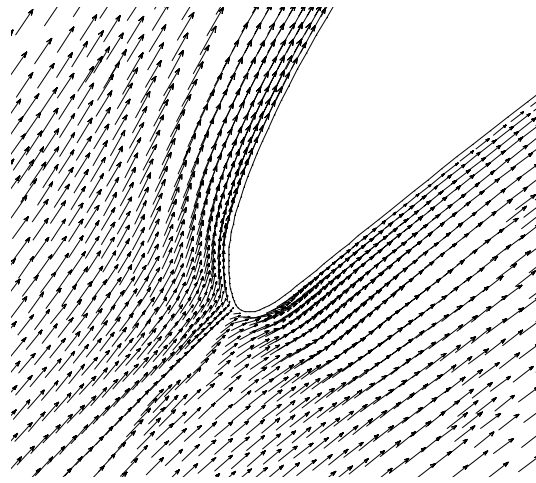


Abbildung 7.4: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 45^\circ$

Abb.(7.5) stellt die Strömung an der Hinterkante dar, diesmal bei $\beta_1 = 45^\circ$. Die Völligkeit des saugseitigen Geschwindigkeitsprofils nimmt zur Hinterkante hin immer mehr ab. Man könnte meinen, die Strömung wäre am saugseitigen Teil der Hinterkante nahe dem Profil zum Stillstand gekommen. Bei weiterer Steigerung des Anströmwinkels ist daher saugseitige Ablösung zu erwarten.

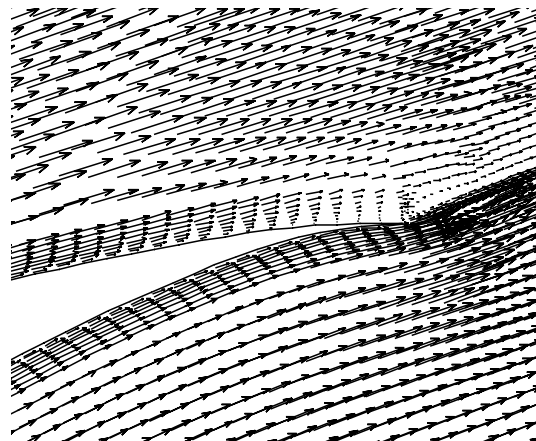
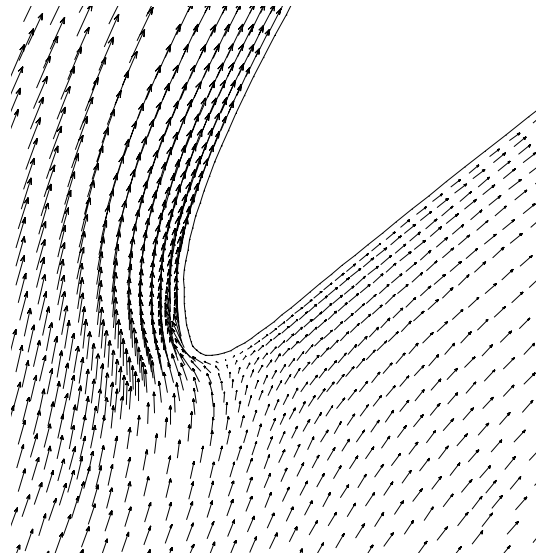


Abbildung 7.5: Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 45^\circ$

Das Strömungsbild an der Profilnase bei einem Anströmwinkel von $\beta_1 = 54^\circ$ zeigt Abb.(7.6). Aus einem Vergleich mit den vorhergehenden Abbildungen der Profilnase läßt sich die Bewegung des Staupunktes bei Variation des Anströmwinkels verfolgen. Diese Bewegung des Staupunktes begründet die Entscheidung für die Berechnung der Strömung in einem Umströmungsgebiet anstatt in einem Durchströmungsgebiet.

Abbildung 7.6: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 54^\circ$

Die beiden Abb.(7.7) und (7.8) stellen verschiedene Vergrößerungen aus dem Strömungsbild an der Hinterkante bei einem Anströmwinkel von $\beta_1 = 54^\circ$ dar. Es sind erste Anzeichen einer Rückströmung an der Profiloberfläche erkennbar.

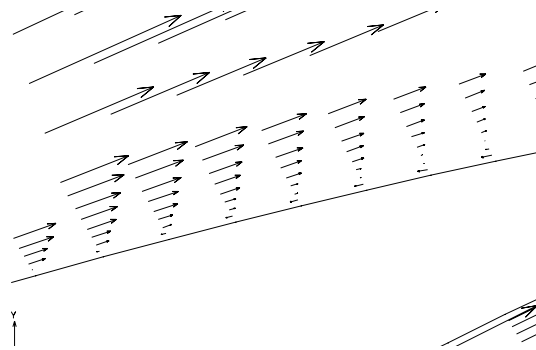
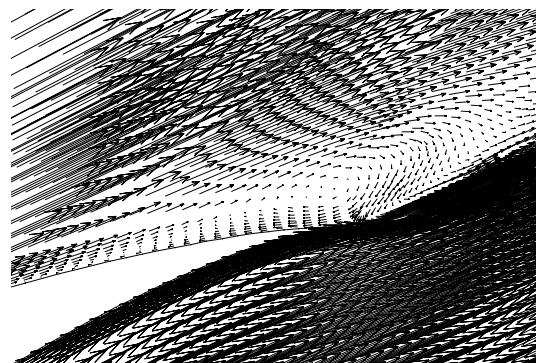
Abbildung 7.7: Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 54^\circ$

Abb.(7.8) zeigt die sich nun schon großräumig ausgebildete Ablöseblase. An den Geschwindigkeitsprofilen in den vier dem Profil nächst gelegenen Elementschichten läßt sich der Vorgang der Ablösung beobachten. An der Profilhinterkante liegen bereits die gesamten vier Schichten im Rückströmgebiet.

Abbildung 7.8: Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 54^\circ$

7.1.2 Darstellung des statischen Druckkoeffizienten

Dargestellt sind hier die Isobaren, definiert durch den statischen Druckkoeffizienten

$$C_{p1} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2} \quad (7.1)$$

im gesamten Berechnungsgebiet. Die statische Druckdifferenz in Glg.(7.1) wird mit Hilfe des dynamischen Druckes in der Eintrittsebene dimensionslos gemacht.

Aus dem Verlauf der Isobaren ist es möglich, die Einhaltung der periodischen Randbedingungen zu überprüfen: Jede Isobare, die das Berechnungsgebiet an einem periodischen Rand verläßt, tritt am zweiten periodischen Rand an der selben Stelle x wieder in das Berechnungsgebiet ein.

Bei Vergleich der Abb.(7.9) bis (7.15) kann die Abhängigkeit der Staupunktslage vom Anströmwinkel beobachtet werden. Auch die Lage des Druckminimums an der Saugseite des Profils ist erkennbar. Es bewegt sich mit größer werdendem Anströmwinkel β_1 in Richtung der Profilnase.

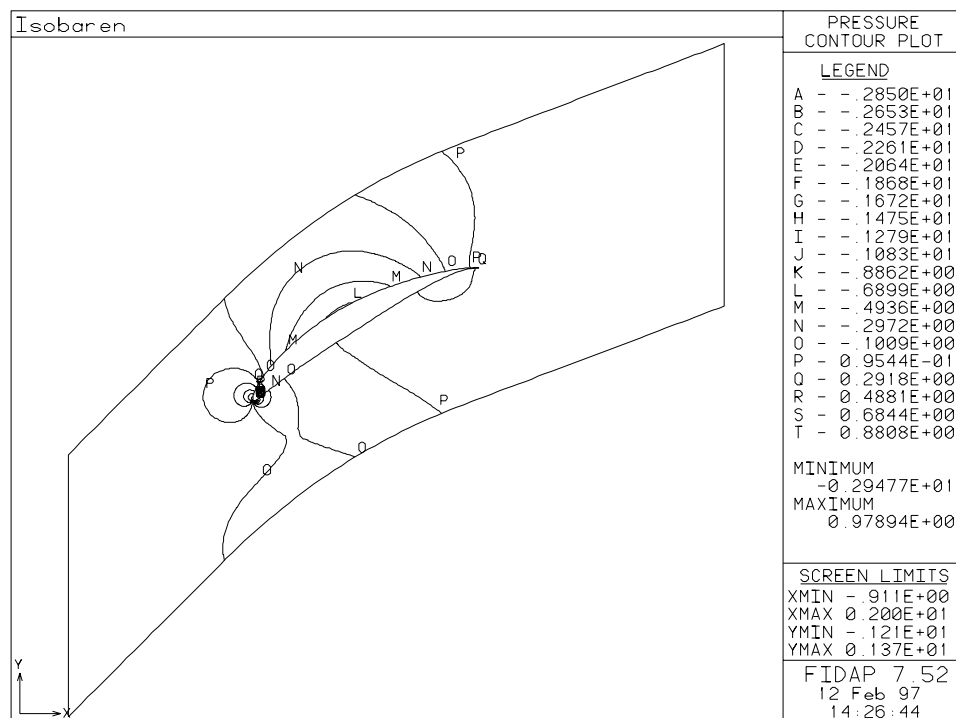


Abbildung 7.9: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 36^\circ$

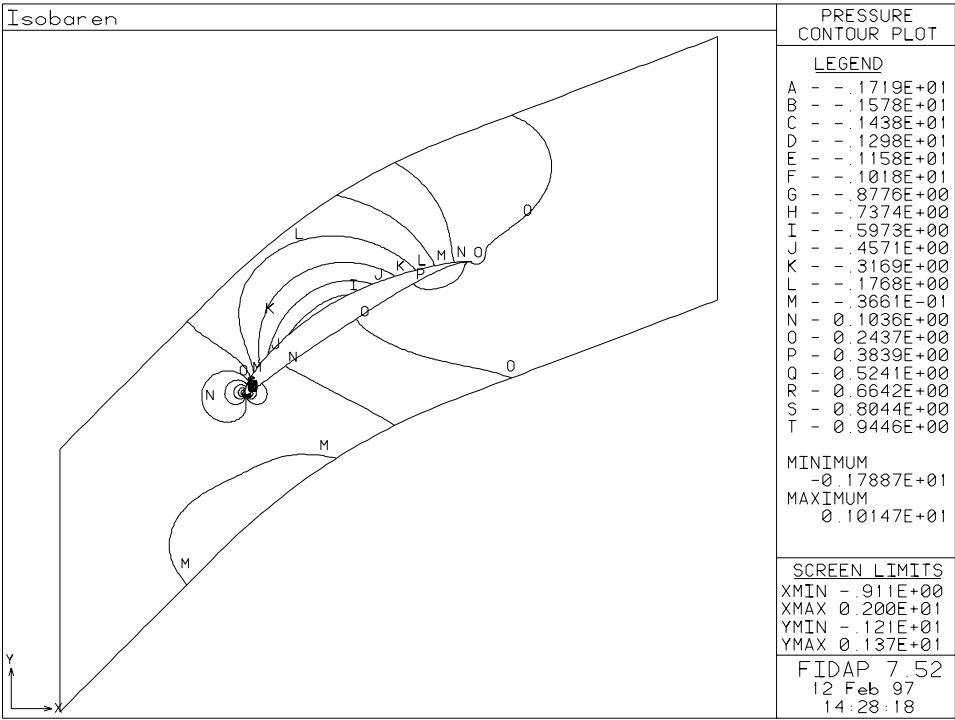


Abbildung 7.10: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 39^\circ$

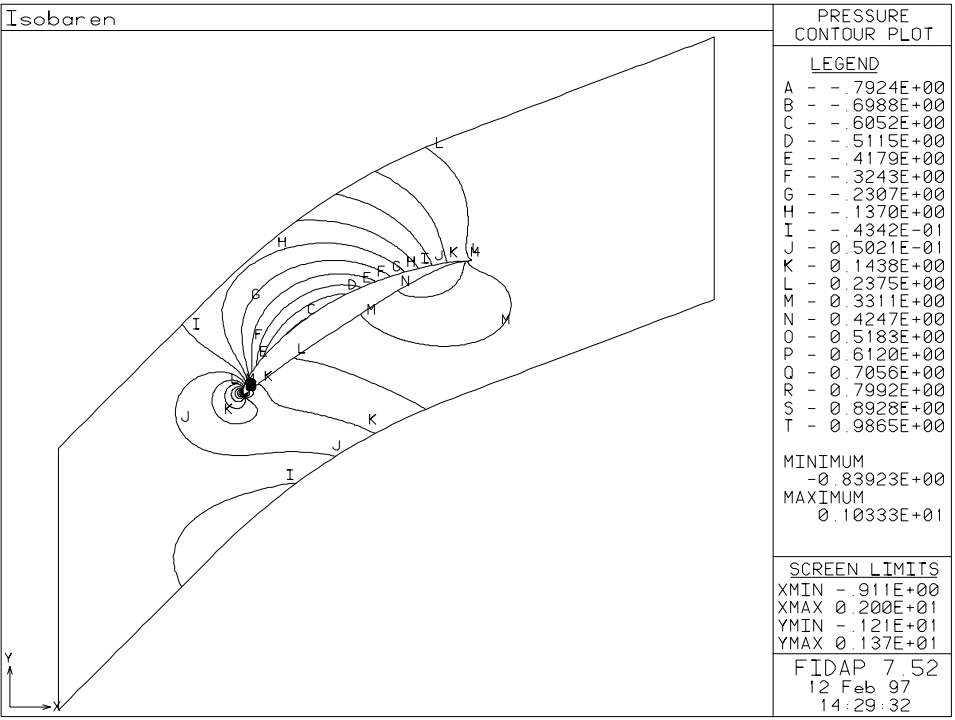


Abbildung 7.11: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 42^\circ$

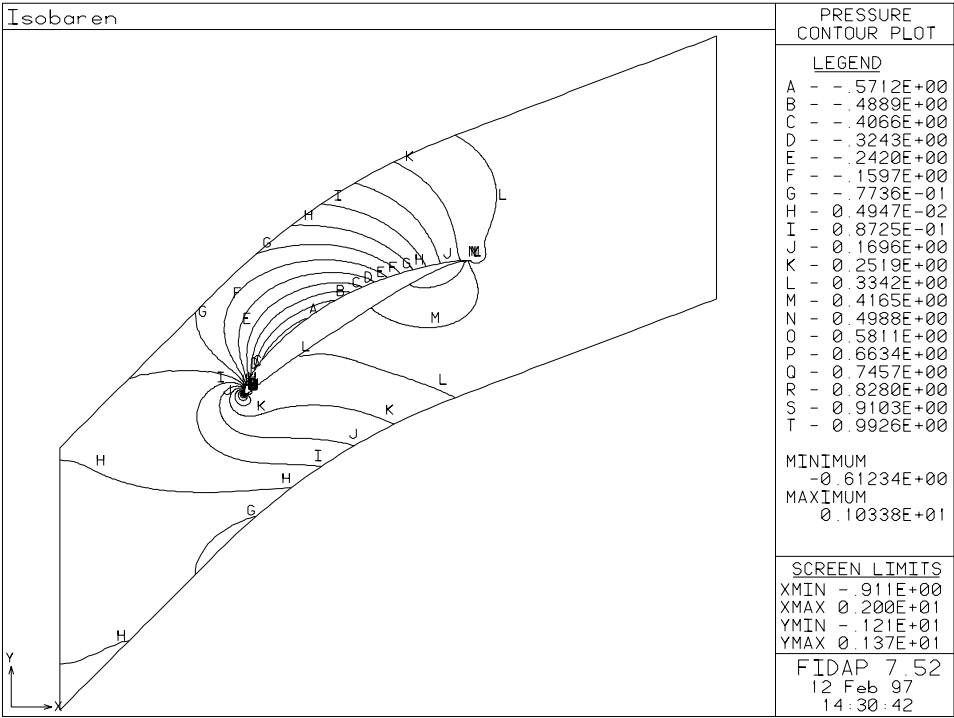


Abbildung 7.12: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 45^\circ$

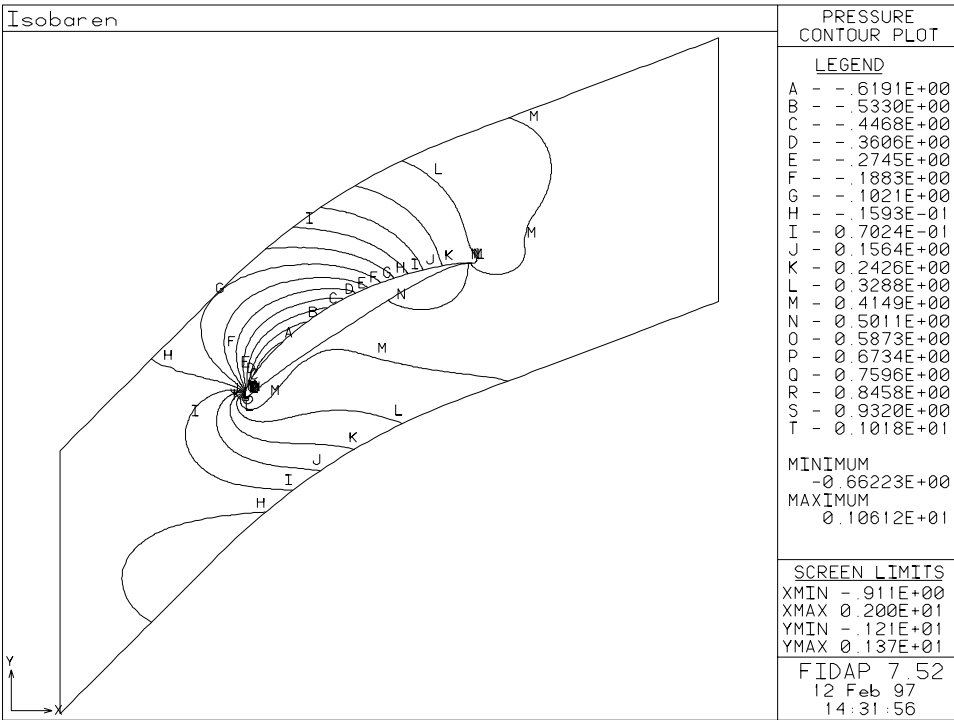


Abbildung 7.13: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 48^\circ$

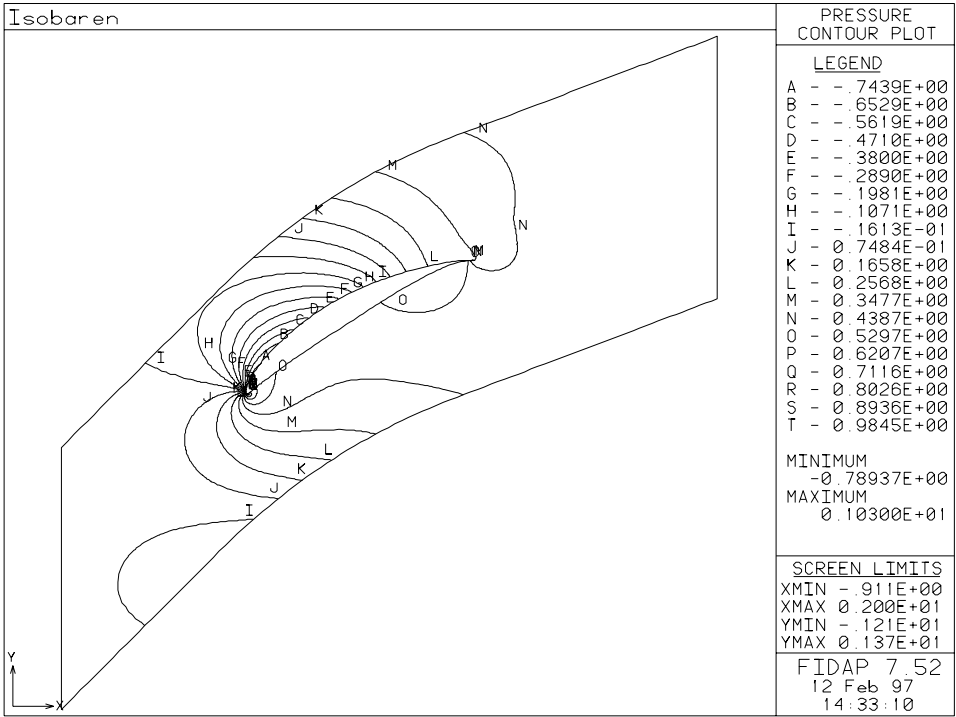


Abbildung 7.14: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 51^\circ$

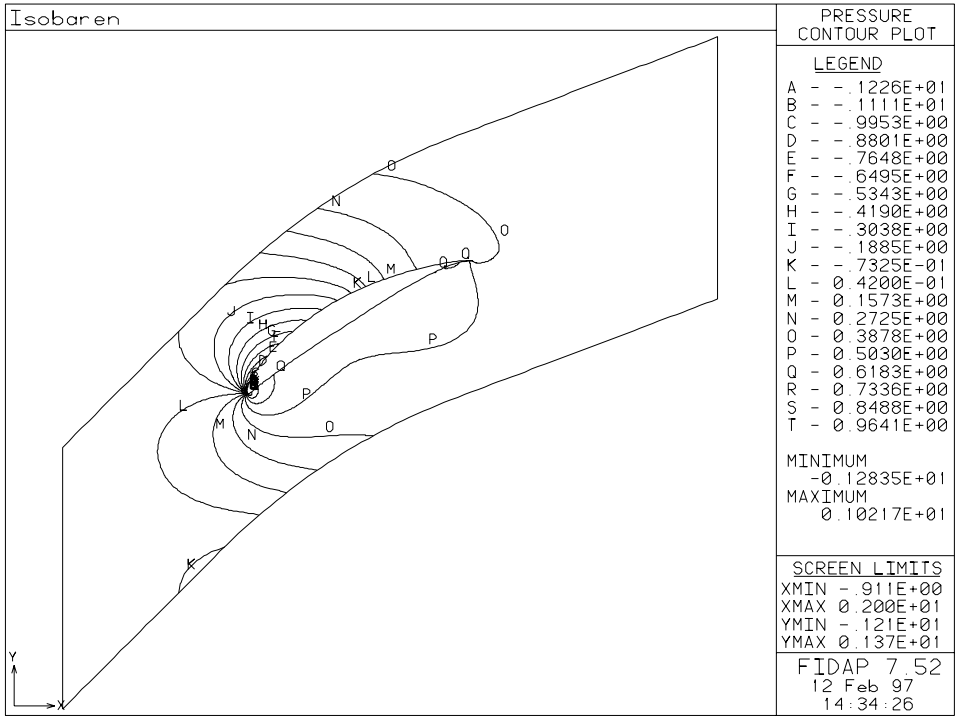


Abbildung 7.15: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 54^\circ$

7.1.3 Profildruckverteilung

Dargestellt ist hier der C_{p1} -Verlauf über der Sehnenlänge. Bis zu einem Anströmwinkel von $\beta_1 = 45^\circ$ erkennt man eine Umkehr der Profildruckverteilung im Bereich zwischen 0 und 15% der Sehnenlänge. Dies hängt direkt mit der Lage des Staupunktes zusammen. Im Bereich von $36^\circ \leq \beta_1 \leq 45^\circ$, siehe Abb.(7.16), (7.17) und (7.18), liegt dieser auf der Saugseite des Profils, d.h. die Profilnase muß druckseitig umströmt werden, wie man auch aus Abb.(7.2) und Abb.(7.4) erkennt. Dies führt zu hohen Geschwindigkeiten und deshalb zu niedrigen Drücken auf der Saugseite. Ab einem Anströmwinkel $\beta_1 \geq 45^\circ$ liegt der Staupunkt auf der Druckseite. Im Staupunkt wird definitionsgemäß nach Glg.(7.1) $C_{p1} = 1$ erreicht. Beim Auslegungswert des Anströmwinkels, d.h. $\beta_1 = 45^\circ$, wird die erwähnte Eigenschaft der NACA 65-Profile augenscheinlich: Konstante Differenzdruckverteilung im Bereich $0 \leq x^* \leq 50\%$ ist annähernd erreicht. In Abb.(7.19) wurden auch die gemessenen Werte der NACA aus dem Report 1368 [6] eingetragen. Relativ gute Übereinstimmung ist erkennbar. Ab einem Anströmwinkel von ungefähr $\beta_1 = 48^\circ$ erkennt man aus Abb.(7.20), (7.21) und (7.22) im Nasenbereich der Saugseite größere Druckunstetigkeiten, vgl. dazu auch Abb.(7.6). Dies ist darauf zurückzuführen, daß die verwendeten Wandelemente eigentlich nur für eindimensionale Strömungen verwendbar sind. Diese Forderung ist im Bereich des Staupunktes sicher nicht erfüllt. Des weiteren liefern die Elemente nur richtige Ergebnisse, wenn, laut [7], die Strömung in diesen Bereichen weder beschleunigt noch verzögert wird. Auch dieser Forderung kann bei der Profilnasenumströmung, die bei $\beta_1 = 51^\circ$ und $\beta_1 = 54^\circ$ schon sehr stark ausgebildet ist, nicht nachgekommen werden. Des weiteren ist bei einem Anströmwinkel von $\beta_1 = 54^\circ$ saugseitig für $x^* \geq 80\%$ ein verschwindender Druckgradient ersichtlich, der auf Ablösung der Strömung im entsprechenden Bereich hindeutet, siehe Abb. (7.22). Abb.(7.8) belegt diese Vermutung.

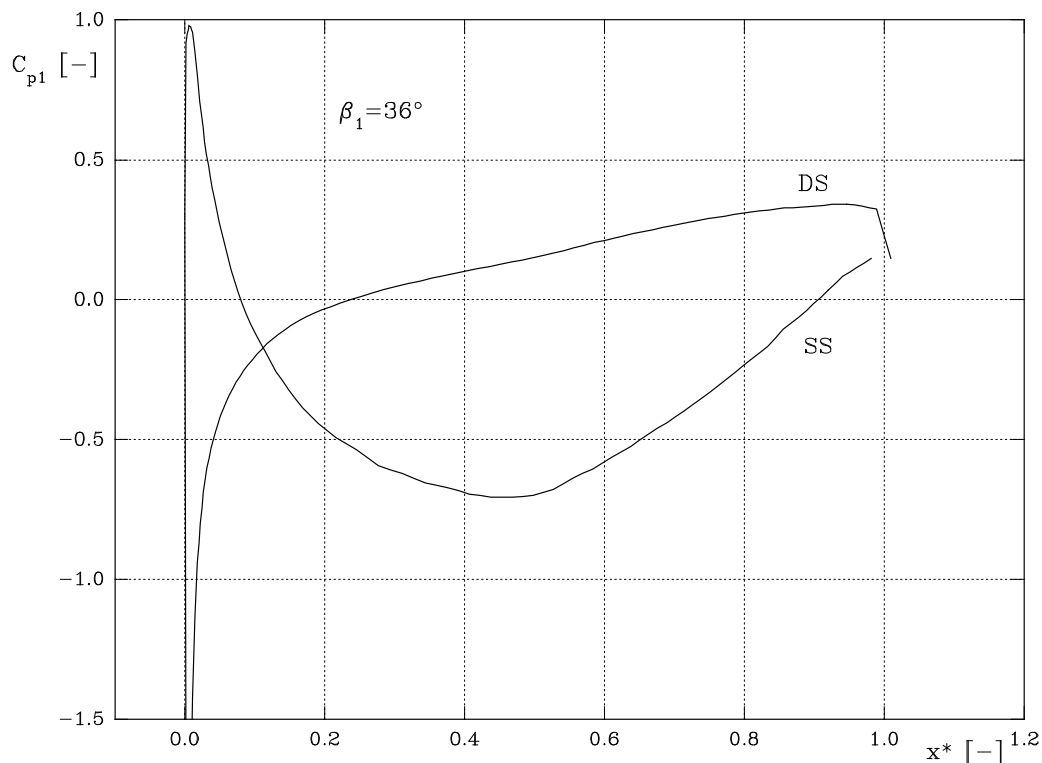
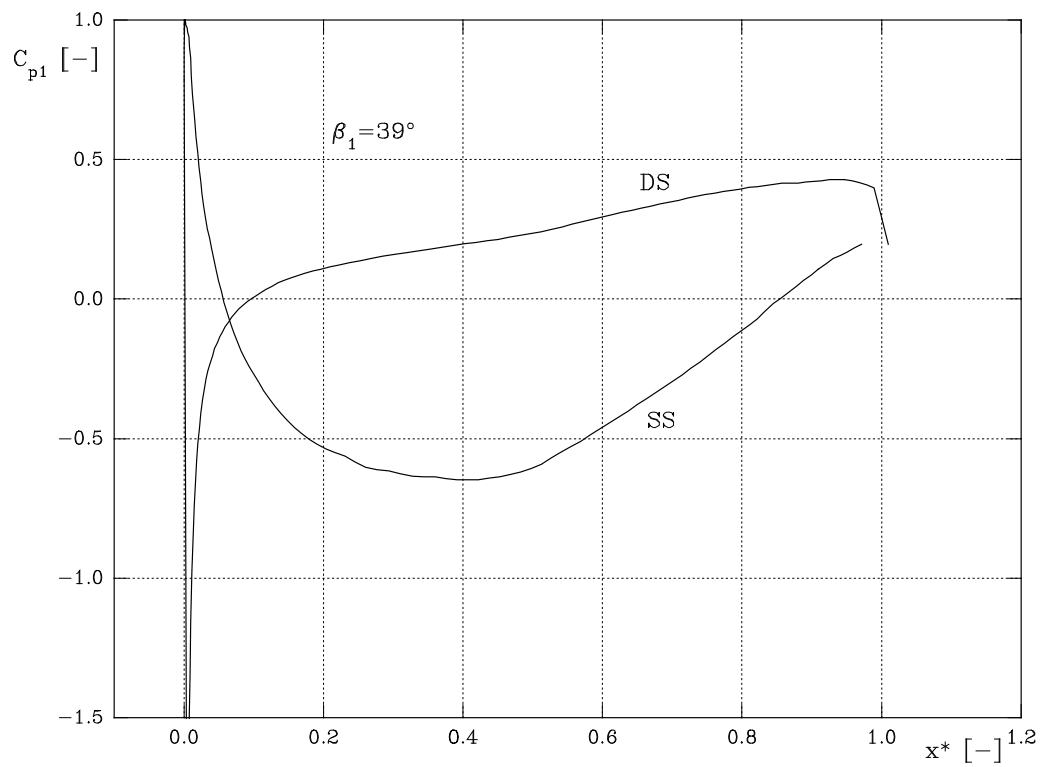
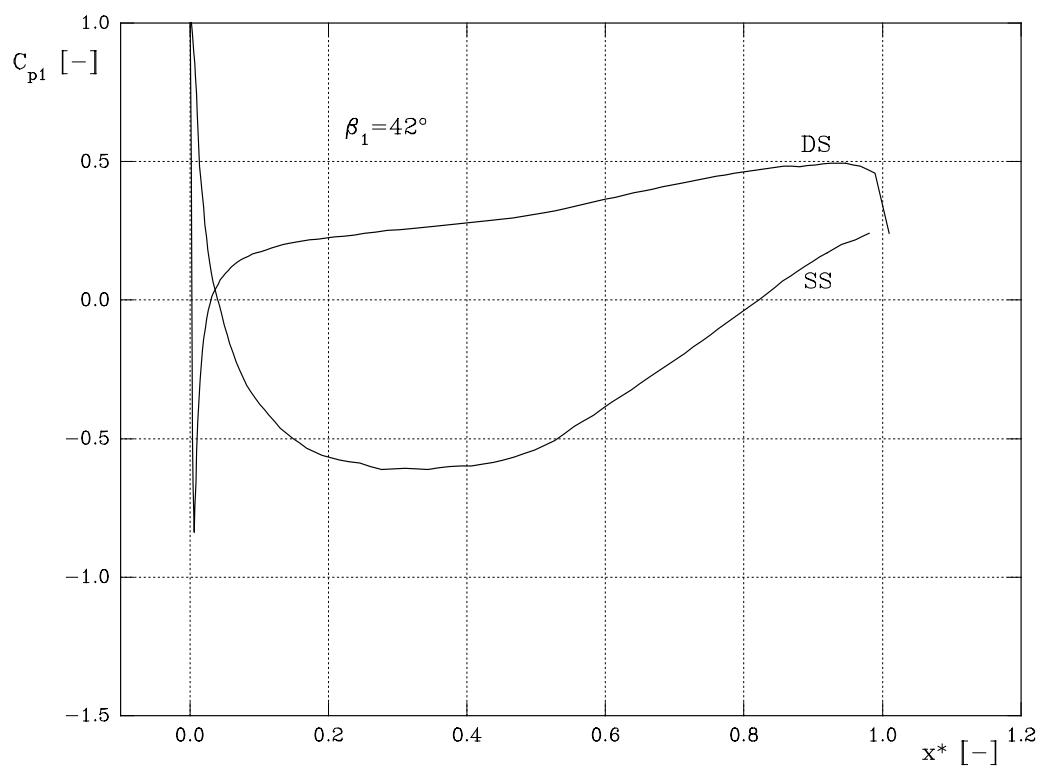
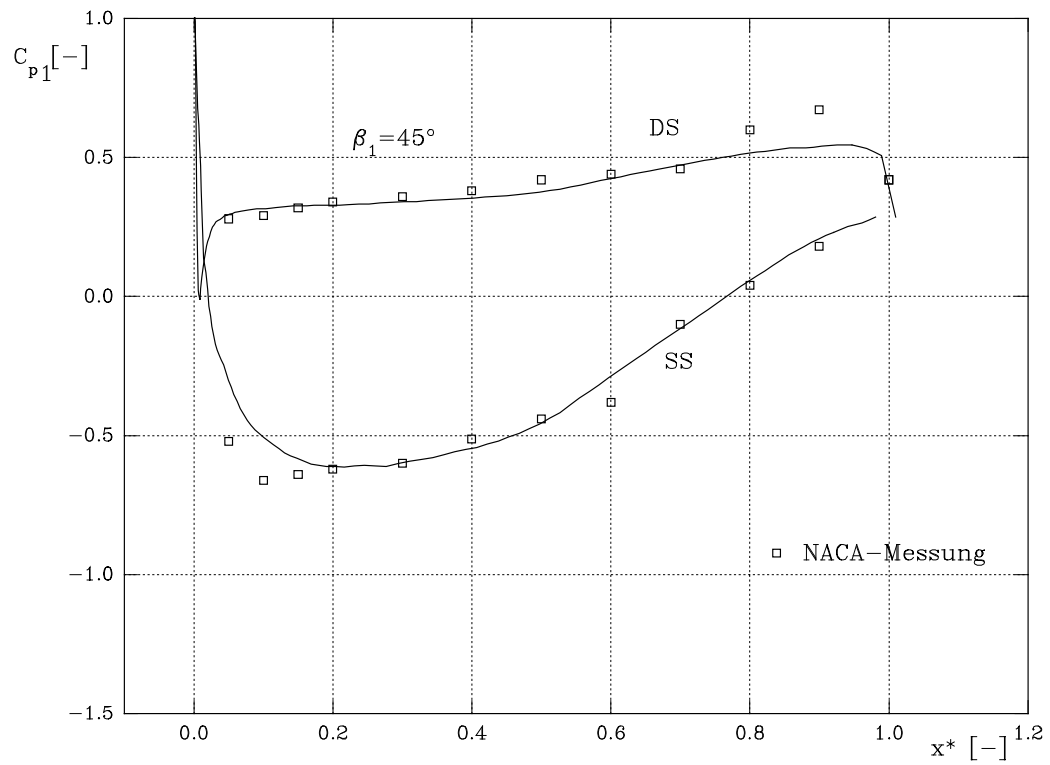
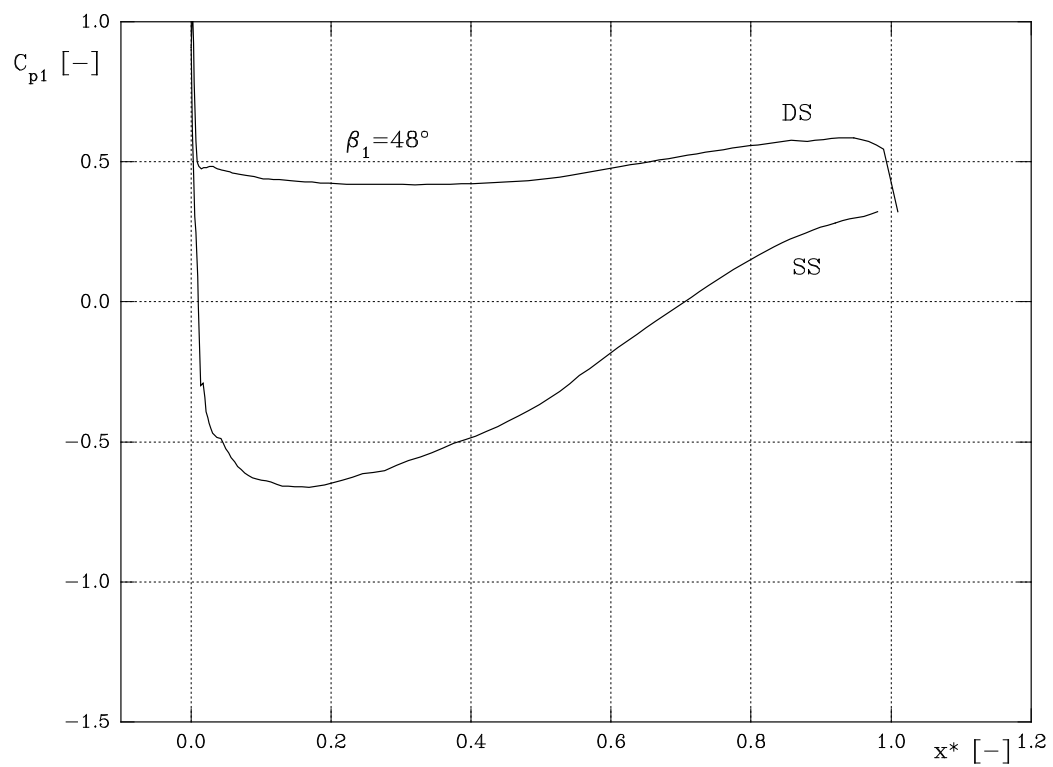
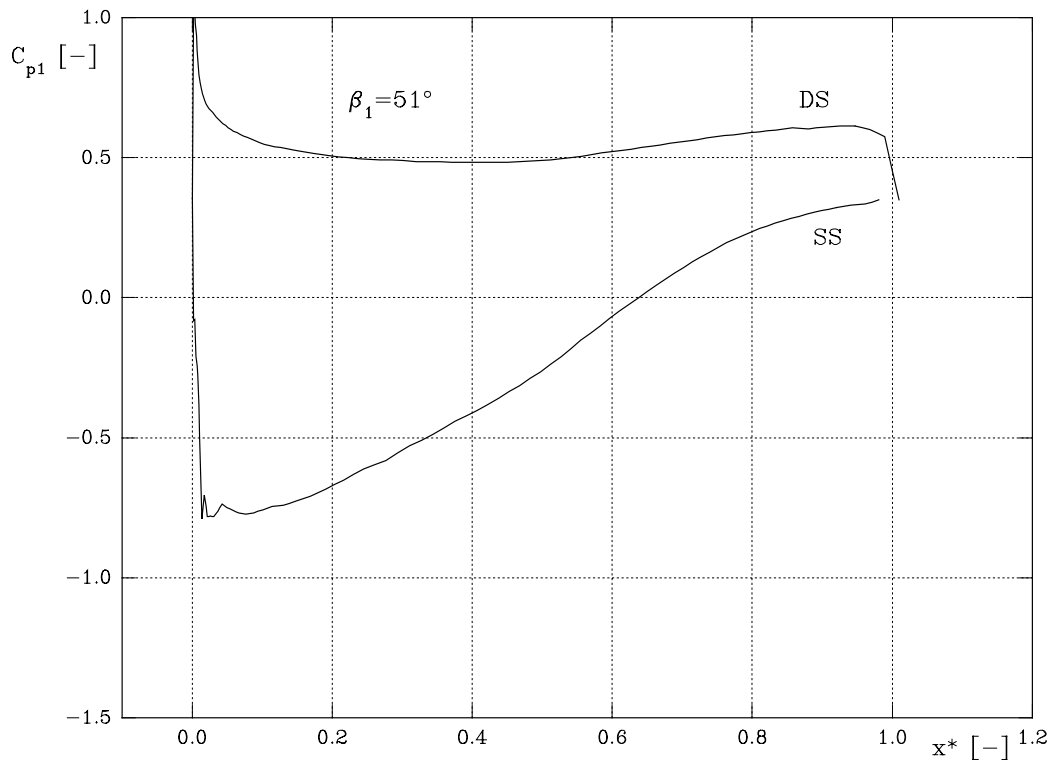
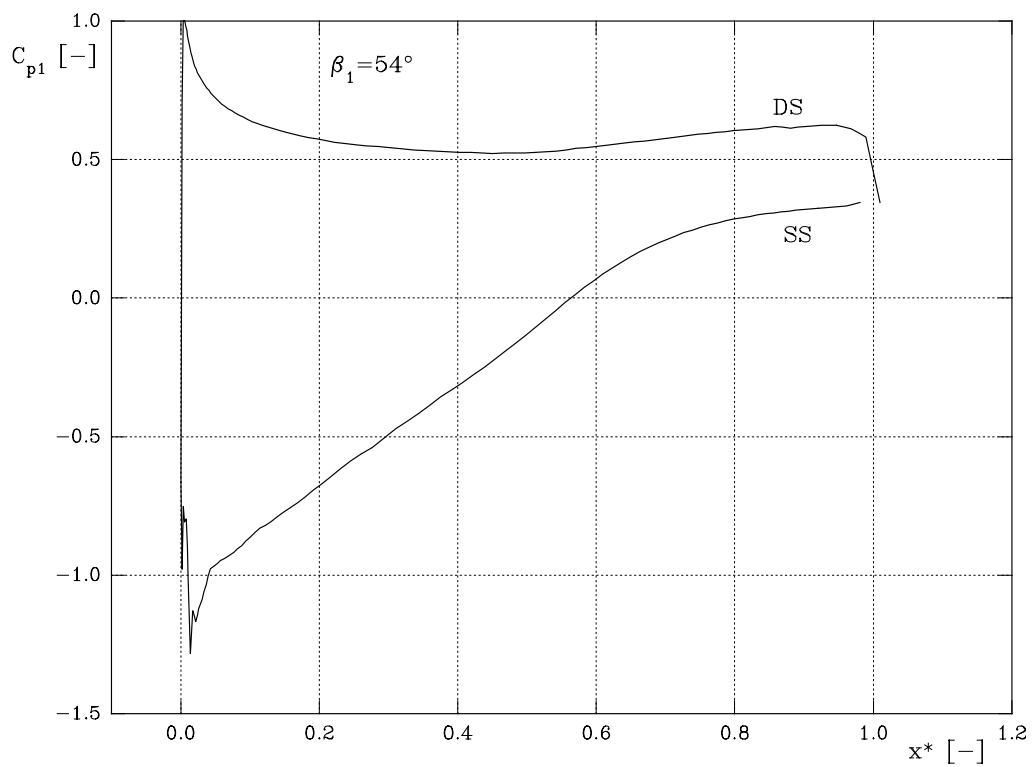


Abbildung 7.16: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 36^\circ$

Abbildung 7.17: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 39^\circ$ Abbildung 7.18: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 42^\circ$

Abbildung 7.19: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 45^\circ$ Abbildung 7.20: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 48^\circ$

Abbildung 7.21: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 51^\circ$ Abbildung 7.22: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 54^\circ$

7.1.4 Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Profil

Die Ausbildung der Nachlaufdelle ist ein erster Anhaltspunkt für den Verlust bei Umströmung des Profils. Sie wurde in verschiedenen Ebenen hinter dem Profil errechnet. Um Übersichtlichkeit zu wahren, sind hier nur drei Anströmwinkel ausgewertet. Vergleicht man Abb.(7.23), Abb.(7.24) und Abb.(7.25) untereinander, so stellt man fest, daß in der freien Strömung (das ist jener Teil der Strömung, der weit vom Profil entfernt liegt) die Verzögerung mit steigendem Anströmwinkel, wie erwartet, zunimmt. Jedoch auch die Nachlaufdelle wird größer. Im Zuge der Ausmischung der Delle im Nachlauf des Profils sind zwei Effekte auffallend: Der Gradient der dimensionslosen Geschwindigkeit wird immer kleiner, je weiter die Ebene, in der ausgewertet wird, vom Profil entfernt ist. In gleichem Maße nimmt aber die Fülligkeit der Delle zu. Aufgrund der Abhängigkeit des Abströmwinkels vom Anströmwinkel ändern sich die Lagen der Nachlaufdellen. Die Schwankungen in Abb.(7.25) direkt an der Profilhinterkante im Bereich von $y'/s = 50\%$ sind auf die dort herrschende Ablösung der Strömung zurückzuführen, vgl. dazu auch Abb.(7.8).

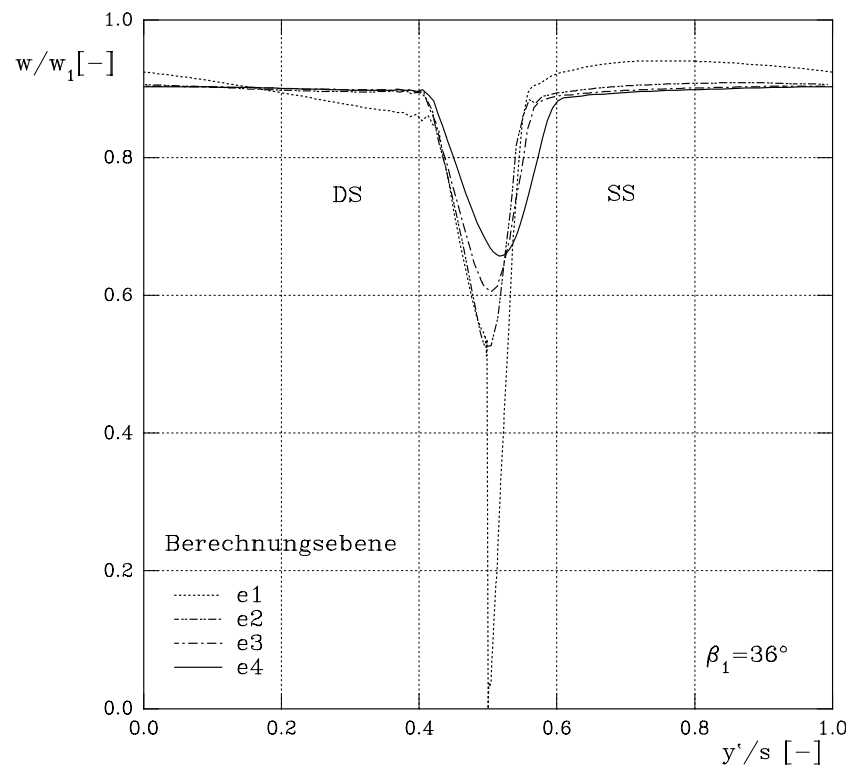
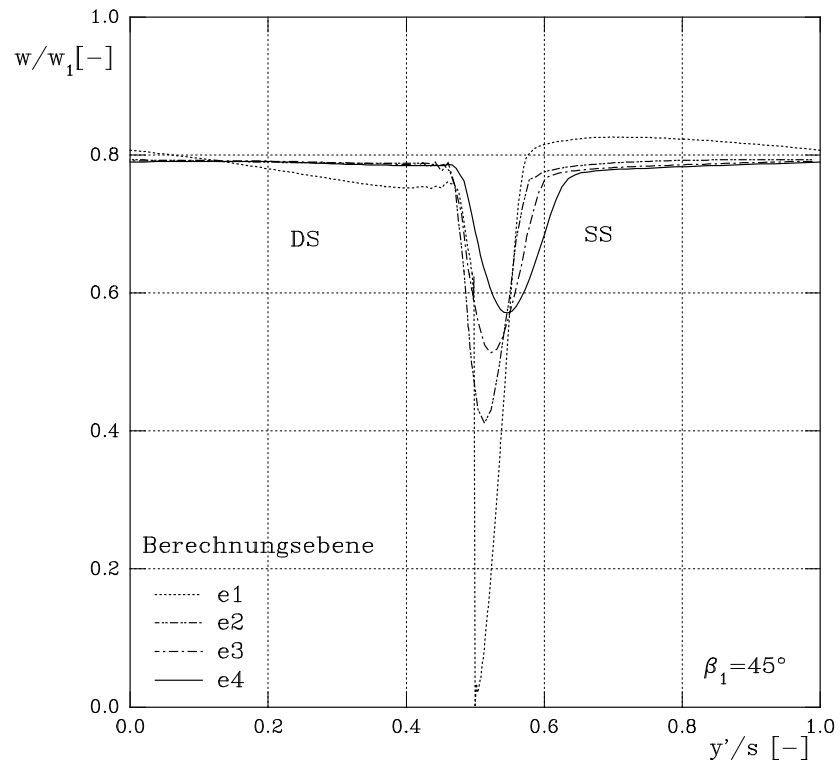
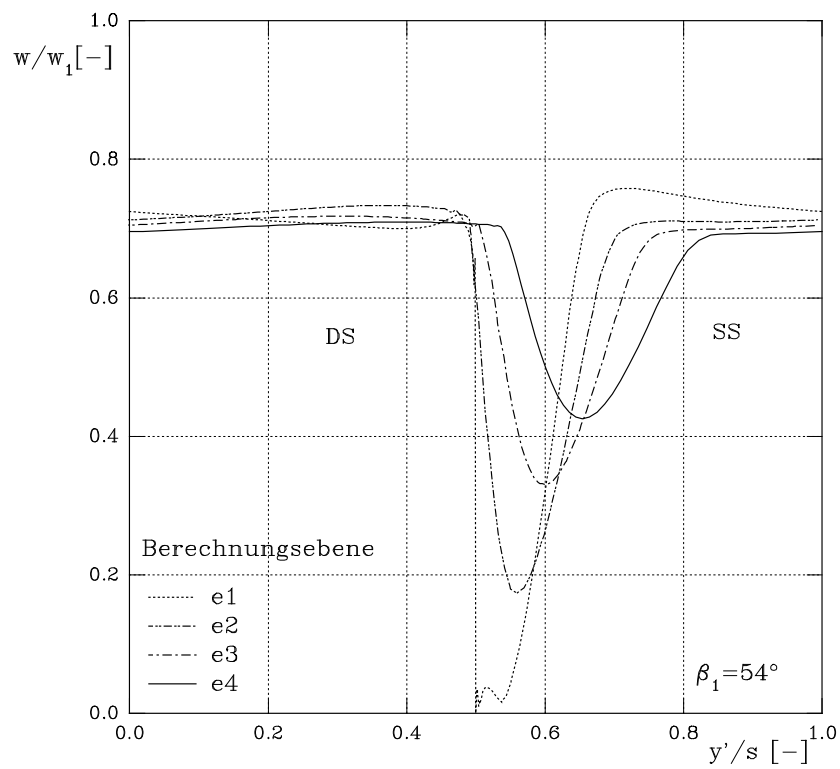


Abbildung 7.23: Nachlaufdelle bei $\beta_1 = 36^\circ$

Abbildung 7.24: Nachlaufdele bei $\beta_1 = 45^\circ$ Abbildung 7.25: Nachlaufdele bei $\beta_1 = 54^\circ$

7.1.5 Dimensionsloser Wandabstand y^+

Für drei repräsentative Anstellwinkel β_1 ist hier der dimensionslose Wandabstand y^+ über der Bogenlänge des Profils dargestellt. Die Indizes „S“ bzw. „D“ in den jeweiligen Kurven der Abb.(7.26), (7.27) und (7.28) bezeichnen die Saug- bzw. Druckseite des Profils. Die Bedingung für den y^+ -Wert, nämlich $30 \leq y^+ \leq 100$, wurde eingehalten. Die Randwerte sind davon jedoch ausgenommen. Hier kommen wieder die bei der Profildruckverteilung erwähnten Bedingungen zur Verwendung der Wandelemente zum Tragen: Sowohl die Eindimensionalität als auch die Forderung nach unbeschleunigter Strömung konnten in Staupunktsnähe nicht erfüllt werden. Dies führt zu einem Ansteigen der y^+ -Werte in diesen Bereichen.

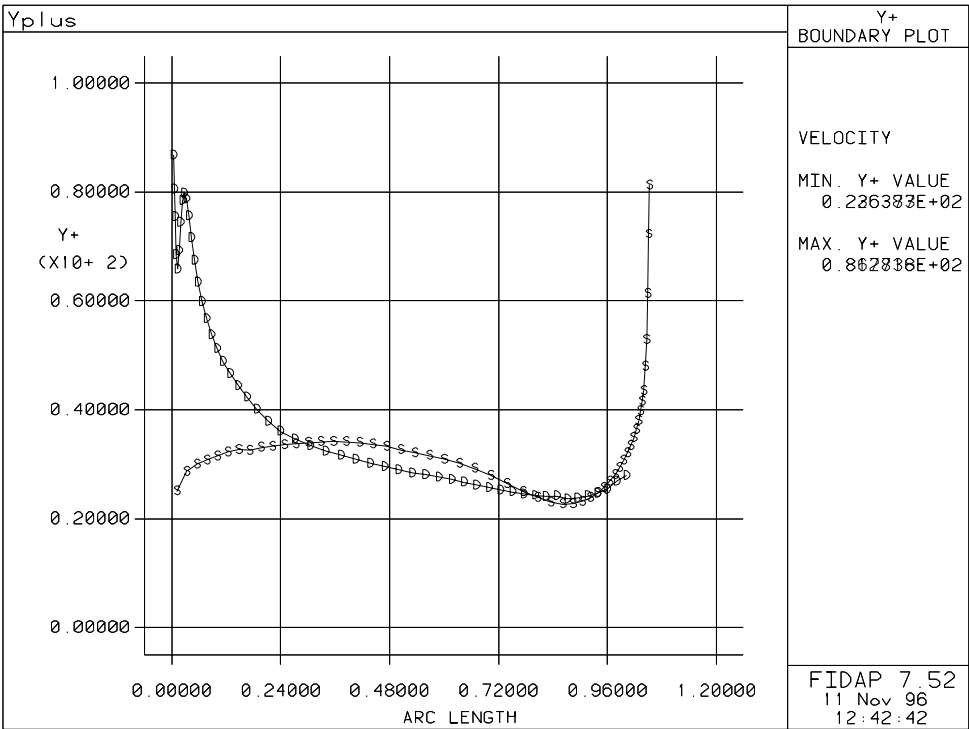


Abbildung 7.26: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 36^\circ$

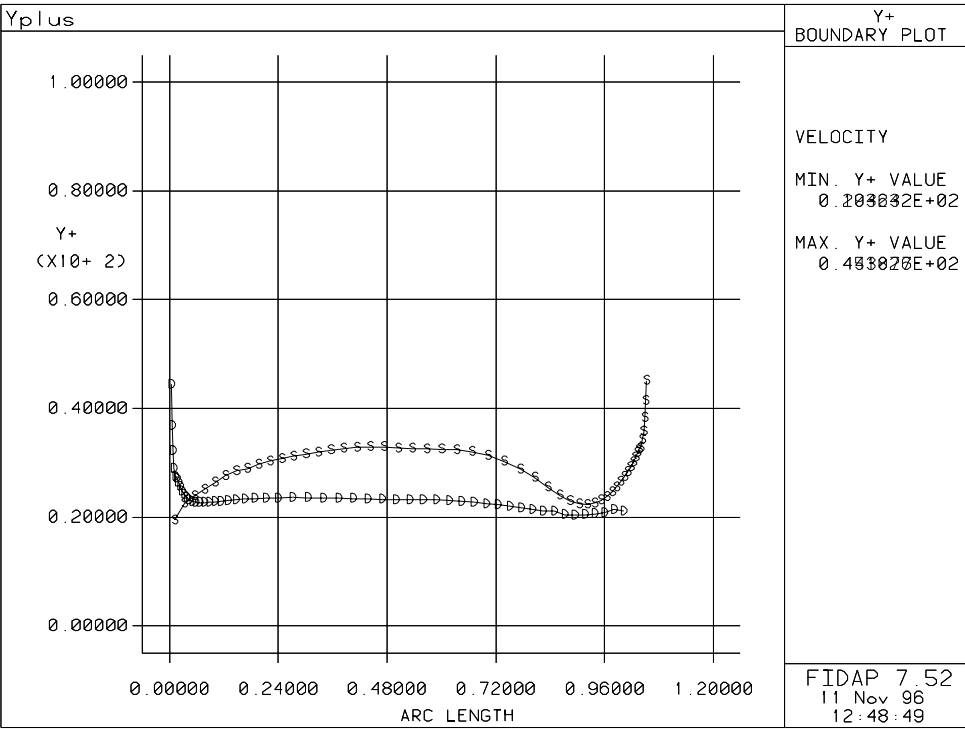


Abbildung 7.27: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 45^\circ$

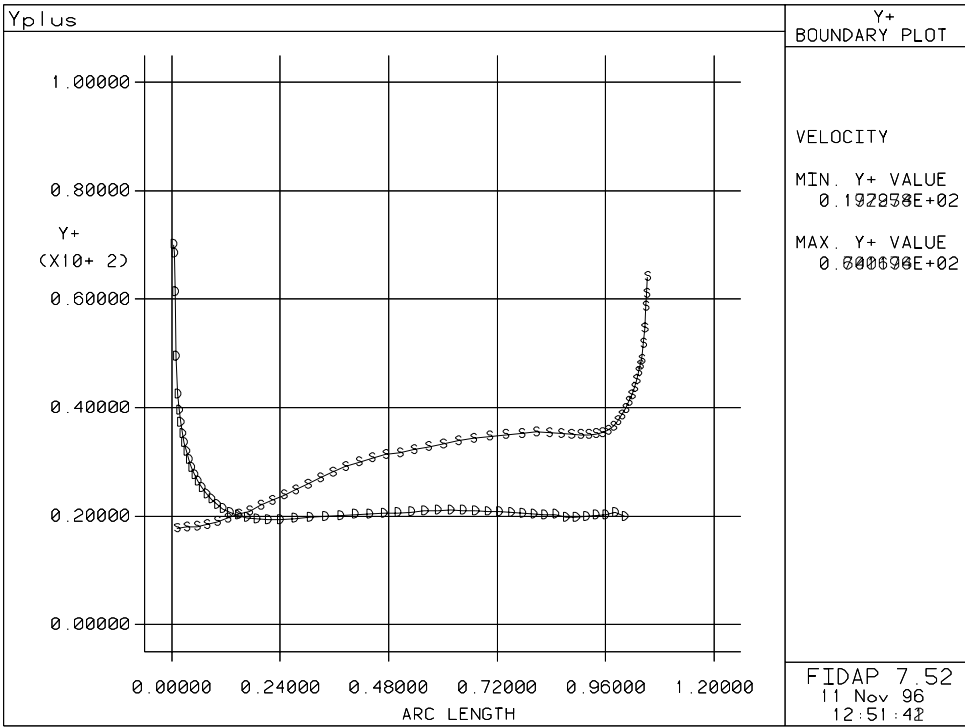


Abbildung 7.28: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 54^\circ$

7.2 Mittelungsverfahren

Die lokalen Strömungsgrößen wurden in mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Größen umgerechnet, um sie mit den Meßwerten vergleichen zu können.

Da die Berechnung in einem Machzahlbereich durchgeführt wurde, in dem es zulässig ist, die Strömung als näherungsweise inkompressibel zu behandeln, ist die Dichte in den Gleichungen für die mit der Massenstromdichte gewogenen teilungsgemittelten Größen nicht enthalten.

- Mit der Massenstromdichte gewogener teilungsgemittelter Abströmwinkel:

$$\overline{\beta_2} = \frac{\int_0^s \beta_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.2)$$

- Mit der Massenstromdichte gewogener teilungsgemittelter Totaldruckkoeffizient:

$$\overline{\omega_1} = \frac{\int_0^s \omega_1(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.3)$$

- Mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Abströmgeschwindigkeit:

$$\overline{w_2} = \frac{\int_0^s w_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (7.4)$$

7.3 Diffusionsfaktor

In der Literatur findet sich ein Kennwert des Schaufelgitters, der eine Aussage über den Ablösebeginn an der Saugseite des Profils trifft. Dieser dimensionslose Kennwert, der Diffusionsfaktor, ist im wesentlichen eine Funktion der Solidity σ und des Anströmwinkels β_1 . Die Definition lautet wie folgt:

$$D = 1 - \frac{w_2}{w_1} + \frac{\Delta w_u}{2\sigma w_1} \quad (7.5)$$

Die Solidity σ ist in dieser Arbeit gleich eins. Die Geschwindigkeiten w_2 und Δw_u werden als mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Größen in Glg.(7.5) eingesetzt. Der Wert Δw_u wird aus Abb.(3.3) zu

$$\Delta w_u = w_{u1} - w_{u2} \quad (7.6)$$

bestimmt.

Abb.(7.29) stellt die Glg.(7.5) in Abhängigkeit von β_1 graphisch dar. Die Werte für w_2 und β_2 wurden dem Ergebnisfile entnommen und ebenfalls als mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Größen eingesetzt. Die Betriebsgrenze, d.h. der Anströmwinkel β_1 bei dem Saugseitenablösung eintritt, wird laut Literatur durch den Wert $D = 0.6$ gekennzeichnet.

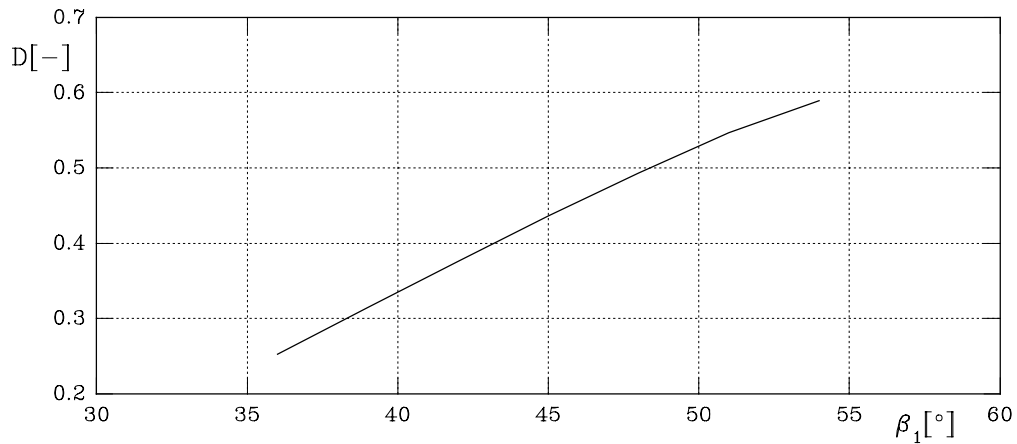


Abbildung 7.29: Diffusionsfaktor in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Ein weiteres Kriterium zur Bestimmung der Betriebsgrenzen ist jenes, welches in den Mellor-charts verwendet wird. Die Betriebsgrenzen bestimmen sich dort als diejenigen Anströmwinkel, bei denen der Totaldruckverlustbeiwert 150% seines minimalen Wertes erreicht.

7.4 Gemittelte Strömungsgrößen

Um die errechneten Daten mit den gemessenen Daten vergleichen zu können, werden die Diagramme in den Abb.(3.4) und Abb.(3.5) um die errechneten mit der Massenstromdichte gewogenen teilungsgemittelten Werte erweitert. Dies ist in den Abb.(7.30) und (7.31) dargestellt. Abb.(7.30) zeigt den gemittelten Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Anströmwinkel.

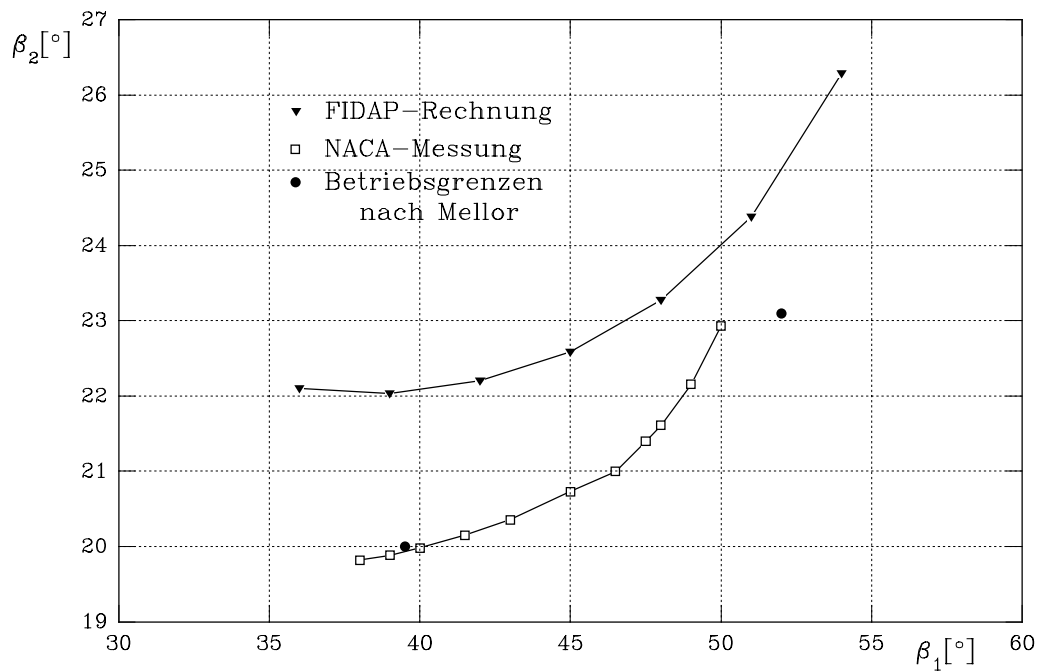


Abbildung 7.30: Der Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Die Festlegung der Betriebsgrenzen nach *Mellor* kann durch die Messungen der NACA bestätigt werden. Aus Abb.(7.29) kann der Wert $D = 0.6$ einem Anströmwinkel von $\beta_1 \approx 54^\circ$ zugeordnet werden. Dieser Wert des Anströmwinkels deckt sich in Abb.(7.31) auch mit den von *Mellor* angegebenen Betriebsgrenzen. Aus den Abb.(7.8) und (7.22) ist die Ablösung der Strömung bei diesem Anströmwinkel schon bekannt.

Wird das Kriterium nach *Mellor* auf die aus der CFD-Rechnung erhaltenen und danach gemittelten Werte angewendet, so erhält man für die Betriebsgrenze durch saugseitige Strömungsablösung gute Übereinstimmung mit dem Kriterium des Diffusionsfaktors, vgl. dazu Abb.(7.29) mit Abb.(7.31). Das Betriebsgrenzenkriterium nach *Mellor* sagt nichts über den absoluten Wert des Totaldruckverlustes aus.

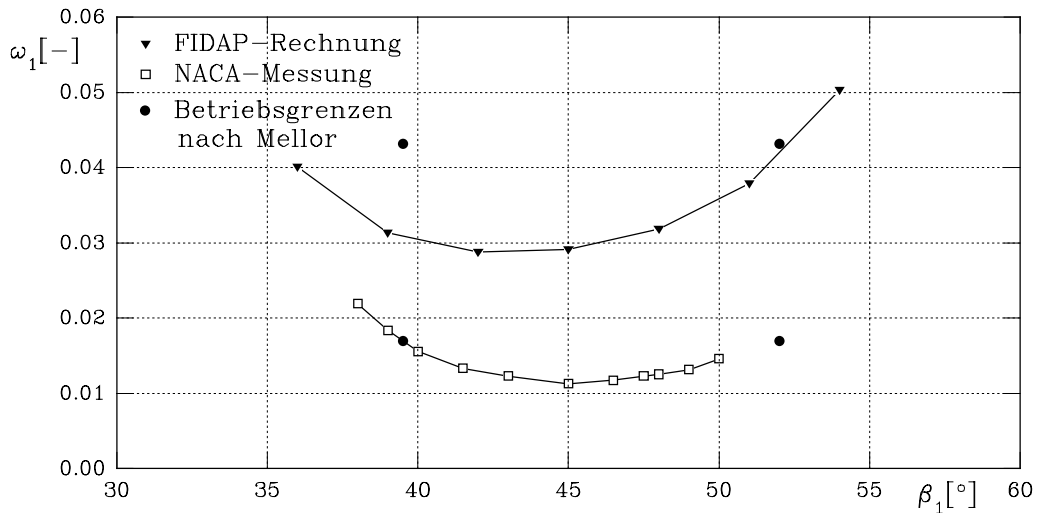


Abbildung 7.31: Der Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Offensichtlich ist jedoch die in Abb.(7.30) und (7.31) dargestellte zu hohe Berechnung sowohl des Abströmwinkels als auch des Totaldruckverlustbeiwertes. Der mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Abströmwinkel beim Auslegungswert des Anströmwinkels $\beta_1 = 45^\circ$ liegt etwa 2° über dem gemessenen Wert. Der mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Totaldruckverlustbeiwert $\bar{\omega}_1$ wird im Auslegungsanströmwinkel um ungefähr 180% zu hoch wiedergegeben.

Die Begründung der Abweichungen zwischen den errechneten und den gemessenen Werten liegt zum einen sicher darin, daß durch die Verwendung des Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modells der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung nicht berücksichtigt wird, d.h. die Grenzschicht wird von ihrem Entstehungsort an turbulent berechnet. Des weiteren ist bekannt, daß Rechnungen auf Basis der finiten Elemente dahingehend tendieren, sogenannte überdiffuse Lösungen zu berechnen. Der Grund dafür ist in der Natur numerischer Verfahren zu suchen: Das kontinuierliche Problem mit seinen unendlich vielen Freiheitsgraden wird durch ein diskretes Modell mit endlich vielen Freiheitsgraden angenähert. Diese Reduktion der Anzahl der Freiheitsgrade ist einer gedanklichen Versteifung des Modells gegenüber dem zu modellierenden Problem gleichzusetzen. Das Verfahren der Finiten Elemente trägt selbst auch zur Berechnung überdiffuser Lösungen bei, wie anhand der zentralen Differenzenoperatoren gezeigt wurde. Hier gibt es aber die Möglichkeit durch das „Streamline-Upwinding-Verfahren“ einzugreifen. Das verwendete CFD-Programm FIDAP bietet die Möglichkeit mit Hilfe einer Variablen \tilde{k} , die aus Glg.(6.32) bekannt ist, in das „Upwinding“ einzugreifen. Die Voreinstellung für \tilde{k} , mit der auch die Rechnungen, deren Ergebnisse in Abb.(7.30) und Abb.(7.31) dargestellt sind, durchgeführt wurden, ist $\tilde{k} = 1$. Dieser Wert wurde deshalb gewählt, da

die Lösungen des Iterationsverfahrens damit relativ rasch konvergieren und zu meist qualitativ richtigen Ergebnissen führen. Um die quantitativen Aussagen der Rechnung, die hier von Interesse sind, zu präzisieren, ist es notwendig den Wert \tilde{k} der Aufgabenstellung anzupassen. Die Auswirkungen einer Variation von \tilde{k} auf den Abströmwinkel β_2 und auf den Totaldruckverlustbeiwert ω_1 wurden beim Auslegungsanströmwinkel $\beta_1 = 45^\circ$ untersucht. Die Auswertungen davon zeigen Abb.(7.32) und Abb.(7.33).

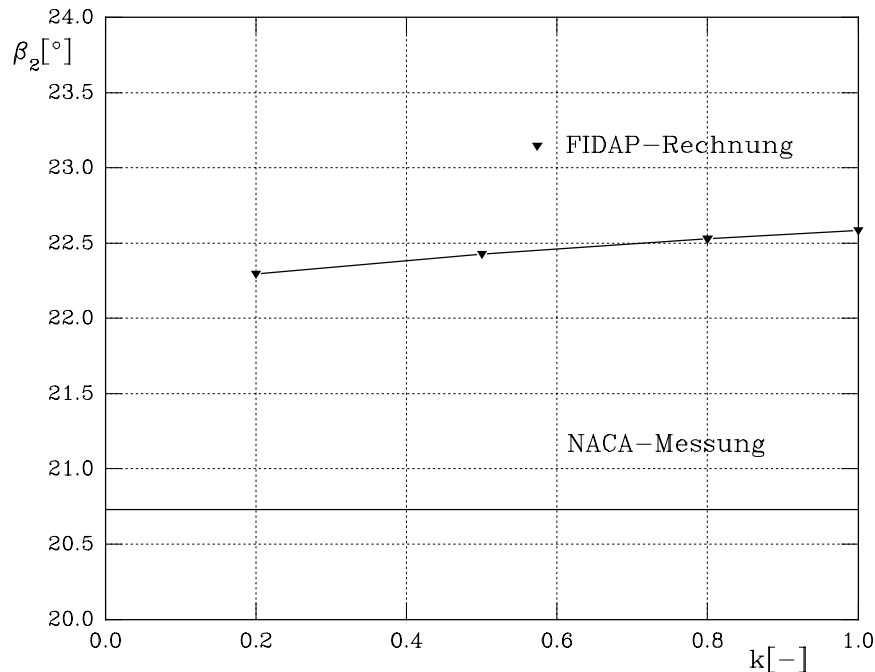


Abbildung 7.32: Berechneter Abströmwinkel über dem Upwindingfaktor bei $\beta_1 = 45^\circ$

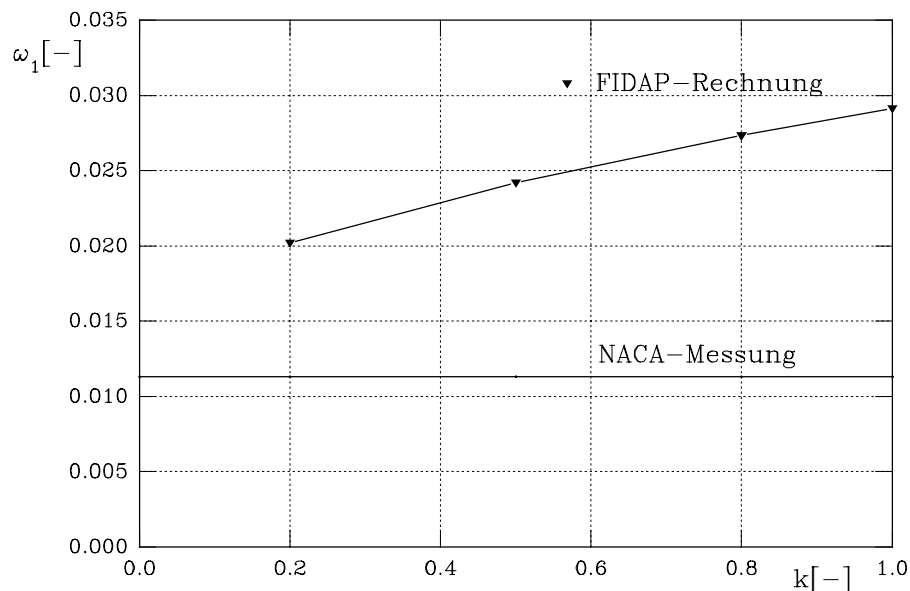


Abbildung 7.33: Berechneter Totaldruckverlustbeiwert über dem Upwindingfaktor bei $\beta_1 = 45^\circ$

Interpretiert man die Ergebnisse aus Abb.(7.32) und (7.33), so kommt man zu dem Schluß, daß sich mit immer kleiner werdendem Upwindingfaktor die berechneten Ergebnisse den Meß-

werten nähern. Es wurde aber die Erfahrung gemacht, daß mit kleiner werdendem Upwindingfaktor das Konvergenzverhalten des gesamten Rechenverfahrens immer schlechter wird. Die Abb.(7.34) und Abb.(7.35) geben das Resultat dieser Studie wieder.

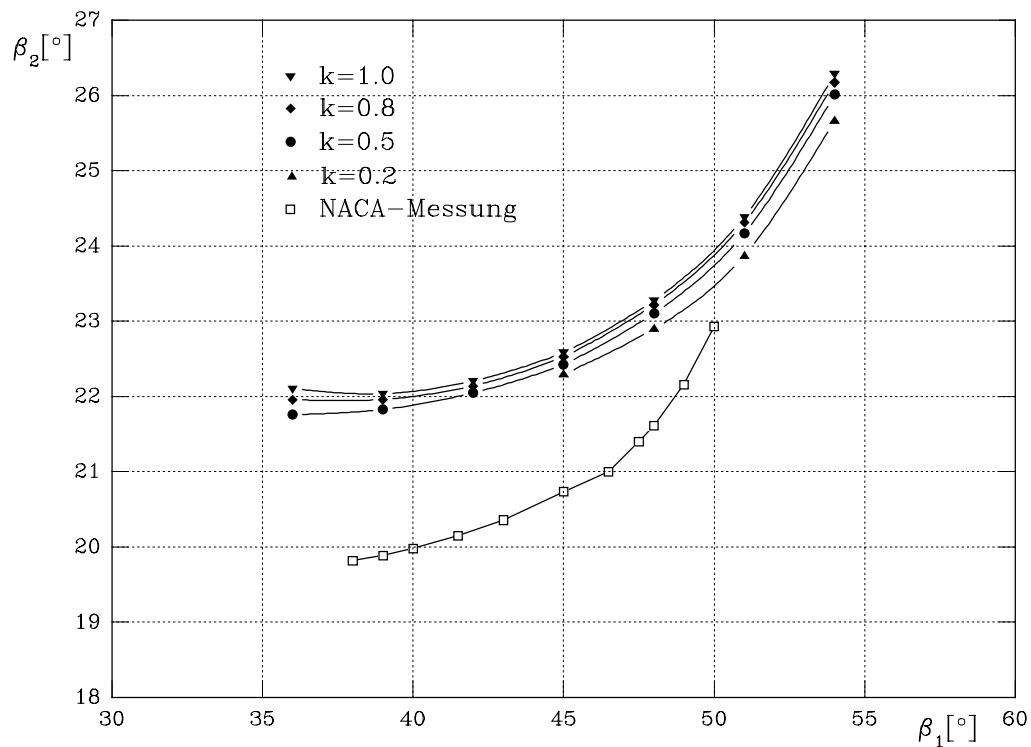


Abbildung 7.34: Berechneter Abströmwinkel über Anströmwinkel mit dem Parameter Upwindingfaktor

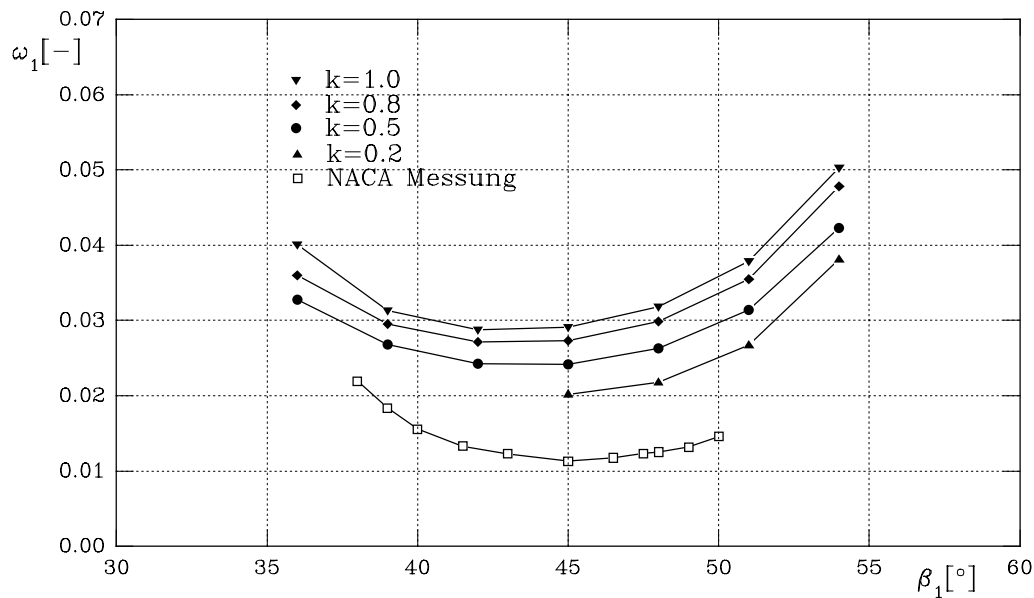


Abbildung 7.35: Berechneter Totaldruckverlustbeiwert über Anströmwinkel mit dem Parameter Upwindingfaktor

Wie sich aus den Abb.(7.34) und Abb.(7.35) erkennen läßt, nähern sich die berechneten Kurven mit abnehmendem Upwinding immer mehr den gemessenen Kurven.

Das für den Upwindingfaktor $\tilde{k} = 0.2$ nur jeweils ein Ast der Kurven vorhanden ist, ist auf das sich extrem verschlechternde Konvergenzverhalten der Rechnung zurückzuführen. Bei der angenommenen Konvergenzschranke von 10^{-4} war es im Bereich von $36^\circ \leq \beta_1 \leq 45^\circ$ nicht möglich eine Lösung zu finden, die die Schranke unterschritt. Obwohl die Relaxationsfaktoren für alle fünf zu berechnenden Variablen schon in der Nähe von eins gesetzt waren, zeigten sich besonders bei der Dissipationsrate ε Oszillationen der Residuen, die ein Unterschreiten der Konvergenzschranke unmöglich machten. Bei dem Versuch den Rechenprozeß vollständig ohne zusätzliche numerische Viskosität durchzuführen, traten diese Oszillationen bei allen fünf zu berechnenden Variablen auf.

Abb.(7.36) zeigt die entstandenen Oszillationen im Geschwindigkeitsfeld an der Profilsaugseite bei einem Upwindingfaktor $\tilde{k} = 0.0$ und einem Anströmwinkel $\beta_1 = 45^\circ$.

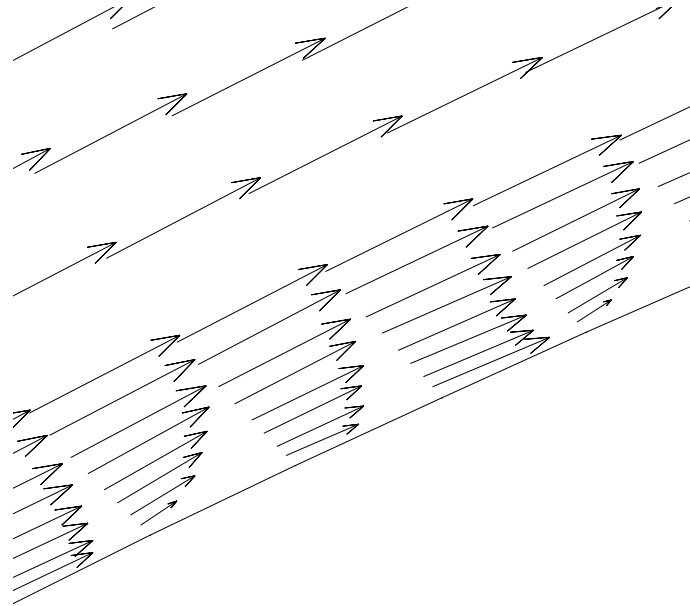


Abbildung 7.36: Oszillationen im Geschwindigkeitsfeld bei $\beta_1 = 45^\circ$ und $\tilde{k} = 0.0$

Deutlich ist die Änderung des Geschwindigkeitsvektors nach Betrag und Richtung an der Profiloberfläche zu erkennen.

Um die gravierenden Auswirkungen eines Nichtanpassens des Upwindingfaktors zu belegen, sind in Abb.(7.37) das Geschwindigkeitsfeld und in Abb.(7.38) die Profildruckverteilung der Strömung bei einem Anströmwinkel $\beta_1 = 36^\circ$ und einem Upwindingfaktor $\tilde{k} = 0.2$ abgebildet. Diese Abbildungen sollen mit Abb.(7.39) und Abb.(7.16), die das Geschwindigkeitsfeld und die Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 1.0$ zeigen, verglichen werden. Die Achsenbezeichnungen „coordinate“ bzw. „pres“ entsprechen den Bezeichnungen „ x^* “ bzw. dem doppelten C_{p1} -Wert in Abb.(7.16).

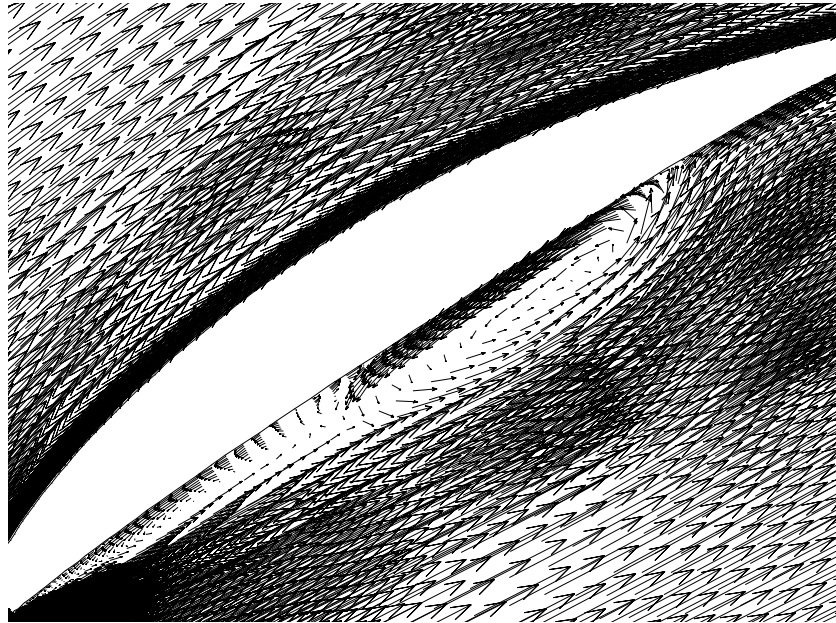


Abbildung 7.37: Die errechnete Ablöseblase bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 0.2$

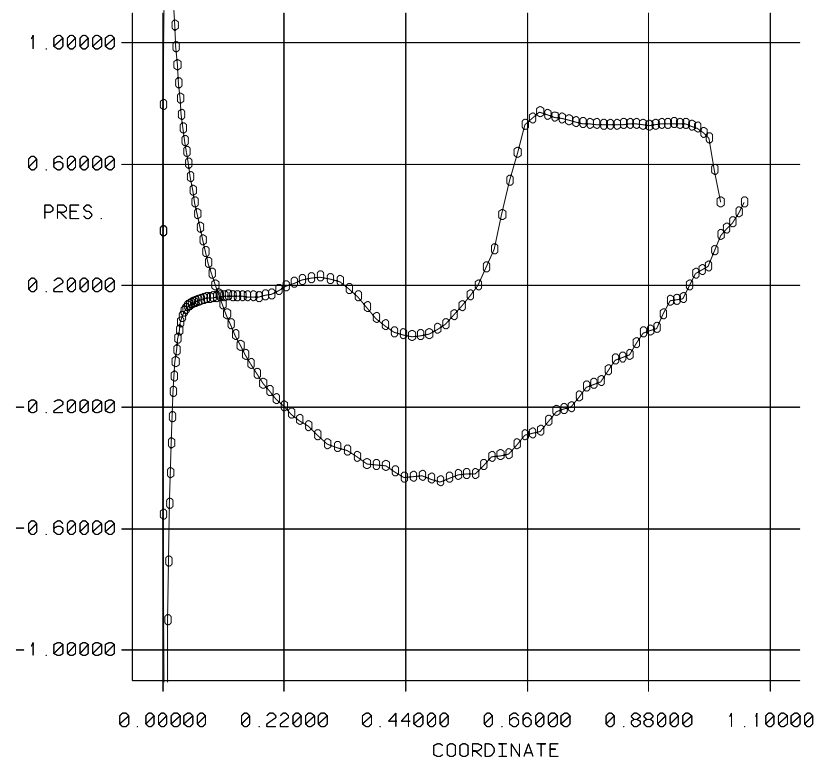


Abbildung 7.38: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 0.2$

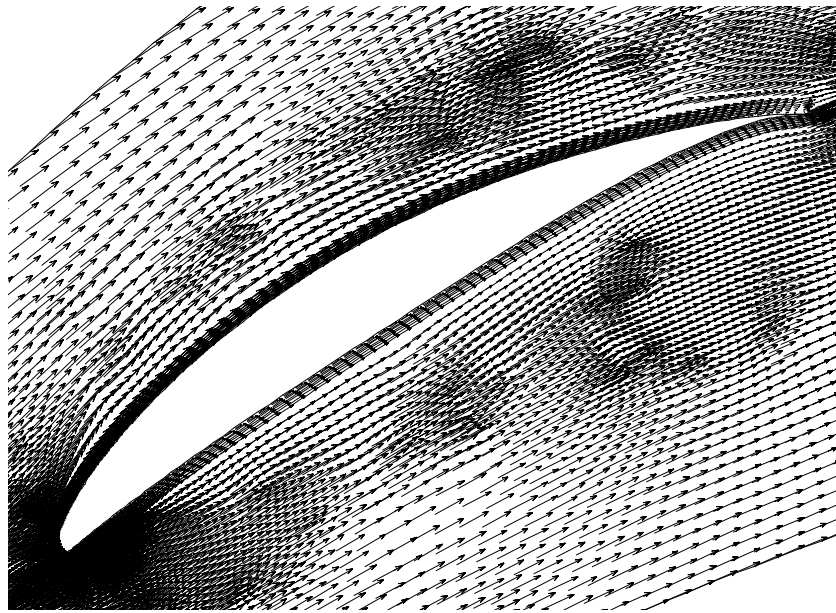


Abbildung 7.39: Das Strömungsbild bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 1.0$

Sowohl die Rechnungen mit einem Upwindingfaktor von $\tilde{k} = 0.0$ als auch Teile der Rechnungen mit $\tilde{k} = 0.2$, dazu gehören auch die in Abb.(7.37) und Abb.(7.38) dargestellten Ergebnisse, haben die Konvergenzschranke von 10^{-4} nicht unterschritten. Ihre Residuen stagnierten in einem Bereich von ca. 10^{-3} bis $5 \cdot 10^{-4}$. Sie konnten deshalb nicht in die Ergebnisse, dargestellt in Abb.(7.34) und Abb.(7.35), eingezeichnet werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Diese Diplomarbeit befaßt sich mit der numerischen Berechnung der ebenen turbulenten Strömung in einem NACA 65-Verdichtergitter. Dazu wurde das Finite-Elemente Programmpaket FIDAP auf einer Alpha Workstation mit dem Betriebssystem UNIX verwendet. Die zur Berechnung notwendigen Profilkordinaten stammen aus dem NACA-Report 1368 [6], beziehungsweise aus [1]. Ziel war die Erstellung von zwei im thermischen Turbomaschinenbau sehr häufig verwendeten Zusammenhängen. Das ist (1) ein Zusammenhang zwischen dem Abströmwinkel β_2 und dem Anströmwinkel β_1 und (2) ein weiterer zwischen dem Totaldruckverlustbeiwert ω_1 und dem Anströmwinkel β_1 . Außerdem war man an weiteren Strömungseigenschaften des Gitters wie zum Beispiel die Nachlaufdübeln und die Profildruckverteilungen bei variierendem Anströmwinkel β_1 interessiert. Um die erhaltenen Ergebnisse überprüfen zu können, wurden aus den Daten des Reports 1368 der NACA, die in den fünfziger Jahren dieses Gitter in Windkanalversuchen vermaß, die beiden Diagramme $\beta_2 = f(\beta_1)$ und $\omega_1 = g(\beta_1)$ erstellt. Dafür wurden die diskret gemessenen Werte für Anstellwinkel, Widerstandsbeiwert und Strömungsumlenkungswinkel in die zur Darstellung notwendigen Größen umgerechnet. Überprüft wurde dieses Ergebnis mit den Mellor-Diagrammen. In weiterer Folge wurde das Strömungsfeld um die periodisch angeordneten Profile numerisch berechnet. Um die geforderten Diagramme erstellen zu können, wurden nach Beendigung des iterativen Berechnungsvorganges das FIDAP-Ergebnisfile dem Simulationsprogramm **IDL** nach entsprechender Umformatierung mitgeteilt. Dort wurden Routinen verfaßt, die daraus mit der Massenstromdichte gewogene teilungsgemittelte Größen für β_2 und ω_1 in Abhängigkeit von β_1 lieferten. Diese wurden mit Hilfe des Programmes **Sigma-Plot** graphisch dargestellt.

Vergleicht man die berechneten und die gemessenen Werte, stellt man besonders für den Totaldruckverlust größere Abweichungen fest. Qualitativ wird jedoch sowohl der Totaldruckverlust als auch der Abströmwinkel gut wiedergegeben. Diese Abweichungen sind auf mehrere Ursachen zurückzuführen: Im Finite-Elemente-Verfahren wird ein Kontinuum mit unendlich vielen Freiheitsgraden diskretisiert. Daraus folgt eine Reduktion der Freiheitsgrade. Dies führt, im Einklang mit anderen Autoren z.B. [17] dazu, daß die errechneten Werte des Totaldruckverlustbeiwertes gegenüber den Meßwerten zu hoch ausfallen. Eine weitere Begründung für die zu hoch berechneten Werte ist die Tatsache, daß bei der Verwendung des Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modells die Transition in der Grenzschicht von laminarer zu turbulenter Strömung vernachlässigt wird. D.h. die Grenzschichtströmung wird von ihrem Beginn an als turbulent aufgefaßt. Da aber der laminare Teil der Grenzschicht, gegenüber dem turbulenten Teil einen geringeren Widerstand aufweist, folgt daraus eine überhöhte Berechnung des Totaldruckverlustes. Auch die Knotenzahl hat Einfluß auf das Ergebnis. In [17] wurde gezeigt, daß sich mit steigender Knotenzahl die Rechenwerte den Meßwerten nähern.

Um diese Differenz zwischen Meß- und Rechenwerten zu minimieren, wurde nicht wie ursprünglich gedacht, die Knotenzahl erhöht, da sich zum Einen mit den vorhandenen 17908 Knoten die Rechenzeiten in akzeptablen Grenzen befanden, und zum Anderen der gewählte Netzgenerierungsalgorithmus sich dazu nicht besonders gut eignete. Das Augenmerk wurde auf die zusätzliche numerische Diffusion gerichtet. Durch Variation des Upwindingfaktors und daraus resultierend geschickte Wahl der Relaxationskonstanten für jeden Freiheitsgrad fand man ein Mittel, um die Ergebnisse den Meßwerten anzunähern. Daß die Rechenwerte mit den Meßwerten nie ganz übereinstimmten, lag an dem immer schwieriger zu beherrschenden Konvergenzverhalten des Rechenverfahrens mit abnehmendem \tilde{k} -Wert, so daß für $\tilde{k} = 0.2$ nur mehr Ergebnisse für $\beta_1 > 45^\circ$ und für \tilde{k} -Werte, die unter 0.2 lagen, keine Ergebnisse mehr erhalten werden konnten, die die von Anfang an festgelegte Konvergenzschranke von 10^{-4} erreichten.

Ein Ziel dieser Arbeit war, durch ein numerisches Berechnungsverfahren Voraussagen über die Abhängigkeit des Abströmwinkels und des Totaldruckverlustbeiwertes vom Anströmwinkel eines Verdichtergitters treffen zu können. Für dieses eine, hier untersuchte Profil konnte dieses Ziel erreicht werden.

Ausblick

Dieses hochinteressante Thema der Kompressoraerodynamik bietet natürlich eine Unmenge von Möglichkeiten, um im Zuge weiterer Arbeiten auf diesen hier vorliegenden Ergebnissen aufzubauen. Es könnten verschiedene Richtungen verfolgt werden.

Da die Berechnung turbulenter Strömungen mit der heutigen Hard- und Software für die Erfassung der Turbulenz geeignete Turbulenzmodelle benötigt, wäre es durchaus sinnvoll diese hier vorliegende Berechnung auch mit anderen Turbulenzmodellen als dem Standard- $(k - \varepsilon)$ -Modell durchzuführen. Das algebraische Modell nach *Baldwin/Lomax* würde sich hier besonders gut eignen, da die beiden Transportgleichungen für k und ε aus dem zu lösenden Satz von Erhaltungsgleichungen wegfallen würden und so das Berechnungsverfahren wesentlich beschleunigt würde.

Auch die Wahl des Netzgenerierungsalgorithmus und des Gleichungslösungsverfahrens, die von ganz entscheidender Bedeutung ist, ist sicher in Form der einen oder anderen Arbeit dokumentierungswürdig.

Die vorliegende Berechnung wurde in einem Machzahlbereich durchgeführt, in dem es zulässig war die Kompressibilität zu vernachlässigen. Der Kompressibilitätseinfluß bei höheren Machzahlen, insbesondere in Bereichen knapp unterhalb der Schallgrenze wäre ein weiteres Arbeitsfeld.

Aufbauend auf den vorhandenen Kenntnissen wäre es sinnvoll, der Profilentwicklung der letzten Jahre entsprechend, die Strömungseigenschaften sogenannter „controlled-diffusion-airfoils (CDA)“ numerisch zu untersuchen. Die Form dieser Profile entsteht durch Vorgabe einer gewünschten Druck- bzw. Geschwindigkeitsverteilung am Profil, deren numerische Nachrechnung eine Aufgabenstellung für weitere Arbeiten sein könnte.

Natürlich drängt sich bei zweidimensional durchgeführten numerischen Berechnungen immer die Frage nach der dreidimensionalen Berechnung, deren Übereinstimmung mit der ebenen Berechnung und den eventuell vorhandenen Meßwerten auf. Spezielle dreidimensionale Effekte wie zum Beispiel Sekundär- und Spaltströmungen könnten hierbei untersucht werden. In diese Richtung wurde bereits im Zeitraum der Erstellung dieser Arbeit erste Schritte unternommen.

Anhang A

FIDAP-Eingabefile

```
TITLE
NACA-65 Verdichtergitter
//
//STAFFELUNGSWINKEL
    $G=30.48
//KINET. TURBULENZENERGIE
    $k=0.00015
//TURBULENTE DISSIPATION
    $eps=1.653E-5
//ANSTRÖMWINKEL
    $BETA1=45
//
//
FI-GEN ( ELEMENT=1, POINT=1, CURVE=1, SURFACE=1, NODE=0, MEDGE=1,
MLOOP=1, MFACE=1, BEDGE=1, SPAVE=1, MSHELL=1, MSOLID=1 )
//
UTILITY( TOLERANCE = 0.0001)
WINDOW( CHANGE=1, MATRIX )
    1.000000    0.000000    0.000000    0.000000
    0.000000    1.000000    0.000000    0.000000
    0.000000    0.000000    1.000000    0.000000
    0.000000    0.000000    0.000000    1.000000
    -0.023170    0.885920    -0.089400    0.592420    -0.90909    0.90909
    45.00000    45.00000    45.00000    45.00000
//
//ERSTELLUNG DER PROFILOBERSEITE
//
$D=0.0
$E=0.0
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
$D=0.0015
$E=0.005
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                        Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))
$D=0.00375
$E=0.0094375
```

```

POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.00491488
$E=0.01146953
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.00740515
$E=0.01456952
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.01239359
$E=0.01971452
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.02487986
$E=0.02968954
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.04986647
$E=0.04546959
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.07486144
$E=0.05826964
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.09986084
$E=0.06917468
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.14986751
$E=0.08713476
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.19988037
$E=0.10112983
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.24989691
$E=0.11215488
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.29991595
$E=0.12049993
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

$D=0.34993651
$E=0.12648996
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
      Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G)))

```

```

$D=0.39995782
$E=0.13028498
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.44997928
$E=0.13175500
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.5000
$E=0.130845
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.55001892
$E=0.12742500
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.600035
$E=0.12178499
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.65004747
$E=0.11406997
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.70005573
$E=0.10445995
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.75005916
$E=0.09296493
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.80005738
$E=0.07956992
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.85005006
$E=0.06432491
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.90003708
$E=0.04687492
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=0.95001877
$E=0.02675994
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),
                                Y = (($E)*COS($G)+($D)*SIN($G))

$D=1.00
$E=0.0
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($D)*COS($G)-($E)*SIN($G)),

```

$$Y = ((\$E)*\cos(\$G)+(\$D)*\sin(\$G))$$

```

POINT( SELECT, ID )
1
2
3
4
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
4
5
6
7
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
7
8
9
10
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
10
11
12
13
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
13
14
15
16
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
16
17
18
19
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
19
20
21
22
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
22
23
24
25
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )

```

```

25
26
27
28
CURVE( ADD, NOSHOWNLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL)

//
CURVE( SELECT, ID)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
CURVE( JOIN, Label="SAUGSEITE")
//
//
//PROFILUNTERSEITE
//
$F=0.0015
$H=-0.0027
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.00375
$H=-0.0037125
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.00508512
$H=-0.00396953
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.00759485
$H=-0.00406952
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.01260641
$H=-0.00366452
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.02512014
$H=-0.00178954
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.05013353
$H=0.00193041
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),

```



```

                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))
$F=0.07513856
$H=0.00533036
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.10013916
$H=0.00837532
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.15013249
$H=0.01381524
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.20011963
$H=0.01827017
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.25010309
$H=0.02209512
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.30008405
$H=0.02530007
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.35006349
$H=0.02801004
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.40004218
$H=0.03036502
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.45002072
$H=0.032495
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.50
$H=0.034605
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.54998108
$H=0.036825
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.599965
$H=0.03886501
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G))

$F=0.64995253
$H=0.04043003

```

```

POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.69994427
$H=0.04134005
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.74994084
$H=0.04128507
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.79994262
$H=0.03983008
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.84994994
$H=0.03662509
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.89996292
$H=0.03067508
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

$F=0.94998123
$H=0.02064006
POINT( ADD, COORDINATES, X = (($F)*COS($G)-($H)*SIN($G)),
                                Y = (($H)*COS($G)+($F)*SIN($G)))

POINT( SELECT, ID )
1
29
30
31
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL)
POINT( SELECT, ID )
31
32
33
34
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL)
POINT( SELECT, ID )
34
35
36
37
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL)
POINT( SELECT, ID )
37
38
39
40
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL)

```

```

POINT( SELECT, ID )
40
41
42
43
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
43
44
45
46
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
46
47
48
49
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
49
50
51
52
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
POINT( SELECT, ID )
52
53
54
28
CURVE( ADD, NOSHOWLABEL, ORDER = 3, NOCONTROL )
//
CURVE( SELECT, ID )
11
12
13
14
15
16
17
18
19
CURVE( JOIN, Label="DRUCKSEITE" )
UTILITY(HIGHLIGHT=3)
//
//ERSTELLUNG DER GITTEPUNKTE
//
WINDOW( CHANGE=1, MATRIX )
1.000000    0.000000    0.000000    0.000000
0.000000    1.000000    0.000000    0.000000
0.000000    0.000000    1.000000    0.000000
0.000000    0.000000    0.000000    1.000000

```

```

-1.444280    2.308560    -1.422880    1.391750    -2.81463    2.81463
//
//
$BET1=45
$BET2=20.73
//
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="1", COORDINATES, X = (-COS($BET1)),
                                                Y = (-0.5-SIN($BET1)) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="2", COORDINATES, X = (-COS($BET1)),
                                                Y = (-SIN($BET1)+0.5) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="3", COORDINATES, X = (0.0),          Y = (-0.5) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="4", COORDINATES, X = (0.0),          Y = (0.5) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="5", COORDINATES, X = (COS($G)),      Y = (SIN($G)-0.5) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="6", COORDINATES, X = (COS($G)),      Y = (SIN($G)+0.5) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="7", COORDINATES, X = (COS($BET2)+COS($G)),
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="8", COORDINATES, X = (COS($BET2)+COS($G)),

POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="9", COORDINATES, X = (-COS($BET1)),
                                                Y = (-SIN($BET1)) )
POINT( ADD, NOSHOWNLABEL, LABEL="10", COORDINATES, X = (COS($BET2)+COS($G)),
                                                Y = (SIN($G)+SIN($BET2)) )

//
POINT( SELECT, LABEL="1" )
POINT( SELECT, LABEL="9" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL, LABEL="INLETP" )
//
POINT( SELECT, LABEL="9" )
POINT( SELECT, LABEL="2" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL, LABEL="INLETS" )
//
//
POINT( SELECT, LABEL="9" )
POINT( SELECT, ID=1)
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL )
//
POINT( SELECT, LABEL="7" )
POINT( SELECT, LABEL="10" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL, LABEL="OUTLETP" )
//
POINT( SELECT, LABEL="10" )
POINT( SELECT, LABEL="8" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL, LABEL="OUTLETS" )
//
POINT( SELECT, ID=28 )
POINT( SELECT, LABEL="10" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL )
//
POINT( SELECT, LABEL="1" )
POINT( SELECT, LABEL="3" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWNLABEL, LABEL="R13" )
//

```

```

POINT( SELECT, LABEL="5" )
POINT( SELECT, LABEL="7" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWLABEL, LABEL="R57" )
//
CURVE( SELECT, LABEL="R13" )
CURVE( SELECT, LABEL="R57" )
CURVE( ADD, FILLET, RADIUS=2.5 , LABEL="R35" )
//
CURVE( SELECT, LABEL="R13" )
CURVE( SELECT, LABEL="R35" )
CURVE( SELECT, LABEL="R57" )
CURVE( JOIN )
//
POINT( SELECT, LABEL="2" )
POINT( SELECT, LABEL="4" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWLABEL, LABEL="R24" )
//
POINT( SELECT, LABEL="6" )
POINT( SELECT, LABEL="8" )
CURVE( ADD, LINE, NOSHOWLABEL, LABEL="R68" )
//
CURVE( SELECT, LABEL="R24" )
CURVE( SELECT, LABEL="R68" )
CURVE( ADD, FILLET, RADIUS=2.5, LABEL="R46" )
//
CURVE( SELECT, LABEL="R24" )
CURVE( SELECT, LABEL="R46" )
CURVE( SELECT, LABEL="R68" )
CURVE( JOIN )
//
//
//ERZEUGEN DER MESHEDGES
//
//
CURVE( SELECT, ID )
10
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=106, RATIO=1.06, 2RATIO=1.01, PCENTR=0.3 )
//
CURVE( SELECT, ID )
20
MEDGE( ADD, SUCCESSIVE, INTERVALS=106, RATIO=1.06, 2RATIO=1.01, PCENTR=0.3 )
//
CURVE( SELECT, LABEL="INLETP" )
MEDGE( ADD, NOSHOWLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=18, RATIO=0.98 )
//
CURVE( SELECT, LABEL="INLETS" )
MEDGE( ADD, NOSHOWLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=18, RATIO=1.02 )
//
CURVE( SELECT, LABEL="OUTLETP" )
MEDGE( ADD, NOSHOWLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=46, RATIO=0.97 )
//

```

```

CURVE( SELECT, LABEL="OUTLETS" )
MEDGE( ADD, NOSHOWNLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=46, RATIO=1.04 )
//
CURVE( SELECT, ID)
30
MEDGE( ADD, NOSHOWNLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=102, RATIO=0.996 )
//
CURVE( SELECT, ID)
34
MEDGE( ADD, NOSHOWNLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=102, RATIO=0.996 )
//
CURVE( SELECT, ID)
23
MEDGE( ADD, NOSHOWNLABEL, FRSTLAST, INTERVALS=90, RATIO=20.0)
//
CURVE( SELECT, ID)
26
MEDGE( ADD, NOSHOWNLABEL, SUCCESSIVE, INTERVALS=110, RATIO=1.015)
//
//ERZEUGUNG DER MESHLOOPS
//
CURVE( SELECT, LABEL="INLETP" )
CURVE( SELECT, ID=30 )
CURVE( SELECT, LABEL="OUTLETP")
CURVE( SELECT, ID=26 )
CURVE( SELECT, ID=20 )
CURVE( SELECT, ID=23 )
MLOOP( ADD, LABEL="DRUCK", PAVE )
//
CURVE( SELECT, LABEL="INLETS" )
CURVE( SELECT, ID=23 )
CURVE( SELECT, ID=10 )
CURVE( SELECT, ID=26 )
CURVE( SELECT, LABEL="OUTLETS")
CURVE( SELECT, ID=34 )
MLOOP( ADD, LABEL="SAUG", PAVE )
//
//ERZEUGUNG DES MESHFACES
//
POINT( ADD, COOR, LABEL="H1", X = -2, Y = 2 )
POINT( ADD, COOR, LABEL="H2", X = 2, Y = 2 )
POINT( ADD, COOR, LABEL="H3", X = 2, Y = -2 )
POINT( ADD, COOR, LABEL="H4", X = -2, Y = -2 )
//
POINT( SELECT, LABEL="H1")
POINT( SELECT, LABEL="H2")
CURVE( ADD, LINE, LABEL="HILFE1" )
//
POINT( SELECT, LABEL="H2")
POINT( SELECT, LABEL="H3")
CURVE( ADD, LINE, LABEL="HILFE2" )

```

```

//
POINT( SELECT, LABEL="H3" )
POINT( SELECT, LABEL="H4" )
CURVE( ADD, LINE, LABEL="HILFE3" )
//
POINT( SELECT, LABEL="H4" )
POINT( SELECT, LABEL="H1" )
CURVE( ADD, LINE, LABEL="HILFE4" )
//
CURVE( SELE, LABEL="HILFE1" )
CURVE( SELE, LABEL="HILFE2" )
CURVE( SELE, LABEL="HILFE3" )
CURVE( SELE, LABEL="HILFE4" )
//
SURFACE( ADD, WIRE, EDG1 = 1, EDG2 = 1, EDG3 = 1, EDG4 = 1 )
//
SURFACE( SELECT, ID=1 )
MLOOP( SELECT, LABEL="DRUCK" )
MFACE( ADD, BASE=0.02, LABEL="DRUCKFACE", USESPAVE )
//
SURFACE( SELECT, ID=1 )
MLOOP( SELECT, LABEL="SAUG" )
MFACE( ADD, BASE=0.02, LABEL="SAUGFACE", USESPAVE )
//
//ERZEUGUNG DER BOUNDARY EDGES
//
MFACE( SELECT, LABEL="DRUCKFACE" )
CURVE( SELECT, ID=20 )
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.3, LAYERS=4 )
//
MFACE( SELECT, LABEL="SAUGFACE" )
CURVE( SELECT, ID=10 )
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1.3, LAYERS=4 )
//
MFACE( SELECT, LABEL="SAUGFACE" )
CURVE( SELECT, ID=26 )
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1, LAYERS=1 )
//
MFACE( SELECT, LABEL="DRUCKFACE" )
CURVE( SELECT, ID=26 )
BEDGE( ADD, 1HEIGHT=0.0025, GROWTH=1, LAYERS=1 )
//
MFACE( SELECT, LABEL="DRUCKFACE" )
ELEMENT( SETDEFAULTS, NODES=9 )
MFACE( MESH, PAVE, ENTITY="FLUIDP" )
//
MFACE( SELECT, LABEL="SAUGFACE" )
ELEMENT( SETDEFAULTS, NODES=9 )
MFACE( MESH, PAVE, ENTITY="FLUIDS" )
//
//ERSTELLUNG DER RANDELEMENTE

```

```

//
MEDGE( SELECT, ID=1 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="SAUGSEITE")
//
MEDGE( SELECT, ID=2 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="DRUCKSEITE")
//
MEDGE( SELECT, ID=3 )
MEDGE( SELECT, ID=4 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="INLET")
//
//
MEDGE( SELECT, ID=5 )
MEDGE( SELECT, ID=6 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="OUTLET")
//
//
MEDGE( SELECT, ID=7 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="RANDUNTEN")
//
MEDGE( SELECT, ID=8 )
ELEMENT( SETDEFAULTS, EDGE, NODES=3 )
MEDGE( MESH, MAP, ENTITY="RANDOBEN")
//
//
END( )
//////////
FIPREP
/
PROBLEM(2-D,STEADY,NONLINEAR,TURBULENT)
/
EXECUTION(NEWJOB)
/
PRESSURE(mixed=1.0E-9,CONTINUOUS)
/
SOLUTION(sgr=5000,velc=0.0001,schange=0.0,cr=10000,
          cgs=10000,ncgc=1e-6,precon=21)
/
RELAXATION
0.3  0.3  0.0  0.99  0.0  0.0  0.3  0.3
/
OPTIONS(UPWINDING)
/
ENTITY(FLUID,NAME="FLUIDP")
ENTITY(FLUID,NAME="FLUIDS")
ENTITY(PLOT,NAME="INLET")

```



```

ENTITY(PLOT,NAME="RANDUNTEN")
ENTITY(PLOT,NAME="RANDOBEN")
ENTITY(WALL, NAME="DRUCKSEITE")
ENTITY(WALL, NAME="SAUGSEITE")
ENTITY(PLOT,NAME="OUTLET")
/
$w1x=COS($BETA1)
$w1y=SIN($BETA1)
/
BCNODE(UX, CONSTANT=$w1x, ENTITY="INLET")
BCNODE(UY, CONSTANT=$w1y, ENTITY="INLET")
BCNODE(VELOCITY, CONSTANT=0.0, ENTITY="DRUCKSEITE")
BCNODE(VELOCITY, CONSTANT=0.0, ENTITY="SAUGSEITE")
//
BCNODE(KINETIC, CONSTANT=$k, ENTITY="INLET")
BCNODE(DISSIPATION, CONSTANT=$eps, ENTITY="INLET")
BCPERIODIC( ALL, ENTITY, INCLUSIVE, reference="RANDUNTEN",
            PERIODIC="RANDOBEN", r1node=213, r2node=343,
            p1node=232, p2node=444)
//
//
//
ICNODE(KINETIC,CONSTANT=$k,ALL)
ICNODE(DISSIPATION,CONSTANT=$eps,ALL)
ICNODE(UX, CONSTANT=$w1x, ALL)
ICNODE(UY, CONSTANT=$w1y, ALL)
/
POSTPROCESS(ALL,RESIDUAL)
/
DENSITY(CONSTANT=1.0)
/
VISCOSITY(K.E.,CONSTANT=4.08163E-6,CLIP=1.0E6)
/
RENUMBER(profile)
/
END
///
CREATE(FISOLV)

```

Literaturverzeichnis

- [1] *Abbott, I.H. Doenhoff, A.E.v.:* Theory of Wing Sections. Dover Publications, (1959)
- [2] *Anschütz, J.:* Auslegungsorientierte, numerische Aufbereitung der Messungen aus NACA-Report 1368. Mitteilungen des Instituts für Strömungslehre und Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH), Nummer 39, (November 1988)
- [3] *Brooks, A.N. Hughes, T.J.R.:* Streamline Upwinding/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32, (1982)
- [4] *Cumpsty, N.A.:* Compressor Aerodynamics. Langman Scientific & Technical, (1989)
- [5] *Durst, F. Loy, Th. :* Teach: Ein Berechnungsverfahren für zweidimensionale laminare und turbulente Strömungen.
- [6] *Emery, J.C. Herrig, L.J. Erwin, J.R. Felix, A.R.:* Systematic Two-Dimensional Cascade Tests of NACA 65- Series Compressor Blades of Low Speeds. NACA-Report 1368, Langley Field, (1958)
- [7] *FDI:* Benutzerhandbuch zu FIDAP 7.0, (April 1993)
- [8] *Haroutunian, V. Engelmann, M.S.:* On Modeling Wall-Bound Turbulent Flows Using Specialized Near-Wall Finite Elements and the Standard $k - \varepsilon$ Turbulence Model. First ASME/JSME Fluids Engineering Conference, FED-117, (1991)
- [9] *Haroutunian, V. Engelmann, M.S. Hasbani, I.:* Three Segregated Finite Element Solution Algorithms for the Numerical Solution of Inkompressible Flow Problems. in: Advances in Finite Element Analysis in Fluid Dynamics -1991-, ASME FED- Vol.123, (December 1991)
- [10] *Horlock, J.H.:* Axial Flow Compressors. Butterworths Scientific Publications, London, (1958)
- [11] *Kiok, R.:* Einfluß des Turbulenzgrades auf die aerodynamischen Eigenschaften von ebenen Verzögerungsgittern. Forschung im Ingenieurwesen, Band 39, (1973)
- [12] *Launder, B.E. Spalding, D.B.:* The Numerical Computation of Turbulent Flows. Computer Methods Applied Mechanical Engineering, 3, (1974)
- [13] *Peters, N.:* Strömungs- u. Temperaturgrenzschichten. Institut für technische Mechanik, RWTH Aachen, (1993)
- [14] *Schlichting, H. Truckenbrodt, E.:* Aerodynamik des Flugzeuges I. 2.Auflage, Springer Verlag (1967)

- [15] *Scholz, N.*: Aerodynamik der Schaufelgitter I. G.Braun Karlsruhe, (1965)
- [16] *Vavra, M.H.*: Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines, Wiley, (1960)
- [17] *Willinger, R. Haselbacher, H.*: Berechnung und Messung der ebenen turbulenten Strömung in einem geraden Turbinengitter. Vortrag am FIDAP- Benutzertreffen, 23. und 24. Oktober 1996, Wiesbaden.
- [18] *Wilson, D.G.*: The Design of High-Efficiency Turbomachinery and Gas Turbines. MIT Press, Cambridge, Mass. (1984)

Abbildungsverzeichnis

2.1	Charakteristische Abmessungen am Profil	3
2.2	Druckverteilung auf der Skelettlinie [14]	4
2.3	Vergleich NACA 65-Skelettlinie–Kreisbogensektor [4]	6
2.4	Abhängigkeit $C_{A,D}$ vom Wölbungswinkel des Kreissektors	7
3.1	NACA-Winkeldefinitionen	9
3.2	NACA-Diagramme des Gitters NACA 65-(15)10, ($\sigma = 1.0$) [6]	10
3.3	Geschwindigkeitsdreieck eines Verdichtergitters	12
3.4	Abströmwinkel β_2 über Anströmwinkel β_1	13
3.5	Totaldruckverlustbeiwert ω_1 über Anströmwinkel β_1	13
3.6	Definition des incidence-Winkels	14
3.7	Verwendung der Mellor-Diagramme [18]	15
3.8	Mellor-Diagramm für das Verdichtergitter NACA 65-(15)10, ($\sigma = 1.0$) [10] . .	15
4.1	Verlauf der x -Komponente der Geschwindigkeit an einem festen Punkt . . .	17
5.1	Das universelle Wandgesetz	25
6.1	Das neunknotige Element, dargestellt im isoparametrischen r - s Raum	27
6.2	Das Netz des Rechengebietes	30
6.3	Vergrößerung des Rechnernetzes im Profilbereich	31
6.4	Vergrößerung im Nasenbereich	32
6.5	Vergrößerung im Hinterkantenbereich	32
6.6	Lineare Abhängigkeit des Lösungsvektors von α	36
6.7	Lösung der konvektiv-diffusiven Gleichung in Abhängigkeit von Pe	38
6.8	Bezeichnung der Elementknoten	38
6.9	Vergleich der exakten Lösung mit verschiedenen Differenzenoperatoren	40
6.10	Gewichtsfunktionen nach <i>Galerkin</i> und <i>Petrov-Galerkin</i>	41
7.1	Graphische Erläuterung einiger wichtiger Definitionen	42

7.2	Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 36^\circ$	43
7.3	Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 36^\circ$	43
7.4	Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 45^\circ$	44
7.5	Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 45^\circ$	44
7.6	Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 54^\circ$	45
7.7	Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 54^\circ$	45
7.8	Strömung an der Hinterkante bei $\beta_1 = 54^\circ$	45
7.9	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 36^\circ$	46
7.10	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 39^\circ$	47
7.11	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 42^\circ$	47
7.12	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 45^\circ$	48
7.13	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 48^\circ$	48
7.14	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 51^\circ$	49
7.15	Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 54^\circ$	49
7.16	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 36^\circ$	50
7.17	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 39^\circ$	51
7.18	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 42^\circ$	51
7.19	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 45^\circ$	52
7.20	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 48^\circ$	52
7.21	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 51^\circ$	53
7.22	Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 54^\circ$	53
7.23	Nachlaufdele bei $\beta_1 = 36^\circ$	54
7.24	Nachlaufdele bei $\beta_1 = 45^\circ$	55
7.25	Nachlaufdele bei $\beta_1 = 54^\circ$	55
7.26	Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 36^\circ$	56
7.27	Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 45^\circ$	57
7.28	Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 54^\circ$	57
7.29	Diffusionsfaktor in Abhängigkeit vom Anströmwinkel	59
7.30	Der Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Anströmwinkel	59
7.31	Der Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit vom Anströmwinkel	60
7.32	Berechneter Abströmwinkel über dem Upwindingfaktor bei $\beta_1 = 45^\circ$	61
7.33	Berechneter Totaldruckverlustbeiwert über dem Upwindingfaktor bei $\beta_1 = 45^\circ$	61
7.34	Berechneter Abströmwinkel über Anströmwinkel mit dem Parameter Upwindingfaktor	62

7.35 Berechneter Totaldruckverlustbeiwert über Anströmwinkel mit dem Parameter Upwindingfaktor	62
7.36 Oszillationen im Geschwindigkeitsfeld bei $\beta_1 = 45^\circ$ und $\tilde{k} = 0.0$	63
7.37 Die errechnete Ablöseblase bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 0.2$	64
7.38 Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 0.2$	64
7.39 Das Strömungsbild bei $\beta_1 = 36^\circ$ und $\tilde{k} = 1.0$	65

Tabellenverzeichnis

2.1	Geometriedaten aus dem NACA-Report 1368 [6]	8
3.1	Betriebsgrenzen aus dem Mellor-Diagramm	15
5.1	Modellkonstanten des Turbulenzmodelles	23
6.1	Zusammenfassung der Netzdaten	30
6.2	Turbulenzgrößen bei verschiedenen Tubulenzgraden	34
6.3	Relaxationsfaktoren der abhängigen Variablen	36
7.1	Lage der Berechnungsebenen	42