DIPLOMARBEIT

Anwendung der Methode der Finiten-Volumen auf transsonische Strömungsprobleme in thermischen Turbomaschinen

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. R.WILLINGER

durch
Selma ZAHIROVIĆ
Schiffamtsgasse 4-6
A-1020 Wien.

Wien, 27. September 2002

Vorwort

Dem Herrn Institutsvorstand *o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Hermann Haselbacher* danke ich für die Vergabe der Diplomarbeit und die Möglichkeit, diese am Institut abzufassen.

Herr *Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger* stand mir als Betreuer jederzeit hilfreich zur Seite, wofür ich ihm auf diesem Wege danken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn *o.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Ismet Demirdžić* der Universität Sarajevo, der mir wertvolle Anregungen gab.

Weiters möchte ich mich herzlich bei allen MitarbeiterInnen und in diesem Zeitraum ebenfalls am Institut tätigen Diplomanden für die wertvolle Zusammenarbeit bedanken.

Diese Arbeit ist meinen Eltern gewidmet, die mir das Studium ermöglichten. Hvala.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt zwei transsonische Strömungsprobleme. Aufbauend auf die Simulation der ebenen Strömung in einem geraden Kanal mit der einseitigen kreisbogenförmigen Verengung („Circular Arc Bump“) wurden sowohl die subsonische als auch die transsonische Strömung in einem ebenen Turbinengitter mit starker Umlenkung numerisch berechnet.

Die theoretischen Grundlagen der kompressiblen Strömungen und die durch die Kompressibilität des Fluids hervorgerufenen Effekte, u.a. senkrechter und schiefer Verdichtungsstoß, sind kurz zusammengefaßt.

Die in den Berechnungen angewendeten Standard $k - \epsilon$, low Reynolds number $k - \omega$ und Menter-modifizierte $k - \omega$ Modelle bilden die Basis für die Modellierung der Turbulenz, sowie der Geschwindigkeits- und der Temperaturgrenzschicht. Auf die theoretische Behandlung der Realizability und der Staupunktanomalie ist näher eingegangen. Anschließend findet sich eine kurze Darstellung des Finite-Volumen Verfahrens, welches dem verwendeten CFX Navier-Stokes Solver zugrundeliegt.

Die Überprüfung der Treffsicherheit und der Leistungsfähigkeit des Programmes CFX erfolgte anhand der Berechnung der ebenen subsonischen und transsonischen Strömung mit und ohne Berücksichtigung des Reibungseinflusses im Kanal mit der kreisbogenförmigen Verengung. Zum Vergleich der Rechenergebnisse aus der Simulation der reibungsfreien Strömung lagen die aus der Literatur bekannten numerischen Ergebnisse vor.

Zur Verifizierung der Berechnung der ebenen subsonischen Strömung im Turbinengitter sind die vorhandenen Meßdaten und die numerischen Resultate aus einer Finite-Elemente Berechnung einbezogen. Die qualitativ gut wiedergegebene Profildruckverteilung, sowie die Verläufe der Strömungsgrößen im Nachlauf wurden erst nach der sorgfältigen Auswahl der Blockstruktur und der iterativen Ermittlung der erforderlichen Netzfeinheit erhalten. Einen großen Einfluß auf die Rechenresultate übte das verwendete Turbulenzmodell aus. Die Grenzschichtentwicklung entlang des Profils und somit die Berechnung der Reibungsverluste ist sehr stark abhängig von der Fähigkeit des Turbulenzmodells, die Überproduktion der turbulenten kinetischen Energie zu vermeiden.

Die durchgeführte Berechnung der transsonischen Strömung im gleichen Gitter konnte nur qualitativ beurteilt werden.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen

Lateinische Formelzeichen

A	$[1]$	adjungierte Jacobimatrix
A	$[m^2]$	Querschnittsfläche
A	$[m^2]$	Oberfläche
$\vec{A}$	$[m^2]$	Oberflächenvektor
$\vec{B}$	$[N]$	Massenkraft
c	$[m/s]$	Absolutgeschwindigkeit
c	$[m/s]$	Schallgeschwindigkeit
c_p	$[J/kgK]$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_v	$[J/kgK]$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
c_0	$[m/s]$	Ruhe-Schallgeschwindigkeit
c^*	$[m/s]$	Lavalgeschwindigkeit
C_p	$[1]$	statischer Druckkoeffizient
C_{pt}	$[1]$	Totaldruckkoeffizient
C_1, C_2, C_μ	$[1]$	Konstanten im Standard $k-\epsilon$ und LRN $k-\omega$ Modell
C_{nn}^i	$[kg/s]$	Konvektionskoeffizient
D_{nn}^{ij}	$-^{1)}$	Diffusionskoeffizient
$\vec{e}$	$[1]$	Einheitsvektor
e_k	$[J/kg]$	spezifische kinetische Energie
e_p	$[J/kg]$	spezifische potentielle Energie
e_t	$[J/kg]$	spezifische totale Energie
E	$[J]$	totale Energie
E	$[1]$	Konstante im universellen Wandgesetz
E_H	$[1]$	Konstante in der Wandfunktion für totale Enthalpie
E_T	$[1]$	Konstante in der Wandfunktion für Temperatur
f_μ	$[1]$	Dämpfungsfunktion
$\vec{F}$	$[N]$	Kraft
g	$[m/s^2]$	Erdbeschleunigung
G_{nn}^{ij}	$[1]$	Koeffizienten der geometrischen Diffusion
h	$[J/kg]$	spezifische Enthalpie
H	$[J]$	totale Enthalpie
i, j, k	$[1]$	Laufvariablen
$\hat{I}$	$-^{1)}$	Gesamtfluß
J	$[1]$	Jacobimatrix
J_{H_W}	$[J/m]$	Enthalpiestrom an der Wand
k	$[m^2/s^2]$	turbulente kinetische Energie
l	$[m]$	Mischungsweglänge
La	$[1]$	Lavalzahl

m	$[kg]$	Masse
$\dot{m}$	$[kg/s]$	Massenstrom
$\mathcal{M}$	$[kg/kmol]$	molare Masse
Ma	$[1]$	Machzahl
$\vec{n}$	$[1]$	Normalenvektor
n	$[1]$	Polytropenexponent
p	$[Pa]$	statischer Druck
p_t	$[Pa]$	totaler Druck
P	$[kg/ms^3]$	turbulente Produktionsrate
Pe	$[1]$	Pecletzahl
Pr	$[1]$	Prandtlzahl
Pr_T	$[1]$	turbulente Prandtlzahl
Pr_h	$[1]$	turbulente Prandtlzahl für Enthalpie
Pr_k, Pr_ϵ	$[1]$	Konstanten im Standard $k-\epsilon$ Modell
Pr_k, Pr_ω	$[1]$	Konstanten im LRN $k-\omega$ Modell
$\vec{q}$	$[W/m^2]$	Wärmestromdichte
$\vec{q}_W$	$[W/m^2]$	Wärmestromdichte an der Wand
Q	$[J]$	Wärme
$\vec{r}$	$[1]$	Residuum
R	$[J/kgK]$	spezielle Gaskonstante
$\mathcal{R}$	$[J/kmolK]$	allgemeine Gaskonstante
$RDFC$	$[1]$	Reduktionsfaktor
Re	$[1]$	Reynoldszahl
Re_T	$[1]$	lokale turbulente Reynoldszahl
s	$[J/kgK]$	spezifische Entropie
s	$[m]$	Sehenlänge
s^*	$[1]$	normierte Bogenlänge
S	$-^{1)}$	Quelle
S	$[1/s]$	Scherrate
t	$[s]$	Zeit
t	$[m]$	Schaufelteilung
t	$[^\circ C]$	Temperatur
T	$[K]$	Temperatur
Tu	$[1]$	Turbulenzgrad
u	$[J/kg]$	spezifische innere Energie
u	$[m/s]$	Umfangsgeschwindigkeit
u, v_x	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
u^+	$[1]$	dimensionslose Geschwindigkeit
u_τ	$[m/s]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
URF	$[1]$	Relaxationsfaktor
v, v_y	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
$\vec{v}$	$[m/s]$	Geschwindigkeitsvektor
V	$[m^3]$	Volumen
w	$[m/s]$	Relativgeschwindigkeit
W	$[J]$	Arbeit
x, y, z	$[1]$	kartesische Koordinate
y^+	$[1]$	dimensionsloser Wandabstand

Griechische Formelzeichen

α	$[1]$	Korrekturkoeffizient bei SIMPLE oder SIMPLEC Verfahren
α	$[°]$	Strömungswinkel im Absolutsystem, gemessen von der positiven Umfangsrichtung
β	$[°]$	Strömungswinkel im Relativsystem, gemessen von der positiven Umfangsrichtung
β^+	$[°]$	Strömungswinkel im Relativsystem, gemessen von der negativen Umfangsrichtung
β	$[1/K]$	Wärmeausdehnungskoeffizient
γ	$[°]$	Staffelungswinkel
Γ	$-^{1)}$	skalarer Diffusionsfaktor
δ	$[m]$	Bezugslänge
$\delta_{i,j}$	$[1]$	Kronecker-Symbol
ϵ	$[m^2/s^3]$	turbulente Dissipationsrate
ϑ	$[°]$	Umlenkwinkel
κ	$[1]$	Isentropenexponent
κ	$[1]$	Kármán-Konstante
λ	$[m^2/s]$	Volumenviskosität
λ	$[J/msK]$	Wärmeleitfähigkeit
λ_T	$[J/msK]$	scheinbare turbulente Wärmeleitfähigkeit
μ	$[Pas]$	dynamische Viskosität
μ_T	$[Pas]$	turbulente dynamische Viskosität
ν	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
ν_T	$[m^2/s]$	Wirbelviskosität
ξ, η, ζ	$[1]$	konturangepasste Koordinate, Koordinate im Einheitsraum
ρ	$[kg/m^3]$	Dichte
σ	$[N/m^2]$	Spannung
σ	$[°]$	Stoßwinkel
$\vec{\sigma}$	$[N/m^2]$	Spannungsvektor
τ	$[N/m^2]$	Schubspannung
$\vec{\tau}$	$[N/m^2]$	Schubspannungsvektor
τ_W	$[N/m^2]$	Wandschubspannung
ϕ	$-^{1)}$	beliebige Skalargröße
ϕ	$[1]$	Konstantenreihe bei dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell
Φ	$[J/m^3s]$	Dissipation
ω	$[1/s]$	Turbulenzfrequenz
Ω	$[1/s]$	Wirbelstärke

Tiefgestellte Indizes

n	Normalenrichtung
p	bei konstantem Druck
R	Referenzzustand
s	bei konstanter Entropie
u	Umfangsrichtung
t	Tangentialrichtung
x	x-Richtung
y	y-Richtung
z	z-Richtung

0	Totalzustand
1	Ebene vor dem Verdichtungsstoß, Ebene vor dem Laufschaufelgitter
2	Ebene nach dem Verdichtungsstoß, Ebene nach dem Laufschaufelgitter

Hochgestellte Indizes

$(.)^*$	Größen des Schallzustands
$(.)'$	turbulente Schwankungsgröße
$\overline{(.)}$	zeitlich gemittelte Größe
$\overline{(.)}$	über der Teilung gemittelte Größe

[1)] Die Einheit der Größe ist abhängig von der Variable, für welche die Transportgleichnung gelöst wird.

Kapitel 1

Einleitung und Aufgabenstellung

Infolge der Tendenz, die Leistungsdichte von mehrstufigen thermischen Turbomaschinen zu steigern, kommt es unvermeindlich zur Erhöhung der aerodynamischen Belastung der einzelnen Stufen und somit zur Steigerung der Strömungsgeschwindigkeiten in einzelnen Schaufelreihen. Im subsonischen Strömungsfeld bilden sich häufig in Bereichen der tiefen Temperaturen lokale Überschallzonen, die gewöhnlich durch Verdichtungsstösse abgeschlossen sind. Diese sog. transsonischen Effekte können in den Eingangsstufen von mehrstufigen Axialverdichtern oder in den Endstufen von Kondensations-Dampfturbinen sowohl entlang der Schaufelhöhe als auch in einer Meridianströmfläche auftreten.
Die mathematische Behandlung dieser äußerst komplizierten Strömungsfelder ist nicht weniger aufwendig. Die Strömungsgesetze in Unter- und Überschallströmung sind grundlegend unterschiedlicher Natur: die Unterschallströmung ist mit Differentialgleichungen elliptischen Typs, die Überschallströmung mit Differentialgleichungen hyperbolischen Typs beschrieben. Eine weitere Schwierigkeit ist mit dem diskontinuierlichen Verlauf der Strömungsgrößen durch den Verdichtungsstoß verbunden, der die Grenze zwischen Über- und Unterschallströmung darstellt. Bei der Betrachtung der Profilgrenzschicht ist der durch den Verdichtungsstoß verursachte Drucksprung von Bedeutung, da er einen sofortigen Anstieg der Grenzschichtdicke bewirkt oder sogar zur Ablösung führt. Auf Grund aller diesen Tatsachen sind sehr hohe Anforderungen an die numerische Behandlung transsonischer Strömungen gestellt. Es entstehen die Fragen bezüglich der Auswahl des Turbulenzmodells, sowie des Diskretisierungsschemas. Mit dem Turbulenzmodell ist u.a. das Problem der Grenzschichtmodellierung und somit die Bestimmung der Strömungsverluste verbunden, das Diskretisierungsverfahren steuert nicht nur die Rechengenauigkeit sondern beeinflußt nachhaltig die Stabilität des Berechnungsvorganges. Große Aufmerksamkeit soll auch der lokalen Netzverfeinerung im Bereich des Verdichtungsstosses geschenkt werden, da sich diese stark auf die Dissipationsverluste auswirkt.
Im Zuge der vorliegenden Diplomarbeit sollen zwei transsonische Strömungsprobleme unter Anwendung des Finite-Volumen Programmes CFX numerisch berechnet werden. Anhand der Simulation der ebenen Strömung in einem Kanal mit der einseitigen kreisbogenförmigen Verengung soll die Genauigkeitsklasse des CFX-Solvers verifiziert werden. Es werden sowohl ein rein subsonisches Strömungsfeld als auch eines mit einem lokalen Überschallgebiet simuliert, beide mit und ohne Berücksichtigung des Reibungseinflusses. Die Ergebnisse aus der Berechnung der reibungsfreien Strömung werden mit den numerischen Resultaten aus [6] und [11] verglichen. Zur Behandlung der reibungsbehafteten Strömung werden drei Turbulenzmodelle: das Standard $k-\epsilon$, das low Reynolds number $k-\omega$ und das Menter-modifizierte $k-\omega$ Modell verwendet und die erhaltenen Ergebnisse gegenübergestellt. Zusätzlich wird die Stoß-Grenzschicht Wechselwirkung untersucht und eine transsonische Strömung mit Grenzschichtablösung simuliert.
Im weiteren soll die transsonische Strömung in einem ebenen Turbinengitter mit starker Strö-

mungsumlenkung aus der Beschaufelung einer Industrie-Dampfturbine behandelt werden. Da es sich hier um eine geometrisch und strömungsmechanisch anspruchsvollere Konfiguration handelt, wird zuerst die Strömung im tiefen Unterschallbereich numerisch berechnet. Die Auswirkung der Realizability auf die Rechenresultate soll anhand von drei Simulationen untersucht werden, zwei mit dem Standard $k - \epsilon$, aber mit unterschiedlichen Eintrittsrandbedingungen für die turbulente Dissipationsrate und eine mit dem Menter-modifizierten $k - \omega$ Modell. Die wichtigsten Rechenergebnisse (Profildruckverteilung, Abströmgeschwindigkeit, Abströmwinkel, Totaldruckverlustkoeffizient) werden mit den Versuchsdaten sowie mit den Ergebnissen aus einer Finite-Elemente Berechnung verglichen.
Die Berechnung der transsonischen Gitterströmung wird nur mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell durchgeführt. Mangels jeglicher Vergleichsbasis soll nur eine qualitative Beurteilung der Ergebnisse dargeboten werden.

Kapitel 2

Grundgleichungen

2.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Bei den im Rahmen dieser Diplomarbeit zu untersuchenden Strömungen handelt es sich um ebene kompressible Strömungen. Das Strömungsfeld ist mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, der im kartesischen Koordinatensystem für ebene Strömungen als

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \tag{2.1}$$

definiert ist und den Zustandsgrößen Druck p, Temperatur T und Dichte ρ bestimmt. Zur quantitativen Beschreibung dieser physikalischen Größen dient ein Gleichungssystem, bestehend aus der idealen Gasgleichung und drei Transportgleichungen zur Erhaltung der Masse (Kontinuitätsgleichung), des Impulses (Bewegungsgleichung) und der Energie (Energiegleichung). Das Fluid ist als Newtonsches Fluid angesehen und erfüllt die Kontinuitätsbedingung.

2.1.1 Gasgleichung

Ein ideales Gas ist definiert als Fluid, für welches die ideale Gasgleichung oder die thermische Zustandsgleichung gilt

$$p = \rho\, R\, T = \rho \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} T, \tag{2.2}$$

in der $\mathcal{R}$ die universale Gaskonstante und $\mathcal{M}$ die molare Masse sind. Aus der Definition für die spezifischen Wärmekapazitäten beim konstanten Volumen und konstanten Druck

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \qquad \text{und} \qquad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \tag{2.3}$$

folgen die Beziehungen für spezifische innere Energie u

$$du = c_v dT \tag{2.4}$$

und spezifische Enthalpie h

$$dh = c_p dT. \tag{2.5}$$

Bei dem idealen Gas sind die spezifische innere Energie $u = u(T)$ und die spezifische Enthalpie $h = h(T)$ und somit die spezifischen Wärmekapazitäten beim konstanten Volumen $c_v(T)$ und konstanten Druck $c_p(T)$ skalare Funktionen der Temperatur allein.

2.1.2 Kontinuitätsgleichung

Aus dem Massenerhaltungssatz

$$\frac{dm}{dt} = 0, \tag{2.6}$$

welcher angibt, daß die im Kontrollvolumen enthaltene Masse zeitlich unverändert bleibt, folgt die Kontinuitätsgleichung in Integralform

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_A \rho\,(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = 0. \tag{2.7}$$

Wird Glg. 2.7 auf Kontrollvolumen $dV \longrightarrow 0$ angewendet, so folgt unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems in differentieller Darstellung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathrm{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\rho = \frac{D\rho}{Dt} + \rho\mathrm{div}\vec{v} = 0 \tag{2.8}$$

oder im kartesischen Koordinatensystem für instationäre ebene kompressible Strömungen

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0, \tag{2.9}$$

wobei der Ausdruck D/Dt hier und im weiteren Text für substantive (totale) Ableitung einer Größe mit dem lokalen $(\partial/\partial t)$ und dem konvektiven $(v_i\partial/\partial x_i)$ Anteil steht.

2.1.3 Bewegungsgleichung

Unter Anwendung des Newtonschen Grundgesetzes der Mechanik

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \Sigma\vec{F} \tag{2.10}$$

auf das Kontrollvolumen entsteht die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV + \int_A \rho\,\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \Sigma\vec{F}, \tag{2.11}$$

wobei $\Sigma\vec{F}$ die vektorielle Summe aller äußeren Kräfte darstellt, zu welchen die Massenkraft und die Spannungskraft (Oberflächenkraft) gehören:

$$\Sigma\vec{F} = \int_V \rho\,\vec{B}\,dV + \int_A \vec{\sigma}\,dA. \tag{2.12}$$

Die Massenkraft $\vec{B}$ ist meistens gleich der Schwerkraft, $\vec{B} = -g\vec{e}_z$, die Oberflächenkraft setzt sich aus Normal- und Tangentialkräften zusammen. Der gesamte Spannungstensor σ ist mit der Spannungsmatrix definiert

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Die erste Invariante des symmetrischen Spannungstensors stellt den Druck dar

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}), \tag{2.14}$$

womit sich eine Aufspaltung der Normal- und Tangentialspannungen in die Druck- und Zähigkeitsspannungen durchführen läßt

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \tau_{ij}, \tag{2.15}$$

mit Kroneckereinheitstensor δ_{ij}, in dem gilt: $\delta_{ij} = 1$, für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$, für $i \neq j$.
Der zähigkeitsbedingte Spannungstensor τ ist mit der symmetrischen Spannungsmatrix, die nur die Deviatorspannungen enthält, charakterisiert:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Im dreidimensionalen Fall ist der Newtonsche Ansatz der Zähigkeitsreibung auf das Stokesche Gesetz erweitert

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \tag{2.17}$$

Die Volumenviskosität λ tritt nur bei den Normalspannungen auf und ist neben der kinematischen Viskosität die zweite Stoffgröße, die den zähigkeitsbedingten Spannungszustand bestimmt. Beide Stoffgrößen sind im Fall einer kompressiblen Strömung skalare Funktionen des thermischen Zustands.
Mit der Hypothese von *Stokes* $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ reduziert sich die Anzahl von Stoffgrößen auf eine: dynamische Viskosität μ. Dies gilt aber nur für einatomige Gase.
Aus Glg. 2.11 und Glg. 2.12 durch Einsetzen von Glg. 2.15 und Glg. 2.17 erhält man die Impulsgleichung der reibungsbehafteten Strömung in Integralform

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, \vec{v} \, dV + \int_A \rho \, \vec{v} \, (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA = \int_V \rho \, \vec{B} \, dV - \int_A p \, \vec{n} \, dA + \int_A \vec{\tau} \, dA \tag{2.18}$$

oder in differentieller Form

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{B} - \mathrm{grad} p + \mathrm{div}(\vec{\tau}) \tag{2.19}$$

Diese Gleichung wird auch *Navier-Stokes* Gleichung genannt. Für ebene kompressible Strömungen im kartesischen Koordinatensystem unter Vernachlässigung der Schwerkraft ergibt sie sich zu:
in x-Richtung

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.20}$$

in y-Richtung

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.1.4 Energiegleichung

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dW}{dt} \tag{2.22}$$

stellt die Bilanzgleichung für das Gleichgewicht von der Energie des Systems E und der vom System verrichteten Arbeit W samt dem System zugeführten Wärme Q dar. Die Anwendung dieser Bilanzgleichung auf das Kontrollvolumen führt zur Energiegleichung in Integralform

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, e_t\, dV + \int_A \rho\, e_t\, (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA = -\int_A (\vec{q}\cdot\vec{n})\, dA + \int_A (\vec{\sigma}\cdot\vec{v})\, dA. \tag{2.23}$$

Die spezifische Totalenergie e_t setzt sich aus der inneren Energie u, der kinetischen Energie e_k und der potentiellen Energie e_p zusammen

$$e_t = \frac{dE}{dm} = u + e_k + e_p = u + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + gz, \tag{2.24}$$

wobei z für den Höhenabstand zur Bezugsebene steht.
Das erste Integral auf der rechten Seite der Glg. 2.23 charakterisiert die pro Flächen- und Zeiteinheit durch den Vektor der Wärmestromdichte $\vec{q}$ übertragene Wärme, das zweite Integral stellt die von den Oberflächenkräften (Normal- und Tangentialspannungskräften) geleistete Arbeit dar. Die von der Schwerkraft geleistete Arbeit ist im Ausdruck für die potentielle Energie beinhaltet; die Arbeit anderer Massenkräfte ist vernachlässigt.
Die Energiegleichung in differentieller schreibweise ist

$$\rho\frac{De_t}{Dt} = -\mathrm{div}\vec{q} + \mathrm{div}(\sigma\vec{v}). \tag{2.25}$$

Wird in die letzte Gleichung das Wärmeleitgesetz von *Fourier*

$$\vec{q} = -\lambda \mathrm{grad}T \tag{2.26}$$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ eingesetzt, so folgt nach [13] mit der Aufspaltung der Normal- und Tangentialspannungen in Druck und reibungsbedingte Spannungen die Beziehung

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}T) - p\mathrm{div}\vec{v} + \Phi \tag{2.27}$$

mit der Dissipationsfunktion

$$\Phi = \tau_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)^2\right], \tag{2.28}$$

welche die dissipative Arbeit der zähigkeitsbedingten Oberflächenkräfte (irreversible Wärmeproduktion infolge Reibung) darstellt.
Durch Heranziehen von Glg. 2.5 und Glg. 2.8 erhält man die Bilanzgleichung in Form

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad}T) + \Phi. \tag{2.29}$$

Für die totale Ableitung der Enthalpie gilt nach [15]

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p\frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho}(1+\beta T)\frac{Dp}{Dt}, \tag{2.30}$$

mit dem Wärmeausdehnungskoeffizient

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p . \tag{2.31}$$

Für ideale Gase gilt $\beta T = 1$.
Durch Einsetzen von Glg. 2.30 in Glg. 2.29 entsteht die Energiegleichung in der endgültigen Form

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mathrm{div}(\lambda \mathrm{grad} T) + \Phi . \tag{2.32}$$

2.2 Grundbegriffe der Gasdynamik

Im folgenden werden die Grundbegriffe der Gasdynamik erörtet. Eine stationäre eindimensionale Strömung eines kompressiblen Fluids bei Vernachlässigung der Reibung und Schwere in einem Kanal veränderlichen Querschnitts wird vorausgesetzt. Zusätzlich wird angenommen, daß die physikalischen Größen Geschwindigkeit $\vec{v}$, Druck p, Temperatur T und Dichte ρ über die normal zur Kanalachse liegenden Querschnitte gleichmäßig verteilt sind. Die Strömung erfolgt ohne Wärmeaustausch zwischen dem Fluid und der Umgebung, d.h. es liegt eine adiabate Zustandsänderung vor. Reibungslose adiabate (isentrope) Zustandsänderungen sind unter Strömungen realer Gase nicht erreichbar. Dennoch werden die Zustandsänderungen der Gasströmungen in den realen Maschinen oft mit isentrop verlaufenden Prozessen verglichen. Daher wird für die im weiteren ohne Herleitungen angegebenen Beziehungen eine isentrope Zustandsänderung vorausgesetzt. Eine Ausnahme stellt die Überschallströmung mit Verdichtungsstoß dar, welche durch nicht isentrope (adiabat-irreversible) Zustandsänderung charakterisiert ist.

2.2.1 Ausgangsgleichungen

Isentrope Zustandsgleichung. Der Verlauf des Gaszustandes läßt sich durch die polytrope Zustandsgleichung

$$\frac{p}{\rho^n} = \mathrm{const} \tag{2.33}$$

mit n als Polytropenexponent beschreiben. Der Wert von n wird durch den jeweiligen Anfangs- und Endzustand festgelegt. Für eine isentrope Zustandsänderung nimmt der Polytropenexponent den stoffeigenen Wert κ (Isentropenexponent)

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.34}$$

an. Somit gelten für zwei festgelegte Gaszustände (1) und (2) unter Anwendung der idealen Gasgleichung folgende Zusammenhänge

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \tag{2.35}$$

und

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} . \tag{2.36}$$

Kontinuitätsgleichung. Unter Anwendung des Massenerhaltungssatzes gilt bei den normal zur Kanalachse liegenden Querschnitten (1) und (2) für den Massenstrom

$$\dot{m} = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 . \tag{2.37}$$

Bewegungsgleichung. Aus Glg. 2.18 folgt die Beziehung

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \tag{2.38}$$

welcher keine Einschränkungen hinsichtlich möglicher Reibungsverluste, zu- bzw. abgeführter Wärme oder Diskontinuitäten (Verdichtungsstösse) zugrundeliegen.
Energiegleichung. Der Energiesatz liefert die Energiegleichung für adiabate Zustandsänderung

$$\frac{v_1^2}{2} + h_1 = \frac{v_2^2}{2} + h_2. \tag{2.39}$$

Diese Gleichung ist gültig sowohl für adiabat-reversible als auch für adiabat-irreversible Zustandsänderungen. Substituiert man die spezifische Enthalpie durch Glg. 2.5, so wird

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2. \tag{2.40}$$

Entropiegleichung. Aus der Gibbsschen Gleichung

$$Tds = du + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{2.41}$$

welche eine Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik darstellt, erhält man durch Heranziehen der idealen Gasgleichung die Änderung der spezifischen Entropie

$$s_2 - s_1 = c_p \ln\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right] = c_p \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]. \tag{2.42}$$

Bei der adiabaten Zustandsänderung muß nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gelten $s_2 - s_1 \geq 0$.

2.2.2 Schallgeschwindigkeit

Eine durch die schwache Störung im Inneren eines kompressiblen Fluids erzeugte schwache Druckwelle breitet sich als Kugelwelle aus, wobei ab einem bestimmten Abstand von der Störquelle der Wellenfront eindimensional ist. Durch örtliche Druckänderungen sind örtliche Dichteänderungen hervorgerufen, deren Resultat eine Dichtewelle ist. Werden die Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung für reibungslose Strömung mit Rücksicht auf schwache Störungen linearisiert, so erhält man die Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Druckstörung oder die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \tag{2.43}$$

Da die Druck- und Dichteänderungen infolge der Schallausbreitung extrem klein sind, kann der Ausbreitungsvorgang als reversibel angesehen werden, im Grenzfall als isentrop.
In Verbindung mit Glg. 2.2 und Glg. 2.33 mit $n = \kappa$ ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$c = \sqrt{\kappa R T}. \tag{2.44}$$

Stellt die Stelle (1) einen Ruhezustand ($v_0 = 0$, p_0, T_0, ρ_0) dar, so folgt aus der Energiegleichung (Glg. 2.40) in Verbindung mit Glg. 2.44 die Beziehung für die örtliche Schallgeschwindigkeit c an einer beliebigen Stelle im Strömungsfeld

$$c = \sqrt{c_0^2 - \frac{\kappa - 1}{2} v^2} \leq c_0^2, \tag{2.45}$$

wobei mit $c_0 = \sqrt{\kappa R T_0}$ die Schallgeschwindigkeit des Ruhezustands bezeichnet ist. Die lokale Schallgeschwindigkeit c ist nach Glg. 2.45 von der lokalen Strömungsgeschwindigkeit v abhängig und stets kleiner als die Ruhe-Schallgeschwindigkeit c_0.
Der Schall- oder Lavalzustand ist der sog. kritische Zustand, bei welchem die lokale Geschwindigkeit v gerade gleich der lokalen Schallgeschwindigkeit c ist, $v = c = c^*$. Die Geschwindigkeit

$$c^* = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} c_0 \tag{2.46}$$

ist als Lavalgeschwindigkeit bekannt. Die Ruhe-Schallgeschwindigkeit c_0 und die Lavalgeschwindigkeit c^* stellen konstante Stoffgrößen dar, da sie im Gegensatz zur ortsveränderlichen Schallgeschwindigkeit c unabhängig vom Strömungsvorgang sind.

2.2.3 Machzahl und Lavalzahl

Die Machzahl ist definiert als Verhältnis der Gasgeschwindigkeit zu der lokalen Schallgeschwindigkeit

$$Ma = \frac{v}{c} \tag{2.47}$$

und stellt eine wichtige Kennzahl dar. Mit der Machzahl erfolgt die Abgrenzung zwischen kompressiblen und inkompressiblen Strömungen. Die Strömungen, für welche $Ma < 0.2$ gilt, können näherungsweise als inkompressibel angesehen werden.
Eine andere Kennzahl, die Lavalzahl La, ist durch Heranziehen der Lavalgeschwindigkeit gebildet

$$La = \frac{v}{c^*}. \tag{2.48}$$

2.2.4 Isentrope Strömung durch konvergent-divergenten Kanal

Setzt man die Zuströmung aus einem Kessel voraus, deren Zustand mit den Größen $v_0 = 0$, p_0, T_0 und ρ_0 definiert ist, so folgt aus der Energiegleichung (Glg. 2.40) bei der adiabaten Zustandänderung die Beziehung für die Temperatur in einem beliebigen Kanalquerschnitt

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2. \tag{2.49}$$

Unter Annahme einer isentropen Zustandsänderung entstehen durch Einsetzen der letzten Gleichung in Glg. 2.35 und Glg. 2.36 folgende Zusammenhänge

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \tag{2.50}$$

und

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \tag{2.51}$$

Glgn. 2.49, 2.50 und 2.51 sind für jeden Totalzustand gültig, in welchem das Fluid durch adiabat-reversible (isentrope) Verzögerung von einem beliebigen Zustand zu Ruhe kommt.

Aus der Kontinuitäts- und Bewegungsgleichung in Verbindung mit Glg. 2.43 folgt die als *Hugoniot* Gleichung bekannte Beziehung

$$\frac{dA}{dv} = \frac{A}{v}(Ma^2 - 1). \tag{2.52}$$

Im Unterschallbereich ($Ma < 1$) ist dA/dv stets negativ, d.h. bei einer Geschwindigkeitserhöhung stellt sich eine stetige Querschnittsverminderung ein und umgekehrt bei der Verzögerung eine stetige Querschnittsvergrößerung. Für $Ma > 1$ (Überschallbereich) ist dA/dv positiv; eine Geschwindigkeitserhöhung fördert den Querschnittszuwachs und umgekehrt. Das grundsätzlich unterschiedliche Verhalten der Strömungsquerschnitte bei sub- und supersonischen Strömungen entsteht zufolge der Dichteänderung. Im Sonderfall $Ma = 1$ beträgt die Querschnittsänderung $dA = 0$. Dies entspricht einem Kleinstwert des Querschnitts $A = A_{min}$, in welchem sich in Abhängigkeit vom Gegendruck p_a/p_0 mit dem statischen Druck p_a am Kanalaustritt entweder die Lavalgeschwindigkeit c^* einstellt oder die Geschwindigkeit v erreicht an dieser Stelle einen Extremwert.
Ist im engsten Kanalquerschnitt die Strömung bis auf die Lavalgeschwindigkeit $c^* = \sqrt{\kappa R T^*}$ beschleunigt, so wird im Kanal der maximal mögliche Massenstrom erreicht

$$\dot{m}_{max} = \rho^* v^* A_{min} = \frac{A_{min} p_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{\kappa}{R} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}. \tag{2.53}$$

Damit sich im gesamten konvergent-divergenten Kanal subsonische Strömung einstellt, muß die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt kleiner als die Lavalgeschwindigkeit sein, $v < c^*$. In diesem Fall ist der Massenstrom nach

$$\dot{m} = \rho v A = A \sqrt{2 p_0 \rho_0 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} \tag{2.54}$$

bestimmt. Diese Gleichung ist gültig für jeden Kanalquerschnitt, solange die Strömung im gesamten Kanal subsonisch ist.
Für den Druck im engsten Querschnitt $p|_{A_{min}}$ gilt nach Glg. 2.50

$$\frac{p|_{A_{min}}}{p_0} \geq \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}}, \tag{2.55}$$

wobei das kleinste Druckverhältnis, auch als das kritische Druckverhältnis p^*/p_0 bekannt, dem Lavalzustand im engsten Kanalquerschnitt entspricht. Bei diesem Druckverhältnis reduziert sich Glg. 2.54 auf Glg. 2.53.
Ist der Maximalwert des Massenstromes erreicht, d.h. ist die Strömungsgeschwindigkeit im engsten Querschnitt der Schallgeschwindigkeit identisch, so stellt sich hinter dem engsten Querschnitt entweder die subsonische oder supersonische Strömung abhängig von dem Austrittsdruck ein. Wird der Massenstrom $\dot{m}$ in Glg. 2.54 durch Glg. 2.53 ersetzt, so erhält man

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\kappa}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right] = \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left(\frac{A_{min}}{A}\right)^2. \tag{2.56}$$

Bezeichnet man mit A_a die Austrittsfläche, so gibt es nach Glg. 2.56 für ein gegebenes Verhältnis $A_{min}/A_a < 1$ zwei Lösungen für das Verhältnis p_a/p_0 im Bereich $0 < p_a/p_0 < 1$. Der höhere Wert des Druckverhältnisses entspricht der subsonischen Strömung im Kanal, mit dem niedrigeren Wert des Druckverhältnisses stellt sich die supersonische Strömung im divergenten Teil des Kanals ein. Liegt das tatsächliche Druckverhältnis zwischen diesen beiden Werten, ist die Strömung nicht mehr im ganzen Kanal isentrop. Die Verdichtungsstösse treten entweder im Kanal oder am Kanalaustritt auf.

2.2.5 Verdichtungsstösse

2.2.5.1 Senkrechter Verdichtungsstoß

In eindimensionaler Überschallströmung können nur senkrechte Verdichtungsstösse auftreten, abgesehen von schiefen Verdichtungsstössen, welche am Austritt eines konvergent-divergenten Kanals entstehen können. Die mathematische Behandlung dieser Phänomene erfolgt im weiteren in Anlehnung an [16].
Die Strömung vor und hinter dem Verdichtungsstoß ist als isentrop angesehen. Die Stoßfront zwischen den Flächen (1) und (2) ist als Unstetigkeitsfläche senkrecht zur Strömungsrichtung angenommen. Durch die sehr dünne, im mathematischen Sinn infinitesimal kleine Stoßfront, welche jedoch eine endlich große Stoßdicke von der Größenordnung der freien Weglänge der Gasmoleküle hat, verläuft die Strömung bei adiabat-irreversibler Zustandsänderung diskontinuierlich von Über- zu Unterschallströmung.
Zur Beschreibung dieses Vorganges erhält man aus Glgn. 2.37, 2.38 und 2.40 die Stoßgleichungen für die Querschnitte $A_1 = A_2$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{2.57}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \tag{2.58}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{2.59}$$

Eine triviale Lösung des Gleichungssystems lautet $\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$, $v_1 = v_2$ und ist nicht von Bedeutung. Die andere Lösung liefert die *Rankine - Hugoniot* Gleichungen

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} > 1 \tag{2.60}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{p_2}{p_1}}{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_2}{p_1}} > 1. \tag{2.61}$$

Aus der idealen Gasgleichung ist das Temperaturverhältnis T_2/T_1 zu finden. Bei dem Durchgang durch den Verdichtungsstoß tritt eine Temperaturhöhung auf, welche im Vergleich zu isentrop verdichteter Strömung größer ist.
Durch Heranziehen von Glg. 2.44 mit $Ma_1 > 1$ entstehen die folgenden Beziehungen für das Druck-

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}(Ma_1^2 - 1) \tag{2.62}$$

und Dichteverhältnis

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)Ma_1^2}{2 + (\kappa-1)Ma_1^2}. \tag{2.63}$$

Aus Glg. 2.59 findet man das Geschwindigkeitsverhältnis

$$\frac{v_2}{v_1} = 1 - \frac{2}{\kappa+1}\frac{Ma_1^2 - 1}{Ma_1^2}, \tag{2.64}$$

woraus mit Zuhilfenahme der Energiegleichung, geschrieben für den Zustand (1) und den kritischen Zustand, nach Umformen folgt

$$v_1 v_2 = c^{*2}. \tag{2.65}$$

Ist $v_1 > c^*$ $(La > 1)$ bzw. $Ma_1 > 1$, so ist $v_2 < c^*$ und $Ma_2 < 1$, d.h. ist die Strömung vor dem Verdichtungsstoß supersonisch, so stellt sich nach dem Durchgang durch den Verdichtungsstoß die subsonische Strömung ein mit um so tieferer Strömungsgeschwindigkeit, je höher die Überschallgeschwindigkeit vor dem Stoß ist. Nach dem Verdichtungsstoß ist die Machzahl mit

$$Ma_2^2 = \frac{2 + (\kappa - 1)Ma_1^2}{2\kappa Ma_1^2 - (\kappa - 1)} \leq 1 \qquad (Ma_1 \geq 1) \tag{2.66}$$

gegeben. Die minimale Machzahl hinter dem Verdichtunggstoß beträgt

$$Ma_{2min} = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}}, \tag{2.67}$$

d.h., daß bei der zunehmenden Überschallgeschwindigkeit $(Ma \longrightarrow \infty)$ die Geschwindigkeit nach dem Stoß nicht gegen Null geht, sondern den Wert nach Glg. 2.67 anstrebt.
Die Größe des Entropiesprungs Δs läßt sich aus Glgn. 2.42 mit den Verhältnissen aus Glg. 2.62 und 2.63 ermitteln

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left[\left(\frac{2}{(\kappa + 1)Ma_1^2} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right) \left(\frac{2\kappa Ma_1^2}{\kappa + 1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right] \tag{2.68}$$

und gibt die Stärke des Verdichtungsstosses an.
Durch den Einfluß der Reibung und Wärmeleitung kommt es zu Änderungen in den dargestellten Vorgängen über den Verdichtungsstoß. Die unendlich großen Gradienten der physikalischen Größen im als diskontinuierlich angesehenen Verdichtungsstoß führen bei noch so kleiner Viskosität oder Wärmeleitfähigkeit zu endlich großer Energiedissipation.

2.2.5.2 Schiefer Verdichtungsstoß

Im Unterschied zu kanalförmigen Gebilden, wie z.B. Rohre, Düsen, Diffusoren, bei welchen sich die Strömungsgrößen im Querschnitt nur wenig ändern und daher die eindimensionale Berechnung eine gute Näherung darstellt, muß die Strömung in Schaufelgittern zweidimensional gerechnet werden. In der zweidimensionalen Strömung können schiefe Verdichtungsstösse auftreten, wobei nach dem Verdichtungsstoß sowohl Unterschall- als auch Überschallströmung möglich sind bei einer gegebenen Machzahl vor dem Stoß. In Abb. 2.1 sind der senkrechte und der schiefe Verdichtungsstoß dargestellt.
Die Strömungsgrößen im zweidimensionalen Strömungsfeld sind durch ihre Mittelwerte ersetzt. Die Kontinuitätsgleichung (Glg. 2.37) liefert

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}. \tag{2.69}$$

In tangentialer Richtung zur Stoßfront ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$v_{1t} = v_{2t} \tag{2.70}$$

und normal zur Stoßfront

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2. \tag{2.71}$$

Die Energiegleichung für den schiefen Verdichtungsstoß ist

$$\frac{v_{1n}^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_{2n}^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{2.72}$$

Der Vergleich dieser Gleichungen (abgesehen von der Bewegungsgleichung in tangentialer Richtung) mit denjenigen des senkrechten Verdichtungstosses zeigt die Übereinstimmung, wenn in den Gleichungen für den senkrechten Verdichtungsstoß v_1 durch v_{1n} und v_2 durch v_{2n} ersetzt werden.

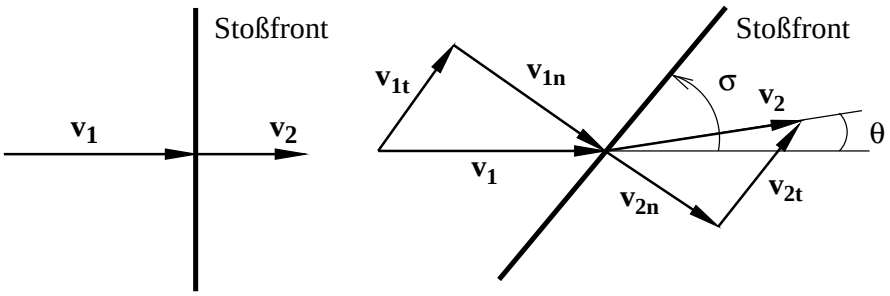

Abbildung 2.1: Senkrechter und schiefer Verdichtungsstoß

Die Gleichungen für die Änderungen der Zustandsgrößen durch den schiefen Verdichtungsstoß haben dieselbe Form wie für den senkrechten Verdichtungsstoß, wenn man in Glgn. 2.62, 2.63 als Variable die Normalkomponente der Machzahl ansetzt

$$Ma_{1n} = Ma_1 \sin\sigma, \tag{2.73}$$

wobei σ der Stoßwinkel ist.
Die Beziehung für die Machzahl nach dem schiefen Verdichtungsstoß lautet

$$Ma_2 = \frac{1}{\sin^2(\sigma - \vartheta)} \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}(Ma_{1n}^2 - 1)}{1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1}(Ma_{1n}^2 - 1)} \tag{2.74}$$

mit dem Umlenkwinkel

$$\cot\vartheta = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\frac{Ma_1^2}{Ma_{1n}^2 - 1} - 1\right)\tan\sigma, \tag{2.75}$$

welcher stets kleiner als der Stoßwinkel ist, $\vartheta < \sigma$.
Für den senkrechten Verdichtungsstoß ($\sigma = \pi/2$, $\vartheta = 0$) reduziert sich Glg. 2.74 zu Glg. 2.66.
Die Grenzwerte der Machzahl hinter dem schiefen Verdichtungsstoß bei einem bestimmten Stoßwinkel $\sigma =$ konst streben für $Ma_1 \longrightarrow \infty$ zu

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{2\kappa}\left[1 + \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)^2 \cot^2\sigma\right]}. \tag{2.76}$$

Für den senkrechten Verdichtungsstoß ergibt sich mit $\sigma = \pi/2$ der kleinstmögliche Wert nach Glg. 2.67.
Ob sich hinter dem schiefen Verdichtungsstoß Über- oder Unterschallströmung einstellt, hängt vom Stoßwinkel ab. Wird hinter dem schiefen Verdichtungsstoß die Schallgeschwindigkeit erreicht, so erhält man bei gegebener Zuströmmachzahl Ma_1 aus Glg. 2.74 einen bestimmten

Stoßwinkel $\sigma' = \sigma(Ma_1, Ma_2 = 1)$. Ist der tatsächliche Stoßwinkel kleiner als σ', so stellt sich hinter dem schiefen Verdichtungsstoß Überschallgeschwindigkeit ein und umgekehrt.
Der schiefe Verdichtungsstoß stellt genauso wie der senkrechte eine Unstetigkeitsfläche dar und ist mit dem Entropiesprung gekennzeichnet. Die Entropiezunahme läßt sich aus Glg. 2.68 ermitteln, wobei als Variable die Normalkomponente der Machzahl angesetzt werden soll, und ist für alle Stoßwinkel kleiner als die Entropieänderung bei dem senkrechten Verdichtungsstoß.
Ein gerader schiefer Verdichtungsstoß ($\sigma =$ konst) bewirkt in allen Punkten hinter dem Stoß eine gleiche Entropieänderung im Unterschied zu einem gekrümmten Stoß ($\sigma \neq$ konst), hinter dem sich die Entropiezunahme von Stromlinie zu Stromlinie ändert.

Kapitel 3

Modellierung

3.1 Turbulenzmodellierung

3.1.1 Turbulenz

Im Unterschied zu laminarer Strömung ist turbulente Strömung durch unregelmäßige zufallsbedingte Mischbewegungen kleiner Fluidelemente gekennzeichnet, die im Bewegungsablauf ständig neu entstehen und sich wieder auflösen. Diese Bewegungen verursachen den Impulsaustausch von einem Element zum anderen, ähnlich etwa dem Impulsaustausch auf der molekularen Ebene, aber mit bedeutend größeren Weglängen. Turbulenz ist ein instationärer und dreidimensionaler Prozeß, charakterisiert mit instationären und in makroskopischen Größen ablaufenden Schwankungen der physikalischen Größen infolge der Mischbewegung. Jede Größe $f(t)$ kann daher als Summe der mittleren Größe $\bar{f}$ und der Schwankung f' dargestellt werden

$$f(t) = \bar{f} + f'. \tag{3.1}$$

Die mittlere Größe ist definiert als

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} f(t) dt, \tag{3.2}$$

wobei das Zeitinterval Δt viel größer als die Schwankungsperiode der betrachteten Größe ist. Somit gilt für die Größen eines turbulenten Strömungsfeldes

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \qquad p = \bar{p} + p' \qquad T = \bar{T} + T' \qquad \rho = \bar{\rho} + \rho'. \tag{3.3}$$

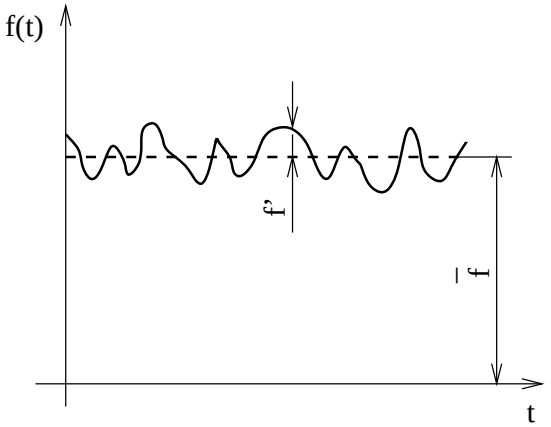

Abbildung 3.1: Stationäre turbulente Strömung

Im Fall einer im mittel stationären turbulenten Strömung (siehe Abb. 3.1) ist die mittlere Größe unabhängig von der Zeit und somit gilt für den Mittelwert der Schwankungen

$$\overline{f'} = 0. \tag{3.4}$$

Eine im mittel stationäre turbulente Strömung kann näherungsweise als eben interpretiert werden, falls der Mittelwert der Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung gleich Null ist. Zur Erfassung der Intensität der Turbulenz dient der Turbulenzgrad

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\overline{v_i'^2}}}{\bar{v}}. \tag{3.5}$$

Weitere Größen, welche die turbulente Strömung charakterisieren, sind die turbulente kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2}\overline{v_i' v_i'} \tag{3.6}$$

und die Dissipationsrate ϵ oder das Verhältnis, in welchem die turbulente kinetische Energie k in die innere Energie des Fluids umgewandelt wird,

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x_k}\frac{\partial v_i'}{\partial x_k}}. \tag{3.7}$$

3.1.2 Reynoldsform der Bewegungs- und Energiegleichung

Die *Navier-Stokes* Gleichung (Glg. 2.19) und Energiegleichung (Glg. 2.32) sind gültig sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen des Newtonschen Fluids. Die Reynoldsmittelung umfaßt das Ersetzen der Größen in diesen Gleichungen durch Mittelwerte und Schwankungen mit anschließender zeitlicher Mittelung über die jeweils aufgetretenen Glieder. Nach diesem Mittelungsverfahren wird die *Navier-Stokes* Gleichung in die sog. *Reynolds* Gleichung umgewandelt

$$\rho\frac{D\vec{\bar{v}}}{Dt} = \rho\vec{B} - \mathrm{grad}\bar{p} + \mathrm{div}(\vec{\bar{\tau}} - \rho\overline{v_i' v_j'}) \tag{3.8}$$

mit dem Spannungstensor, bestehend aus laminaren

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k}\right) \tag{3.9}$$

und sog. turbulenten Reynoldsspannungen $-\rho\overline{v_i' v_j'}$.
Glg. 3.8 stellt die Bewegungsgleichung sowohl für kompressible als auch für inkompressible turbulente Strömung dar. Im kompressiblen Fall ist mit ρ die mittlere Dichte beschrieben und mittlere Größen sind massengewichtet, z.B.

$$\bar{v}_i = \frac{\overline{\rho v_i}}{\bar{\rho}}, \tag{3.10}$$

womit die Geschwindigkeits-Dichte Korrelationen $\overline{\rho' v_i'}$ und $\overline{\rho' v_i' v_j'}$ aus der *Reynolds* Gleichung ausgeschlossen sind, der Einfluß der Dichteschwankungen auf die Turbulenz bleibt trotzdem erhalten.
Die Energiegleichung (Glg. 2.32) nach der Reynoldsmittelung ergibt sich zu

$$\rho c_p \frac{D\bar{T}}{Dt} = \frac{D\bar{p}}{Dt} + \mathrm{div}\vec{q} + \bar{\Phi} \tag{3.11}$$

mit der Wärmestromdichte, bestehend aus laminaren und turbulenten Anteilen

$$\vec{q} = -\lambda \mathrm{grad}\bar{T} + \rho c_p \overline{v_i' T'} \tag{3.12}$$

und der Dissipationsfunktion

$$\bar{\Phi} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij}' \frac{\partial v_i'}{\partial x_j}}. \tag{3.13}$$

Der CFX-Solver löst die Energiegleichung für die spezifische totale Enthalpie

$$H = h + \frac{1}{2} v_i v_i. \tag{3.14}$$

Die Energiegleichung in Reynoldsform in CFX ist somit

$$\rho \frac{D\bar{H}}{Dt} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{q}, \tag{3.15}$$

wobei

$$\bar{H} = \bar{h} + \frac{1}{2}\bar{v}_i^2 + k \tag{3.16}$$

der mittlere Wert der spezifischen totalen Enthalpie ist. Die Wärmestromdichte $\vec{q}$ in Glg. 3.15 setzt sich aus dem laminaren und dem turbulenten Anteil zusammen

$$\vec{q} = -\frac{\lambda}{c_p} \mathrm{grad}\bar{H} + \rho \overline{v_i' H'} \tag{3.17}$$

und der letztere soll modelliert werden.
Die *Reynolds* Gleichung samt Energiegleichung in Reynoldsform sind wegen der neuen Unbekannten (turbulente Spannungen, turbulenter Wärmestrom und weitere Korrelationen von mittleren und Schwankungsgrößen), die nach der Reynoldsmittelung auftreten, nicht lösbar. Durch die Zugabe der Modellgleichungen, welche die neuen Unbekannten in Verbindung bringen, wird dieses Schließungsproblem gelöst. Für die Berechnungen werden drei Zweigleichungsmodelle angewendet. Die Wandrandbedingungen für das zu lösende Gleichungsystem sind mit den Wandfunktionen bei dem Standard $k - \epsilon$ Modell bestimmt. Das low Reynolds number $k - \omega$ und das Menter-modifizierte $k - \omega$ Modell benötigen keine Wandfunktionen; die Transportgleichungen sind durch die laminare Unterschicht bis zur Wand integriert.

3.1.3 Turbulenzmodelle

3.1.3.1 Standard $k - \epsilon$ Modell

Eines der meist verwendeten Turbulenzmodelle ist das Standard $k - \epsilon$ Modell. In diesem Modell sind die Reynoldsspannungen mit dem Wirbelviskositätsansatz von *Boussinesq* approximiert, welcher analog dem Ausdruck für die laminaren Spannungen ist

$$-\rho \overline{v_i' v_j'} = 2\mu_T S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}, \tag{3.18}$$

wobei

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.19}$$

die Scherrate und μ_T die dynamische turbulente Viskosität sind. Die Größe

$$\nu_T = \frac{\mu_T}{\rho} \tag{3.20}$$

ist als Wirbelviskosität benannt. Die Wirbelviskosität ist ortsabhängig (und somit strömungsabhängig) und daher keine Stoffgröße.
Die Transportgleichungen für k und ϵ

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho k}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right] + P - \rho\epsilon, \tag{3.21}$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\epsilon}\right)\frac{\partial \epsilon}{\partial y}\right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k}, \tag{3.22}$$

zusammen mit dem Ausdruck für die dynamische turbulente Viskosität, welcher aus der Dimensionsanalyse folgt

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}, \tag{3.23}$$

schließen das Gleichungssystem, welches die *Reynolds* Gleichung ergänzt. Die Produktionsrate ist mit dem Ansatz von *Boussinesq* bestimmt als

$$P = 2\mu_T S_{ij} S_{ji}. \tag{3.24}$$

Die unbekannten Korrelationen in der *Reynolds* Gleichung wurden durch die bekannten Turbulenz- und mittleren Strömungsgrößen ersetzt, wozu die Modelkonstanten C_μ, C_1, C_2, Pr_k und Pr_ϵ eingeführt wurden. In Tab. 3.1 sind die Werte der Konstanten für das Standard $k-\epsilon$ Modell zusammengefaßt.

$Pr_k[-]$	$Pr_\epsilon[-]$	$C_1[-]$	$C_2[-]$	C_μ [-]
1.0	1.217	1.44	1.92	0.09

Tabelle 3.1: Empirische Konstanten für das Standard $k-\epsilon$ Modell (CFX)

3.1.3.2 Low Reynolds number $k-\omega$ Modell

Als Alternative zum Standard $k-\epsilon$ Modell wurde in den Berechnungen das sog. low Reynolds number $k-\omega$ Modell angewendet. An Stelle der Dissipationsrate tritt bei diesem Modell die Turbulenzfrequenz

$$\omega = \frac{\epsilon}{k} \tag{3.25}$$

auf. Als Randbedingung für ω und k an der Wand sind $\omega = 0$ und $k = 0$ eingesetzt. Das Modell ist mit der Dämpfungsfunktion f_μ für die Wirbelviskosität im Grenzschichtbereich vorgesehen, womit die Grenzschichtströmung bei kleinen Reynolds-Zahlen berechnet wird

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho \frac{k}{\omega}. \tag{3.26}$$

Die Dämpfungsfunktion ist definiert als

$$f_\mu = \exp \frac{-3.4}{\left(1 + \frac{Re_T}{50}\right)^2}, \tag{3.27}$$

wobei

$$Re_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \tag{3.28}$$

die lokale turbulente Reynolds-Zahl ist. Die Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen k und ω unterscheiden sich wenig von den Gleichungen für das Standard $k-\epsilon$ Modell

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho k}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right] + P - \rho\omega k, \tag{3.29}$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho \omega}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho \omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial y}\right] + C_1 \frac{\omega}{k} P - C_2 \rho \omega^2. \tag{3.30}$$

Die Ermittlung der Produktionsrate erfolgt nach Glg. 3.24. Die Modellkonstanten sind in Tab. 3.2 zusammengefaßt.

$Pr_k[-]$	$Pr_\omega[-]$	$C_1[-]$	$C_2[-]$	C_μ [-]
2.0	2.0	0.511	0.8333	0.09

Tabelle 3.2: Empirische Konstanten für das low Reynolds number $k-\omega$ Modell (CFX)

3.1.4 Realizability und Staupunktanomalie

Unter Realizability versteht man die Bedingung, daß die Reynoldsnormalspannungen in allen Richtungen immer positiv sind

$$\overline{v_i' v_i'} \geq 0 \tag{3.31}$$

und die Ungleichung von *Schwarz*

$$\frac{\overline{v_i' v_j'}^2}{\bar{v}_i'^2 \bar{v}_i'^2} \leq 1 \tag{3.32}$$

erfüllt ist, d.h., daß die berechneten turbulenten Normalspannungen durchführbar sein sollten. Gewöhnliche Turbulenzmodelle (wie z.B. das Standard $k-\epsilon$ Modell) generieren sehr oft negative Reynoldsnormalspannungen in der Außenströmung weit von den Wänden und beeinflußen somit das gesamte Strömungsfeld. Von diesem Phänomen sind besonders die Gitterströmungen betroffen. Geschwindigkeitsgradienten infolge der Verzögerung vor der Vorderkante und bei starker Profilumlenkung (vor allem bei Turbinengittern) führen zu bestimmten Werten der Scherrate S_{ij}. Ist die Scherrate S_{ii} groß genug, so können die Reynoldsnormalspannungen (vergleiche Glg. 3.18) negativ werden. Nach *Durbin* [5] verursachen die negativen Reynoldsnormalspannungen einen großen Anstieg der turbulenten kinetischen Energie insbesondere im Bereich vor der Vorderkante. Dieser Energieüberschuß wird dann von der Strömung mitgenommen und wirkt sich auf die Entwicklung der Grenzschicht und auf die Strömungsverluste aus. In der Literatur ist dieses Problem als Staupunktanomalie bekannt, zu dessen Behandlung mehrere Turbulenzmodelle nach zwei verschiedenen Typen entwickelt worden sind. Bei Turbulenzmodellen vom ersten Typ (z.B. Modelle von *Durbin*, *Moore* und *Moore*, *Shih et al.*) ist die Berechnung von negativen Reynoldsnormalspannungen vermieden, indem die Modellkonstante C_μ im Ausdruck für die Wirbelviskosität mit einem funktionellen Zusammenhang $C_\mu = C_\mu(S_{ij}, \Omega_{ij})$ ersetzt ist, wobei

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.33}$$

die Wirbelstärke ist.
Die Behandlung der Staupunktanomalie bei Turbulenzmodellen vom zweiten Typ (*Kato* und *Launder*, *Menter*) ist auf die Redefinition der Produktionsrate in den Modellgleichungen zurückzuführen, womit der Anstieg der turbulenten kinetischen Energie im Staubereich kontrolliert wird.
Ist die Produktionsrate nach Glg. 3.24 bestimmt, so folgt im ebenen Fall an einer beliebigen Stelle im Strömungsfeld

$$P = \mu_T \left[2 \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} \right)^2 \right] \tag{3.34}$$

und entlang der Staustromlinie

$$P = 4\mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \right)^2 . \tag{3.35}$$

Bei dem Standard $k - \epsilon$ Modell ist diese Überproduktion der turbulenten kinetischen Energie im Staubereich wenn nicht zu beseitigen, dann nach [10] mindestens zu minimieren, indem die am Eintritt des Rechengebietes definierte Dissipationsrate ϵ erhöht wird und somit die Turbulenzproduktion reduziert.
Der von *Menter* [8], [9] vorgeschlagene Ansatz für die Produktionsrate

$$P = 2\mu_T \Omega_{ij} \Omega_{ji} \tag{3.36}$$

gibt im ebenen Fall an einer beliebigen Stelle im Strömungsfeld

$$P = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right)^2 \tag{3.37}$$

und somit entlang der Staustromlinie $P = 0$. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, daß Formulierungen, die auf der Wirbelstärke basieren, nicht mehr unabhängig vom Bezugssystem (rotierend bzw. nicht rotierend) sind und oft zu numerischen Problemen führen. Daher wird bei dem in CFX integrierten Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell folgende Beziehung verwendet

$$P = \min(P, c_{lim}\epsilon) \tag{3.38}$$

mit P nach Glg. 3.24. D.h., die Produktionsrate wird mit einem Vielfachen ($c_{lim} = 10$) der lokalen Dissipationsrate limitiert.
Das Menter-modifizierte $k - \omega$ Modell stellt eine Kombination von Standard $k - \epsilon$ und Wilcox $k - \omega$ Modell dar und sollte bei der Berechnung verschiedener Strömungsprobleme zu ähnlichen Resultaten wie das Wilcox $k - \omega$ Modell führen. Abgesehen von der Verbesserung hinsichtlich der Behandlung von Staupunktanomalie hat das Menter-modifizierte $k - \omega$ Modell gegenüber dem Wilcox $k - \omega$ Modell auch den Vorteil, daß die Rechenresultate keine Abhängigkeit von den Größen der freien Strömung aufweisen, durch welche das Wilcox $k - \omega$ Modell gekennzeichnet ist.
Im inneren der Grenzschicht (bis 0.5δ) ist das Menter-Modell mit dem Wilcox $k - \omega$ Modell identisch und wechselt allmählich zu dem Standard $k - \epsilon$ (ausgedrückt in $k - \omega$). Die Modellgleichungen sind

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{k}{\omega}, \tag{3.39}$$

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho k}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \rho P - \rho \omega k, \tag{3.40}$$

und

$$\bar{v}_x \frac{\partial \rho\omega}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \rho\omega}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{Pr_\omega}\right)\frac{\partial \omega}{\partial y}\right] + \\ + C_1 \frac{\omega}{k} P - C_2 \rho \omega^2 + 2(1-F)\frac{\mu_T}{Pr_{\omega 2} k}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y}\right) \tag{3.41}$$

Die „Vermischung“ der Modelle erfolgt mit der Funktion F, mit welcher die Modellkonstanten ϕ bestimmt sind

$$\phi = F\phi_1 + (1-F)\phi_2, \tag{3.42}$$

wobei ϕ_1 die Konstantenreihe des Wilcox $k-\omega$ Modells (Tab. 3.3) und ϕ_2 die Konstantenreihe des Standard $k-\epsilon$ Modells (Tab. 3.1, $Pr_\epsilon \longrightarrow Pr_\omega$) sind. Die Konstante $Pr_{\omega 2}$, die in Glg. 3.41 und im weiteren Text vorkommt, wechselt nicht ihren Wert während der „Vermischung“, $Pr_{\omega 2} = 1.217$. Die Funktion F ist

$$F = \tanh a^4 \tag{3.43}$$

mit

$$a = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\omega y}, \frac{500 C_\mu \mu}{\rho \omega y^2}\right), \frac{4\rho k}{A Pr_{\omega 2} y^2}\right) \tag{3.44}$$

und

$$A = \max\left(\frac{2\mu_T}{C_\mu Pr_{\omega 2} k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-20}\right). \tag{3.45}$$

In diesen Gleichungen ist y der Abstand von der Wand.

$Pr_k[-]$	$Pr_\omega[-]$	$C_1[-]$	$C_2[-]$	C_μ [-]
2.0	2.0	0.5411	0.8333	0.09

Tabelle 3.3: Empirische Konstantenreihe ϕ_1 (CFX)

3.1.5 Modellierung der turbulenten Wärmestromdichte

Die turbulente Wärmestromdichte (siehe Glg. 3.17) ist mit dem Ansatz

$$\rho \overline{v_i' H'} = \frac{\mu_T}{Pr_h} \mathrm{grad} \bar{H} \tag{3.46}$$

ersetzt, wobei die turbulente Prandtl-Zahl für Enthalpie $Pr_h = 0.9$ durch die gesamte Grenzschicht konstant bleibt, obwohl diese Zahl theoretisch wechselt von $Pr_h = 1.5$ in der Wandnähe bis $Pr_h = 0.6 \ldots 0.7$ am Grenzschichtrand.

3.1.6 Grenzschicht

Das gesamte turbulente Strömungsfeld ist nach *Prandtl* in zwei Bereiche unterteilt: die Außenströmung, welche als reibungsfrei angesehen werden kann, und die dünne Grenzschicht, in welcher die Reibungseffekte und die Wärmeübertragung zu berücksichtigen sind. Die turbulente Grenzschicht kann weiters in die wandnahe laminare und die vollturbulente Unterschicht aufgespaltet werden. Da die herkömmlichen Zweigleichungsturbulenzmodelle die Kompressibilitätseffekte innerhalb der Grenzschicht nicht berücksichtigen, ist im weiteren die Beschreibung

der Grenzschicht auf stationäre inkompressible Plattengrenzschichtströmung beschränkt. Unter Voraussetzung, daß die Reynolds-Zahl der Außenströmung groß ist, folgt für die Grenzschichströmung nach *Prandtl*

$$u \gg v \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.47}$$

Reibungseffekte beziehen sich auf die Geschwindigkeitsgrenzschicht mit der Dicke $\delta(x) \ll x$, Wärmeübertragung auf die Temperaturgrenzschicht mit der Dicke $\Delta(x) \ll x$ (siehe Abb. 3.2). Der Druck p ist als konstant angesehen und es gilt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{3.48}$$

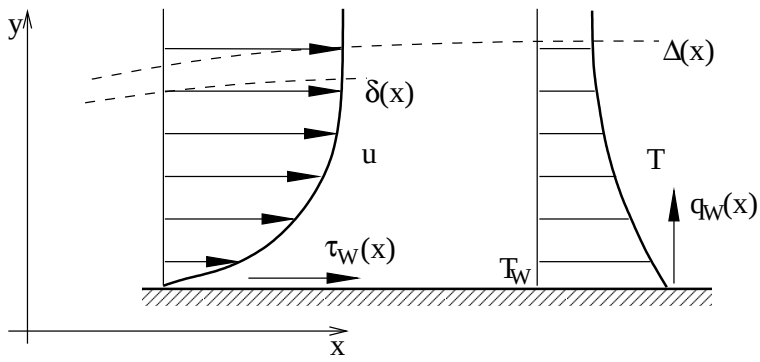

Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Grenzschicht

3.1.6.1 Geschwindigkeitsgrenzschicht

Unter Berücksichtigung aller dieser Voraussetzungen ergibt sich die Reynoldsgleichung zu

$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}, \tag{3.49}$$

wobei

$$\bar{\tau} = \mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho\overline{u'v'} = \mu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \mu_T\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \tag{3.50}$$

die gesamte von der Viskosität und von der Turbulenz hervorgerufene gemittelte Schubspannung ist.
Für die gesamte Geschwindigkeitsgrenzschicht wird die für Strömungen ohne Druckgradient experimentell bestätigte Annahme getroffen, daß die Schubspannung $\bar{\tau}$ gleich der Wandschubspannung τ_W ist.
In der viskosen Unterschicht dominieren die laminaren Spannungen über die Reynoldsspannungen, $\mu \gg \mu_T$, und die letzteren können vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung folgt nach dem Integrieren von Glg. 3.50 das sog. Prandtlsche Gesetz für $y^+ < 5$

$$u^+ = y^+ \tag{3.51}$$

mit dimensionsloser mittlerer Geschwindigkeit u^+ und dimensionslosem Wandabstand y^+

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} \qquad \text{bzw.} \qquad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}. \tag{3.52}$$

Für die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ gilt

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}. \tag{3.53}$$

Für die Geschwindigkeitsverteilung im vollturbulenten Bereich sind die Reynoldsspannungen maßgeblich, $\mu \ll \mu_T$, und daher werden die laminaren Schubspannungen nicht berücksichtigt. Mit dem Mischungswegansatz von *Prandtl*

$$\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|, \tag{3.54}$$

wobei l die Mischungsweglänge ist, für welche näherungsweise der Ansatz

$$l = \kappa y \tag{3.55}$$

gemacht werden kann, ergibt sich Glg. 3.50 nach dem Integrieren zu

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+). \tag{3.56}$$

Diese Beziehung ist als das universelle Wandgesetz bekannt und gültig im Bereich $y^+ > 30$. Die *Kármán*-Konstante κ sowie die Konstante E sind experimentell ermittelt.
Zur Verbindung der laminaren und logarithmischen Bereiche sowie des Übergangsbereiches ($5 < y^+ < 30$), in welchem die laminaren und die Reynoldsspannungen von gleicher Größenordnung sind, dient das Gesetz von *Reichardt*.
Im CFX-Solver sind die Wandfunktionen mit

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & \text{für } y^+ < y_0^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(E y^+), & \text{für } y^+ > y_0^+ \end{cases} \tag{3.57}$$

gegeben, wobei $y_0^+ = 11.225$ die Schnittstelle beider Funktionen ist. Die *Kármán*-Konstante beträgt $\kappa = 0.4187$ und $E = 9.793$.

3.1.6.2 Temperaturgrenzschicht

Ähnlich dem oben erläuterten Vorgang können die Wandfunktionen für die Temperaturgrenzschicht abgeleitet werden. Aus Glg. 3.11 folgt unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen für die Plattengrenzschichtströmung

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{1}{\rho c_p} \vec{\bar{q}} \tag{3.58}$$

Die Energiedissipation ist in der letzten Gleichung vernachlässigt, da für die Gase mit der Prandtlzahl $Pr \approx 1$ bei relativ kleinen Geschwindigkeiten die Dissipationsfunktion im Vergleich zu anderen Gliedern in Glg. 3.11 vernachlässigbar klein ist.
Für die gesamte Wärmestromdichte gilt

$$\vec{\bar{q}} = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \rho c_p \overline{u'T'} = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \tag{3.59}$$

wobei mit λ_T die sog. scheinbare Wärmeleitfähigkeit der turbulenten Strömung bezeichnet ist. Für Fluide mit $Pr < 5.0$ kann die Annahme getroffen werden, daß in der laminaren

Unterschicht $\lambda \gg \lambda_T$ und im vollturbulenten Bereich $\lambda \ll \lambda_T$ ist. Wird mit $\vec{q}_W$ die Wärmestromdichte an der Wand bezeichnet, welche in der gesamten Grenzschicht die Wärmestromdichte $\vec{q}$ ist, so folgt nach dem Integrieren von Glg. 3.59 für die laminare Unterschicht ($y^+ < 13.2$) die Beziehung

$$T^+ = Pry^+ \tag{3.60}$$

mit der dimensionslosen Temperatur

$$T^+ = \frac{\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}}{\frac{\vec{q}_W}{\rho c_p}}(T_W - \bar{T}). \tag{3.61}$$

Nach der Übernahme der sog. Reynoldsanalogie aus [7]

$$\frac{\mu_T}{\rho} = \frac{\lambda_T}{\rho c_p}, \tag{3.62}$$

welche der turbulenten Prandtlzahl

$$Pr_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T} \tag{3.63}$$

gleich eins entspricht, folgt nach [7] die Beziehung

$$\frac{1}{\nu}\frac{\mu_T}{\rho} = \kappa y^+ = \frac{1}{\nu}\frac{\lambda_T}{\rho c_p}. \tag{3.64}$$

Unter Berücksichtigung, daß im vollturbulenten Bereich $Pr_T = 0.9$ ist, erhält man aus dieser Gleichung den Ansatz

$$\frac{1}{\nu}\frac{\lambda_T}{\rho c_p} = \frac{\kappa}{Pr_T} y^+. \tag{3.65}$$

Wird die letzte Gleichung in Glg. 3.59 eingesetzt und diese unter Vernachlässigung des laminaren Anteils der gesamten Wärmestromdichte integriert, so folgt für den vollturbulenten Bereich ($y^+ > 13.2$)

$$T^+ = \frac{Pr_T}{\kappa}\ln(E_T y^+), \tag{3.66}$$

mit der experimentell ermittelten Konstante E_T.
Da der CFX-Solver die Energiegleichung für die totale Enthalpie löst, sind die Wandfunktionen für diese Größe angegeben

$$H^+ = \begin{cases} Pry^+, & \text{für } y^+ < y^+_{H_0} \\ \frac{Pr_h}{\kappa}\ln(E_H y^+), & \text{für } y^+ > y^+_{H_0} \end{cases} \tag{3.67}$$

wobei

$$H^+ = \frac{\sqrt{\rho \tau_W}}{J_{H_W}}(H_W - H) \tag{3.68}$$

die dimensionslose totale Enthalpie und J_{H_W} der Enthalpiemassenstrom an der Wand sind. Die Konstante E_H ist bestimmt nach der Formel von *Jayatilleke* (siehe [3]) und $y^+_{H_0}$ stellt die Schnittstelle beider Funktionen dar.
Bei der Berechnung der inkompressiblen Strömung, als welche auch die Grenzschichtströmung im CFX behandelt wird, ist der Geschwindigkeitsanteil im Ausdruck für die totale Enthalpie vernachlässigt, womit sich die Analogie zwischen den Glgn. 3.60, 3.66 und 3.67 erklären läßt.

3.1.7 Bestimmung der Eintrittsrandbedingungen

Abhängig von dem verwendeten Turbulenzmodell sind am Eintrittsrand des Rechengebietes die Größen k und ϵ oder ω zu definieren. Die Ermittlung des Randwertes für die turbulente kinetische Energie erfolgt aus der Definition des Turbulenzgrades. Unter Annahme der isotropen Turbulenz am Eintritt reduziert sich Glg. 3.5 auf

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{\bar{v}}. \tag{3.69}$$

Durch Heranziehen der Glg. 3.6 folgt der Zusammenhang

$$k = \frac{3}{2}(\bar{v}Tu)^2. \tag{3.70}$$

Aus der Dimensionsanalyse folgt

$$\epsilon = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\delta}, \tag{3.71}$$

wobei δ die charakteristische Länge ist. Mit den Werten für k und ϵ läßt sich der Randwert der Turbulenzfrequenz ω nach Glg. 3.25 berechnen.

3.2 Methode der Finiten-Volumen

Das zu lösende Gleichungssystem, bestehend aus den Grundgleichungen und den Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen (abhängig vom angewendeten Turbulenzmodell), stellt ein System von partielen Differentialgleichungen 2. Ordnung dar, dessen Lösung nur numerisch erreichbar ist. Die Grundidee der Methode der Finiten-Volumen besteht darin, das Rechengebiet in eine endliche Anzahl von Volumina zu unterteilen, auf jedes Volumen die Massen-, Impuls- und Energiebilanz anzuwenden und das somit entstandene Gleichungssystem von linearen diskretisierten Transportgleichungen zu lösen. In CFX ist dies mit der Kombination von zwei zwar verschiedenen aber kompatiblen Verfahren erreicht.
Das erste Verfahren, das sog. „computational space approach“, basiert auf der Koordinatentransformation. Im Originalraum ist das kartesische Koordinatensystem $(x^i) = (x, y, z)$ mit dem konturangepassten Koordinatensystem $(\xi^i) = (\xi, \eta, \zeta)$ ersetzt, indem die Ränder des Rechengebietes den Flächen $\xi^i =$ konst entsprechen. Die partiellen Differentialgleichungen sind transformiert und danach im Einheitsraum diskretisiert, wobei die skalaren Werte der physikalischen Größen in den Zellenmitten auftreten. Dieses Verfahren weist zwei Nachteile auf. Erstens, die analytische Koordinatentransformation ist nur möglich im Fall von einfachen Geometrien, zweitens, die numerische Koordinatentransformation mit der Methode der Finiten-Differenzen hat formell die Genauigkeit 2. Ordnung, ist aber fehlerhaft bei stark verzerrten Netzen.
Bei dem zweiten Verfahren, dem sog. „physical space approach“, erfolgt die Diskretisierung der Differentialgleichungen im Originalraum. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, daß bei stark verzerrten Netzen die geometrische Information genauer berechnet wird.
Wie diese beiden Verfahren kombiniert sind, wird im weiteren genauer beschrieben.

3.2.1 Koordinatentransformation

Die Koordinatentransformation ist mit den nicht-singulären Funktionen $x^i(\xi^i)$ und $\xi^i(x^i)$ angegeben. Folglich ist die Jacobimatrix

$$J^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \tag{3.72}$$

nicht-singulär, so daß ihre Inverse

$$\bar{J}^i_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = (J^{-1})^i_j \tag{3.73}$$

immer existiert und die Determinante $|J| = \det(J^i_j)$ ungleich Null ist. Mit Hilfe der inversen Jacobimatrix erfolgt die Gradiententransformation vom Original- zum Einheitsraum

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \bar{J}^j_i \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j}. \tag{3.74}$$

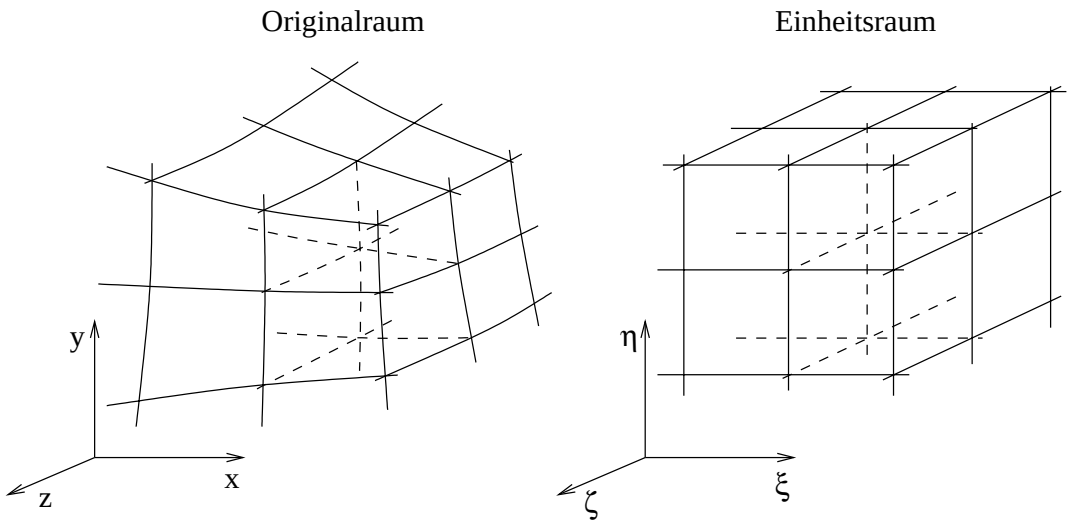

Abbildung 3.3: Koordinatensysteme im Original- und Einheitsraum

Allgemein ist es möglich, im konturangepassten Koordinatensystem jedem Punkt zwei verschiedene Basen der Einheitsvektoren zuzuordenen: die kovariante Basis $\vec{e}_{(i)}$ mit den Einheitsvektoren tangential zu den Koordinatenachsen und die kontravariante Basis $\vec{e}^{(i)}$ mit den Einheitsvektoren senkrecht zu Flächen $\xi^i =$ konst. Wird mit den Einheitsvektoren der kovarianten Basis ein elementarer Quader $\mathcal{V}$ aufgebaut, so gilt für das Volumen des Quaders

$$\mathrm{vol}(\mathcal{V}) = \vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(2)} \times \vec{e}_{(3)} = |J| \tag{3.75}$$

und für die Oberflächenvektoren

$$\vec{A}^{(i)} = |J| \vec{e}^{(i)}. \tag{3.76}$$

Die kartesischen Komponenten der Oberflächenvektoren stellen die Reihen der adjungierten Jacobimatrix

$$\vec{A}^{(i)}_k = |J| \bar{J}^i_k = A^i_k \tag{3.77}$$

dar. Ein Kontrollvolumen im Einheitsraum mit Dimensionen $(\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta)$, welches den Punkt P beinhaltet (siehe Abb. 3.4), kann an den im Originalraum mit den Vektoren $\Delta\xi\vec{e}_1, \Delta\eta\vec{e}_2$ und $\Delta\zeta\vec{e}_3$ aufgebauten Quader $\delta\mathcal{V}$ angepasst werden. Da die Abstände $\Delta\xi, \Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ im Einheitsraum alle gleich eins sind, gilt mit der Genauigkeit 2. Ordnung im Einheitsraum für das physikalische Volumen

$$V_P = \mathrm{vol}(\mathcal{V}) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta \approx |J|_P \tag{3.78}$$

und die Oberflächenvektoren $\vec{A}_f$ mit $f = e,\ w,\ n,\ s,\ u$ oder d

$$\vec{A}_e = +\vec{A}_e^{(1)}\Delta\eta\Delta\zeta \approx +\vec{A}_e^{(1)}, \qquad \vec{A}_w = -\vec{A}_w^{(1)}\Delta\eta\Delta\zeta \approx -\vec{A}_w^{(1)} \tag{3.79}$$

$$\vec{A}_n = +\vec{A}_n^{(2)}\Delta\xi\Delta\zeta \approx +\vec{A}_n^{(2)}, \qquad \vec{A}_s = -\vec{A}_s^{(2)}\Delta\xi\Delta\zeta \approx -\vec{A}_s^{(2)} \tag{3.80}$$

$$\vec{A}_u = +\vec{A}_u^{(3)}\Delta\xi\Delta\eta \approx +\vec{A}_u^{(3)}, \qquad \vec{A}_d = -\vec{A}_d^{(3)}\Delta\xi\Delta\eta \approx -\vec{A}_d^{(3)} \tag{3.81}$$

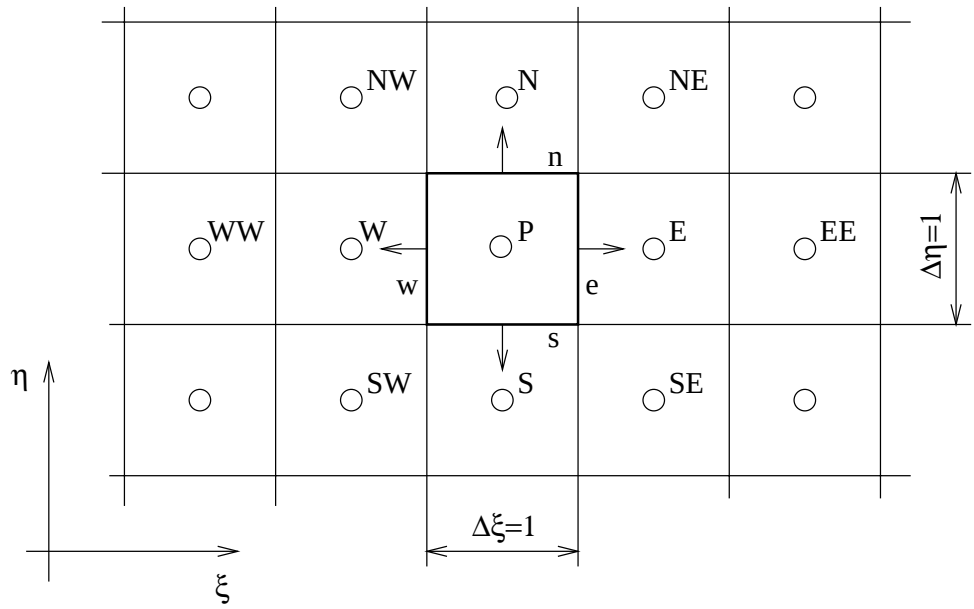

Abbildung 3.4: Bezeichnung des Kontrollvolumens

Somit können das Volumen des Kontrollvolumens mit der Determinante der Jacobimatrix im Punkt P und die Oberflächenvektoren der Kontrollfläche f mit den Elementen der adjugaten Jacobimatrix im Schwerpunkt der Kontrollfläche f angenähert werden. Bei dieser Methode zur Berechnung der Volumina ist vorausgesetzt, daß das Kontrollvolumen um den Punkt P im Originalraum annähernd einen Quader darstellt, was bei stark verzerrten Netzen nicht der Fall ist. Daher approximiert CFX das Volumen des Kontrollvolumens im Originalraum unter Anwendung des Gausschen Ansatzes mit

$$V_P = \frac{1}{3}\sum_f \vec{A}_f \vec{x}_f, \tag{3.82}$$

wobei $\vec{x}_f$ die kartesischen Koordinaten der Schwerpunkte der Kontrollflächen f sind. Die Kontrollflächenvektoren $\vec{A}_f$ können berechnet werden, indem jede Kontrollfläche in zwei Dreiecke unterteilt wird und die Flächen der Dreiecke als Vektorprodukte der auf Kontrollvolumenseiten aufgebauten Vektoren berechnet sind. Somit lassen sich die Jacobimatrix und ihre Inverse mit der geometrischen Information aus dem Originalraum aufstellen.

3.2.2 Diskretisierung

Abgesehen von der Kontinuitätsgleichung stellen alle Transportgleichungen im kartesischen Koordinatensystem für stationäre Strömungen isotrope skalare Advektions-Diffusions Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i \phi) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) + S \tag{3.83}$$

mit Dichte ρ, Geschwindigkeitskomponenten v^i, skalarem Diffusionsfaktor Γ, Quelle S und skalarem Feld ϕ dar. Nach der Koordinatentransformation ergibt sich diese Gleichung zu

$$\frac{\partial \hat{I}^i}{\partial \xi^i} = |J|S, \tag{3.84}$$

wobei $\hat{I}^i$ den Gesamtfluss darstellt

$$\hat{I}^i = \underbrace{\rho \vec{v} \vec{A}^{(i)} \phi}_{Konvektion} - \underbrace{\Gamma^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j}}_{Diffusion} . \tag{3.85}$$

Aufgrund der nicht-orthogonalen Koordinatentransformation ist die transformierte Transportgleichung (3.84) anisotrop. Diese Eigenschaft ist mit dem anisotropen Tensor

$$\Gamma^{ij} = \Gamma G^{ij}, \tag{3.86}$$

beschrieben, wobei G^{ij} die Koeffizientenmatrix der geometrischen Diffusion

$$G^{ij} = \frac{\vec{A}^{(i)} \vec{A}^{(j)}}{|J|} \tag{3.87}$$

ist.
Da die Volumina der Zellen im Einheitsraum gleich eins sind, führt das Integrieren der Glg. 3.84 über ein Kontrollvolumen im Einheitsraum

$$\int_V \frac{\partial \hat{I}^i}{\partial \xi^i} dV = \int_V |J| S dV \tag{3.88}$$

zu

$$\hat{I}_e^1 - \hat{I}_w^1 + \hat{I}_n^2 - \hat{I}_s^2 + \hat{I}_u^3 - \hat{I}_d^3 = |J|S. \tag{3.89}$$

Die Finite-Differenzen Approximation des Gesamtflusses an den Kontrollflächen erfolgt nach

$$\hat{I}_{nn}^i = C_{nn}^i \phi_{nn} - D_{nn}^{ij} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \right)_{nn} \qquad i = \begin{cases} 1, & nn = e, w \\ 2, & nn = n, s \\ 3, & nn = u, d \end{cases} \tag{3.90}$$

Die Interpolation der Geschwindigkeitskomponenten an den Kontrollflächen, welche im Ausdruck für die Konvektionskoeffizienten $C_{nn}^i = (\rho \vec{v} \vec{A}^{(i)})_{nn}$ auftreten, wird mit der sog. *Rhie-Chow* Interpolationsmethode durchgeführt. Zur Interpolation der skalaren Werte ϕ_{nn} an den Kontrollflächen stehen abhängig von dem zu behandelnden Problem mehrere Differenzierungsverfahren zu Verfügung. Die Gradienten $(\partial \phi / \partial \xi^j)_{nn}$ sind mit zentralen Differenzen approximiert, z.B.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_u = \frac{1}{4} (\phi_E - \phi_W + \phi_{EE} - \phi_{WW}), \tag{3.91}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_u = \frac{1}{4} (\phi_N - \phi_S + \phi_{NN} - \phi_{SS}). \tag{3.92}$$

Die Ermittlung der skalaren Diffusionsfaktoren Γ_{nn} erfolgt nach dem gewichteten linearen Interpolationsschema mit den Werten aus der zu Kontrollflächen benachbarten Zellen, z.B. gilt für die Kontrollfläche e

$$\Gamma_e = (1 - W_e) \Gamma_P - W_e \Gamma_E, \tag{3.93}$$

wobei der Interpolationsfaktor W_e mit den kartesischen Koordinaten der Zellenmitten und dem Schwerpunkt der Kontrollfläche berechnet wird

$$W_e = \frac{x_e - x_P}{(x_e - x_P) + (x_E - x_e)}. \tag{3.94}$$

Somit sind die Diffusionskoeffizienten bestimmt

$$D_{nn}^{ij} = \Gamma_{nn} G_{nn}^{ij}. \tag{3.95}$$

Nach der Diskretisierung erhält man die linearen Gleichungen

$$a_P \phi_P - \sum_{nn} a_{nn} \phi_{NN} = s_\phi + S', \tag{3.96}$$

wobei mit a_P, Σa_{nn} und s_ϕ die Koeffizientmatrizen bezeichnet sind und der Index NN für die zur Zelle P benachbarten Zellen steht. S' ist der Quellenanteil, welcher durch die Nicht-Orthogonalität des Netzes im Originalraum verursacht ist.

3.2.3 Druckkorrektur

Die *Navier - Stokes* Gleichungen stellen nach der Diskretisierung die folgenden linearen Gleichungen dar

$$a_P^i v_P^i - \sum_{nn} a_{nn}^i v_{NN}^i = |J| S_{v^i}. \tag{3.97}$$

Der Ausdruck

$$|J| S_{v^i} = -\left(A_i^j \frac{\partial p}{\partial \xi^j} \right)_P + \tilde{S}_{v^i} \tag{3.98}$$

enthält alle drei Ableitungen des Druckes p im Einheitsraum, welche mit den zentralen Differenzen approximiert sind. Mit $\tilde{S}_{v^i}$ sind vom Druck unabhängige Anteile des $|J| S_{v^i}$ samt die durch Nicht-Orthogonalität hervorgerufenen Quellenanteile S'_{v^i} bezeichnet. Da für den Druck keine Transportgleichung vorliegt, muß vor dem Beginn jeder Iteration ein Druckwert vorgegeben sein. Mit diesem Wert berechnete Geschwindigkeitskomponenten v^{i*} erfüllen im allgemeinen nicht die Kontinuitätsgleichung, so daß ein Restwert entsteht

$$m_P = \rho v_e^{1*} A_e - \rho v_w^{1*} A_w + \rho v_n^{2*} A_n - \rho v_s^{2*} A_s + \rho v_u^{3*} A_u - \rho v_d^{3*} A_d. \tag{3.99}$$

Die Grundidee der SIMPLE und SIMPLEC Druckkorrekturverfahren besteht darin, die aktualisierten Geschwindigkeitskomponenten v^{i**} und den Druckwert p^{**} zu ermitteln, mit welchen die diskretisierten Bewegungsgleichungen

$$a_P^i v_P^{i**} - \sum_{nn} a_{nn}^i v_{NN}^{i**} = -\left(A_i^j \frac{\partial p^{**}}{\partial \xi^j} \right)_P + \tilde{S}_{v^i} \tag{3.100}$$

und die Massenbilanz

$$\rho v_e^{1**} A_e - \rho v_w^{1**} A_w + \rho v_n^{2**} A_n - \rho v_s^{2**} A_s + \rho v_u^{3**} A_u - \rho v_d^{3**} A_d = 0 \tag{3.101}$$

erfüllt sind. Unter Annahme, daß die korrigierten Geschwindigkeitskomponenten v_{NN}^{i**} mit

$$v_{NN}^{i**} = v_{NN}^{i*} + \alpha (v_P^{i**} - v_P^{i*}) \tag{3.102}$$

angenähert werden können, wobei $\alpha = 0$ für das SIMPLE und $\alpha = 1$ für das SIMPLEC Verfahren sind, entstehen folgende Beziehungen für die korrigierten Geschwindigkeitskomponenten v^{i**}:

$$v^{i**} = v^{i*} - K_i^j \frac{\partial p^{(korr)}}{\partial \xi^j}, \tag{3.103}$$

mit Koeffizientenmatrix K_i^j und Druckkorrektur $p^{(korr)}$

$$p^{**} = p^* + p^{(korr)}. \tag{3.104}$$

Setzt man Glg. 3.103 in Glg. 3.101 ein, so erhhält man die Druckkorrekturgleichung

$$b_P p_P^{(korr)} = \sum_{nn} b_{nn} p_{NN}^{(korr)} - m_P \tag{3.105}$$

mit den Koeffizientmatrizen b_P und Σb_{nn}.
Für kompressible Strömungen mit hohen Mach-Zahlen wird statt der Druckkorrektur eine Dichtekorrektur durchgeführt

$$\rho^{(korr)} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s p^{(korr)}. \tag{3.106}$$

3.2.4 Iterationsvorgang

Das Integrieren von Transportgleichungen über Kontrollvolumina (Zellen), wobei sich jede diskretisierte Transportgleichung auf eine Unbekannte in einer bestimmten Zelle bezieht, führt zu einem linearen Gleichungssystem, dessen Lösung CFX mit einem sog. Segregated Solver ausführt. Daher erfolgt der Iterationsvorgang nach [3] auf zwei Ebenen: eine innere Iterationsschleife löst für jede Unbekannte die räumliche Kopplung im gesamten Strömungsfeld und eine äußere Iteration die Kopplung zwischen verschiedenen Variablen in der bestimmten Zelle.
Für jede Unbekannte wird eine diskretisierte Transportgleichung je Zelle gebildet, wobei die anderen Variablen in der Zelle und in den benachbarten Zellen konstant gehalten werden. Der innere Iterationsvorgang besteht darin, das für jede globale Unbekannte entstandene lineare Gleichungssystem gleichzeitig vom linearen Solver iterativ zu lösen, wobei mehrere Solverarten abhängig von der globalen Unbekannten und der Vernetzung zur Auswahl stehen. CFX bietet drei Möglichkeiten, den inneren Iterationsprozess zu beeinflussen: minimale Anzahl der Iterationen, maximale Anzahl der Iterationen und den sog. „residual reduction factor“, $RDFC$. Diese Parameter können für jede globale Unbekannte verschiedene Werte annnehmen. Der Reduktionsfaktor, dessen Werte üblicherweise von 0.01 bis 0.5 schwanken, ist folgendermaßen definiert:

$$RDFC > \frac{\|\vec{r}^n\|}{\|\vec{r}^0\|} \tag{3.107}$$

wobei $\|\vec{r}^n\|$ das Residuum nach den vom linearen Solver ausgeführten n Iterationen und $\|\vec{r}^0\|$ das Residuum vor dem Starten der Iterationsschleife ist. Das auf der Anwendung des Reduktionsfaktors basierte Abbruchkriterium ist weniger von der Problemgröße abhängig, weswegen es in der Simulation bevorzugt wird.
Der innere Iterationsvorgang liefert die Anfangswerte für die äußere Iterationsschleife, mit welchen die Koeffizienten der diskretisierten Gleichungen umgeformt werden, wodurch die Nichtlinearität der differentiellen Ausgangsgleichungen simuliert wird. Anschließend wird das System der Druckkorrekturgleichungen zum Aktualisieren der Druckwerte und zum Korrigieren des Geschwindigkeitsfeldes unter Berücksichtigung der Massenbilanz vom Solver gelöst.

Um die Instabilitäten des äußeren Iterationsvorgangs zu unterdrücken, die unter anderem durch die Nichtlineraität entstehen, wird die Unterelaxation angewendet, indem die Koeffizienten der Unbekannten in den linearisierten Transportgleichungen mit Relaxationsfaktoren multipliziert werden. Die Werte, die die Relaxationsfaktoren annehmen können, liegen im Bereich $0 < URF < 1$, wobei die kleineren Werte der URF die Lösung beschleunigen, da das Unterdrücken der Unbekannten mit URF am Anfang der Iterationsschleife eine bessere Einschätzung der gesuchten Variable darstellt. Die Behandlung der Koeffizienten der Druckkorrekturgleichung unterscheidet sich von der oben erläuterten Prozedur, indem der URF für den Druck zum Unterdrücken des Korrekturwertes dient, der dem aktuellen Druckwert zugegeben wird.
Als Abbruchkriterium des äußeren Iterationsvorgangs und somit zur Einschätzung der Konvergenz dient das sog. „mass source residual“. Dieses Residuum ist die Summe aller netto Massenströme in oder aus jeder Zelle im Rechengebiet und daher dimensionsbehaftet (kg/s). Das Verhältnis des absoluten Eintrittsmassenstromes zu dem Residuum stellt eine dimensionslose Größe dar, mit der die Konvergenz quantitativ beurteilt werden kann, wobei die Anzahl der Zellen im Rechengebiet berücksichtigt werden sollte.

Kapitel 4

Kanal mit Verengung

Zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit und Treffsicherheit des CFX-Solvers bei der Anwendung auf transsonische Strömungsprobleme wurde die ebene Strömung im geraden Kanal mit der einseitigen kreisbogenförmigen Verengung berechnet. Dieses in der Literatur als „Circular Arc Bump“ bekannte Validierungsbeispiel wurde wegen des einfachen geometrischen Aufbaus und gleichzeitig komplexer Strömung mit turbomaschinentypischem Charakter ausgewählt, zu deren Merkmalen unter anderem hohe Geschwindigkeiten, Kompressibilitätseinfluß und Wechselwirkung zwischen freier Strömung und Wandgrenzschicht zählen.
Die Abb. 4.1 zeigt die Geometrie des Kanals, der durch ein Kreisbogenprofil am Kanalboden verengt ist. Der Abstand zwischen den Kanalwänden ist gleich der Sehnenlänge des Profils, das Verhältnis von halber Dicke zu Sehnenlänge beträgt 10%.

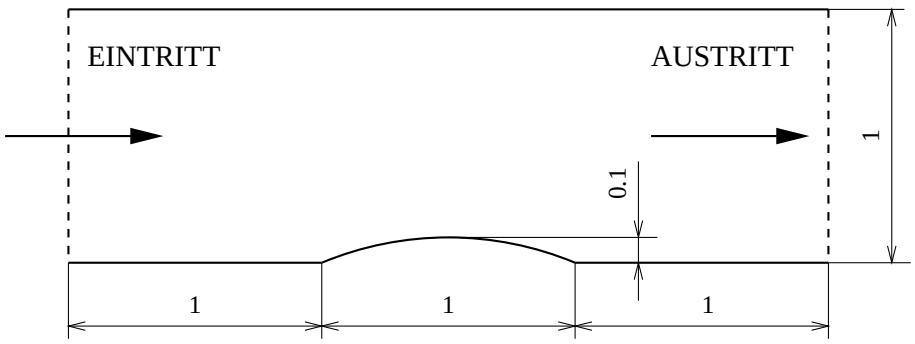

Abbildung 4.1: Geometrie des Kanals

Abhängig von den Anströmmachzahlen, unter Annahme der fixen Austrittsrandbedingung, können verschiedene Strömungstypen im Kanal auftreten. Ist die Anströmmachzahl niedrig, so bleibt die Strömung im ganzen Kanal subsonisch. Bei Anströmung mit hoher Unterschallmachzahl bildet sich im Kanal ein Überschallgebiet, das durch einen geraden Verdichtungsstoß abgeschlossen ist. Dieser Verdichtungsstoß trifft auf die Wandgrenzschicht und belastet sie mit einem Drucksprung, infolge dessen es zum Ablösen der Grenzschicht kommen kann.
Sowohl subsonische als auch transsonische Strömungen wurden mit CFX simuliert, reibungsfrei und reibungsbehaftet. Die reibungsfreie Lösung, bei der der Viskositätseinfluß vernachlässigt ist, stellt eine gute Approximation des Strömungsfeldes außerhalb der Grenzschicht dar und ist gültig für Strömungen mit hohen Reynoldszahlen, bei welchen keine Ablösung der Grenzschicht vorkommt. Diese Lösung ist numerisch billig, da die Bewegungsgleichungen unter dem Einsatz des kleinen Wertes für die Viskosität und sog. „Slip-Boundaries“ für Wände auf die *Euler* Gleichungen reduziert sind, wobei gleichzeitig das Netz relativ grob gehalten werden kann.

Komplexes Strömungs- und Grenzschichtverhalten der turbulenten Strömung bedingt eine adäquate Modellierung der Turbulenzeinflüsse in der freien Strömung und in der Wandgrenzschicht. Zur Simulation der reibungsbehafteten kompressiblen Strömungen kamen drei Turbulenzmodelle zum Einsatz: Standard $k-\epsilon$, low Reynolds number (LRN) $k-\omega$ und Menter-modifiziertes $k-\omega$ Modell, wobei bei der Berechnung der subsonischen Strömung nur die ersten zwei Modelle angewendet wurden. Bei dem ersten Zweigleichungsmodell ist das logarithmische Wandgesetz in der Wandnähe herangezogen, bei dem LRN $k-\omega$ und dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell sind die diskretisierten Gleichungen durch die laminare Grenzschicht bis zur Wand integriert. Verschiedene Turbulenzmodelle stellen auch verschiedene Anforderungen an die Vernetzung des Rechengebietes, weswegen zwei Rechengitter erstellt wurden, eines für das $k-\epsilon$ Modell und eines für das LRN $k-\omega$ und das Menter-modifizierte $k-\omega$ Modell, die sich insbesondere in der Auflösung der wandnahen Zonen unterscheiden.

4.1 Randbedingungen

4.1.1 Reibungsfreie Strömungen

Um die Vergleiche mit den numerischen Ergebnissen aus *Ni* [11] und *Eidelman et al.* [6] für reibungsfreie Strömungen durchzuführen, sind folgende Werte für die Anströmmachzahlen vorausgesetzt worden: $Ma_1 = 0.5$ für subsonisches Strömungsfeld und $Ma_1 = 0.675$ für transsonische Strömung. Unter der Annahme der Eintrittstemperatur $T_1 = 288$ K und dem Einsatz der allgemeinen Gaskonstante $\mathcal{R} = 8314$ J/kmolK, sowie Konstanten für Luft: $\kappa = 1.4$ – Isentropenexponent und $\mathcal{M} = 28.79$ kg/kmol – molare Masse, ergibt sich die Schallgeschwindigkeit nach Glg. 2.44 zu $c_1 = 341.23$ m/s.
Aus Glg. 2.47 lassen sich die Werte der Eintrittsgeschwindigkeiten berechnen, wobei die Geschwindigkeitskomponenten in y-Richtung gleich Null sind: $v_{1x} = 170.61$ m/s für subsonische und $v_{1x} = 230.33$ m/s für transsonische Strömung.
Um den numerischen Fehler, der beim Ermitteln der Druckgradienten durch Subtrahieren von zwei großen Zahlen vorkommen kann, zu vermeiden, wird innerhalb des CFX-Programmcodes nicht der statische Druck p, sondern die Differenz Δp zwischen dem thermodynamischen Druck und dem Referenzdruck p_R berechnet:

$$p = p_R + \Delta p \tag{4.1}$$

Für Simulationen ist der Wert $p_R = 101325$ Pa eingesetzt. Der absolute statische Druck am Austritt beträgt $p_2 = 101325$ Pa und somit ergibt sich die Druckdifferenz $\Delta p_2 = 0$ als Austrittsrandbedingung. Zur Druckkorrektur wurde der sog. high Mach number SIMPLE Algorithmus angewendet.
Zur Berechnung der Enthalpie ist die Referenztemperatur T_R nötig. T_R ist die Temperatur, bei der angenommen wird, daß die spezifische Enthalpie gleich Null ist. In den Berechnungen ist der Wert $T_R = 288$ K eingesetzt worden. Für das vollständige Setup werden weitere physikalische Größen für Luft benötigt: Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0.0254$ J/msK, spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck $c_p = 1005$ J/kgK und dynamische Viskosität $\mu = 1 \cdot 10^{-8}$ kg/ms.
Die reibungsfreie Strömung erfordert undurchlässige Wände, für welche die Wandschubspanung $\tau_W = 0$ ist und daher gilt:

$$v_n = 0 \qquad \text{und} \qquad v_t \neq 0, \tag{4.2}$$

was durch das Einschalten des Kommando „slip“ im Commandfile erreicht ist.
Unter diesen Bedingungen und mit dem herabgesetzten Wert für die Viskosität ist innerhalb des CFX-Solvers der Übergang zu den *Euler* Gleichungen gewährleistet.

Als Randbedingung für die Energiegleichung wurden adiabate Wände angenommen. Daher wurde für die obere und die untere Kanalwand die Wärmestromdichte $\vec{q}_W$ gleich Null eingesetzt.
Wird mit den Werten für den Referenzdruck und die -temperatur eine Referenzdichte nach dem idealen Gasgesetz (Glg. 2.2) gebildet, so lassen sich die Referenzwerte der Reynolds-Zahlen für die beiden Strömungsarten berechnen:

$$Re_R = \frac{\rho_R u_1 s}{\mu}. \tag{4.3}$$

Als Bezugslänge bei der Bestimmung von Re_R dient die Sehnenlänge des Profils, s. Mit der Prandtl-Zahl für Luft $Pr = 0.71$ lassen sich die Referenzwerte der Peclet-Zahlen ermitteln:

$$Pe_R = Re_R Pr \tag{4.4}$$

In Tab. 4.1 sind die Referenzwerte für Reynolds- und Pecletzahl sowohl für subsonische, als auch für transsonische Strömungen angeführt. Die hohen Werte der beiden Kennzahlen und der Einsatz der speziellen Randbedingungen führen zu einer Simulation einer näherungsweise reibungsfreien Strömung.

Kennzahl	Re_R	Pe_R
subsonische Strömung	$2.24 \cdot 10^{10}$	$1.59 \cdot 10^{10}$
transonische Strömung	$3.02 \cdot 10^{10}$	$2.14 \cdot 10^{10}$

Tabelle 4.1: Referenzwerte der Strömungskennzahlen

4.1.2 Reibungsbehaftete Strömungen

Für die Erfassung der turbulenten Scheinreibung wurden die Berechnungen der reibungsbehafteten subsonischen und transsonischen Strömungen durchgeführt. Die Randbedingungen unterscheiden sich von den oben definierten dadurch, daß der Wert der dynamischen Viskosität für die Simulation der reibungsbehafteten Strömung $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ kg/ms beträgt und nur für das Profil die Haftbedingung vorausgesetzt wird

$$v_n = 0, \qquad v_t = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \vec{v} = 0. \tag{4.5}$$

Die Haftbedingung ist mit dem Einschalten des Kommando „no slip“ erfüllt. Sind im Commandfile Optionen „slip“ oder „no slip“ benützt, so ist die gewählte Bedingung auf alle innerhalb des Rechengebietes als Wände definieren Ränder angewendet. Da die obere Kanalwand und die Zulauf- und Ablaufstrecke des Kanalbodens wie bei der Berechnung der reibungsfreien Strömung als undurchlässige Wände simuliert sind, wurde die Undurchlässigkeit im Commandfile explizit definiert, indem an diesen Wänden die Wandschubspannung gleich Null eingesetzt wurde.
Zusätzlich kamen zu den Eintrittsrandbedingungen die Turbulenzgrößen k_1 und ϵ_1 oder ω_1 abhängig vom Turbulenzmodell zum Einsatz, die nach Glgn. 3.70, 3.71 und 3.25 ermittelt sind, wobei für den Turbulenzgrad der Wert $Tu_1 = 0.037$ angenommen wurde und das turbulente Längenmaß mit 1% der Sehnenlänge des Profils am Kanalboden berechnet ist. Die Randwerte der Turbulenzgrößen sind für beide Strömungsarten in Tab. 4.2 zusammengefaßt.

Turbulenzgrößen	k_1 $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$	ϵ_1 $\left[\frac{m^2}{s^3}\right]$	ω_1 $\left[\frac{1}{s}\right]$
subsonische Strömung	59.3	4114.6	69.3
transonische Strömung	108.9	10233.6	93.9

Tabelle 4.2: Randwerte der Turbulenzgrößen

4.2 Netzgenerierung

Das Strömungsgebiet wurde ursprünglich in drei Blöcke unterteilt, um die Knotenverteilung und die Zellenanzahl insbesondere im Bereich der kreisbogenförmigen Verengung leichter zu variieren. Der Netzgenerator CFX-Meshbuild bietet nur drei Möglichkeiten bezüglich der Knotenverteilung: äquidistante Knotenverteilung und Knotenstauchung symmetrisch oder nur in eine Richtung entlang der Blockgrenze. Zusätzlich können die Blockgrenzen mit den sog. „edge constraints“ in mehrere Bereiche mit verschiedener Knotenanzahl unterteilt werden, wobei die Knotenverteilung in jedem Bereich variiert werden kann. Bei den gekrümmten Blockgrenzen kann die Verwendung von „edge constraints“ zu Zellen mit negativem Volumen führen, weswegen auf diese Option bei der Netzgenerierung verzichtet wurde.

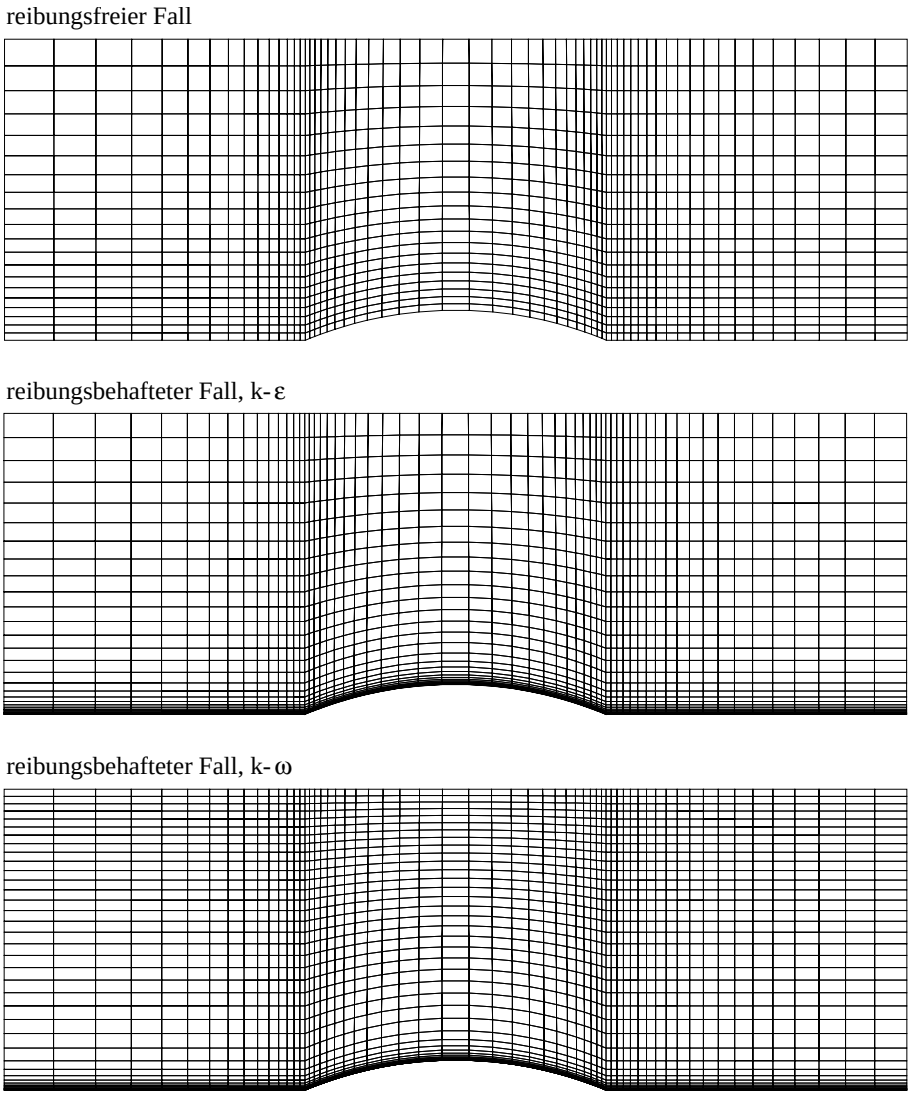

Abbildung 4.2: Für Berechnung der subsonischen Strömungen verwendete Netze

Für die Berechnung der subsonischen reibungsfreien Strömung wurde ein relativ grobes Gitter generiert, wobei die Zellen im Profilbereich konzentriert sind. Im Unterschied zu [11] ist das Netz unsymmetrisch, Zu- und Nachlaufstrecke weisen verschiedene Knotenzahl auf. Eine stärkere Stauchung der Knoten ist im hinteren Profilbereich und im Nachlauf angebracht, um die numerischen Verluste zu minimieren und einen möglichst hohen Symmetriegrad der Lösung zu erreichen. Dieses Netz wurde für die Simulationen der reibungsbehafteten Strömung

in y-Richtung verfeinert, was zu einer starken Streckung der Zellen in der Strömungsrichtung führte. Die Knotenanzahl im y-Richtung wurde dem erforderlichen Wert des dimensionslosen Wandabstandes y^+, abhängig von dem verwendeten Zweigleichungsmodell, angepasst und senkrecht zur Strömungsrichtung so klein wie möglich gehalten, indem jeder Block in zwei Blöcke mit unterschiedlicher Höhe unterteilt wurde. Alle verwendeten Netze sind in Abb. 4.2 dargestellt. Zur Auflösung des senkrechten Verdichtungstosses im transsonischen Fall, der ungefähr bei 72% der Sehnenlänge positioniert ist, wurde im Vergleich zu dem Ausgangsnetz ein vierter Block eingeführt. Somit wurde das Netz im mittleren Strömungsbereich (Verengung) über zwei Blöcke generiert, was das Manipulieren der Knotenverteilung im Stoßbereich erleichterte. Obwohl die in [3] vorgeschlagenen und in den Simulationen angewendeten Diskretisierungsverfahren bei relativ groben Netzen zu einer befriedigenden Lösung führen sollten,

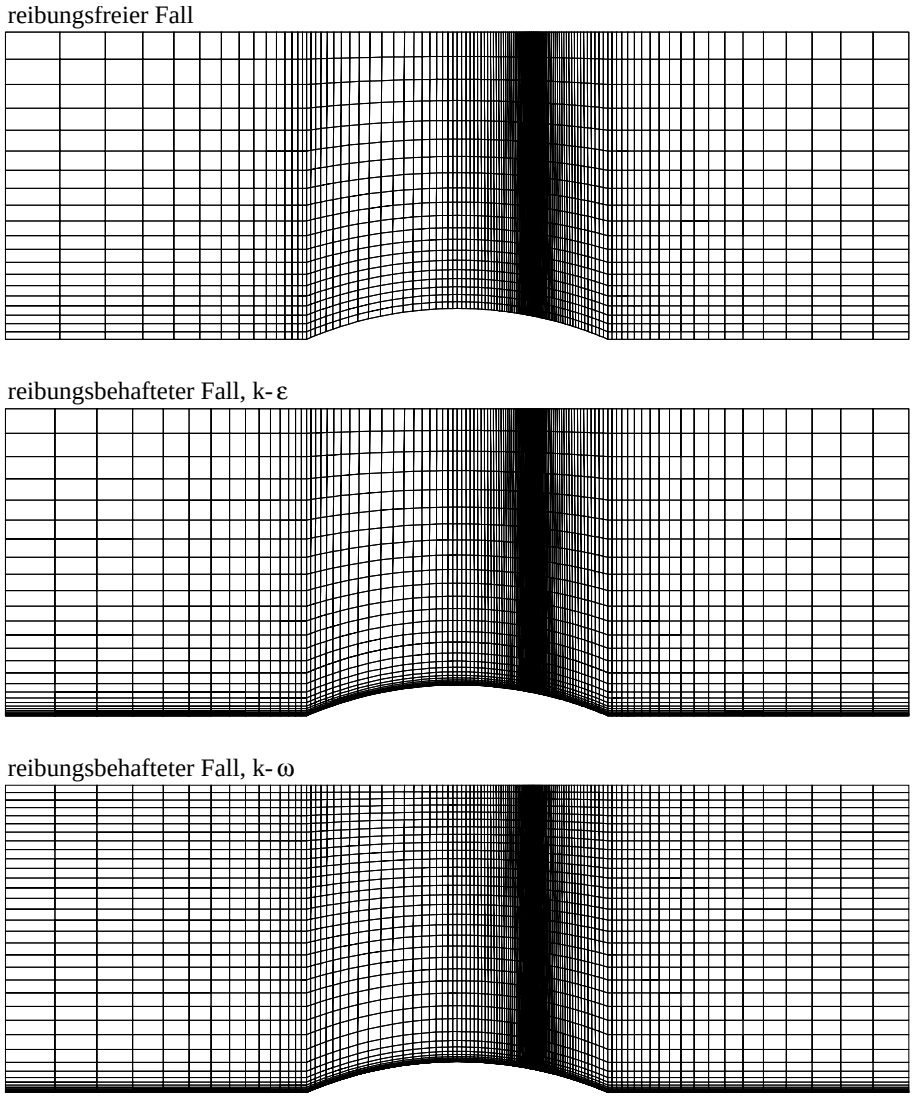

Abbildung 4.3: Für Berechnung der transsonischen Strömungen verwendete Netze

mußte eine ziemlich starke Netzverfeinerung im Stoßbereich durchgeführt werden. Bei der Netzgenerierung im reibungsbehafteten Fall wurde die gleiche Methode zur Knotenanzahlerhöhung und Anpassung an den durch das Turbulenzmodell bedingten y^+ Wert wie bei der Simulation der subsonischen Strömung angewendet, d.h., die Vernetzung erfolgte über insgesamt acht Blöcke. Abb. 4.3 zeigt die für die Simulation der transsonischen Strömungen generierten Netze, wobei das gleiche Netz für die Simulationen mit dem LRN $k-\omega$ und dem

Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell verwendet wurde.
Es sei hier zusätzlich zu bemerken, daß für das LRN $k-\omega$ und das Menter-modifizierte $k-\omega$ Turbulenzmodell das Netz auch in der Nähe der als reibungsfrei simulierten Wände fein sein soll. In Tab. 4.3 sind die Zellenanzahlen aller Rechennetze zusammengefaßt.

Strömungstyp	reibungsfrei	reibungsbehaftet	
		Standard $k-\epsilon$	LRN $k-\omega$, Menter $k-\omega$
subsonisch	1200	1800	3000
transsonisch	2500	3750	6250

Tabelle 4.3: Netzgrößen für verschiedene Simulationen

4.3 Lösungsmethodik

Der CFX-Solver bietet mehrere Verfahren erster und zweiter Ordnung zur Diskretisierung der Advektionsanteile in den Transportgleichungen, womit sich der Iterationsvorgang und somit die Rechenergebnisse stark beeinflussen lassen. Als besonders erfolgreich hat sich die Berechnung in zwei Stufen erwiesen, wobei ungefähr ein Drittel der Iterationen mit den Verfahren erster Ordnung zur Stabilisierung des Iterationsvorgangs und der Rest mit den genaueren Verfahren zweiter Ordnung durchgeführt wurde. Bei der Berechnung sowohl der subsonischen als auch der transsonischen Strömungen wurde das HYBRID-Schema für alle Variablen auf der ersten Rechnungstufe eingesetzt. Für den subsonischen Fall kam das sog. CCCT-Schema auf der zweiten Stufe zur Anwendung. Der transsonische Fall wurde mit dem MIN-MOD-Schema berechnet, welches sich sehr gut für Strömungen mit hoher Machzahl und Verdichtungsstößen eignet. CCCT und MIN-MOD Verfahren stellen eine Modifikation des UPWIND-Schemas zweiter Ordnung dar und unterscheiden sich nur in den Koeffizienten, die in den diskretisierten Gleichungen vorkommen und die dem zu lösenden Problem angepasst sind.
In den Berechnungen mit Turbulenzmodellierung wurde eine Diskretisierung der Transportgleichungen für die Turbulenzgrößen während des ganzen Iterationsvorgangs mit einem Schema erster Ordnung vorgesehen, womit nicht-physikalische Lösungen (d.h. negative Werte) für k und ϵ oder ω vermieden werden. Die Genauigkeit der Berechnung des konvektiven Transports für diese Variablen ist weniger von Bedeutung, da diese überwiegend von Produktion und Dissipation dominiert sind.
Eine genauere Erklärung bezüglich der angewendeten Diskretisierungsverfahren kann aus [3] entnommen werden.

4.4 Postprocessing

Der CFX Postprocessor läßt im ebenen Fall die Werte der berechneten Größen nur entlang der im Rechengebiet definierten Geraden ausschreiben. Der Zugriff auf die Daten, welche von Interesse sind, entlang beliebig definierter Linien ist mit der sog. „user subroutine“ USRPRT ermöglicht. Die „user subroutine“ USRPRT stellt ein FORTRAN 77 Unterprogramm dar, in dem an den für den Benützer vorgesehenen Stellen die Änderungen zum Ausschreiben der gewünschten Information vorgenommen werden können. Im Anhang A befindet sich ein USRPRT-File, das zum Erstellen eines Outputfiles dient, in welchem die Werte des statischen Druckes entlang der kreisbogenförmigen Verengung geschpeichert sind.

4.5 Ergebnisse

4.5.1 Subsonische Strömung

Abb. 4.4 zeigt die Machzahlverteilung entlang der unteren und oberen Wände für die subsonische reibungsfreie Strömung im Vergleich zu den Ergebnissen aus [6] und [11]. Mit dem Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung wurde eine fast perfekte Symmetrie der Lösung erreicht, die eine sehr gute Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen aus [11] zeigt. Abweichungen von dem idealen Machzahlverlauf auf der unteren Wand im Nachlaufgebiet sind als numerische Verluste zu betrachten.

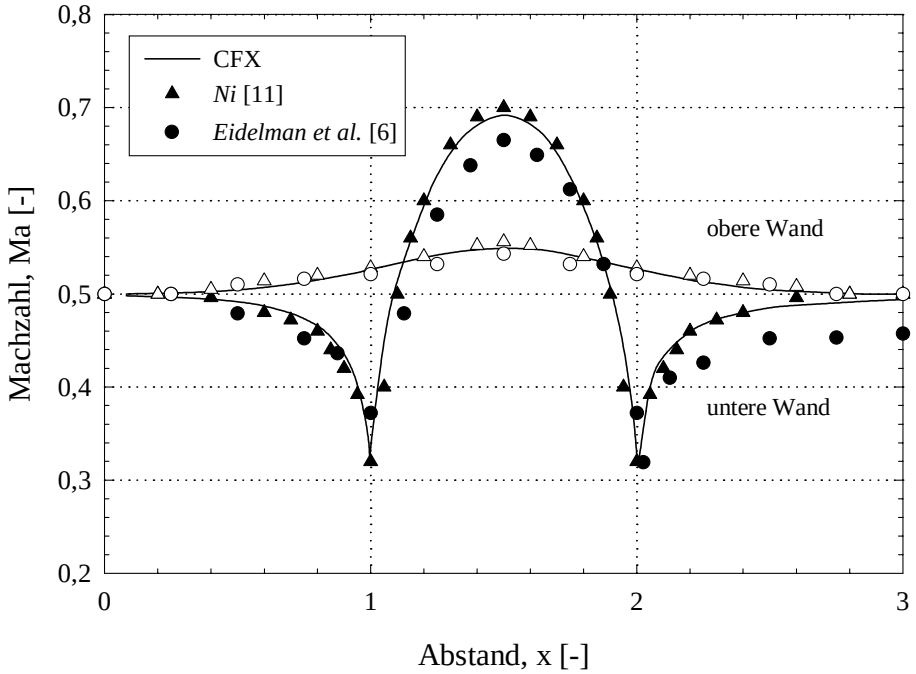

Abbildung 4.4: Machzahlverteilung für reibungsfreie Strömung mit $Ma_1 = 0.5$

Die Machzahlverteilung für die subsonische reibungsbehaftete Strömung mit der $k - \epsilon$ Turbulenzmodellierung ist in Abb. 4.5 dargestellt. Entlang der oberen Kanalwand bleibt die Machzahlverteilung gleich der aus der Simulation der reibungsfreien Strömung. Mit dem in CFX integrierten Postprocessor konnten die Machzahlverteilungen nur auf der Zu- und Nachlaufstrecke gewonnen werden. Für die Machzahlverteilung entlang des Profils blieb die Möglichkeit, diese aus der Profildruckverteilung zu berechnen, die mit der „user subroutine“ USRPRT ausgeschrieben wurde. Die Ermittlung der Machzahlverteilung aus den Druckdaten erfolgte nach Glg. 2.50, wobei für den Totaldruck der Wert des Totaldruckes am Eintritt eingesetzt wurde. In Abb. 4.5 sind daher zwei Machzahlverteilungen entlang des Kanalbodens eingetragen. Eine stellt die aus der Druckverteilung berechnete Machzahlverteilung für die gesamte Bodenlänge dar, die andere die Kombination von Machzahldaten. Die Kombinationskurve besteht aus den mit dem Postprocessor ausgeschriebenen Machzahlverteilungen auf der Zu- und Nachlaufstrecke und den aus der Druckverteilung errechneten Machzahlen entlang des Profils. Da die Zuströmung von den Reibungseffekten nicht betroffen ist, stimmen die beiden Kurven in diesem Bereich sehr gut überein. Im Vergleich zu der reibungsfreien Strömung verliert die Machzahlverteilung entlang des Profils ihren symmetrischen Charakter infolge der Grenzschichtentwicklung. Auf der Nachlaufstrecke ist der Einfluß der Reibungseffekte in der Nachlaufdelle klar zu sehen. Diese tragen zu einer Geschwindigkeitsverminderung bei, weshalb die Machzahlwerte gegenüber der reibungsfreien Lösung deutlich kleiner sind.

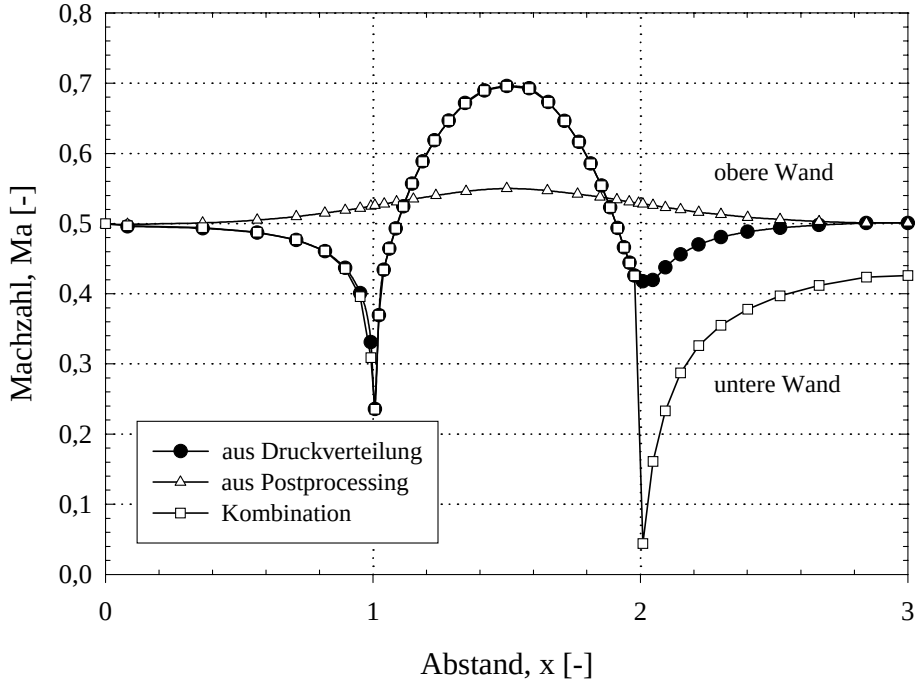

Abbildung 4.5: Machzahlverteilung für reibungsbehaftete Strömung, $Ma_1 = 0.5$, $k - \epsilon$

Es ist nicht auszuschließen, daß die rechnerischen Verluste in die resultierende Machzahlverteilung mit einbezogen sind. In diesem Bereich ist der aus der Druckverteilung gewonnene Machzahlverlauf irrelevant, da dieser die Senkung des Totaldruckes (Strömungsverluste) nicht berücksichtigt.

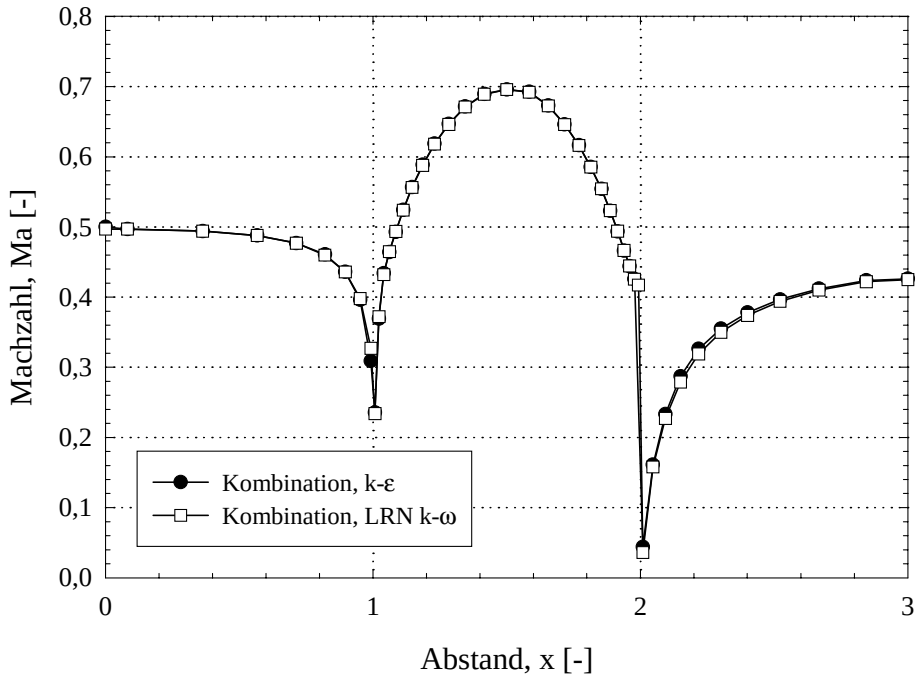

Abbildung 4.6: Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle, $Ma_1 = 0.5$

Die zweite Lösung ist mit dem LRN $k-\omega$ Modell ermittelt. Die Machzahlverteilungen am Kanalboden für die mit verschiedenen Turbulenzmodellen durchgeführten Simulationen weisen einen geringen Unterschied nur in der Nachlaufdelle auf, was aus Abb. 4.6 zu sehen ist.

4.5.2 Transsonische Strömung

In Abb. 4.7 sind die Ergebnisse der Simulationen der reibungsfreien transsonischen Strömungen im Vergleich mit Resultaten aus [6] und [11] zusammengefaßt. Die mit dem Diskretisierungsschema zweiter Ordnung (MIN-MOD) durchgeführte Berechnung zeigt eine sehr gute Auflösung des Verdichtungsstosses. Wesentlich schlechtere Ergebnisse liefert die Simulation, bei der die Diskretisierung der Advektionsanteile in den Transportgleichungen mit dem HYBRID-Schema erfolgte. Die Verfahren erster Ordnung sind im allgemeinen von Dissipationsverlusten betroffen. Hohe Gradienten sind schlecht aufgelöst, mit stärkerer Verschmierung des Verdichtungsstosses und Verminderung seiner Stärke als Folge. Die Lage des Verdichtungsstosses ist trotzdem gut vorausgesagt. Die unbefriedigende Auflösung der Gradienten im Stoßbereich beeinflußt das gesamte Rechengebiet, so daß auch die Machzahlverteilung entlang der oberen Kanalwand von anderen Simulationen stark abweicht.

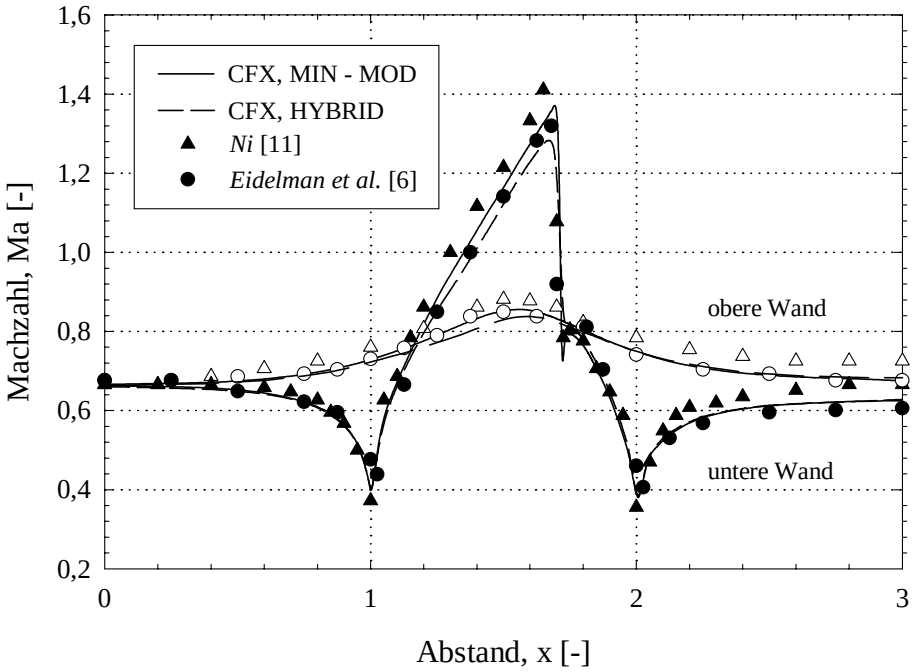

Abbildung 4.7: Machzahlverteilung für reibungsfreie Strömung mit $Ma_1 = 0.675$

Die Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung sind generell mit Dispersion verbunden. Das MIN-MOD-Verfahren ist ein oszillationsdämpfendes Verfahren und sollte daher dispersive Fehler minimieren. Die Erklärung dafür, daß trotzdem Oszillationen in der Lösung hinter dem Verdichtungsstoß auftreten, mag an dem Verfahren zur numerischen Behandlung von Verdichtungsstössen liegen. Das diskontinuierliche Verhalten der Strömungsgrößen im Stoßfrontbereich stellt hohe Forderungen an seine numerische Berechnung. In CFX sind die Verdichtungsstösse mit der sog. „shock capturing“ Methode behandelt, wobei die Unstetigkeiten als sehr dünne Bereiche im Rechengebiet isoliert sind. Die Werte der Stoßgrößen sind extrapoliert vom Strömungsfeld vor und hinter dem Verdichtungsstoß, weswegen er über mehrere Zellen verschmiert ist. Durch künstlich angebrachte Dissipation im Diskretisierungsschema ist die Entropiesteigerung bei der Berechnung der reibungsfreien Strömung simuliert. Die

Tatsache, daß zur Behandlung von Diskontinuitäten eine feine räumliche Auflösung im Stoßbereich erforderlich ist, zählt mit der Genauigkeitsverminderung des Differenzierungsschema in der unmittelbaren Nähe des Verdichtungstosses zu den Hauptnachteilen dieser Methode.
Die Ermittlung der Machzahlverteilungen im transsonischen reibungsbehafteten Fall erfolgte gleich wie vorher für subsonische Strömung. Zu bemerken ist, daß Glg. 2.50, nach welcher die Auswertung erfolgte, im von der nicht isentropen Zustandsänderung betroffenen Bereich des Verdichtungsstosses nicht gültig ist. Abb. 4.8 zeigt die Resultate der mit dem Standard $k-\epsilon$ durchgeführten Simulation. Die mit dem Postprocessor und aus der Druckverteilung gewonnenen Machzahlverteilungen weisen gute Übereinstimmung in der Zulaufströmung auf, da in diesem Bereich die Strömung nahezu reibungsfrei ist. Im mittleren Strömungsbereich führen die durch die Zusammenwirkung der Grenzschicht mit dem Verdichtungsstoß hervorgerufenen

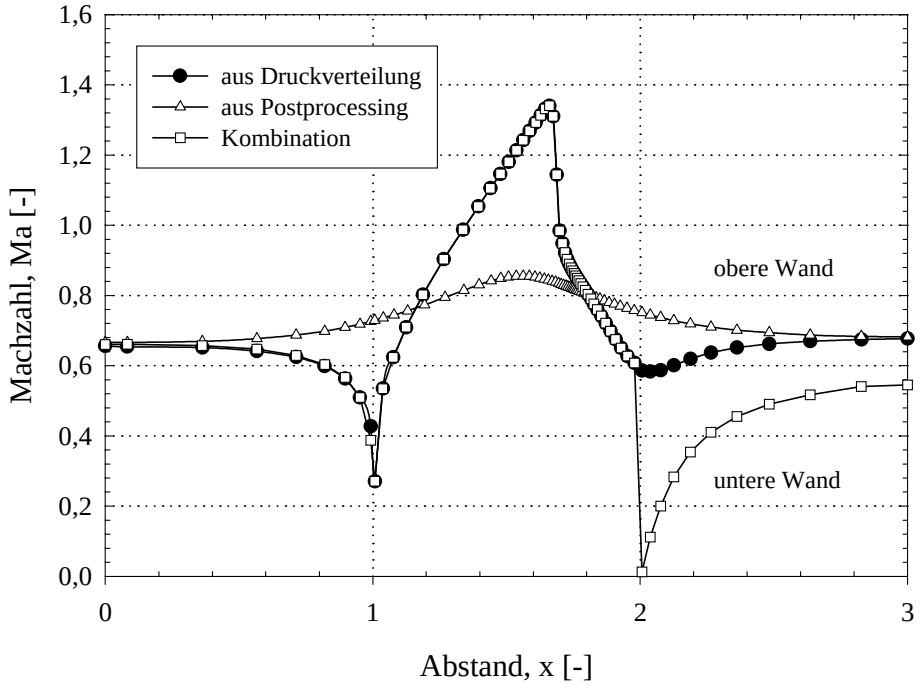

Abbildung 4.8: Machzahlverteilung für reibungsbehaftete Strömung, $Ma_1 = 0.675$, $k-\epsilon$

Reibungseffekte dazu, daß sich die Lage des Druckstosses im Vergleich zu reibungsfreien Strömung in die Strömungsgegenrichtung verschiebt. Der Verdichtungsstoß trifft auf die Grenzschicht und belastet sie mit einem Drucksprung, welcher oft eine Ablösung der Grenzschicht hervorruft. Obwohl nach [2] bei Strömungen um schlanke Profile mit $Ma_{Stoss} \approx 1.3 \ldots 1.4$ nach theoretischen Rechnungen und Messungen die Ablösung der Grenzschicht auftreten sollte, ist es hier nicht der Fall. Mit Ma_{Stoss} ist die maximale im Strömungsfeld vor dem Verdichtungsstoß erreichte Machzahl bezeichnet. Sie beträgt bei der simulierten Strömung $Ma_{Stoss} = 1.31$. Das Standard $k-\epsilon$ Modell, mit welchem die Turbulenzmodellierung erfolgte, ist bekannt als „unsensibel“ gegenüber positiven Druckgradienten. Mit diesem Modell werden die Wandschubspannungen zu hoch berechnet. Diese verzögern oder vermeiden überhaupt die Ablösung.
Zur Überprüfung, ob bei den vorgegebenen Randbedingungen die Grenzschichtablösung stattfindet, wurden zwei weitere Berechnungen durchgeführt. Das Fehlen der Ablösung wurde in [12] für eine ähnliche Geometrie durch Heranziehen der sog. zonalen Wandmodelle für die Grenzschichtmodellierung bei dem Standard $k-\epsilon$ Modell behandelt. Da eine solche Option bei CFX nicht vorhanden ist, wurden zwei Turbulenzmodelle ohne Wandfunktionen für die Berechnungen herangezogen.

Die Machzahlverteilungen entlang des Kanalbodens für die Simulationen mit verschiedenen Turbulenzmodellen sind in Abb. 4.9 dargestellt. Die Simulation mit dem Menter-modifizierten $k - \omega$ Modell, welches nach [8] gleich gute Ergebnisse bei der Berechnung der von hohen Druckgradienten beeinflussten Strömungen wie das Wilcox $k - \omega$ Modell zeigen sollte, lieferte tatsächlich eine etwas bessere Lösung als die Berechnung mit dem $k - \epsilon$ Modell. Eine Ablöseblase bildet sich in dem Hinterkantenbereich, wodurch die Strömungsverluste in der Nachlaufdelle steigen. Daher liegt die aus dieser Simulation resultierende Machzahlverteilung unter den anderen zwei Kurven. Im Vergleich zu anderen Simulationen zeigt die mit dem LRN $k - \omega$ Modell durchgeführte Berechnung die schlechtesten Ergebnisse; die Geschwindigkeitsdefizite in der Nachlaufdelle sind zu niedrig berechnet. Der Grund dafür mag in der Modellierung der Grenzschichtströmung liegen, da dieses Modell mit einer Dämpfung der Wirbelviskosität in der Grenzschicht vorgesehen ist. Nach [8] läßt sich das Verhalten der

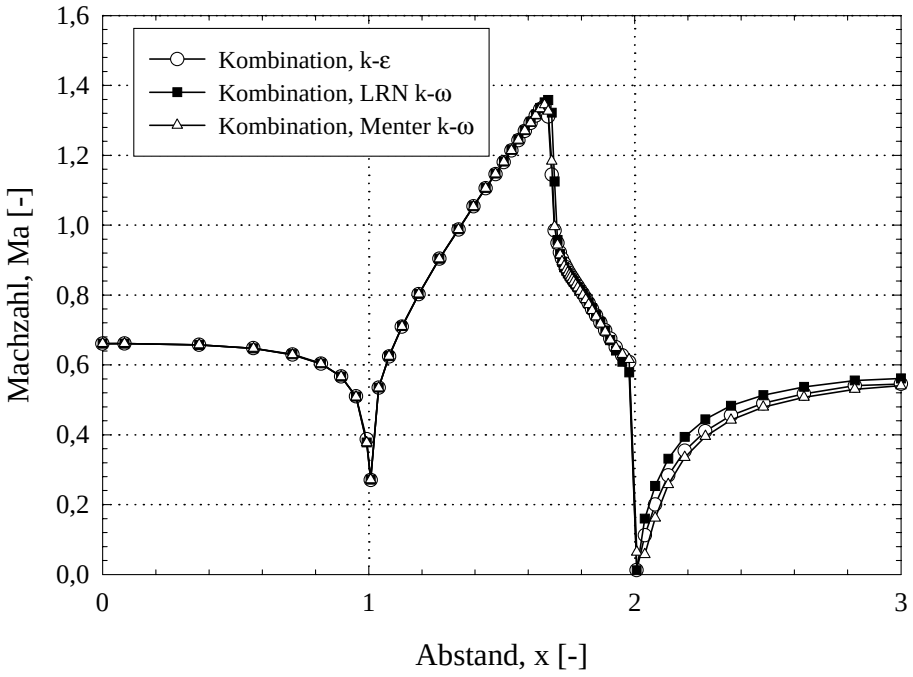

Abbildung 4.9: Vergleich verschiedener Turbulenzmodelle, $Ma_1 = 0.675$

Dämpfungsfunktion mit den konventionellen Linearisierungsverfahren nicht leicht kontrollieren, weswegen die Dämpfungsfunktion oft die Konvergenzeigenschaften des verwendeten Diskretisierungsschemas negativ beeinflußt. Im restlichen Rechenbereich liefern die beiden Simulationen der Lösung mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell nahezu identische Machzahlverteilungen.

Anhand zwei zusätzlicher Berechnungen konnte festgestellt werden, daß sich das Menter-modifizierte $k - \omega$ Modell hervoragend dazu eignet, die stoßinduzierte Grenzschichtablösung zu simulieren. Die beiden neuen Berechnungen wurden mit der erhöhten Eintrittsmachzahl bei gleichgebliebenen restlichen Randbedingungen durchgeführt. In einem Fall betrug $Ma_1 = 0.69$, im anderen $Ma_1 = 0.70$. Mit der Steigerung der Eintrittsmachzahl breitete sich die Überschallzone im Strömungsfeld aus. Gleichzeitig stieg die maximale Machzahl vor dem Verdichtungsstoß, dessen Lage sich stromab bewegte. Abb. 4.10 zeigt die Geschwindigkeitsvektoren in der unmittelbaren Nähe der Stelle, wo der senkrechte Verdichtungsstoß auf die Grenzschicht auftritt. Zur Veranschaulichung des Vorganges sind zusätzlich die Druck-Isolinien im Stoßbereich aufgetragen.

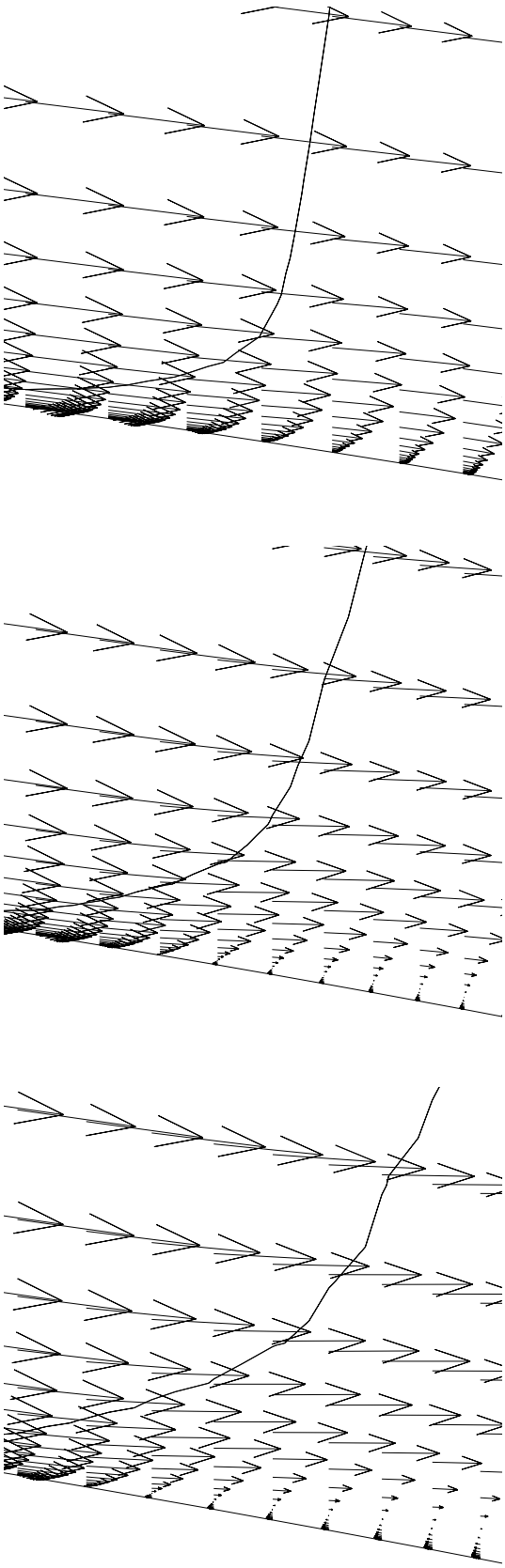

Abbildung 4.10: Stoß-Grenzschicht Wechselwirkung für $Ma_1 = 0.675$, $Ma_1 = 0.69$ und $Ma_1 = 0.70$ (von oben nach unten)

Die Druckdiskontinuität in der reibungsfreien Außenströmung wird durch die Grenzschicht bis zur wandnahen subsonischen Unterschicht übertragen. Da sich im Unterschall keine Verdichtungsstösse ausbilden können, verläuft der Druckgradient $\partial p/\partial x$ hier sanfter als in der Außenströmung und bewirkt ein Wachstum der Grenzschichtdicke. Knapp hinter dem Verdichtungsstoß bildet sich in der Nähe des Außenrandes der Grenzschicht eine lokale Überschallzone, abgeschlossen mit einem sekundären Verdichtungsstoß, infolge dessen die Dicke des Hauptstosses ansteigt. Die Stoß-Grenzschicht Wechselwirkung, bei welcher keine Ablösung im Stoßbereich auftritt, ist in [14] als schwach bezeichnet. Diese findet bei der Zuströmung mit $Ma_1 = 0.675$ statt und hat nur den Verlust der turbulenzspezifischen Form des Geschwindigkeitsprofils in der gewachsenen Grenzschicht zur Folge. Die starke ([14]) mit der stoßinduzierten Ablösung verbundene Wechselwirkung ist bei der Simulation mit $Ma_1 = 0.69$ und $Ma_1 = 0.70$ zu sehen, wobei sich bei der kleineren Eintrittsmachzahl die Außenströmung wieder anlegt und am Profilende nochmal ablöst. Bei $Ma_1 = 0.70$ entsteht unmittelbar nach dem Verdichtungsstoß ein Wirbelgebiet, welches sich bis zum Profilende erstreckt. In diesem Fall beträgt $Ma_{Stoss} = 1.40$. Die Messungen von *Délery* [4] an der ähnlichen Konfiguration zeigen den gleichen Effekt (große Ablöseblase) bei $Ma_{Stoss} = 1.42$.
Allen diesen Simulationen ist gemeinsam, daß der sekundäre Verdichtungsstoß numerisch nicht nachvollziehbar ist.

Kapitel 5

Ebene Strömung im Turbinengitter

Die aus den durchgeführten Simulationen für die kompressible Strömung im Kanal mit der kreisbogenförmigen Verengung gewonnenen Kenntnisse sollen im folgenden auf die Strömungsberechnung in einem ebenen Turbinengitter angewendet werden.

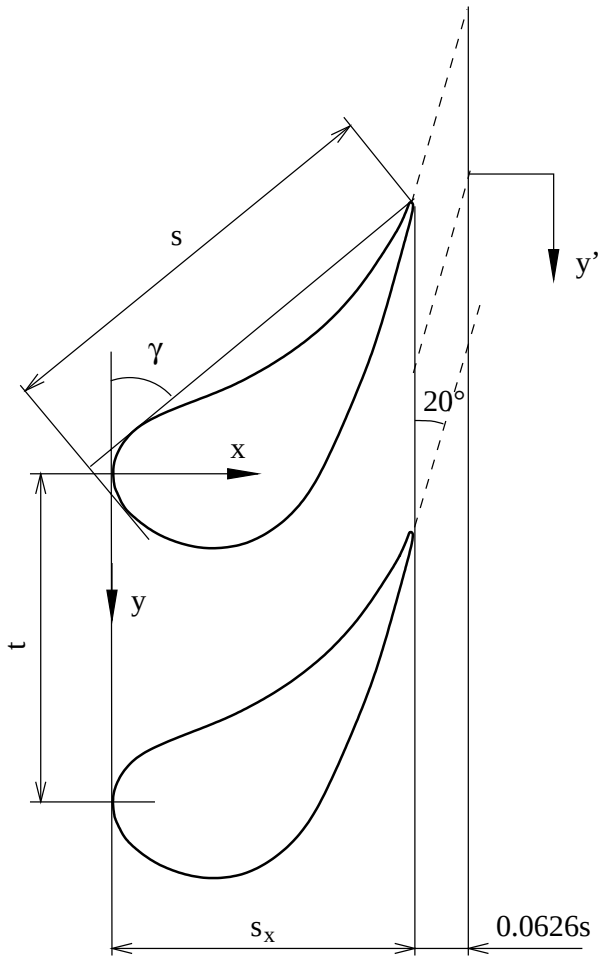

Abbildung 5.1: Gittergeometrie

Das reale Schaufelgitter kommt in den Hoch- und Mitteldruckbeschaufelungen von Industrie-Dampfturbinen zum Einsatz. Eine Näherung für die Durchströmung des realen Turbinengitters stellt die Durchströmung des ebenen Schaufelgitters, welches durch Abwickeln eines koaxialen Zylinderschnittes durch das Lauf- und Leitrad entsteht, dar. Obwohl infolge Fäche-

rung die Teilung t von der Nabe bis zum Gehäuse stetig zunimmt, ist die Untersuchung auf den mittleren Schnitt eingeschränkt, was bei kurzen Schaufeln im Verhältnis zum Durchmesser genügt. Die Geometrie des betrachteten Turbinengitters ist in Abb. 5.1 dargestellt. Die Profile weisen konstante Sehnenlänge $s = 100$ mm auf, die Teilung t beträgt 80 mm und der Staffelungswinkel ist $\gamma = 51.5°$. Das Verhältnis von Dicke der halbkreisförmigen Hinterkante zur Sehnenlänge ist mit 1% gegeben.

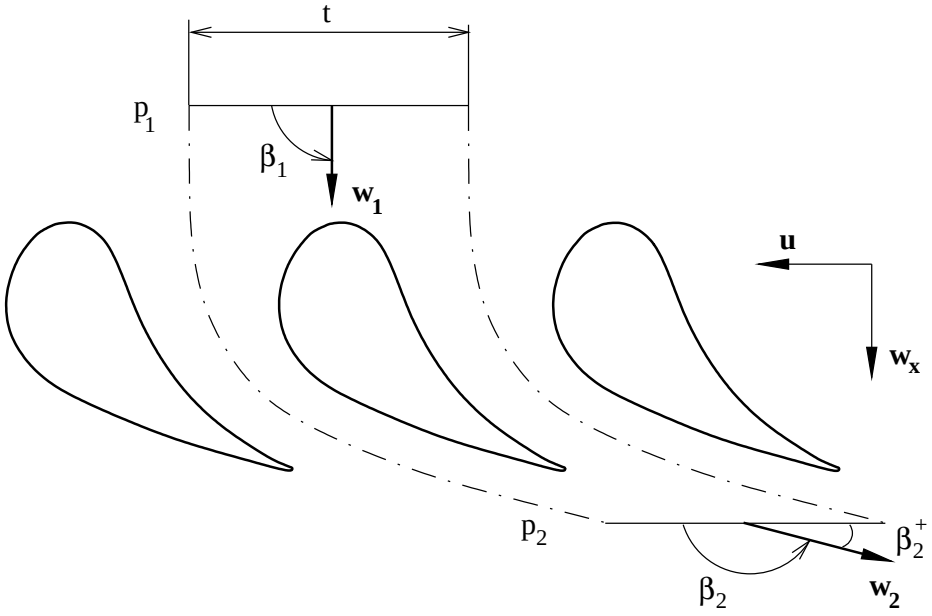

Abbildung 5.2: Turbinengitter

Die wichtigsten Größen eines Turbinengitters können aus Abb. 5.2 entnommen werden. Die enge Aneinanderreihung der einzelnen Schaufeln läßt die Strömung zwischen zwei benachbarten Profilen in erster Näherung als Strömung im Kanal mit gekrümmter Kanalmittellinie erscheinen. Der Kanal ist mit den Staustromlinien vor den Profilvorderkanten, den Saug- und Druckseiten der gegenüberliegenden Schaufeln, sowie mit den von den Hinterkanten ausgehenden Abstromlinien begrenzt. Die Strömung im Kanal soll unter möglichst konstanter Beschleunigung umgelenkt werden.
In Abb. 5.3 ist das Geschwindigkeitsdreieck bei der kompressiblen Betrachtung dargestellt. Im inkompressiblen Fall sind die axialen Komponenten w_x der Relativgeschwindigkeiten $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ gleich, aber auch im kompressiblen Fall kann die axiale Komponente durch $\rho A =$ konst konstant gehalten werden.

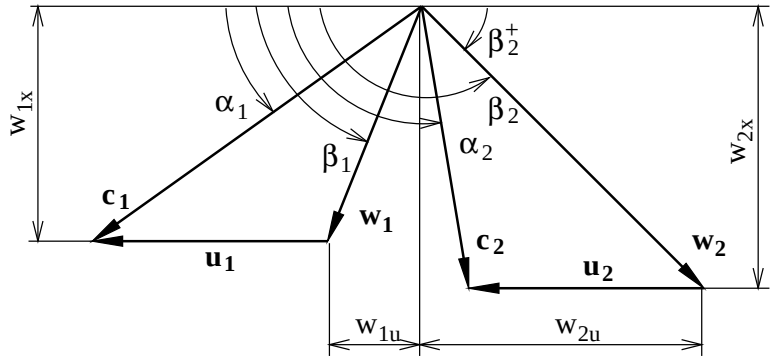

Abbildung 5.3: Geschwindigkeitsdreiecke

Die Berechnung der transsonischen Strömung war von großem Interesse, da im Turbinengitter mit starker Strömungsumlenkung schon bei relativ kleinen Eintrittsmachzahlen die Verdichtungsstösse infolge der Beschleunigung im Strömungsfeld auftreten können. Da für die gegebene Geometrie keine Meßdaten für den transsonischen Fall vorliegen, können die Rechenergebnisse nur qualitativ beurteilt werden. Transsonische Strömungen, wie schon im Kap. 4 erklärt, stellen sehr hohe Forderungen, nicht nur an die Vernetzung des Rechengebietes, sondern auch an die gesamte numerische Behandlung (Auswahl des Turbulenzmodells, des Diskretisierungsschema usw.). Aus diesen Gründen wurde zuerst die Gitterströmung mit geringer Machzahl ($Ma < 0.2$ im gesamten Strömungsfeld) simuliert und die numerischen Ergebnisse mit vorhandenen Meßdaten, sowie mit den numerischen Resultaten aus [17] verglichen. Wie später gezeigt wird, mußte besondere Aufmerksamkeit der Netzgenerierung geschenkt werden. Zusätzlich wurde die Staupunktanomalie mit der künstlichen Erhöhung der Dissipationsrate am Eintrittsrand bei dem Standard $k - \epsilon$ Modell und mit dem Mentermodifizierten $k - \omega$ Modell behandelt. Die Turbulenzmodellierung bei der Berechnung der transsonischen Strömung wurde auf das Standard $k - \epsilon$ Modell eingeschränkt, wobei wieder der Einfluß der Realizability auf die Rechenresultate untersucht wurde.

5.1 Inkompressible reibungsbehaftete Strömung

5.1.1 Randbedingungen

Zur Strömungsberechnung des Turbinengitters liegt ein Umströmgitter vor, an dessen in die Strömungsrichtung laufenden Grenzen die periodischen Randbedingungen eingesetzt sind, wodurch das Gitter mit mehreren Schaufeln simuliert ist. Um den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Meßdaten durchzuführen, kamen die gemessenen Werte als Randwerte zur Anwendung, die in Tab. 5.1 zusammengefaßt sind.

$w_1[\frac{m}{s}]$	$t_1[°C]$	$\rho_1[\frac{kg}{m^3}]$	$Re_1[-]$
20.42	13.9	1.228	135212

Tabelle 5.1: Meßwerte am Eintritt

Das vorgegebene Gitter ist unter dem Zuströmwinkel $\beta_1 = 90°$ angeströmt. Daher wurde die y-Komponente der Zulaufgeschwindigkeit gleich Null eingesetzt und für den Randwert der Eintrittsgeschwindigkeit der gemessene Wert $w_1 = 20.42$ m/s übernommen. Wegen der relativ kleinen Geschwindigkeiten im gesamten Rechengebiet mit $Ma < 0.2$ ist die Strömung als inkompressibel simuliert. Für die Dichte ist der gemessene Wert $\rho = 1.228$ kg/m^3 eingesetzt. Zusätzlich ist der Wert $\mu = 1.8545 \cdot 10^{-5}$ kg/ms für die dynamische Viskosität angegeben.
Die turbulente kinetische Energie am Zuströmrand ist nach Glg. 3.70 bestimmt und beträgt $k_1 = 1.5637$ m^2/s^2, wobei für den Turbulenzgrad der im Versuch ermittelte Wert $Tu_1 = 0.05$ übernommen ist. Für die Berechnung mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell ist die Dissipationsrate nach Glg. 3.71 berechnet, $\epsilon_1 = 175.98$ m^2/s^3. Als charakteristische Länge δ wurde 1% der Sehnenlänge angenommen. Erst nach der Simulation und der Analyse der unbefriedigenden Resultate wurde die Realizability des Modells erzwungen, indem der Startwert der Dissipationsrate erhöht wurde. Mit dem geänderten Wert $\epsilon_{10_1} = 1759.8$ m^2/s^3 wurde eine neue Berechnung durchgeführt. Hier und im weiteren Text wird mit dem Index „10“ die Dissipationsrate am Eintritt bezeichnet, welche dem 10-fachen des nach Glg. 3.71 ermitellten Wertes entspricht.
Als Austrittsrandbedingung in beiden Simulationen wurde die Druckdifferenz $\Delta p_2 = 0$ am Abströmrand eingesetzt. Die Druckkorrektur erfolgte mit dem SIMPLEC Algorithmus.

An der Profiloberfläche ist für die Geschwindigkeitskomponenten die Haftbedingung (Glg.4.5) vorgegeben.
Für die Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell blieben alle Randbedingungen gleich. Statt des Wertes für die Dissipationsrate ist modellbedingt der Wert der Turbulenzfrequenz $\omega_1 = 112.54$ 1/s angegeben, welcher nach Glg. 3.25 bestimmt ist.

5.1.2 Netzgenerierung

Das Rechengebiet erstreckt sich vom Zuströmrand, welcher eine Sehnenlänge vor dem Profil liegt, bis zum Abströmrand, der ebenfalls eine Sehnenlänge von der Profilhinterkante entfernt ist. Der blockstruktuierte CFX-Netzgenerator stellt bestimmte Anforderungen an die Vernetzung des Rechengebietes. Die Anzahl der Blöcke ist durch die Konfiguration des Rechengebietes gesteuert. Jede Änderung der Zellengrößen in einem bestimmten Bereich eines Blockes bei konstant gehaltener Zellenanzahl führt automatisch zu Änderungen in Zellengröße und -form nicht nur in diesem Block sondern im gesamten Rechengebiet. Um die Blockanzahl

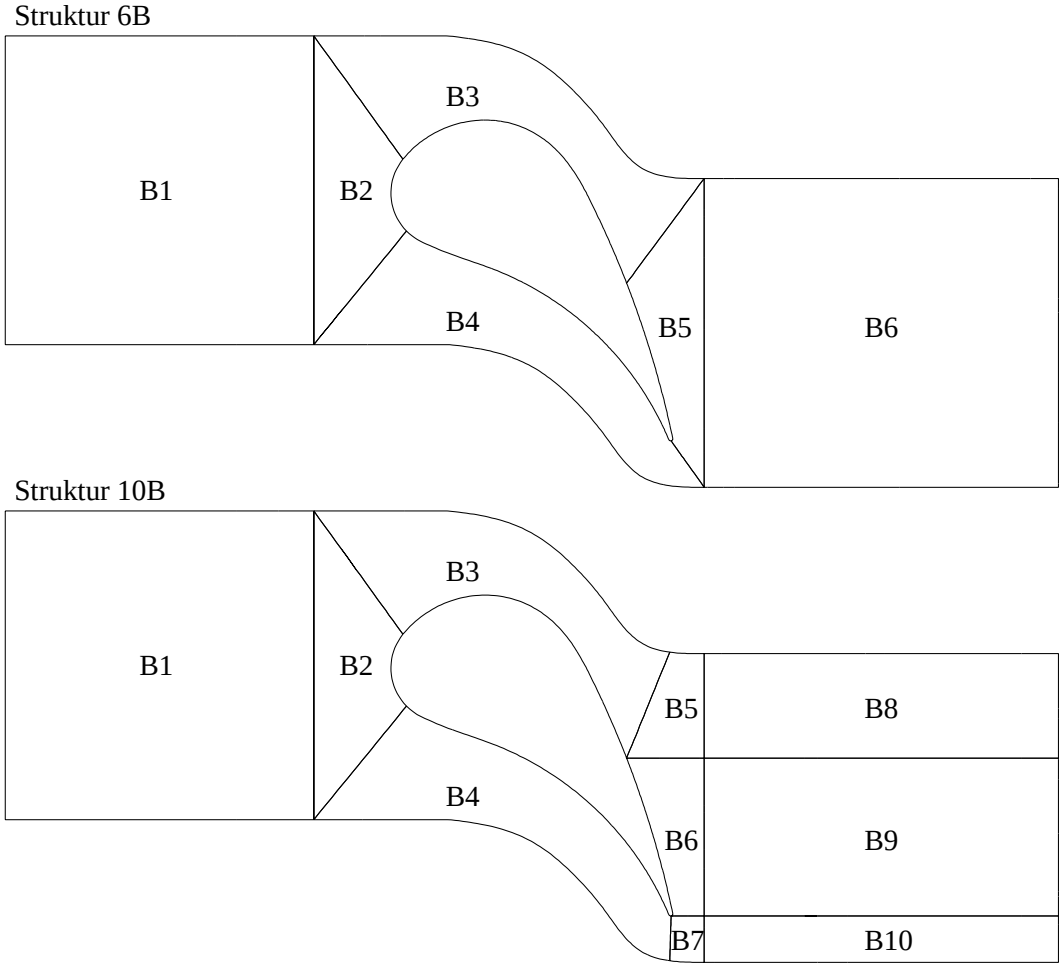

Abbildung 5.4: Blockstrukturen

klein zu halten und somit die numerische Effizienz zu erhöhen, ist in [3] für die Erstellung des Umströmgitters die in Abb. 5.4 angezeigte Struktur, bestehend aus sechs Blöcken, vorgeschlagen. Unter Berücksichtigung dieser Anweisung wurde ein Gitter generiert, dessen Nachteile erst nach der Simulation und dem Vergleich der Strömungsgeschwindigkeit mit den Meßdaten sichtbar wurden. Als besonders unbefriedigend hat sich die Vernetzung im Bereich der Nachlaufdelle gezeigt. Knapp hinter der Hinterkante treffen sich mehrere Blöcke (B3, B4, B5

und B6) in einem Punkt miteinander, deren Zellen sich trotz bestmöglicher Knotenverteilung in der Größe und Richtung ziemlich stark unterscheiden. Die Knotenverteilung im Problemgebiet ist vor allem von der Vernetzung des Hinterkantenbereiches abhängig, in welchem zur Auflösung der hohen Gradienten eine sehr feine räumliche Diskretisierung nötig ist. Um dies zu erzielen, wurden die Netzelemente entlang der Grenze zwischen den Blöcken 4 und 5 in die Profilrichtung gestaucht und somit der ungleichmäßige periodische Übergang im Bereich der Nachlaufdelle verursacht. Mit elliptischer Glättung ist die Verbesserung der Netzqualität im Bereich der starken Umlenkung (Blöcke 3, 4 und 5) erreicht. Für eine bessere Anpassung der Zellen an die Strömungsrichtung, womit sich die Dissipationsverluste vermindern lassen, wäre die unterschiedliche Knotenverteilung an den periodischen Rändern in den Blöcken B3 und B4 von Vorteil. Dies aber führt zu Randzellen mit verschiedenen Vektorgrößen der Oberflächen, zu deren Behandlung im Commandfile die Option „unmatched grids“ eingeschaltet werden muß. Abgesehen davon, daß diese Behandlung eine zusätzliche Interpolation der Strömungsgrößen in den Zellen der periodischen Rändern benötigt, gibt es für solche Gitter die Möglichkeit der Diskretisierung mit den genaueren Verfahren zweiter Ordnung nicht. Das Netz der Struktur 6B ist in Abb. 5.5 dargestellt.

Wesentlich bessere Resultate lieferte die Simulation mit dem Netz der Struktur 10B. Obwohl die Anzahl der Blöcke deutlich höher ist, führte die Umstrukturierung nur zu mäßiger Erhöhung der Zellenzahl. Im Problembereich (Block 7) ist ein fast rechtwinkeliges Gitter aufgebracht und der periodische Übergang in den Block 5 ist ohne große Unterschiede in den Zellengrößen gewährleistet. Das Netz um die Hinterkante ist in diesem Fall über drei Blöcke 4, 6 und 7 generiert, womit sich die gewünschte Auflösung leichter erzielen läßt. Der einzige Nachteil der Einführung eines neuen Blockes im Hinterkantenbereich ist, daß die Zellen da nicht mehr die Strömungsrichtung folgen. Im Zuströmbereich blieb die Vernetzung gleich wie bei der Struktur 6B, der Nachlaufbereich ist durch Erhöhung der Blockanzahl dichter ausgebildet. Abb. 5.6 zeigt das über die Struktur 10B generierte Netz.

Das Netz für die Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Turbulenzmodell (Abb. 5.7) wurde über 14 Blöcke generiert. Diese Struktur stellt eine Variation der Struktur 10B dar mit dem Unterschied, daß ein äquidistantes Profil um das Turbinenprofil aufgebracht ist. Der Bereich zwischen den beiden Kurven ist dann in vier weitere Blöcke (11, 12, 13 und 14) unterteilt, welche von den Blöcken 2, 3, 4, 5, 6, und 7 umgeben sind. Die neue Blockreihe um das Profil war notwendig, um die Zellenanzahl im gesamten Rechengebiet klein zu halten und trotzdem eine feine Auflösung in der unmittelbaren Nähe des Turbinenprofils zu erreichen, sowie größere Unterschiede in den Zellengrößen bei dem periodischen Übergang zu vermeiden. In diesen vier Blöcken wurde trotz starker Umlenkung auf die elliptische Glättung des Netzes verzichtet. Die elliptische Glättung hat den Nachteil, daß im Blockinneren die an den Blockgrenzen aufgebrachte Knotenverteilung nicht mehr erhalten ist. D.h., die gewünschte Zellenstauchung senkrecht zum Turbinenprofil geht in der Blockmitte verloren. Die Zellen weisen dort ungefähr gleiche Größe auf, womit die Anpassung an den vom Turbulenzmodell erforderlichen Wert $y^+ < 2.5$ nicht möglich ist. Da die Blöcke 2, 3, 4 und 6, die an die neue Blockreihe grenzen, mit elliptischer Glättung vorgesehen sind, mußten sie sehr dicht in die Richtung zum Profil ausgebildet werden. Dies war ohne Vergrößerung der Zellenanzahl in diesen Blöcken im Vergleich zum Netz der Struktur 10B nicht möglich. Trotz dieser Verfeinerung waren die großen Sprünge in den Zellengrößen an den Blockübergängen zur neuen Blockreihe nicht zu vermeiden. Eine weitere Verfeinerung der Blöcke 2, 3, 4 und 6 und Verkleinerung dieser Größenunterschiede führte zu keiner Verbesserung der Rechenergebnisse. Da das Rechengebiet in diesem Fall in 14 Blöcke unterteilt ist, war es nicht möglich, alle Blockübergänge glatt zu gestalten.

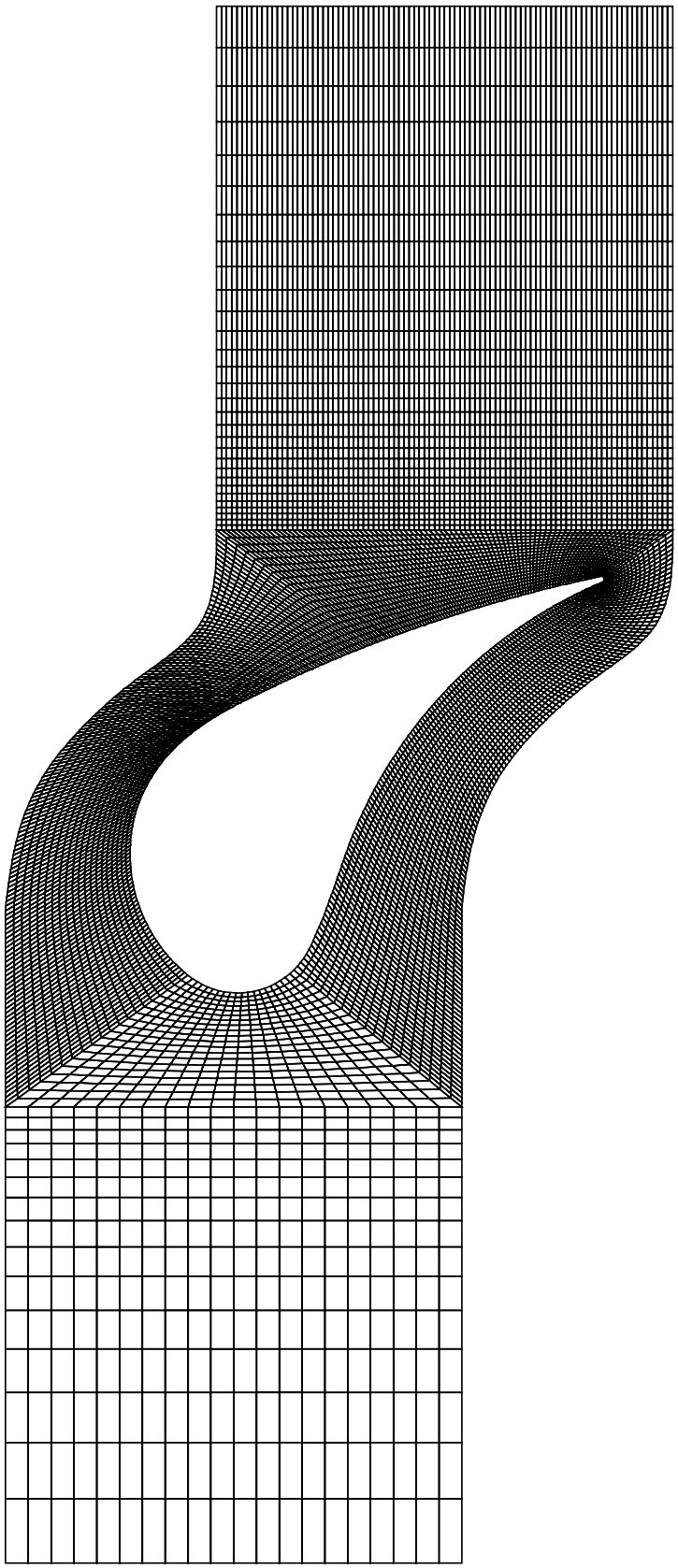

Abbildung 5.5: Netz 6B, Standard $k - \epsilon$ Modell

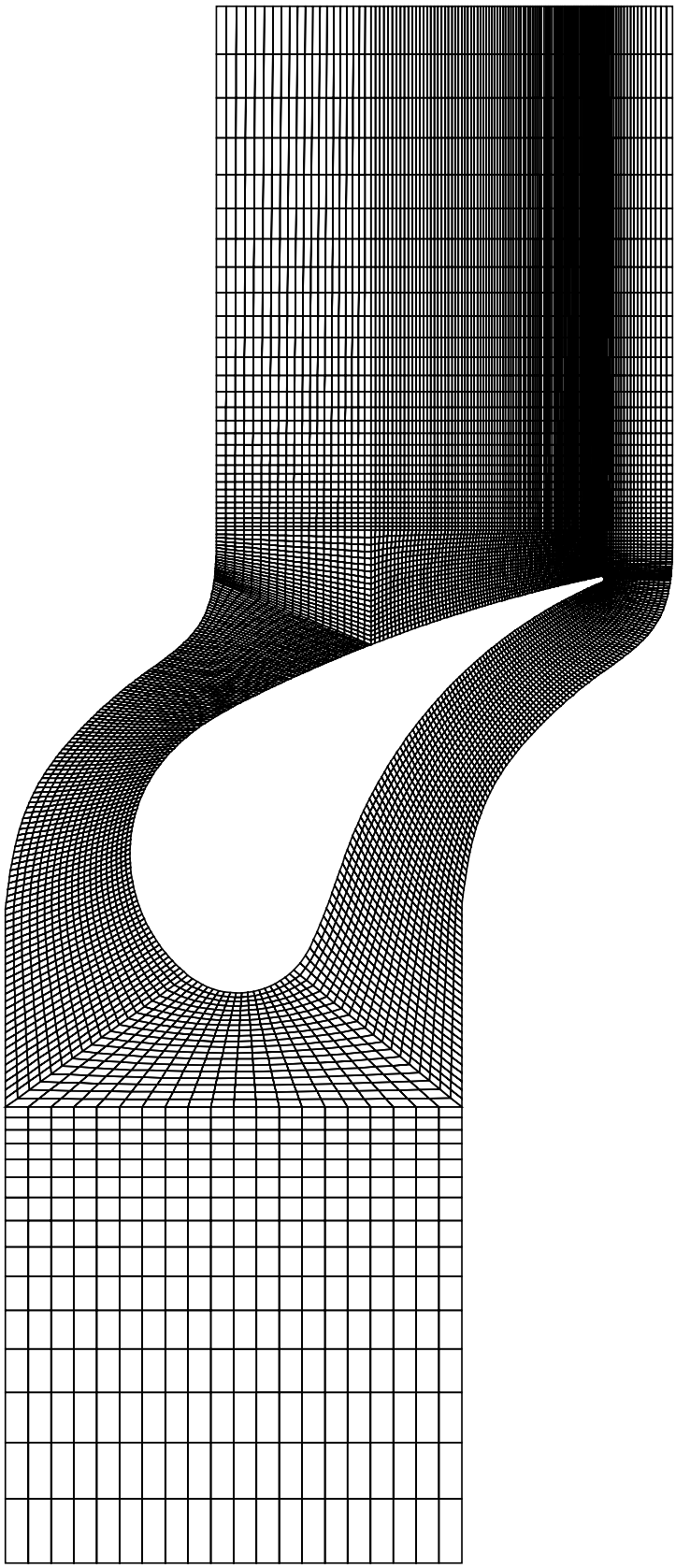

Abbildung 5.6: Netz 10B, Standard $k - \epsilon$ Modell

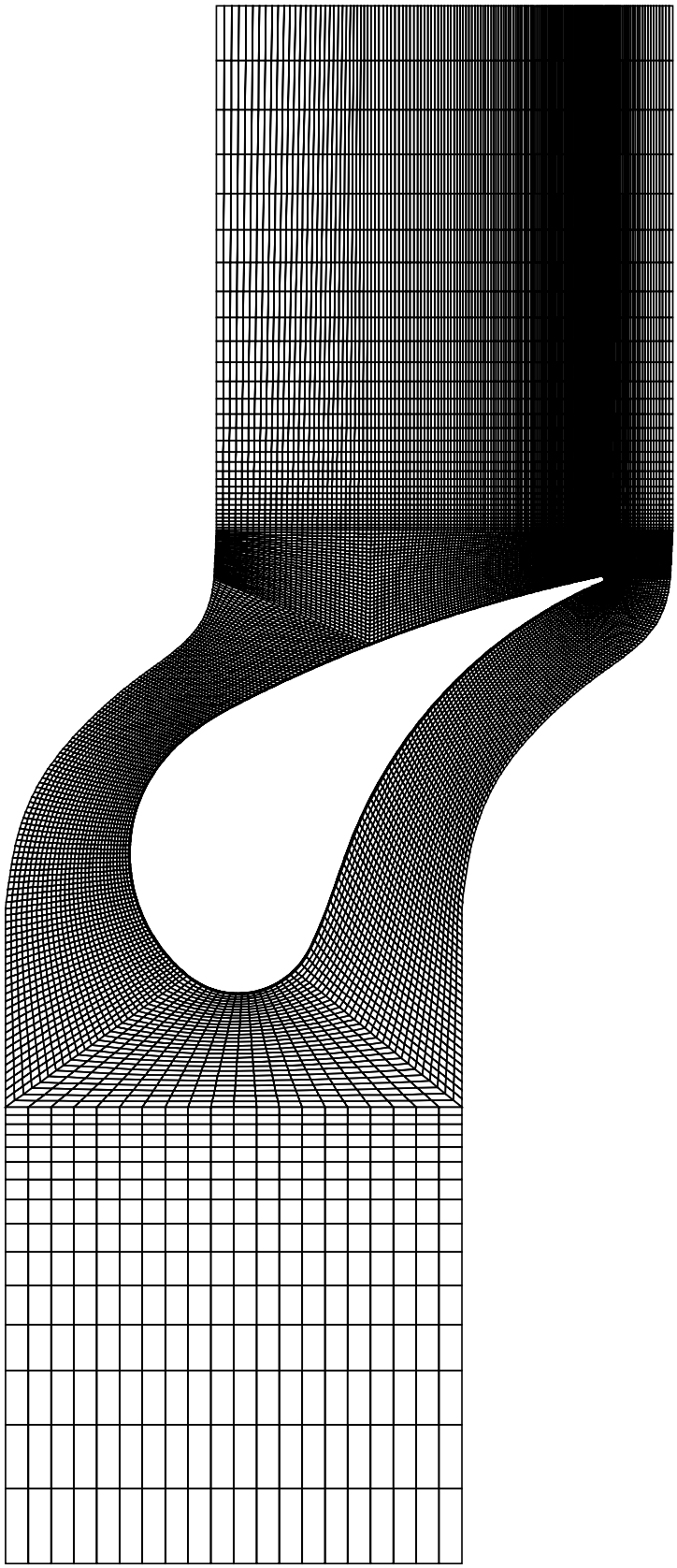

Abbildung 5.7: Netz 14B, Menter-modifiziertes $k - \omega$ Modell

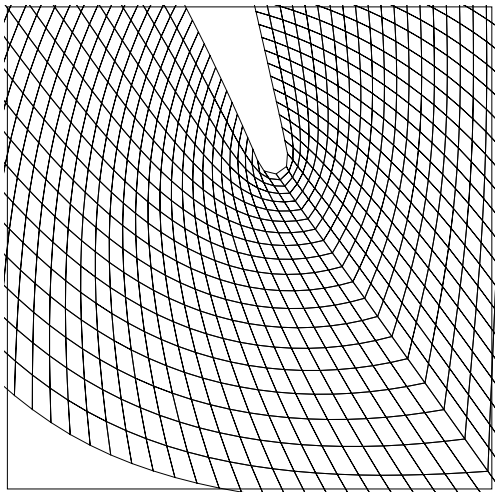

Abbildung 5.8: Hinterkantenbereich, Struktur 6B

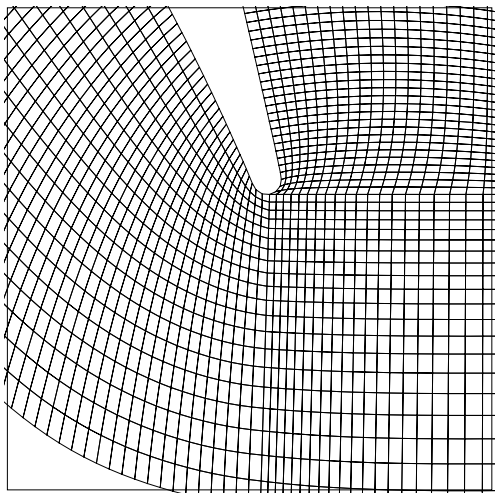

Abbildung 5.9: Hinterkantenbereich, Struktur 10B

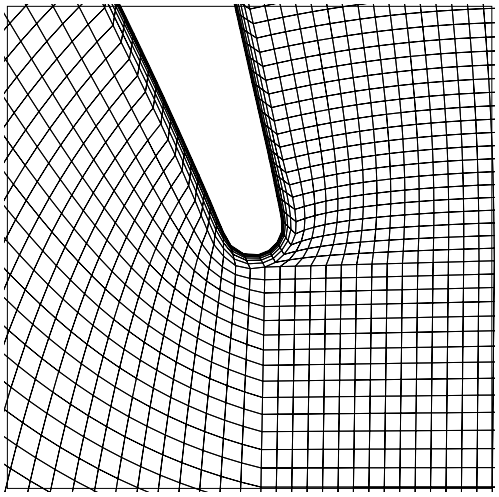

Abbildung 5.10: Hinterkantenbereich, Struktur 14B

Die glatten Blockübergänge sind im allgemeinen sehr wichtig und können stark die Stabilität der Rechnung beeinflussen. Der CFX-Solver ist sehr sensibel auf die Sprünge in den Zellengrößen in jenen Bereichen, die von hohen Gradienten betroffen sind.Daher wurde große Aufmerksamkeit der Vernetzung des Hinterkantenbereiches geschenkt und somit die Vernetzung im Rest des Rechengebietes gesteuert. Die Abbn. 5.8 - 5.10 zeigen die Auflösung des Hinterkantenbereiches bei allen generierten Netzen.
Zum Vergleich sind die Netzgrößen bei verschiedenen Strukturen in Tab. 5.2 zusammengefaßt.

Struktur	6B	10B	14B
Zellenzahl	10800	11400	20220

Tabelle 5.2: Netzgrößen bei verschiedenen Strukturen

5.1.3 Lösungsmethodik

Wie bei der Berechnung der Strömung im Kanal mit der kreisbogenförmigen Verengung wurden alle Simulationen in zwei Stufen durchgeführt. Auf der ersten Stufe sind alle Variablen außer Druck und Turbulenzgrößen mit dem HYBRID Diskretisierungsschema vorgesehen. Bei der Behandlung der inkompressiblen Strömung ist die Diskretisierung mit den zentralen Differenzen für den Druck ausreichend. Die ersten 3000 Iterationen lieferten eine gute Startlösung für die zweite Stufe, auf welcher das CCCT Diskretisierungsschema für die Geschwindigkeitskomponenten im konvektiven Teil der diskretisierten Bewegungsgleichungen angewendet wurde. Während des ganzen Iterationsvorganges wurde für die Turbulenzgrößen wegen ihres Einflusses auf die Stabilität der Berechnung das UPWIND Schema eingesetzt. Die konvergierte Lösung wurde nach etwa 4000 zusätlichen Iterationen erreicht.

5.1.4 Ergebnisse

Zur Beurteilung der Richtigkeit der durchgeführten Simulationen liegen die Meßdaten für die Profildruckverteilung und die Verläufe der Austrittgeschwindigkeit w_2, des Abströmwinkels β_2^+, sowie des Druckes p_2 in der Meßebene vor, welche um den Betrag $0.0626s$ hinter der Profilhinterkante liegt. Bei der Auswertung der Rechenergebnisse wurde die Lage der Meßebene übernommen.
Die Versuche erfolgten im Gitterwindkanal des Institutes für Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen. Der Gitterwindkanal, zu dessen Luftversorgung ein Axialgebläse dient, arbeitet im sog. Druckbetrieb. Das Gitter ist in eine schwenkbare Wiege aus Plexiglas eingebaut, womit sich verschiedene Zuströmwinkel einstellen lassen. Der Zuströmwinkel blieb konstant bei $\beta_1 = 90°$. Die Verteilung des statischen Druckes entlang des Profilumfanges wurde mit 29 Meßbohrungen ermittelt. Mittels einer Dreilochsonde erfolgte die Bestimmung des statischen Druckes, des Totaldruckes und der Strömungsrichtung (Abströmwinkel β_2^+) im Abstromfeld.
Zum Vergleich der Meß- und Rechenergebnisse wurden der statische Druckkoeffizient C_p und der Totaldruckkoeffizient C_{pt} herangezogen. Der statische Druckkoeffizient stellt das Verhältnis der Druckdifferenz zum dynamischen Druck am Zuströmrand dar

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2}. \tag{5.1}$$

Der Totaldruckkoeffizient berücksichtigt den dynamischen Druck (Geschwindigkeitsenergie) und beschreibt die Änderung des Totaldruckes bezogen auf den dynamischen Druck am Zu-

strömrand

$$C_{pt} = \frac{\left(p + \rho\frac{w^2}{2}\right) - \left(p_1 + \rho\frac{w_1^2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\rho w_1^2}. \tag{5.2}$$

Als eine weitere Vergleichsbasis für Meßdaten und numerischen Ergebnissen dienen mit der lokalen Massenstromdichte gewogene, teilungsgemittelte Strömungsgrößen:

- mit der lokalen Massenstromdichte gewogener, teilungsgemittelter Abströmwinkel

$$\bar{\beta}_2^+ = \frac{\int_0^t \beta_2^+(y')w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}{\int_0^t w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}, \tag{5.3}$$

- mit der lokalen Massenstromdichte gewogener, teilungsgemittelter Druckkoeffizient

$$\bar{C}_{p2} = \frac{\int_0^t C_{p2}(y')w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}{\int_0^t w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}, \tag{5.4}$$

- mit der lokalen Massenstromdichte gewogener, teilungsgemittelter Totaldruckkoeffizient

$$\bar{C}_{pt2} = \frac{\int_0^t C_{pt2}(y')w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}{\int_0^t w_2(y')\rho_2(y')\sin(\beta_2^+(y'))dy'}. \tag{5.5}$$

Zur Berechnung der Integrale nach dem 5-Punkte Newton-Cotes Verfahren wurde das Programm IDL verwendet. Die Dichteänderung wurde nicht mitberücksichtigt, da es sich näherungsweise um eine inkompressible Strömung handelt.
Insgesamt wurden vier Simulationen durchgeführt: eine über das Netz der Struktur 6B mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell, zwei über das Netz der Struktur 10B mit dem Standard $k-\epsilon$ und dem $k-\epsilon_{10}$ Modell, sowie eine über das Netzt der Struktur 14B mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell. (Bei dem $k-\epsilon_{10}$ Modell handelt es sich um das Standard $k-\epsilon$ Modell. Der neue Ausdruck wurde eingeführt, um den Unterschied zwischen zwei Simulationen mit den unterschiedlichen Werten der Dissipationsrate am Eintritt zu gewährleisten.) Die Berechnung, für welche das Netz der Struktur 6B herangezogen wurde, lieferte im Vergleich zu anderen Simulationen wesentlich schlechtere Ergebnisse. Bis auf den Geschwindigkeitsverlauf in der Meß(Auswertungs)ebene wurde auf eine Auswertung dieser Berechnung verzichtet.
Die gemittelten Größen für drei restliche Simulationen sind gegenüber den gemessenen und der aus der Finite-Elemente Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell, durchgeführt mit dem Programmpaket FIDAP, resultierenden Werten in Tab. 5.3 zusammengefaßt.

	$\bar{\beta}_2^+[°]$	$\bar{C}_{p2}[-]$	$\bar{C}_{pt2}[-]$
Messung	20.2	-8.23	-0.195
Netz 10B, $k-\epsilon$	20.2	-8.29	-0.571
Netz 10B, $k-\epsilon_{10}$	20.0	-8.27	-0.489
Netz 14B, Menter $k-\omega$	19.7	-8.85	-0.663
FIDAP [17]	19.9	-8.73	-0.606

Tabelle 5.3: Gemittelte Strömungsgrößen

Abb. 5.11 zeigt den Verlauf des statischen Druckkoeffizienten entlang des Profilumfanges. Alle drei Simulationen liefern an der Druckseite des Profils gleiche Resultate, welche gut mit den Meßdaten übereinstimmen. Größere Unterschiede zwischen rechnerischen und experimentellen Ergebnissen sind entlang der Saugseite bis $x/s \approx 0.5$ zu sehen: Druckverminderungen sind bei allen Simulationen zu hoch berechnet. Diese Unterschiede sind damit zu erklären, daß in den gemessenen Verlauf die dreidimensionalen Effekte des durch seitliche Wände begrenzten Meßgitters miteinbezogen sind. Im anschließenden Verzögerungsbereich weisen die numerisch bestimmten statischen Druckkoeffizienten aus den Simulationen mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell, unabhängig von der Dissipationsrate am Eintritt des Rechengebietes, Instabilitäten auf. Diese sind auch in den Resultaten aus der Berechnung mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell vorhanden, aber weniger ausgeprägt. Daraus läßt sich schließen, daß neben Wandfunktionen, welche in von Druckgradienten betroffenen Bereichen nicht einwandfrei funktionieren, auch die Vernetzung einen Einfluß auf die Resultate hat. Eine Aussage über den Verlauf von C_p im Hinterkantenbereich kann nicht getroffen werden wegen des Fehlens der Meßdaten, welche aus technischen Gründen (dünne Hinterkante) nicht gewonnen werden konnten.

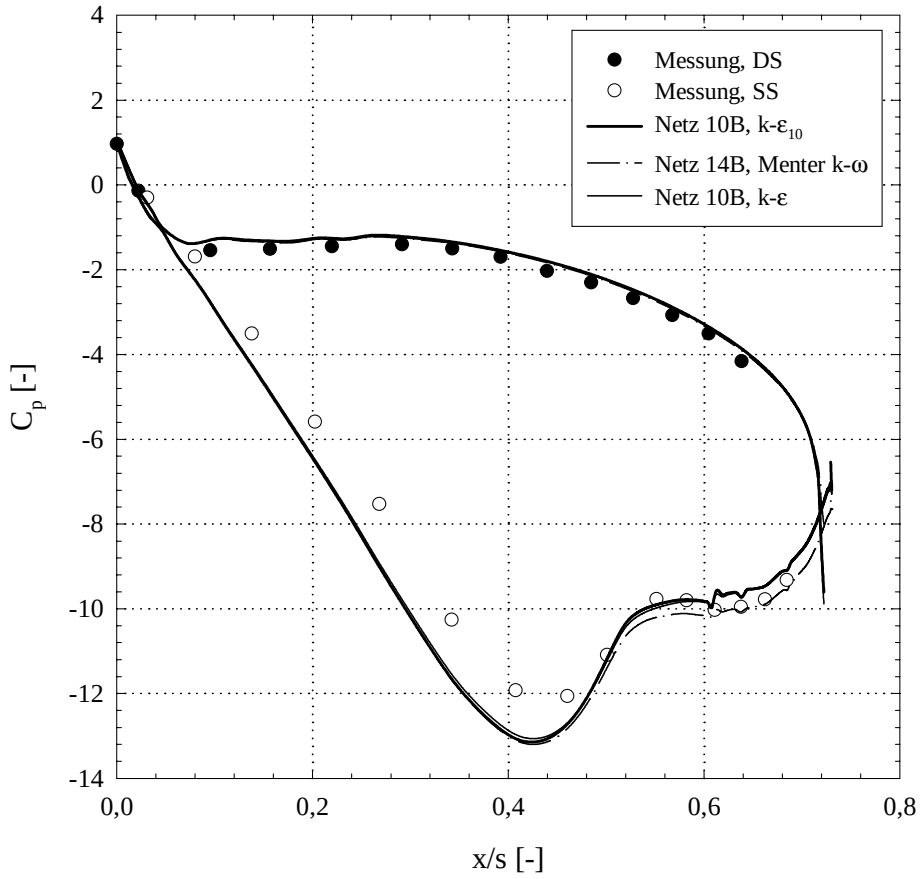

Abbildung 5.11: Profildruckverteilung

Der Verlauf des Geschwindigkeitsverhältnisses w_2/w_1 in der Auswertungsebene für vier durchgeführte Simulationen im Vergleich zu den Meßdaten ist in Abb. 5.12 dargestellt. Durch die endlich dicke Hinterkante und das Aufeinandertreffen unterschiedlicher Grenzschichten von der Profildruck- und Saugseite mit dem anschließenden Mischungsvorgang kommt es zu einer Geschwindigkeitsverminderung im Hinterkantenbereich. Die unterschiedlichen Grenzschichten am Profil sind durch unterschiedliche Drücke und Geschwindigkeiten an der Druck- und Saugseite hervorgerufen. Allen Berechnungen ist gemeinsam, daß die Resultate an der Saug-

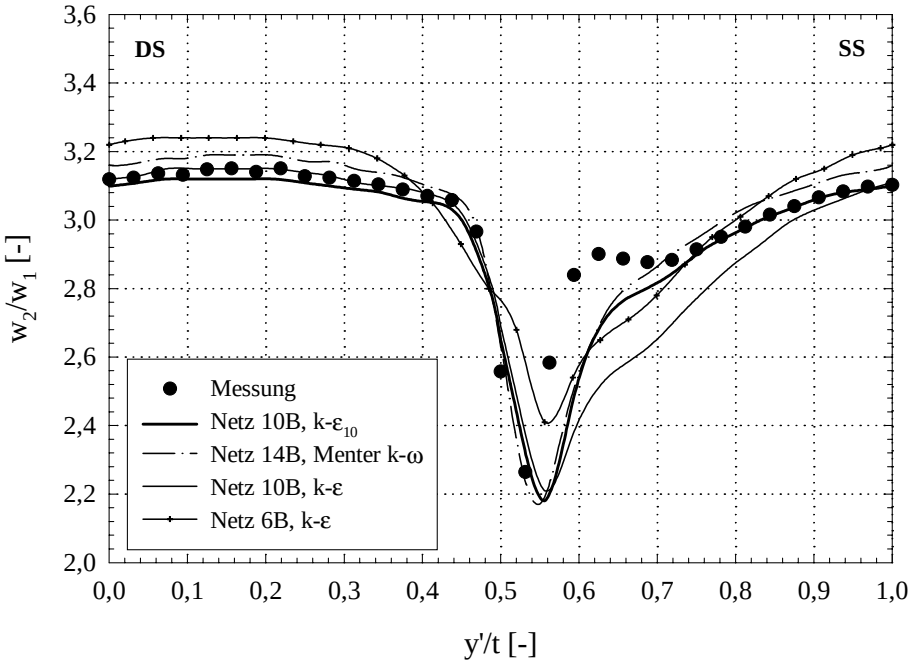

Abbildung 5.12: Verlauf von w_2/w_1

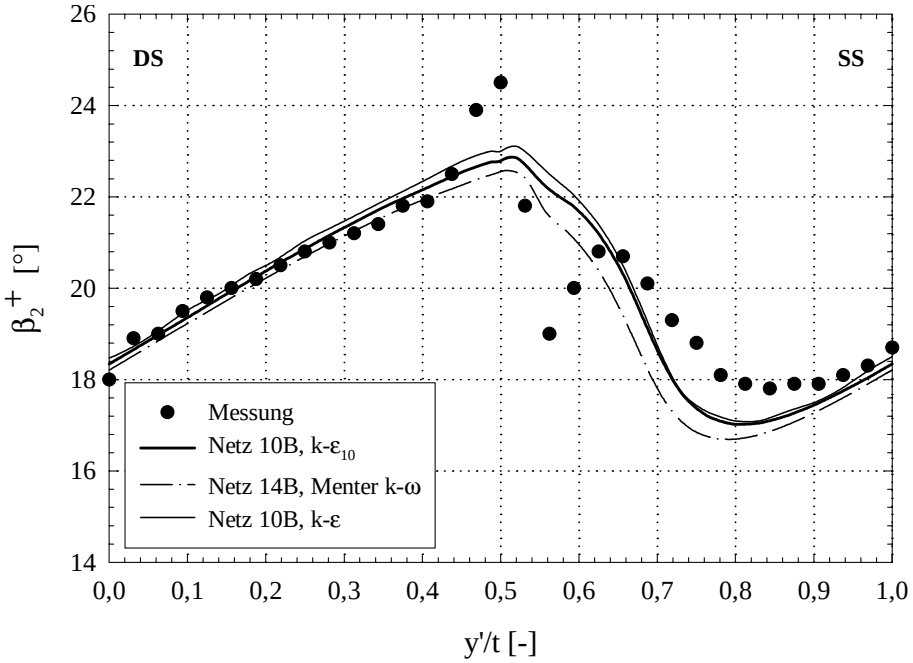

Abbildung 5.13: Verlauf von β_2^+

seite viel stärker als die an der Druckseite von den Meßergebnissen abweichen. Die Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell an dem über die Blockstruktur 6B generierten Netz weist die schlechtesten Resultate auf und ist hier nur als Nachweis der Auswirkung einer schlechten Blockstruktuierung auf die Rechenergebnisse dargestellt. Eine deutliche Verbesserung in den Resultaten vor allem an der Druckseite ist mit dem Übergang auf das Netz der Struktur 10B erreicht. Der Einfluß der Überproduktion der turbulenten kinetischen Energie und deren Auswirkung auf die Entwicklung der Grenzschicht insbesondere entlang der Profilsaugseite (Grenzschichtdicke wird zu hoch berechnet) ist noch immer klar zu sehen. Die künstlich erzwungene Realizability bei der Simulation mit dem $k-\epsilon_{10}$ Modell führte zur dünneren Grenzschicht und dementsprechend saugseitig zu einer engeren Nachlaufdelle. Ungefähr gleiche Ergebnisse sind mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell erreicht, mit einigen Unterschieden vor allem im reibungsfreien Bereich.

In Abb. 5.13 ist der Verlauf des Abströmwinkels β_2^+ in der Meß(Auswertungs)ebene zusammengefaßt. Die Messung der ebenen Strömung mittels der Dreilochmeßsonde ist mit dem sog. Gradientenfehler verbunden, welcher die Ursache des sprungaften Überganges im gemessenen Verlauf des Abströmwinkels im Bereich der Nachlaufdelle ist. Neben der Hauptmeßbohrung besitzt die Dreilochmeßsonde zwei zusätzliche beiderseits der Hauptbohrung um 60° abgeschrägte Meßbohrungen. Mit dem Ausgleich der Drücke an diesen Stellen erfolgt die Ausrichtung der Sonde in die Strömungsrichtung. In den Strömungsgebieten, welche von Druckgradienten betroffen sind, täuscht der Druckausgleich an den Zusatzbohrungen die Strömungsrichtung vor, die Sonde zeigt aber in eine andere Richtung. Der Meßfehler in diesen Gebieten beträgt etwa 3°, ansonsten 0.5°. Numerische Resultate aller drei Berechnungen folgen gut den Meßdaten auf der Druckseite. Die immer größer werdenden Unterschiede sind beginnend vom Bereich der Nachlaufdelle zu sehen. Der Vergleich beider mit dem $k-\epsilon$ Modell und unterschiedlichen Werten für die Dissipationsrate am Zuströmrand durchgeführten Simulationen zeigt keine Differenz im Verlauf des Abströmwinkels, obwohl die Geschwindigkeiten (siehe Abb. 5.12) an der Saugseite stark von einander abweichen. Dies deutet darauf hin, daß die Geschwindigkeitsdreiecke bei diesen Simulationen geometrisch ähnlich sind. Da die Berechnungen mit dem $k-\epsilon_{10}$ und dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell ungefähr gleichen Geschwindigkeitsverlauf zeigen, aber der Abströmwinkel im zweiten Fall kleiner ist, bedeutet dies, daß auch die axiale Geschwindigkeitskomponente kleiner berechnet ist.

Die rechnerisch ermittelten C_{p2} – Verteilungen, zusammengefaßt in Abb. 5.14, folgen gut dem gemessenen statischen Druckverlauf, wobei der Sprung im Bereich der Nachlaufdelle als Meßfehler aufzufassen ist. Sehr gute Übereinstimmung mit den Meßdaten zeigen die Berechnungen mit dem $k-\epsilon$ Modell, mit und ohne Erzwingung der Realizability. Die aus der Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell gewonnene C_{p2} – Verteilung liegt unter den beiden anderen um einen bestimmten, fast konstanten Betrag, welcher vor allem durch die höheren numerischen Diffusionsverluste hervorgerufen ist. Die letzten sind von den sog.„truncation errors“(numerische Fehler infolge der Diskretisierung der Transportgleichungen) verursacht und sind stark netzabhängig.

Als Maß für die Gesamtdruckverluste im Gitter dient der Verlauf des Totaldruckkoeffizienten (Abb. 5.15). Er beinhaltet die Information über die Strömungsverluste im Schaufelkanal, sowie die Mischungsverluste im Nachlauf. Die Rechenergebnisse aus allen drei Simulationen stimmen mit den Meßdaten druckseitig sehr gut überein. Große Abweichungen von den Meßdaten charakterisieren alle drei Simulationen auf der Saugseite und unmittelbar in der Nachlaufdelle. Diese Abweichungen kommen infolge der Grenzschichtmodellierung und der hohen numerischen Dissipation zustande.

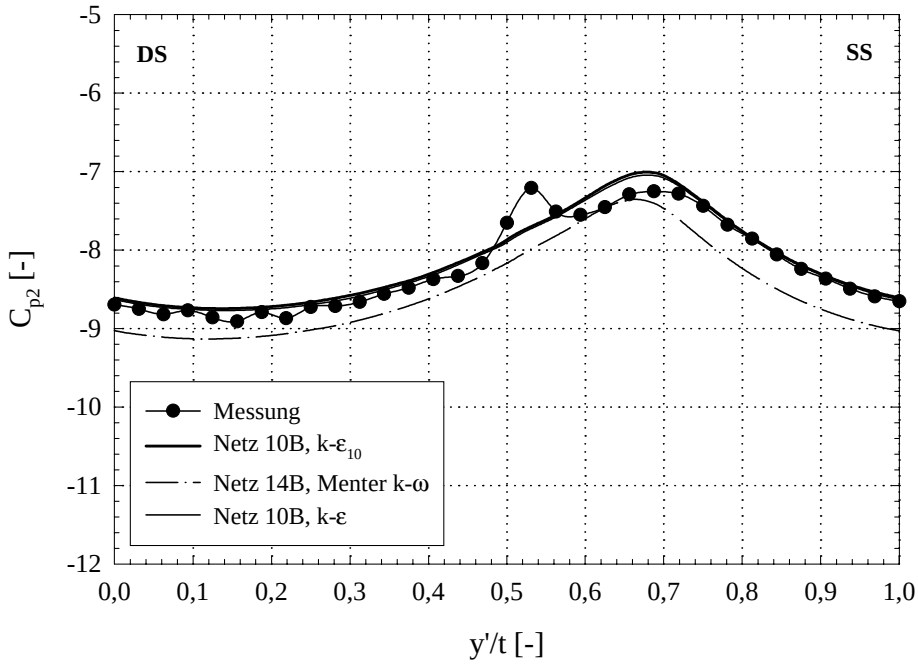

Abbildung 5.14: Verlauf von C_{p2}

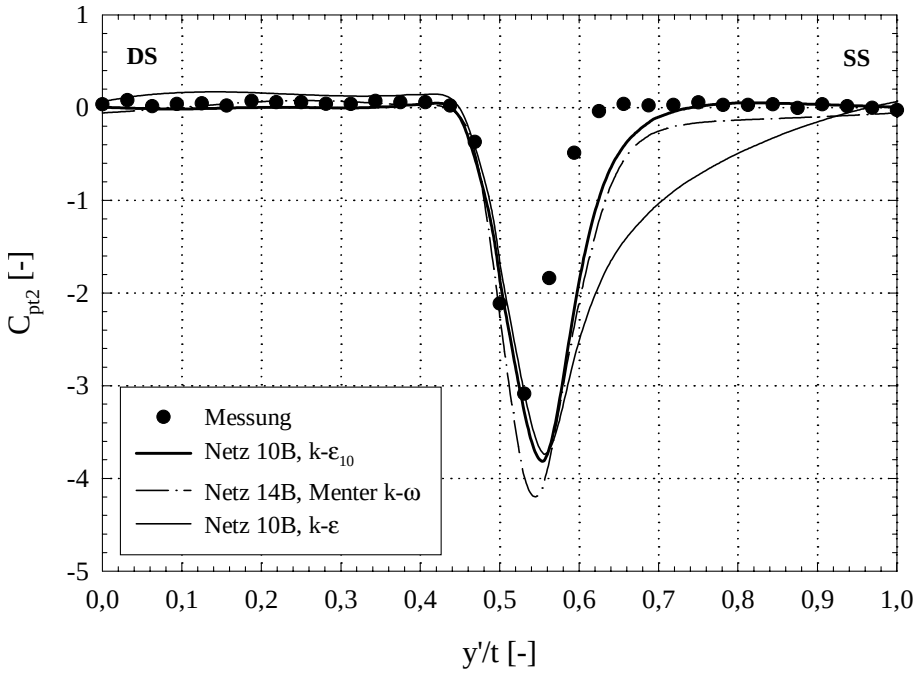

Abbildung 5.15: Verlauf von C_{pt2}

Bei der Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell erfolgt die Grenzschichtmodellierung mittels Wandfunktionen, welche zwei Nachteile aufweisen. Erstens, die Wandfunktionen stellen eine Näherung der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht dar mit der Annahme des konstanten Druckes und sind daher fehlerhaft in Bereichen hoher Druckgradienten, die im Fall einer Strömung im Gitter starker Umlenkung im hinteren Teil der Saugseite auftreten. Zweitens, der Übergang der laminaren Grenzschicht, welche sich anfangs an der Profilnase entwickelt, in die turbulente Grenzschicht wird mit dem $k-\epsilon$ Modell nicht simuliert, was zu Ermittlung höherer Wandreibung führt. Zusätzlich, wie im Kap. 3.1.4 angesprochen, generiert dieses Turbulenzmodell negative Reynoldsnormalspannungen in der reibungsfreien Strömung, aber auch im Staubereich der Profilnase, wodurch der Anstieg der turbulenten kinetischen Energie verursacht wird. Diese wird von der Strömung „mitgenommen", weswegen die Grenzschichtdicke und somit die Reibungsverluste zu hoch berechnet werden. Mit dem Erhöhen der Dissipationsrate am Eintritt des Rechengebietes ist es gelungen, diesen Effekt zu vermindern, was aus dem Vergleich der C_{pt2} – Verläufe aus den Simulationen mit dem Standard $k-\epsilon$ und dem $k-\epsilon_{10}$ Modell zu sehen ist. Für die sehr hohen Totaldruckverluste bei der Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell ist nur die numerische Dissipation verantwortlich, da dieses Modell keine Wandfunktionen benötigt. Wie bereits erklärt, sind die Dissipationsfehler stark von der Vernetzung abhängig. Hohe Block- und Zellenanzahl bei dem Netz der Struktur 14B war aber modellbedingt und daher nicht zu vermeiden, sowie dementsprechend unmöglich, eine bessere Netzqualität mit dem CFX-Netzgenerator zu erreichen. Die Dissipationsverluste in diesem Fall sind sehr hoch, was die sehr hohen Unterschiede zwischen gemittelten numerischen und experimentellen Ergebnissen erklärt (siehe Tab. 5.3). Die Diskrepanzen gegenüber den gemittelten Versuchsergebnissen treten bei allen numerischen Lösungen auf, unabhängig von dem für die Berechnung verwendeten Software (CFX oder FIDAP). Die gemittelten Abströmwinkel und Druckkoeffizient weichen im Vergleich zu dem gemittelten Totaldruckkoeffizient weniger von den gemittelten experimentellen Größen ab. Abgesehen von der Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell, welche durch die schlechtesten gemittelten Ergebnisse gekennzeichnet ist, zeigen andere zwei CFX-Simulationen quantitative Verbesserungen gegenüber der Finite-Elemente Berechnung. Auch hier sind die besten Resultate der Simulation mit der erzwungenen Realizability zuzuordnen.

Aus Abb. 5.16 sind qualitative Unterschiede in der Produktion der turbulenten kinetischen Energie entlang der Staustromlinie zu sehen, die durch die Modellierung mit verschiedenen Turbulenzmodellen verursacht wurden. Bis vor dem Staubereich vor der Profilnase generieren das Standard $k-\epsilon$ und das Menter-modifizierte $k-\omega$ Modell gleiche Energiemenge. Danach wird mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell im Vergleich zu dem Standard $k-\epsilon$ Modell die Überproduktion gedämpft, aber nicht verhindert. Die Erhöhung der Dissipationsrate am Eintritt des Rechengebietes bei dem Standard $k-\epsilon$ Modell steuert die Produktion der turbulenten kinetischen Energie entlang der gesamten Staustromlinie besser als die Modellierung mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell. Der Anstieg von k vor der Profilnase ist auch in diesem Fall zu sehen. Der Überschuß an der turbulenten kinetischen Energie im Staubereich ist ungefähr 3 mal niedriger als bei der Simulation mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell und fast 8 mal niedriger als bei der Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell, bei welcher die Realizability nicht erzwungen wurde. Dieses Ergebnis wirkt sich positiv auf die Grenzschichtentwicklung aus, indem die Grenzschicht geringere Dicke als die bei den anderen zwei Lösungen aufweist, womit die höhere Genauigkeit der Resultate der Berechnung mit dem $k-\epsilon_{10}$ Modell erklärt ist.

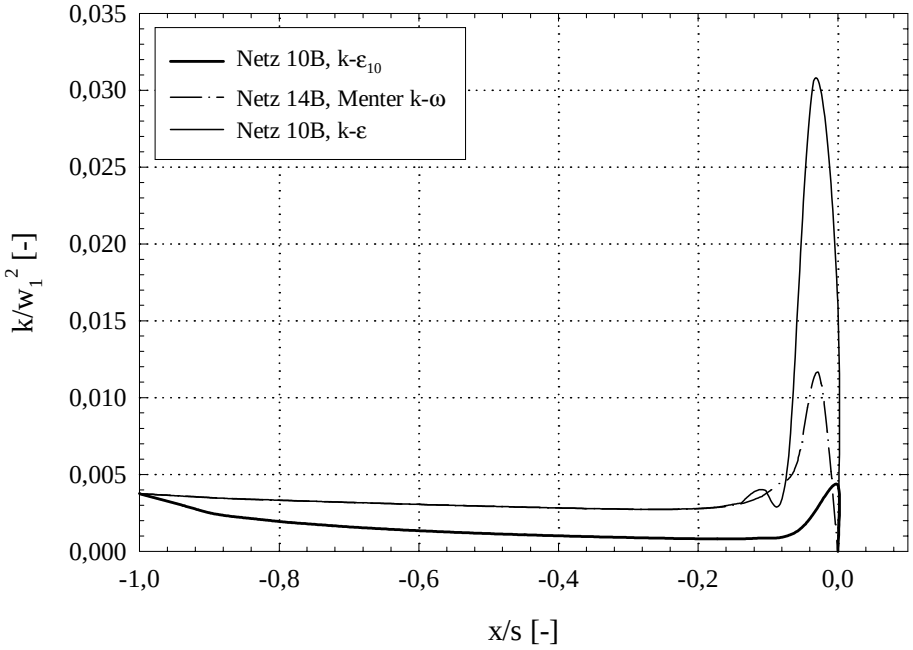

Abbildung 5.16: Produktion von k entlang der Staustromlinie

5.2 Transsonische Gitterströmung

5.2.1 Randbedingungen

Da in diesem Fall keine Strömungsgrößen vorgegeben sind, wurden die Zuströmgeschwindigkeit stufenweise und somit der Totaldruck erhöht, bis im subsonischen Strömungsfeld auf der Profilsaugseite ein Überschallbereich abgeschlossen mit dem Verdichtungsstoß aufgetreten ist. Diese Erscheinung ist mit der Zuströmgeschwindigkeit $w_1 = 110$ m/s bei dem Zuströmwinkel $\beta_1 = 90°$ erreicht. Für die Temperatur am Eintrittsrand ist der Wert $T_1 = 283,7$ K angenommen, was der Machzahl $Ma_1 = 0.326$ unter dem Einsatz der allgemeine Gaskonstante $\mathcal{R} = 8314$ J/kmolK, des Isentropenexponenten $\kappa = 1.4$ und der molaren Masse für Luft $\mathcal{M} = 28.79$ kg/kmol entspricht. Die Turbulenzmodellierung erfolgte mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell. Die Randbedingungen für die Turbulenzgrößen am Zuströmrand betrugen $k_1 = 45.375$ m^2/s^2 und $\epsilon_1 = 27508$ m^2/s^3. Für den Turbulenzgrad ist der Wert $Tu_1 = 0.05$ angenommen, die charakteristische Länge δ ist gleich 1% der Sehnenlänge.
Die Druckdifferenz $\Delta p = 0$ ist als Austrittsrandbedingung eingesetzt. Für den Referenzdruck ist der Wert $p_R = 101325$ Pa angenommen. Die Druckkorrektur ist mit dem high Mach number SIMPLE Verfahren durchgeführt.
An der Profiloberfläche ist für die Geschwindigkeit die Haftbedingung ($v_n = v_t = 0$) vorausgesetzt, für die Temperatur ist die Annahme der adiabaten Wand getroffen. Mit den Werten für die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0.0262$ J/msK, der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck $c_p = 1005$ J/kgK, der dynamischen Viskosität $\mu = 1.8545 \cdot 10^{-5}$ kg/ms und der Annahme der Referenztemperatur $T_R = 273$ K ist die Angabe der Randbedingungen und physikalischen Konstanten vollständig.
Bei der zusätzlichen Berechnung mit der erzwungenen Realizability bei dem Standard $k - \epsilon$ Modell blieben alle definierten Randbedingungen gleich, außer der turbulenten Dissipationsrate am Zuströmrand. Wie bei der Simulation der inkompressiblen Strömung, wurde ϵ_1 10 mal erhöht und betrug somit $\epsilon_{1_{10}} = 275080$ m^2/s^3.
Im Anhang B befindet sich das Commandfile für die Berechnung mit dem $k - \epsilon_{10}$ Modell.

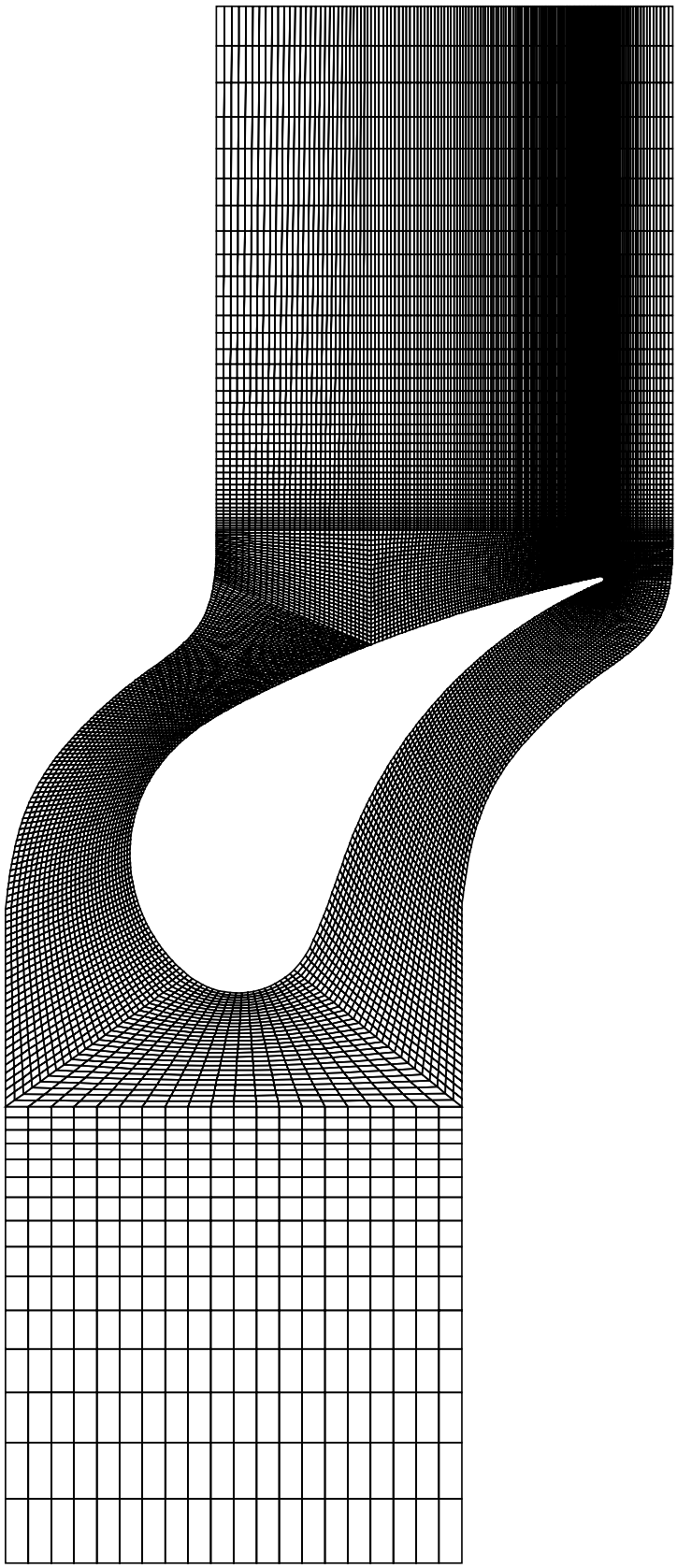

Abbildung 5.17: Netz der Struktur 10B für transsonische Strömung

5.2.2 Netzgenerierung

Das Rechennetz für die Behandlung der transsonischen Strömung (Abb. 5.17) ist über die Struktur 10B generiert. Im Vergleich zum Netz der inkompressiblen Strömung ist das neue Netz mit 18500 Zellen deutlich dichter ausgebildet. Bei der Verfeinerung wurde insbesondere auf den hinteren Bereich der Saugseite geachtet, da die genaue Lage des Verdichtungsstosses nicht vorhersagbar ist.

5.2.3 Lösungsmethodik

Die gleiche Methodik wie bei allen vorherigen Berechnungen ist auch in diesem Fall zum Einsatz gekommen. Auf der ersten Stufe (ca. 3000 Iterationen) erfolgte die Diskretisierung aller Größen mit dem HYBRID Schema. Weitere 6000 Iterationen sind ausgenommen der Turbulenzgroßen k und ϵ, für welche HYBRID weiter angewendet wurde, mit dem CCCT Schema durchgeführt. Obwohl für die Behandlung der Verdichtungsstösse ein dafür geeignetes Diskretisierungsschema (z.B. MIN-MOD) von Vorteil gewesen wäre, mußte auf diese Option verzichtet werden, da solche Verfahren nach [14] nur, falls der Verdichtungsstoß parallel zu einer der Koordinatenachsen ist, einwandfrei funktionieren. Der Versuch, das Diskretisierungsschema MIN-MOD in den Berechnungen zu verwenden, scheiterte an Konvergenzproblemen. Eine konvergierte Lösung konnte nicht erreicht werden.

5.2.4 Ergebnisse

Zur qualitativen Beurteilung der numerischen Ergebnisse wurden die Schlierenaufnahmen und gemessene sowie numerisch ermittelte Machzahlverteilungen entlang des Profils für eine ähnliche Gittergeometrie aus [1] herangezogen. Eine Vergleichsbasis für die Strömungsbedingungen liefert die isentrope Machzahl Ma_{2i}. Für die Ermittlung der isentropen Machzahl am Austritt wird eine isentrope Expansion im Turbinengitter lt. Abb. 5.18 angenommen.

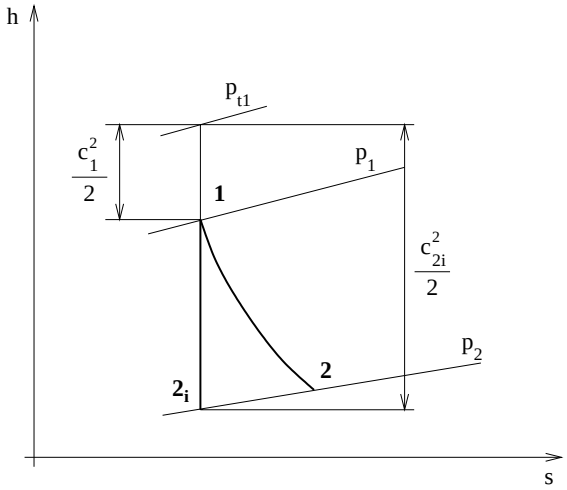

Abbildung 5.18: $h - s$ Diagramm der Expansion

Die Berechnung der Temperatur T_{2i} erfolgte nach Glg. 2.36 mit den Werten des statischen Druckes und der Temperatur am Zuströmrand sowie des Austrittdruckes. Aus Glg. 2.40 läßt sich die Geschwindigkeit c_{2i} bestimmen. Mit den berechneten Werten für T_{2i} und c_{2i} beträgt die Austrittsmachzahl für beide Simulationen $Ma_{2i} = 0.99$. Ähnlich ist die Verteilung der isentropen Machzahl am Profil aus der mit der „user subroutine“ USRPRT ausgeschriebenen Profildruckverteilung ermittelt.

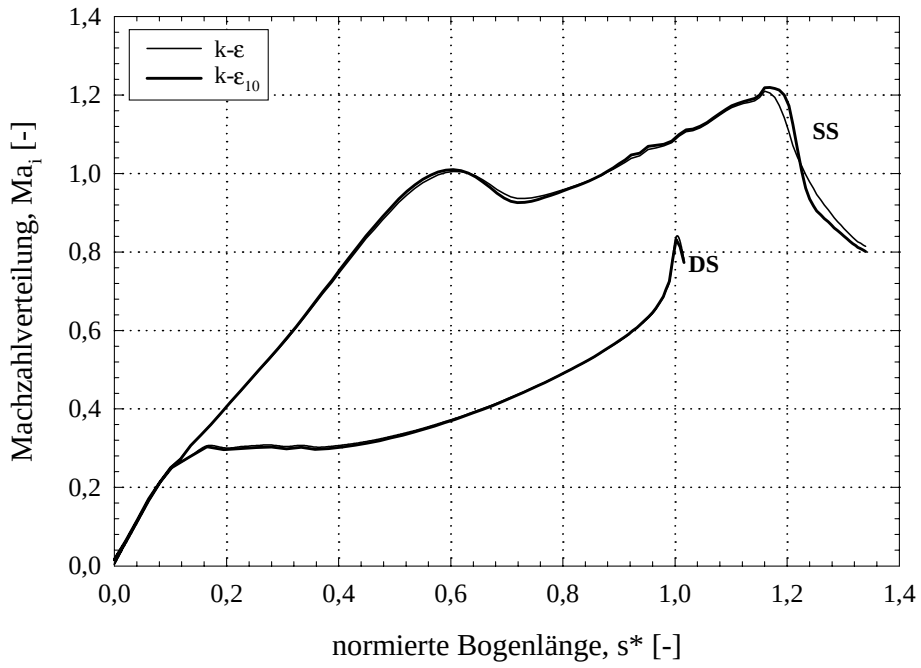

Abbildung 5.19: Isentrope Machzahlverteilung

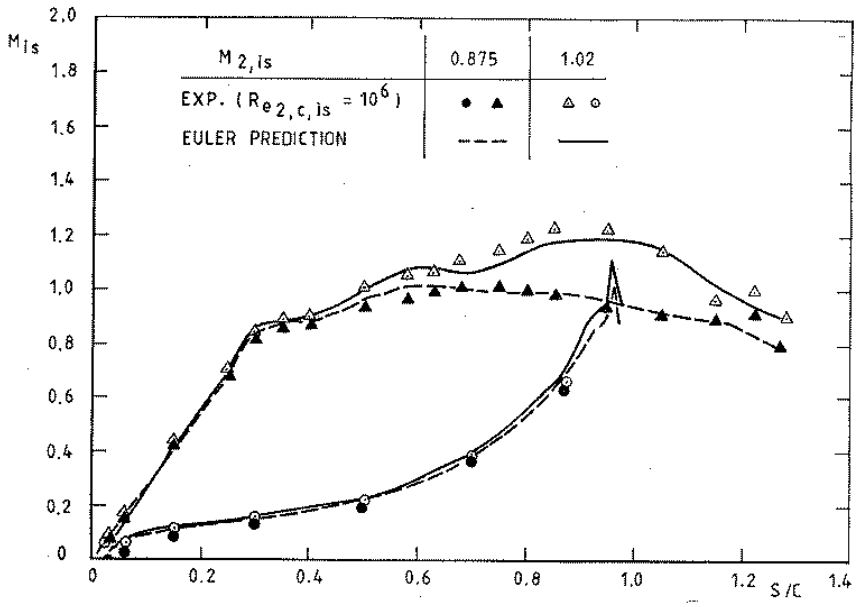

Abbildung 5.20: Isentrope Machzahlverteilung, [1]

Die isentrope Machzahlverteilung entlang der Druck- und Saugseite in Abhängigkeit von der normierten Bogenlänge s^* im Bezug auf die theoretische Staupunktlage ($x/s_x = 0$) ist in Abb. 5.19 dargestellt. Rund um die Profilnase ist die Strömung auf beiden Profilseiten gleichmäßig beschleunigt. Entlang der Saugseite ist danach die Strömung bis $s^* = 0.6$ (entspricht etwa der Lage des geometrisch engsten Kanalquerschnitts) stark beschleunigt mit anschließender kurzer Verzögerung bis $s^* \approx 0.7$. Ab diesem Punkt ist die Strömung durch die starke Umlenkung im hinteren Bereich der Saugseite wieder beschleunigt. Nach dem Durchgang durch den senkrechten Verdichtungsstoß ($s^* \approx 1.2$) stellt sich wieder die subsonische Strömung ein. Die instabile Machzahlverteilung im transsonischen Bereich ist auf die ungenügende räumliche Auflösung des Rechengebietes zurückzuführen. Nach der Beschleunigung um die Profilnase ist die Machzahl entlang der Druckseite bis zu $s^* = 0.4$ nahezu konstant, gefolgt von der stetigen Beschleunigung bis zur Hinterkante.
Die beiden Lösungen zeigen keinen Unterschied entlang der Profildruckseite. Auf der Saugseite ist bei der Berechnung mit der erzwungenen Realizability eine bessere Auflösung des senkrechten Verdichtungsstosses zu erkennen.
Die in Abb. 5.20 dargestellten isentropen Machzahlverläufe aus [1] dienten der Einschätzung der Treffsicherheit der durchgeführten Berechnungen.

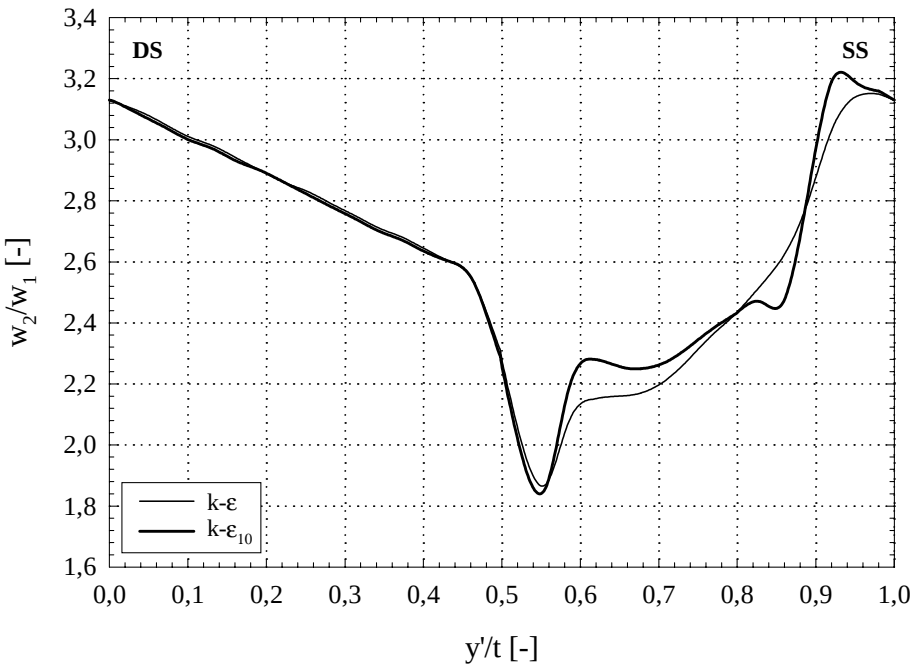

Abbildung 5.21: Verlauf von w_2/w_1 bei transsonischer Strömung

Abb. 5.21 zeigt den Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit in der Auswertungsebene, deren Lage der Meßebene im subsonischen Fall entspricht. Im Vergleich zum tiefen Unterschall lassen sich einige durch den senkrechten Verdichtungsstoß hervorgerufene Unterschiede erkennen. Der steile Geschwindigkeitsanstieg saugseitig von der Nachlaufdelle entspricht dem Durchgang durch den Verdichtungsstoß, die gleichmäßige Geschwindigkeitserhöhung an der Druckseite der Beschleunigung im Überschallgebiet. Der breite Bereich der niedrigen Geschwindigkeit saugseitig in der Nachlaufdelle kommt durch die Stoß-Grenzschicht Wechselwirkung zustande. Die Grenzschicht auf der Profilsaugseite, belastet mit dem Drucksprung infolge des Verdichtungsstosses, wächst schnell an, womit eine Steigerung der Profilverluste verbunden ist. Wie bei der Berechnung der inkompressiblen Strömung zeigen die beiden Simulationen druckseitig gleichen Geschwindigkeitsverlauf. Auch in diesem Fall wirkt sich die erhöhte turbulente Dissipationsrate am Zuströmrand positiv auf die Rechenergebnisse aus.

Saugseitig der Nachlaufdelle zeigt die mit dem $k-\epsilon_{10}$ Modell erreichte Lösung einen steileren Anstieg der Geschwindigkeit im Bereich des Verdichtungsstosses.
Im fast identischen Verlauf des Abströmwinkels im Nachlauf (Abb. 5.22) ist bei beiden Simulationen eine sprunghafte Änderung im Bereich der Nachlaufdelle zu sehen. Diese ensteht durch den sog. Keileffekt: die Strömungen unterschiedlicher Abströmwinkel von der Profildruck- und Saugseite stoßen unter einem Winkel zusammen, welcher durch das keilförmige Profilende bestimmt ist. Die anschließende Verwirbelung minimiert bei den niedrigeren Geschwindigkeiten die gegenseitige Wirkung der aufeinander treffenden Strömungen, so daß die Änderung des Abströmwinkels im Hinterkantenbereich glatt erfolgt. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten ist dies nicht mehr der Fall.

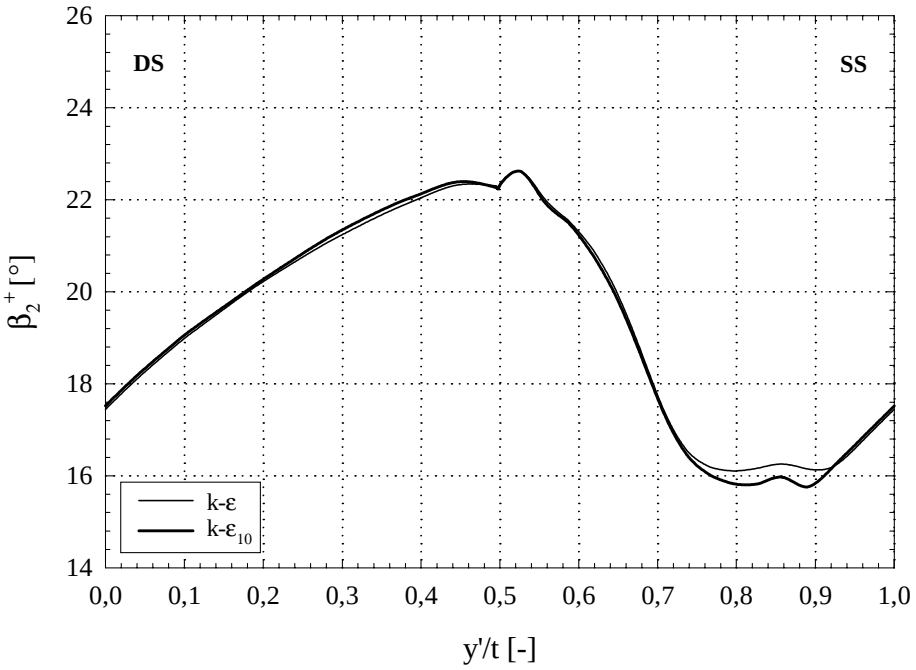

Abbildung 5.22: Verlauf von β_2^+ bei transsonischer Strömung

Die Verteilungen der tatsächlichen Machzahl im gesamten Rechengebiet sind in Abb. 5.23 für die Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell und in Abb. 5.24 für die Simulation mit der künstlich erzwungenen Realizability dargestellt. In beiden Fällen erreicht die Strömung im geometrisch engsten Querschnitt die Schallgeschwindigkeit nicht. Infolge der Einengung des Durchflußquerschnitts durch die Grenzschicht und die Nachlaufdelle verschiebt sich der effektive engste Kanalquerschnitt stromab vom geometrischen Minimum. Der effektive engste Querschnitt ist keine konstante Größe. Die Änderung des Gegendruckes bewirkt die Änderung des Abströmwinkels und somit des effektiven engsten Querschnitts. Durch die weitere Beschleunigung hinter dem geometrisch engsten Querschnitt bildet sich ein Überschallbereich mit dem anschließenden senkrechten Verdichtungsstoß. Aus der Schlierenaufnahme (Abb. 5.25) ist zu sehen, daß der Verdichtungsstoß von der durchlaufenden Nachlaufdelle beeinflußt ist, indem der Stoß an der Schnittstelle an seiner Stärke verliert. Dies ist auch bei den simulierten Strömungen zu erkennen. Der Vergleich dieser beiden Verteilungen deutet an, daß das gesamte Strömungsfeld von der Realizability des Turbulenzmodells beeinflußt ist. Eine Verschmierung der Überschallzone weit in der Abströmung tritt bei der Simulation mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell auf.

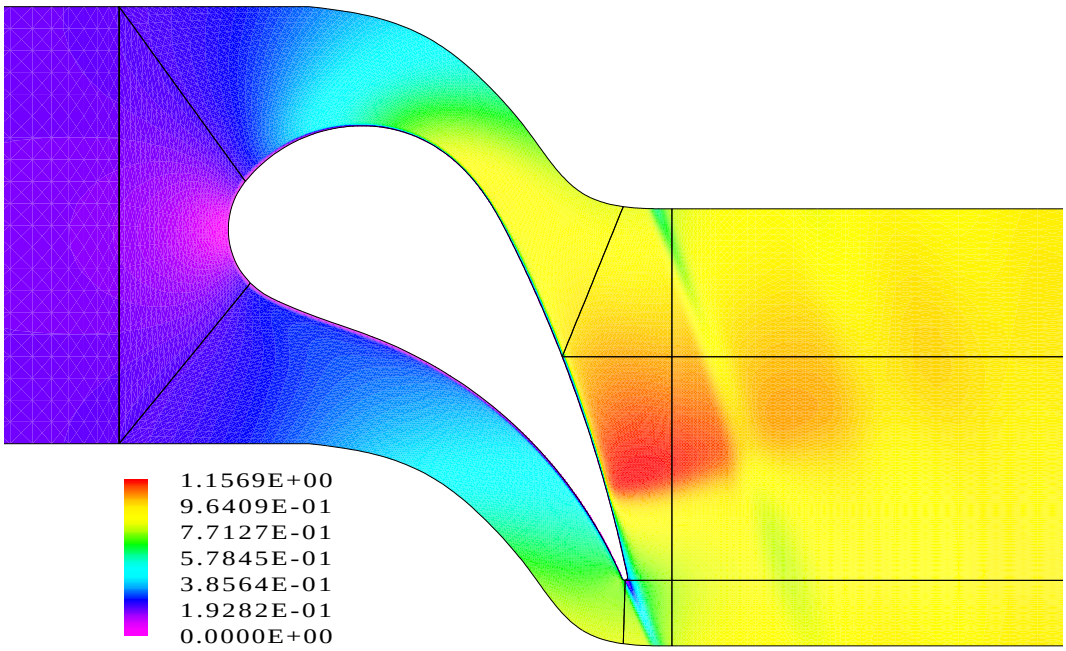

Abbildung 5.23: Machzahlverteilung, $k - \epsilon$

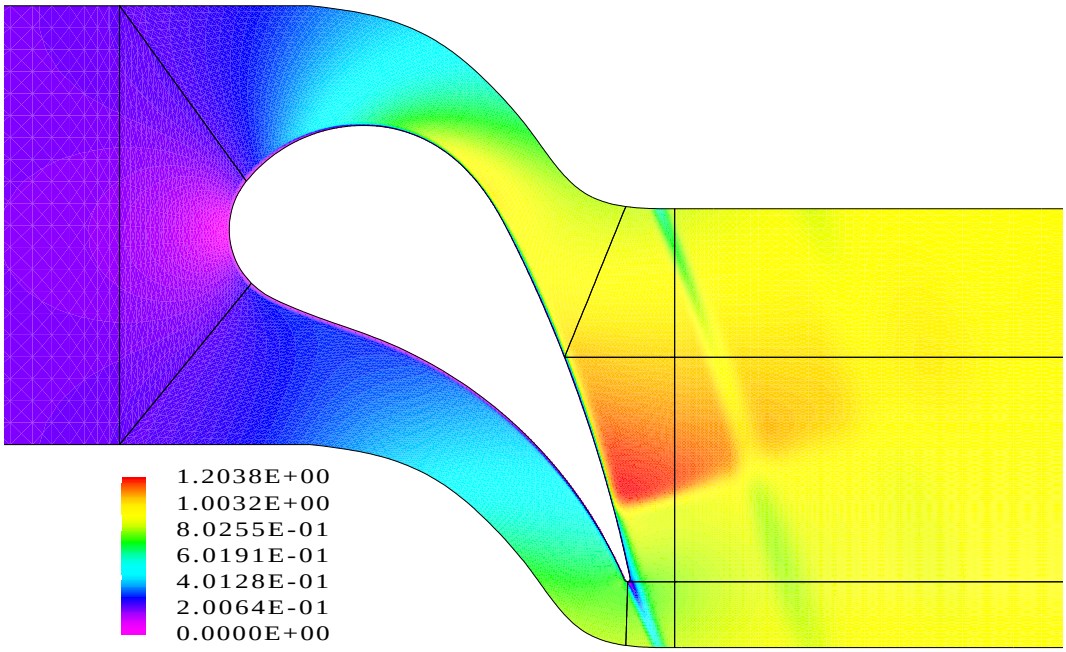

Abbildung 5.24: Machzahlverteilung, $k - \epsilon_{10}$

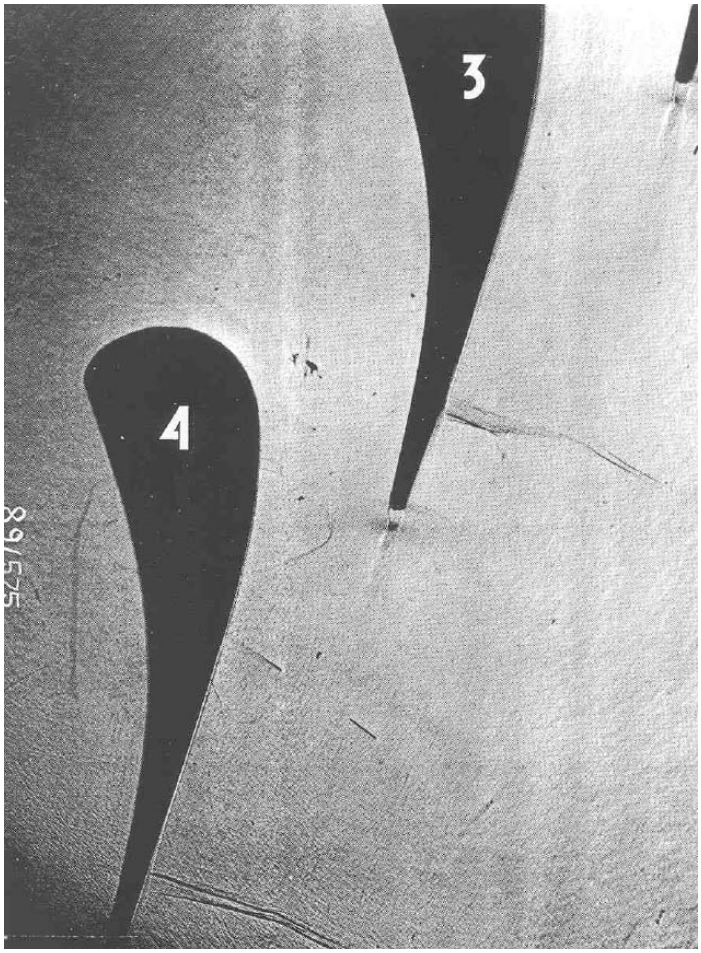

Abbildung 5.25: Schlierenaufnahme einer transsonischen Gitterströmung, $Ma_{2i} = 1.03$, [1]

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Aus Interesse an dem Verhalten im transsonischen Bereich eines bereits im Unterschall gemessenen und numerisch mit dem Finite-Elemente Programm FIDAP berechneten Turbinengitters entstand diese Diplomarbeit. Da für die transsonische Strömung keine Meßdaten vorlagen, sollte die Treffsicherheit des für die Berechnungen ausgewählten Programmpaketes CFX an einem Testfall überprüft und klassifiziert werden. Die in der Literatur ausführlich behandelte „Circular Arc Bump“ Konfiguration eignete sich sehr gut dazu. Die komplexe Strömung ähnelt der Durchströmung einer realer Beschaufelung und der geometrisch einfache Aufbau ließ gleichzeitig die problemspezifische Netzverfeinerung leichter durchführen. Die Netzqualität beeinflußte nur die Berechnung der transsonischen Strömung, insbesondere im Bereich des senkrechten Verdichtungsstosses. Sehr gute Übereinstimmung mit den aus der Literatur vorhandenen numerischen Resultaten für die reibungsfreie subsonische und transsonische Strömung wurde erreicht. Während bei der Simulation der reibungsbehafteten subsonischen Strömung die verwendeten Standard $k-\epsilon$ und low Reynolds number $k-\omega$ Modelle zu gleichen Resultaten führten, zeigten die Ergebnisse der Berechnungen der reibungsbehafteten transsonischen Strömung eine Abhängigkeit bezüglich des Turbulenzmodells. Die besten Resultate wies die Berechnung mit dem Menter-modifizierten $k-\omega$ Modell auf, welches danach bei der Simulation der transsonischen Strömung mit Ablösung der Grenzschicht eingesetzt wurde. Eine allgemeine Verbesserung der Ergebnisse ermöglichte der zweistufige Iterationsvorgang, indem anfangs die Diskretisierungsverfahren erster Ordnung den Vorgang stabilisierten und die auf der zweiten Stufe verwendeten Verfahren zweiter Ordnung für die Steigerung der Genauigkeit verantwortlich waren. Die gleiche Lösungsmethodik fand auch bei der Berechnung der Strömung im Turbinengitter Anwendung.
Sehr starken Einfluß auf die Ergebnisse bei der Simulation der Gitterströmung übte das verwendete Netz aus. Die Netzgenerierung mußte sorgfältig behandelt werden, um brauchbare Resultate überhaupt zu erhalten. Komplizierte Konfigurationen lassen sich mit dem blockstruktuierten CFX-Netzgenerator nicht sehr befriedigend vernetzen. Die Berechnung mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell zeigte sehr hohe Diskrepanzen im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen saugseitig in der Nachlaufdelle. Durch die Behandlung der Staupunktanomalie wurden die Abweichungen der numerischen Ergebnisse von den gemessenen Verläufen der Strömungsgrößen im Nachlauf minimiert. Alle Simulationen zeigten etwa gleiche Profildruckverteilung, welche der gemessenen ziemlich gut folgt. Unerwartet konnten die allgemein besten Ergebnisse mit dem Standard $k-\epsilon$ Modell, bei dem die Realizability künstlich erzwungen wurde, erzielt werden. Hauptsächlich sind bei dieser Berechnung nur die Totaldruckverluste zu hoch errechnet. Die Ursache dafür ist die als rein turbulent modellierte Grenzschicht und die numerische Dissipation. Die größte numerische Dissipation und somit die größte Abweichung der Totaldruckverluste ist bei der Berechnung mit dem Menter-modifizierten Modell zu sehen. Diese sind durch die sehr niedrige Qualität des für diese Simulation verwendeten

Netzes verursacht, dessen Verbesserung nicht möglich war.
Mit der Erhöhung der Eintrittsgeschwindigkeit gelang es, die mit dem senkrechten Verdichtungsstoß abgeschlossene Überschallzone an der Saugseite zu erreichen. Diese ist nicht nur von der Grenzschicht, sondern auch von der durchlaufenden Nachlaufdelle stark beeinflusst. Eine qualitative Beurteilung des transsonischen Strömungsfeldes erfolgte mit den Schlierenaufnahmen und Profilmachzahlverteilungen einer auch stark umgelenkten Turbinengitterströmung aus [1]. Auch hier half die erzwungene Realizability bei dem Standard $k - \epsilon$ Modell seine Effizienz zu verbessern.
Auf Grund der Ergebnisse aus allen durchgeführten Berechnungen läßt sich behaupten, daß der CFX-Solver in der Lage ist, gute Lösungen der komplizierten transsonischen Strömungen zu liefern und die Strömungseffekte, wie z.B. die Grenzschichtablösung und Verdichtungsstösse, wiederzugeben. Die Qualität der erreichten Lösung ist sehr stark von der Vernetzung des Rechengebietes, dem verwendeten Turbulenzmodell und dem Diskretisierungsschema abhängig. Lassen sich die einfachen Konfigurationen wegen der relativ kleinen Blockanzahl und der geringfügigen Blockverzerrung ziemlich leicht vernetzen, so sind die komplexeren Blockstrukturen sehr vorsichtlich zu behandeln. Insbesondere ist die Vernetzung der Blöcke mit stark gekrümmten Blockgrenzen, wenn sich diese zusätzlich in Gebieten hoher Gradienten befinden, zu aufwendig. Die Eigenschaften des generierten Netzes (Zellenrichtung, Grad der Unterschiede in Zellengrößen an den Blockübergängen usw.) beschränken die zur Wahl stehende Anzahl der Diskretisierungsverfahren. Die mangelhafte Vernetzung des Rechengebietes bei der Simulation der transsonischen Gitterströmung verhinderte die Anwendung des für die Strömung mit den Verdichtungsstössen am besten geeigneten Verfahrens, welches bei der Berechnung des Strömungsfeldes im Kanal mit der Verengung zur Steigerung der Genauigkeit führte.
Die Ungenauigkeit der mit dem Standard $k - \epsilon$ Modell erreichten Lösung läßt sich bei einer zusätzlichen Berechnung einigermaßen verringern, indem die Realizability dieses Modells durch die Erhöhung des Wertes der Dissipationsrate am Eintritt des Rechengebietes künstlich erzwungen wird. Der Einfluß der Realizability auf die Entwicklung der Grenzschicht und somit auf die Reibungsverluste ist sehr groß bei den stark umgelenkten Gitterströmungen. Daher ist es vom Vorteil, bei der Simulation solcher Strömungen die Turbulenzmodelle anzuwenden, die zur Behandlung der Staupunktanomalie geeignet sind.
Allerdings sollten auf jeden Fall zur Überprüfung der numerischen Resultate experimentelle Ergebnisse herangezogen werden. Die guten Ergebnisse aus der Simulationen der tiefen subsonischen Strömung im Turbinengitter wurden erst nach mehreren Versuchen erzielt. Die Analyse der numerischen Resultate und deren Abweichungen von den experimentellen half bei der Auswahl der numerischen Mittel, welche dann eingesetzt wurden und die Qualität der nächsten Lösung erhöhten. Mangels der experimentellen Ergebnisse für die transsonische Gitterströmung ist die Frage offen geblieben, wie genau die numerische Berechnung dieser Strömung ist.

Ausblick

Die im Zuge dieser Diplomarbeit gewonnenen Erkenntnisse könnten als Ansatzpunkte für weitere experimentelle und numerische Arbeiten auf dem Gebiet der transsonischen Strömungen dienen.
Eine Windkanalmessung im transsonischen Bereich des bereits numerisch behandelten Gitters wäre wünschenswert. Die Profildruckverteilung, sowie die Verläufe der Strömungsgrößen im Nachlauf könnten zur Verifizierung der numerisch ermittelten Daten dienen. Höchstwahrscheinlich wären dann weitere Simulationen zur eventuellen Steigerung der Genauigkeit der numerischen Resultate notwendig. Sollten die Ergebnisse befriedigend sein, so könnte eine dreidimensionale, vielleicht auch instationäre Strömung mit dem CFX-Solver berechnet wer-

den, anhand welcher die Auswirkung der Kanal- sowie Hufeisenwirbels auf die Strömungsverluste verfolgt werden könnte. Die Voraussetzung für diese Berechnung wäre eine geschickte Vernetzung des Rechengebietes.
Ein weiterer Vorschlag wäre, die Berechnung der transsonischen Strömung in einem Verdichtergitter durchzuführen. Die transsonische Strömungen treten nicht nur in den vorderen Stufen in den mit dem grossen Massenstrom arbeitenden Axialverdichtern auf. Auch bei Maschinen, die im Normalbetrieb subsonisch arbeiten, können bei Leitschaufelverstellung im Betrieb transsonische Strömungsbedingungen erscheinen. Da im Vergleich zu den Turbinengitter die Verdichtergitter aus wesentlich schlankeren Profilen gebildet sind, sollte die Netzgenerierung mit weniger Problemen verbunden sein, falls die Simulation der Strömung mit dem CFX Programmpaket erfolgen sollte.

Anhang A

USRPRT-File für Berechnung der transsonischen Kanalströmung

```
      SUBROUTINE USRPRT(ICALL,IWHEN,IFLAGP,MPLANE,IPLANE,CBLOCK,DUMMY
     +                  ,IPRV,IPRG
     +                  ,U,V,W,P,VFRAC,DEN,VIS,TE,ED,RS,T,H,RF,AMF
     +                  ,COMB,USRSCL,VFMUS
     +                  ,XP,YP,ZP,VOL,AREA,VPOR,ARPOR,WFACT,CONV,IPT
     +                  ,IBLK,IPVERT,IPNODN,IPFACN,IPNODF,IPNODB,IPFACB
     +                  ,WORK,IWORK,CWORK)
C
C*********************************************************************
C
C   THIS SUBROUTINE IS CALLED BY THE FOLLOWING SUBROUTINE
C         CUSR  WRTVAR
C
C*********************************************************************
  Standardzeilen des USRPRT-Files
  ..............
  ..............
  ..............
C*********************************************************************
C
      LOGICAL LDEN,LVIS,LTURB,LTEMP,LBUOY,LSCAL,LCOMP
     +       ,LRECT,LCYN,LAXIS,LPOROS,LTRANS
C
      CHARACTER*(*) CWORK,CBLOCK
C
C+++++++++++++++++ USER AREA 1 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
      INTEGER WL,N,M,DR
C
      PARAMETER (WL= 4)
C
      CHARACTER*32 WALLS(WL)
C
      REAL XNODE(NNODE-NCELL),ARRMACH(NNODE-NCELL),DRUCK(NNODE-NCELL),
     1       YPSPLUS(NNODE-NCELL)
```

```
C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 1 +++++++++++++++++++++++++++++++++
  Standardzeilen des USRPRT-Files
  ...............
  ...............
C+++++++++++++++++ USER AREA 2 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C---- AREA FOR USERS TO DECLARE THEIR OWN COMMON BLOCKS
C     THESE SHOULD START WITH THE CHARACTERS 'UC' TO ENSURE
C     NO CONFLICT WITH NON-USER COMMON BLOCKS
C
C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 2 +++++++++++++++++++++++++++++++++
  Standardzeilen des USRPRT-Files
  ...............
  ...............
C+++++++++++++++++ USER AREA 3 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C---- AREA FOR USERS TO DIMENSION THEIR ARRAYS
C
C---- AREA FOR USERS TO DEFINE DATA STATEMENTS
C
C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 3 +++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C---- STATEMENT FUNCTION FOR ADDRESSING
      IP(I,J,K)=IPT((K-1)*ILEN*JLEN+(J-1)*ILEN+I)
C
C----VERSION NUMBER OF USER ROUTINE AND PRECISION FLAG
C
      IVERS=3
      ICHKPR = 1
C
C+++++++++++++++++ USER AREA 4 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C---- TO USE THIS USER ROUTINE FIRST SET IUSED=1
C
       IUSED=1
C
C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 4 +++++++++++++++++++++++++++++++++
C
       IF (IUSED.EQ.0) RETURN
C
C---- FRONTEND CHECKING OF USER ROUTINE
       IF (IUCALL.EQ.0) RETURN
C
C+++++++++++++++++ USER AREA 5 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C      IWHEN             = 1  INITIALISATION
C      IWHEN             = 2  END OF ITERATION - NITER
C      IWHEN             = 3  END OF TIME STEP - KSTEP
C      IWHEN             = 4  END OF RUN
C
C      IFLAGP            = 1  PRINT DATA ON THIS CALL
C
       Standardbeschreibungen
       ............
```

```
       ............
C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 5 +++++++++++++++++++++++++++++++++
C
       IF (ICALL.EQ.2) THEN
C
C+++++++++++++++++ USER AREA 6 ++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
C
C---- PRINT THE USERS DATA
C
      IF (IWHEN.EQ.4) THEN
      IPHASE=1
      WALLS(1)='Wand_un1'
      WALLS(2)='Wand_un2'
      WALLS(3)='Wand_un3'
      WALLS(4)='Wand_un4'
C
      CALL GETSCA('YPLUS',IYPLUS,CWORK)
      OPEN(90,FILE='YPLUS.USR',STATUS='NEW')
C
      DO 104 N=2,3
      CALL IPREC(WALLS(N),'PATCH','CENTRES',IPT,ILEN,
     1           JLEN,KLEN,CWORK,IWORK)
      M=0
      DO 103 K=1,KLEN,2
       DO 102 J=JLEN,1,2
        DO 101 I=1,ILEN,2
        M=M+1
        INODE=IP(I,J,K)
        XNODE(M)=XP(INODE)
        YPSPLUS(M)=USRSCL(INODE,1,IYPLUS)
      WRITE(90,100) XNODE(M),YPSPLUS(M)
C
100   FORMAT (2F12.3)
C
101     CONTINUE
102    CONTINUE
103   CONTINUE
104   CONTINUE
C
      CLOSE(90)
C
      CALL GETVAR('USRPRT','P      ',IPR)
      OPEN(92,FILE='DRUCK_UN.USR',STATUS='NEW')
C
      DO 114 N=1,WL
      CALL IPREC(WALLS(N),'PATCH','CENTRES',IPT,ILEN,
     1           JLEN,KLEN,CWORK,IWORK)
      M=0
      DO 113 K=1,KLEN,2
       DO 112 J=JLEN,1,2
        DO 111 I=1,ILEN,2
```

```
        M=M+1
        INODE=IP(I,J,K)
        DRUCK(M)=P(INODE,1)
        XNODE(M)=XP(INODE)
      WRITE(92,100) XNODE(M),DRUCK(M)
C
110   FORMAT (2F12.3)
C
111     CONTINUE
112    CONTINUE
113   CONTINUE
114   CONTINUE
C
      CLOSE(92)
C
      CALL GETSCA('MACH NUMBER',IMACH,CWORK)
      OPEN(93,FILE='MACH_UN1.USR',STATUS='NEW'
C
      CALL IPREC(WALLS(1),'PATCH','CENTRES',IPT,ILEN,
     1           JLEN,KLEN,CWORK,IWORK)
      M=0
      DO 123 K=1,KLEN,2
       DO 122 J=JLEN,1,2
        DO 121 I=1,ILEN,2
        M=M+1
        INODE=IP(I,J,K)
        XNODE(M)=XP(INODE)
        ARRMACH(M)=USRSCL(INODE,1,IMACH)
      WRITE(93,100) XNODE(M),ARRMACH(M)
C
120   FORMAT (2F12.3)
C
121     CONTINUE
122    CONTINUE
123   CONTINUE
C
      CLOSE(93)
C
      CALL GETSCA('MACH NUMBER',IMACH,CWORK)
      OPEN(94,FILE='MACH_UN4.USR',STATUS='NEW')
C
      CALL IPREC(WALLS(4),'PATCH','CENTRES',IPT,ILEN,
     1           JLEN,KLEN,CWORK,IWORK)
      M=0
      DO 133 K=1,KLEN,2
       DO 132 J=JLEN,1,2
        DO 131 I=1,ILEN,2
        M=M+1
        INODE=IP(I,J,K)
        XNODE(M)=XP(INODE)
        ARRMACH(M)=USRSCL(INODE,1,IMACH)
```

```
      WRITE(94,100) XNODE(M),ARRMACH(M)
C
130   FORMAT (2F12.3)
C
131     CONTINUE
132    CONTINUE
133   CONTINUE
C
      CLOSE(94)
C
      WALLS(1)='Wand_ob1'
      WALLS(2)='Wand_ob2'
      WALLS(3)='Wand_ob3'
      WALLS(4)='Wand_ob4'
C
      CALL GETSCA('MACH NUMBER',IMACH,CWORK)
      OPEN(95,FILE='MACH_OB.USR',STATUS='NEW')
C
      DO 204 N=1,WL
      CALL IPREC(WALLS(N),'PATCH','CENTRES',IPT,ILEN,
     1           JLEN,KLEN,CWORK,IWORK)
      M=0
      DO 203 K=1,KLEN,2
       DO 202 J=JLEN,1,2
        DO 201 I=1,ILEN,2
        M=M+1
        INODE=IP(I,J,K)
        XNODE(M)=XP(INODE)
        ARRMACH(M)=USRSCL(INODE,1,IMACH)
      WRITE(95,100) XNODE(M),ARRMACH(M)
C
200   FORMAT (2F12.3)
C
201     CONTINUE
202    CONTINUE
203   CONTINUE
204   CONTINUE
C
      CLOSE(95)

C+++++++++++++++++ END OF USER AREA 6 +++++++++++++++++++++++++++++++++
C
      ENDIF
      ENDIF
C
      RETURN
      END
```

Anhang B

CFX-Commandfile für transsonische Gitterströmung

```
>>CFX4
  >>SET LIMITS
    TOTAL INTEGER WORK SPACE 7000000
    TOTAL CHARACTER WORK SPACE 2000
    TOTAL REAL WORK SPACE 12000000
    MAXIMUM NUMBER OF BLOCKS 10
    MAXIMUM NUMBER OF PATCHES 100
    MAXIMUM NUMBER OF INTER BLOCK BOUNDARIES 20
  >>OPTIONS
    TWO DIMENSIONS
    BODY FITTED GRID
    CARTESIAN COORDINATES
    TURBULENT FLOW
    HEAT TRANSFER
    COMPRESSIBLE FLOW
    STEADY STATE
    USER SCALAR EQUATIONS 2
  >>USER FORTRAN
    USRPRT
  >>VARIABLE NAMES
    U VELOCITY 'U VELOCITY'
    V VELOCITY 'V VELOCITY'
    W VELOCITY 'W VELOCITY'
    PRESSURE 'PRESSURE'
    DENSITY 'DENSITY'
    VISCOSITY 'VISCOSITY'
    K 'K'
    EPSILON 'EPSILON'
    TEMPERATURE 'TEMPERATURE'
    ENTHALPY 'ENTHALPY'
    USER SCALAR1 'YPLUS'
    USER SCALAR2 'MACH NUMBER'
>>MODEL TOPOLOGY
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'PER_B1'
```

```
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-1'
    PATCH TYPE 'PERIODIC'
    LOW I
    HIGH I
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED3_2'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-3'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    LOW J
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED4_1'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-4'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    HIGH J
    >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED5_2'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-5'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    LOW J
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED7_1'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-7'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    HIGH J
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED8_2'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-8'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    LOW I
  >>CREATE PATCH
    PATCH NAME 'MATCHED10_1'
    BLOCK NAME 'BLOCK-NUMBER-10'
    PATCH TYPE 'INTER BLOCK BOUNDARY'
    HIGH I
  >>CYCLIC CONNECTIONS
    Y CYCLE LENGTH 8.0000E-02
  >>GLUE PATCHES
    FIRST PATCH NAME 'MATCHED4_1'
    SECOND PATCH NAME 'MATCHED3_2'
    ORIENTATION CHANGE 'HIGH I' 'HIGH J' 'HIGH K'
  >>GLUE PATCHES
    FIRST PATCH NAME 'MATCHED7_1'
    SECOND PATCH NAME 'MATCHED5_2'
    ORIENTATION CHANGE 'HIGH I' 'HIGH J' 'HIGH K'
  >>GLUE PATCHES
    FIRST PATCH NAME 'MATCHED10_1'
    SECOND PATCH NAME 'MATCHED8_2'
    ORIENTATION CHANGE 'HIGH I' 'HIGH J' 'HIGH K'
>>MODEL DATA
  >>DIFFERENCING SCHEME
    ALL EQUATIONS 'CCCT'
```

```
    K 'HYBRID'
    EPSILON 'HYBRID'
  >>RHIE CHOW SWITCH
    IMPROVED
    QUADRATIC EXTRAPOLATION
    MULTIPHASE DAMPING
    STANDARD RESISTANCE TREATMENT
    HARMONIC AVERAGING OF COEFFICIENTS
  >>TITLE
    PROBLEM TITLE 'SCHAUFEL-KOMPRESSIBEL'
  >>WALL TREATMENTS
    WALL PROFILE 'LOGARITHMIC'
    NO SLIP
  >>PHYSICAL PROPERTIES
    >>COMPRESSIBILITY PARAMETERS
      FULLY COMPRESSIBLE
      UNIVERSAL GAS CONSTANT 8.3140E+03
      FLUID MOLECULAR WEIGHT 2.8950E+01
      REFERENCE PRESSURE 1.0133E+05
      HIGH MACH NUMBER SIMPLE ALGORITHM
    >>FLUID PARAMETERS
      VISCOSITY 1.8545E-05
    >>HEAT TRANSFER PARAMETERS
      THERMAL CONDUCTIVITY 2.6220E-02
      FLUID SPECIFIC HEAT 1.004E+03
      ENTHALPY REFERENCE TEMPERATURE 2.7300E+02
    >>TURBULENCE PARAMETERS
      >>TURBULENCE MODEL
        TURBULENCE MODEL 'K-EPSILON'
      >>TURBULENCE CONSTANTS
        CMU 9.0000E-02
        C1 1.4400E+00
        C2 1.9200E+00
        C3 0.0000E+00
        CAPPA 4.1870E-01
      >>TURBULENT PRANDTL NUMBER
        ENTHALPY 9.0000E-01
      >>LOGLAYER CONSTANT
        VELOCITY 9.7930E+00
        YPLUS 0.0000E+00
      >>SUBLAYER THICKNESS
        VELOCITY 1.1225E+01
        ENTHALPY 1.1225E+01
>>SOLVER DATA
  >>PROGRAM CONTROL
    MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS 6000
    MASS SOURCE TOLERANCE 1.0000E-06
    ITERATIONS OF TURBULENCE EQUATIONS 3
    ITERATIONS OF VELOCITY AND PRESSURE EQUATIONS 1
    ITERATIONS OF TEMPERATURE AND SCALAR EQUATIONS 1
    ITERATIONS OF HYDRODYNAMIC EQUATIONS 1
```

```
    SOLVER DEBUG PRINT STREAM 20
  >>EQUATION SOLVERS
    U VELOCITY 'BLOCK STONE'
    V VELOCITY 'BLOCK STONE'
    PRESSURE 'GENERAL AMG'
    K 'BLOCK STONE'
    EPSILON 'BLOCK STONE'
    ENTHALPY 'BLOCK STONE'
    YPLUS 'BLOCK STONE'
    MACH NUMBER 'BLOCK STONE'
  >>PRESSURE CORRECTION
    SIMPLEC
  >>REDUCTION FACTORS
    U VELOCITY 2.5000E-02
    V VELOCITY 2.5000E-02
    PRESSURE 1.0000E-02
    K 2.5000E-01
    EPSILON 2.5000E-01
    ENTHALPY 1.0000E-01
    YPLUS 1.0000E-01
    MACH NUMBER 1.0000E-01
  >>SWEEPS INFORMATION
    >>MAXIMUM NUMBER
      U VELOCITY 5
      V VELOCITY 5
      PRESSURE 30
      K 20
      EPSILON 20
      YPLUS 5
    >>MINIMUM NUMBER
      U VELOCITY 1
      V VELOCITY 1
      PRESSURE 1
      K 5
      EPSILON 5
      YPLUS 1
  >>UNDER RELAXATION FACTORS
    U VELOCITY 5.0000E-01
    V VELOCITY 5.0000E-01
    PRESSURE 5.0000E-01
    VISCOSITY 5.0000E-01
    K 5.0000E-01
    EPSILON 5.0000E-01
    ENTHALPY 5.0000E-01
    YPLUS 5.0000E-01
    MACH NUMBER 5.0000E-01
>>MODEL BOUNDARY CONDITIONS
  >>INLET BOUNDARIES
    PATCH NAME 'EINTRITT'
    U VELOCITY 1.1000E+02
    V VELOCITY 0.0000E+00
```

```
    K 4.5375E+01
    EPSILON 2.7508E+05
    TEMPERATURE 2.8390E+02
  >>PRESSURE BOUNDARIES
    PATCH NAME 'AUSTRITT'
    PRESSURE 0.0000E+00
    STATIC PRESSURE SPECIFIED
>>OUTPUT OPTIONS
  >>LINE GRAPH DATA
    EACH ITERATION
    FILE NAME 'RES.USR'
    ALL VARIABLES
    RESIDUAL
>>STOP
```

Literaturverzeichnis

[1] *Arts, T., Lambert de Rouvroit, M., Rutherford, A. W.* : Aero-Thermal Investigation of a Highly Loaded Transonic Linear Turbine Guide Vane Cascade. von Kármán Institute for Fluid Dynamics, TN 174, September 1990.

[2] *Bölcs, A., Suter, P.*: Transsonische Turbomaschinen. G. Braun, Karlsruhe, 1986.

[3] CFX - 4.2: SOLVER. AEA Technology, 1997.

[4] *Délery, J. M.*: Experimental Investigation of Turbulence Properties in Transonic Schock/Boundary-Layer Interactions. AIAA Journal, Vol.21, No.2, February 1983, 180-185.

[5] *Durbin, P. A.*: On the $k - \epsilon$ Stagnation Point Anomaly. Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol.17, No.1, February 1996.

[6] *Eidelman, S., Colella, P., Shreeve, R. P.*: Application of the Godunov Method and Its Second-Order Extension to Cascade Flow Modeling. AIAA Journal, Vol.22, No.11, November 1984, 1609-1615.

[7] *Kays, W. M., Crawford, M. E.*: Convective Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill, 1980.

[8] *Menter, F. R.*: Improved Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows. NASA TM 103975, October 1992.

[9] *Menter, F. R.*: Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. AIAA Journal, Vol.32, No.8, August 1994, 1598-1605.

[10] *Moore, J. G., Moore, J.*: Realizability in Turbulence Modeling for Turbomachinery CFD. ASME Paper 99-GT-24.

[11] *Ni, R.-H.*: A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations. AIAA Journal, Vol.20, No.11, November 1982, 1565-1571

[12] *Rexroth, C.-H., Seibert, W., Schmitz, M.*: CFD: Ein effizientes Werkzeug im industriellen Designprozeß. VDI Berichte, NR. 1425, 1998, 45-54.

[13] *Schetz, J. A., Fuhs, A.E., editors*: Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery - Vol.1. John Willey & Sons, 1996.

[14] *Schetz, J. A., Fuhs, A.E., editors*: Handbook of Fluid Dynamics and Fluid Machinery - Vol.2. John Willey & Sons, 1996.

[15] *Truckenbrodt, E.*: Fluidmechanik - Band1. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[16] *Truckenbrodt, E.*: Fluidmechanik - Band2. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.

[17] *Widhalm, M.*: Berechnung der ebenen kompressiblen turbulenten Strömung in einem Turbinengitter. Diplomarbeit, TU Wien, 1997.

[18] *Willinger, R.*: Rechnergestützte Auslegung Thermischer Turbomaschinen und Thermischer Energieanlagen. Vorlesung, 1999.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis