



## Ein Vorschlag für die Homogenisierung des österreichischen Festpunktnetzes<sup>1</sup>

Josef Jansa, Lukas Augustin, Wien

### Kurzfassung

In Österreich stellt sich in nächster Zeit für das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen die Aufgabe, die gesamte Landesvermessung auf ein einheitliches, homogenes Referenzsystem, das ETRS89, umzustellen. Es wird ein Verfahren, basierend auf der „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ (oft auch als „Lineare Prädiktion“ bezeichnet) vorgeschlagen, durch welche mit relativ geringem Aufwand die Umstellung auch für Massenpunkte erfolgen kann. Grundlage bilden die mit GPS gemessenen Homogenisierungsvektoren an den Punkten des hochrangigen Triangulationsnetzes. Das Verfahren wird im Detail beschrieben und anhand eines Testgebietes in Vorarlberg wird gezeigt, dass es praxistauglich ist und die geforderten Genauigkeiten eingehalten werden können.

### Summary

One of the imminent tasks of the Austrian Federal Office is the transformation of the current national reference system in one unique and homogeneous European reference frame, the ETRS89. Here an approach is presented based on the „Least Squares Interpolation“ (often referred to as „Linear Prediction“) which is able to perform this transformation by investing relatively little effort. As foundation GPS measured homogenisation vectors at the points of the high order triangulation network are used. The approach is described in detail and a test example in Vorarlberg demonstrates its usability as far as its practicability and accuracy requirements are concerned.

### 1. Einleitende Bemerkungen

Nach dem österreichischen Vermessungsgesetz sind durch die Landesvermessung die Grundlagen herzustellen, auf denen alle weiteren amtlichen Vermessungen aufbauen können. Dazu gehört die Schaffung und Erhaltung eines engmaschigen Festpunktfeldes. Dieses Festpunktfeld ist österreichweit im sogenannten Gebrauchssystem des ehemaligen Militär-Geographischen Institutes (MGI) vorhanden, wobei, je nach Bedeutung der Punkte, verschiedene Ordnungen unterschieden werden. Etwa 59000 Triangulierungspunkte (TP) mit einem durchschnittlichen Abstand von 1,5 km bilden die höchste Ordnung und waren am aufwendigsten und genauesten vermessen worden, sind sehr gut stabilisiert und sind sowohl in der Lage als auch größtenteils in der Höhe bekannt. Der mittlere Punktlagefehler darf maximal  $\pm 5$  cm sein. Davon abgeleitet sind die etwa 300000 Einschaltpunkte (EP), für welche ein durchschnittlicher Abstand von 500 m angestrebt wird. Sie sind nur lagemäßig bekannt, auch ihre Stabilisierung ist nicht sehr aufwendig ausgeführt. EPs wurden zum größten Teil durch terrestrische Vermessung erhalten, manche wurden bis Mitte der 70-er Jahre über photogrammetrische Auswertung bestimmt. Wegen ihrer räumlichen Dichte sind die EPs im wesentlichen jene Punkte, die für die Grenzvermessung herangezogen werden. Ihr mittlerer Punktlagefehler darf laut Vermessungsverordnung  $\pm 7$  cm nicht überschreiten.

GPS hat in der Zwischenzeit die klassischen Vermessungsverfahren zu einem großen Teil abgelöst. Es ist fast lückenlos verfügbar und liefert noch dazu eine homogene geometrische Grundlage über den gesamten Hoheitsbereich. Damit werden auch die Schwächen der bisherigen Vermessung, trotz der damals angewandten Sorgfalt, offensichtlich. Netzspannungen werden sichtbar und führen zu Widersprüchen bei den Vermessungsarbeiten. Außerdem stand man vor der Aufgabe, auch europaweit für einheitliche Vermessungsgrundlagen zu sorgen und auf des ETRS89 (European Terrestrial Reference System) überzugehen [3]. Eine Homogenisierung wurde unabwendbar erkannt und ist daher dringend anzugehen. Es sei hier darauf hingewiesen, dass diese Problematik nicht österreichspezifisch ist. Ein Beispiel aus Deutschland ist in [2] nachzulesen.

Wegen der ungeheuren Datenmenge – schließlich ist die gesamte Grenzpunktvermessung im Kataster davon betroffen – ist es in der Praxis unmöglich, mit vernünftigem Aufwand an Zeit und Geld alle Einzelpunkte durch GPS-basierte Nachmessungen auf einen einheitlichen Stand zu bringen. Es sind deshalb in einem ersten Schritt Überlegungen anzustellen, wie man mit minimalem Aufwand eine akzeptable Homogenität erreichen könnte.

Eine Vorgangsweise soll in der Folge näher beschrieben werden. Sie wurde anhand eines Testbereiches sorgfältig überprüft, hat die verlangten Kriterien erfüllt und kann somit als eine mögliche Variante vorgeschlagen werden.

### 2. Der Interpolationsansatz

#### 2.1. Allgemeine Überlegungen

Es erscheint sinnvoll, zumindest das hochrangige Triangulationsnetz durchgehend mit GPS nachzumessen und vorerst die EPs nicht in die Nachmessungen einzubeziehen. Wenn auch dieser Aufwand nicht gering ist, so

---

<sup>1</sup> Diese Arbeit hat die Österreichische Geodätische Kommission (ÖGK) initiiert und in einigen Sitzungen behandelt. Der Präsident der ÖGK, Prof. F. Brunner, hat die Veröffentlichung in der VGI angeregt. Vom BEV standen dankenswerterweise Herr Dr. Erker und Herr Dr. Noe zur Verfügung.

schafft man damit eine geometrisch solide Grundlage, auf welche man die weitere Strategie aufbauen kann. Die Dichte des Triangulationsnetzes wiederum garantiert, dass der „Homogenisierungstrend“ ausreichend genau erfasst wird. Die Homogenisierungsfunktion kann als eine stetige Funktion angesehen werden, Bruchstellen oder unerwartet plötzliche Abweichungen sollten nicht auftreten. Es ist daher die Aufgabe, eine geeignete Homogenisierungsfunktion zu finden, die imstande ist, flexibel aber genau die Abweichungen des GPS-basierten Netzes vom derzeitigen Gebrauchsnetz zu modellieren. Ist diese Funktion gefunden und deren Parameter bestimmt, so können damit beliebige andere Punkte, das sind im konkreten Fall die EPs und die Grenzpunkte, in das homogenisierte Netz transformiert werden.

Folgende Fragen sind daher zu klären:

- Welcher mathematische Ansatz eignet sich für diese Aufgabe?
- Ist das Triangulationsnetz in sich homogen genug, sodass ein Interpolationsansatz ein geeignetes Modell darstellt?
- Reichen die Triangulationspunkte aus, um die Funktion aufzustellen, oder müssen zusätzlich auch noch EPs herangezogen werden?
- Welche Verarbeitungsstrategie ist anzuwenden, um einen automatisierten Prozess kontrolliert ablaufen lassen zu können?
- Kann man eine Aussage über die erreichten Genauigkeiten erhalten?
- Werden die gesetzlich geforderten Genauigkeiten eingehalten, besonders in Hinblick auf die Homogenisierung der Grenzpunkte?

## 2.2. Die Interpolation nach kleinsten Quadraten

1970 hat Helmut Moritz [6] ein Verfahren zur Interpolation von Schwerewerten vorgeschlagen, mit welchem man auch die Messgenauigkeit berücksichtigen kann. Karl Kraus hat 1972 [4] dieses Verfahren aufgegriffen, um in der Photogrammetrie Fehler, die durch Objektivverzerrung verursacht wurden, oder systematische Fehler in der Blockausgleichung zu behandeln. In [1] wurden das Interpolationsverhalten und die Genauigkeiten mit Hilfe von simulierten Beispielen untersucht. Später ist dieses Verfahren, das mit den Namen „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ oder – wegen seines linearen Ansatzes – „Lineare Prädiktion“ bezeichnet wurde, besonders für die Interpolation von Geländemodellen eingesetzt worden. Eine detaillierte Beschreibung findet man daher in [5]. Die Homogenisierung der Referenzsysteme anhand von GPS-Messungen an den gut verteilten Punkten des Triangulationsnetzes kann ebenfalls als Interpolationsaufgabe aufgefasst werden. Daher soll im folgenden untersucht werden, inwieweit diese „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ in der Praxis die gestellte Aufgabe erfüllen kann. Wie man bei Bauprojekten mit den Netzspannungen umgeht, wurde vor kurzem in dieser Zeitschrift erläutert [7].

### Grundlegendes

In der hier vorgestellten Form erfolgt die Interpolation in einem 2D-Feld (X,Y) eindimensionaler Werte ( $Z_{xy}$ ), also als Funktion  $f(X,Y;Z_{xy})$ . Im Falle der Erstellung eines Geländemodelles wäre dadurch die Interpolation eines Höhenwertes (= Z-Wertes) aus einer beliebigen Verteilung von gegebenen Einzelhöhen  $Z_{xy}$  an lagemäßig jeder beliebigen Stelle möglich:  $Z=f(X,Y;Z_{xy})$ . Wenn aber, wie bei der Koordinaten-Homogenisierung, mehrdimensionale Werte (z.B.  $\Delta X, \Delta Y$  oder  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ) in einem 2D-Feld modelliert werden sollen, so ist die Gesamt-Interpolation in zwei bzw. drei unabhängige Interpolationen  $\Delta X=f(X,Y;\Delta X_{xy})$ ,  $\Delta Y=f(X,Y;\Delta Y_{xy})$  und ev.  $\Delta Z=f(X,Y;\Delta Z_{xy})$  aufzuspalten. Voraussetzung für diese vereinfachte Vorgangsweise ist allerdings, dass die Korrelationen zwischen den zwei bzw. drei Koordinatenwerten vernachlässigbar klein sind. Untersuchungen zeigten, dass dies i.a. der Fall ist und dass somit in der Praxis diese Aufspaltung durchgeführt werden darf [4]. Da im konkreten Fall nur die Lageabweichungen  $\Delta X, \Delta Y$  untersucht werden sollen, werden daher zwei getrennte Interpolationen ausgeführt.

Im folgenden wird das Verfahren für den eindimensionalen Fall und für die Interpolation eines einzigen Funktionswertes erklärt. Gemessene Werte an den Einpasspunkten werden in der Folge als *Stützwerte* bezeichnet, die Einpasspunkte selbst als *Stützpunkte*.

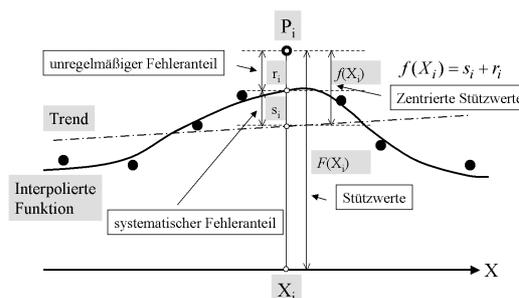


Abbildung 1: Die Stützwerte für die Interpolation nach kleinsten Quadraten

Abbildung 1 zeigt, wie die Daten interpretiert werden, bevor sie der „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ unterworfen werden. Von den in der Skizze eingezeichneten Stützwerten (schwarze Punkte), soll einer, nämlich jener für den Punkt  $P_i$  an der Stelle  $X_i$ , näher betrachtet werden. Dieser Messwert oder Stützwert  $F(X_i)$  setzt sich zusammen aus, erstens, dem unbekanntem (und zu interpolierenden) Wert und, zweitens, einem unregelmäßigen, zufälligen Fehleranteil  $r_i$ , der als Messgenauigkeit oder Messrauschen interpretiert werden kann und für welchen auch in kleinster Nachbarschaft seine Zufälligkeit gilt. Andererseits wird vorausgesetzt, dass auch die Stützwerte, über das gesamte Interessensgebiet betrachtet, als stochastische Größen angesehen werden, obwohl sie in ihrer Nachbarschaft eine Systematik aufweisen. Es ist daher Sorge zu tragen, dass eine im Interessensgebiet vorhandene „globale“ Systematik, der sogenannte „Trend“, vor Beginn der Bestimmung der Interpolationsparameter abgespalten wird. Zur Trend-Abspaltung kann eine geeignete Transformation verwendet werden. Sehr beliebt ist eine ausgleichende Ähnlichkeitstransformation. Die Residuen an den Stützpunkten nach der Ähnlichkeitstransformation, wären dann jene Stützwerte  $f(X_i)$ , die zur Interpolation verwendet werden (siehe Abbildung 1). Eine andere Möglichkeit wäre, die originalen Stützwerte getrennt nach Koordinaten auf den jeweiligen Mittelwert zu zentrieren und die Differenzen zum Mittelwert als neue Stützwerte anzusehen. Letztere Vorgangsweise wurde in der Folge verwendet. In jedem Fall ist die Summe der Stützwerte im Interessensgebiet 0, wodurch die Forderung nach der „globalen“ Zufälligkeit der Stützwerte  $f(X_i)$  erfüllt ist. Die originalen Stützwerte  $F(X_i)$  werden damit in drei von einander unabhängige Anteile aufgespalten: den Trend, den systematischen Anteil und den zufälligen Anteil (siehe Gleichung (1)).

$$\begin{aligned} F(X_i) &= \text{Trend}(X_i) + f(X_i) \quad \Rightarrow \\ F(X_i) &= \text{Trend}(X_i) + s(X_i) + r(X_i) \end{aligned} \quad (1)$$

wobei  $s(X_i)$  jener lokal-systematische Anteil ist, der durch die Interpolation modelliert werden soll.

Die lokale Systematik kann man am besten durch die Kovarianz-Verhältnisse in Abhängigkeit der Entfernung  $d$  untersuchen. Der gegenseitige systematische Einfluss zweier Stützpunkte  $P_i$  und  $P_k$  wird durch den Funktionswert der Kovarianzfunktion  $C(d(X_{P_i}, X_{P_k}))$  oder kurz  $C(P_i, P_k)$  beschrieben. Als Kovarianzfunktion hat sich die Gauß'sche Glockenkurve bewährt (Gleichung 2).

$$C(P_i, P_k) = C(0) \cdot \exp\left(-\frac{P_i P_k}{w}\right) \quad (2)$$

$C(0)$  ist der Scheitelwert und  $w$  der Steilheitswert. Die lokale Systematik wirkt in einer umso größeren Umgebung, je größer der  $w$ -Wert ist. Es ist zu bedenken, dass der Scheitelwert eigentlich die Varianz  $V_s$  der noch unbekanntem  $s$ -Anteile darstellt und nicht die Varianz  $V_f$  der bekannten Stützwerte  $f_i$ , die einfach zu berechnen ist. Aus Gleichung (1) lässt sich zeigen, dass sich der Scheitelwert und die Varianz  $V_f$  der Stützwerte durch die Varianz  $V_r$  der Messgenauigkeit unterscheiden. Es gilt daher:

$$\sigma_r^2 = V_r = V_f - V_s = V_f - C(0) \quad (3)$$

Ist a-priori-Wissen über die Messgenauigkeit  $\sigma_r$  vorhanden (und im Falle des Festpunktnetzes kann solches angenommen werden), so kann man über die Gleichung (3) den Scheitelwert  $C(0)$  bestimmen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, den Scheitelwert automatisch über die empirische Bestimmung der Kovarianzfunktion abzuleiten zu lassen. Die Bestimmung der Kovarianzfunktion erfolgt üblicherweise durch empirische Bestimmung der Kovarianzen in diskreten Entfernungsintervallen (Abbildung 2). Aus diesen Einzelwerten wird eine ausgleichende Kovarianzfunktion ermittelt, wodurch neben dem Steilheitswert  $w$  auch der Scheitelwert  $C(0)$  bestimmt wird. In der Folge kann man daraus durch Anwendung der Gleichung (3) wiederum die Varianz der unregelmäßigen Fehleranteile und somit ohne a-priori-Wissen die Messgenauigkeit  $\sigma_r$  abschätzen.

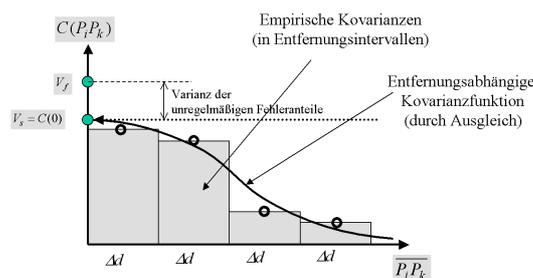


Abbildung 2: Empirische Bestimmung der Kovarianzfunktion

Die „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ ist ein Verfahren, welche auf Flächensummation aufbaut und als Kernfunktion die Kovarianzfunktion in Form der Gauß'sche Glockenkurve (Gleichung 2) verwendet. Die Grundgleichung für die Interpolation des (zentrierten) Stützwertes  $s_P$  eines Punktes P in einem Feld von Punkten  $P_i$  mit den gemessenen (zentrierten) Stützwerten  $f_i$  lautet:

$$s_P = \mathbf{c}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f} \quad (4)$$

wobei gilt:

$$\mathbf{c}^T = \begin{pmatrix} C(PP_1) \\ C(PP_2) \\ C(PP_3) \\ \vdots \\ C(PP_n) \end{pmatrix}^T \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

und

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} V_f & C(P_1P_2) & C(P_1P_3) & \dots & C(P_1P_n) \\ & V_f & C(P_2P_3) & \dots & C(P_2P_n) \\ & & V_f & \dots & C(P_3P_n) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & V_f \end{pmatrix}^{-1} \quad (6)$$

Die Tatsache, dass der Scheitelwert der Kovarianzfunktion nicht durch die Varianz der Stützwerte verläuft, bewirkt, dass eine Art Ausgleichsfunktion durch die Stützwerte gelegt wird und zwar so, dass die Varianz der Residuen dem zu berücksichtigenden Rauschen  $\sigma_r^2$  entspricht. Man spricht hier oft auch von „Filterung“, da das Messrauschen herausgefiltert wird. Die Residuen zwischen Interpolationsfläche und Stützwerte werden daher auch als „Filterbeträge“ bezeichnet. Im Gegensatz zu einem Ausgleich nach kleinsten Quadraten, wo die Quadrate der Residuen minimiert werden und wo also eine „undifferenzierte“ Anpassung vorliegt, entspricht diese Anpassung einer detaillierteren Berücksichtigung der statistischen Eigenschaften der Messgenauigkeit. Die Interpolationsfunktion stellt sozusagen das geschätzte, rauschfreie Signal dar.

Wie man in Gleichung (5) und (6) sieht, werden in der Theorie alle vorhandenen Stützpunkte für die Interpolation benötigt, was zu sehr großen Vektoren und Matrizen führen kann. Allerdings sind in der Praxis, die Kovarianzen  $C(P_iP_k)$  (abhängig von der Steilheit  $w$  der Kovarianzfunktion) weit von einander entfernter Punkte  $P_iP_k$  sehr klein und oft schon nahezu Null. Daher setzt man gerne die Kovarianzen, die einen vorgegebenen Minimalwert unterschreiten, auf 0 und bezeichnet die dazugehörige Grenz-Entfernung als Interpolationsradius  $R_I$ . Punkte, die weiter als  $R_I$  von einer zu interpolierenden Stelle entfernt sind, tragen demnach nicht mehr zum Interpolationsergebnis bei. Da der Steilheitswert  $w$  sehr unanschaulich ist, führt man den Halbwertradius  $R_H$  ein. Es ist dies jene Entfernung, für welche die Kovarianz gleich dem halben Scheitelwert ist, bei welcher also ein Stützwert nur mehr 50% zum Interpolationsergebnis beiträgt. Wie man aus Gleichung (2) leicht ableiten kann, ergibt sich für den Halbwertradius  $R_H = w \cdot \sqrt{\ln 2} = w \cdot 0,83255$ .

#### Die Bestimmung der Kovarianzfunktion in der Praxis

Die Kovarianzfunktion ist das zentrale Element der Interpolation. Wenn sich auch zeigt, dass die Interpolationsergebnisse nicht sehr empfindlich auf die Form der verwendeten Kovarianzfunktion reagieren, so kommt doch ihrer Bestimmung entscheidende Bedeutung zu. Prinzipiell gibt es zwei Vorgangsweisen:

- Die Ableitung der Parameter der Kovarianzfunktion mittels empirischer Untersuchung der tatsächlichen Kovarianzverhältnisse
- Die manuelle Vorgabe, aller oder einzelner Parameter aufgrund von a-priori-Wissen

In der Praxis läßt man meist die Steilheit  $w$  der Kovarianzfunktion automatisch bestimmen, während man den Scheitelwert  $C(0)$  aufgrund der (im allgemeinen) bekannten Genauigkeit der Stützwerte vorgibt. Hat man eine große Anzahl und eine gute räumliche Verteilung von Stützpunkten, so funktioniert auch die vollautomatische Bestimmung sehr gut. Für die gestellte Aufgabe wurde eine Verknüpfung beider Vorgangsweisen verwendet. Auf der einen Seite wurde der Scheitelwert vorgegeben, da die Genauigkeit der Stützpunkte, welche sich aus der Genauigkeit der Triangulationspunkte und der Genauigkeit der GPS-Messungen zusammensetzt, abgeschätzt werden kann. Auf der anderen Seite erfolgt zu Kontrollzwecken auch die automatische Scheitelwertbestimmung.

Ein anderes Problem ergibt sich durch die Anzahl der Stützpunkte, welche für die Größe der Matrix  $\mathbf{C}$  (siehe Gleichung (6)) verantwortlich ist. Aus Speicherplatzgründen, aus numerischen Gründen, aber auch um eine

vernünftige Größe des Interpolationsbereiches zu erreichen, erscheint eine Unterteilung in Sub-Interpolationsbereiche, die hier kurz als „Recheneinheiten“ bezeichnet werden sollen, überlegenswert. Wie schon oben angedeutet, macht es ohnehin keinen Sinn, Punkte in einer Entfernung über den Interpolationsradius hinaus zu berücksichtigen. Durch die Unterteilung in Recheneinheiten darf es aber nicht zu Unstetigkeitsstellen beim Übergang von einer Recheneinheit zur andern kommen. Für die Festlegung einer sinnvollen Größe kann der durchschnittliche Interpolationsradius als Richtschnur dienen. Hier wurde ein Ansatz mit sehr starker Überlappung geometrisch fest begrenzter Recheneinheiten gewählt, sodass jeder einzelne Punkt mehrfach aus verschiedenen Recheneinheiten interpoliert wird (Abbildung 3). Erstens hat man damit die Kontrolle, wie gut ein homogener Übergang der Bereiche erreicht wurde, andererseits kann man durch das Mitteln der Einzelergebnisse etwaige kleine Unstimmigkeiten „verschleifen“.

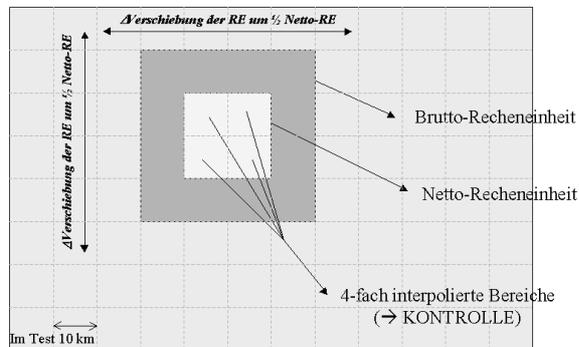


Abbildung 3: Recheneinheiten-Einteilung

### 3. Testgebiet „Vorarlberg“

Die Umsetzung des Ansatzes in die Praxis erfolgte in einem Testbereich in Vorarlberg, wo an 2055 TPs mit GPS die Homogenisierungsvektoren gemessen wurden. Diese TPs sind die Stützpunkte für die Aufstellung der Interpolationsfunktion, mit deren Hilfe die Homogenisierungsvektoren für die Neupunkte (das sind EPs und Grenzpunkte) bestimmt werden sollen, womit die Homogenisierungsaufgabe erfüllt wäre.

Für Kontrollzwecke und auch zum Zwecke der Analyse in Problemgebieten wurde an den 1620 der insgesamt 6652 EPs ebenfalls Homogenisierungsvektoren gemessen. Die restlichen 5032 EPs werden als echte Neupunkte verwendet und werden im Test zur Kontrolle der Interpolationsqualität in den Überlappungsbereichen der Recheneinheiten verwendet.

#### 3.1. Die Aufgabe im Detail

Im Testgebiet existieren zwei Arten von EPs: terrestrisch bestimmte und photogrammetrisch bestimmte. Eine Gemeinde ist ausschließlich mit terrestrischen (Gemeinde Feldkirch) und eine zweite ausschließlich mit photogrammetrischen Punkten (Gemeinde Rankweil) bedeckt. Da vermutet wird, dass diese zwei Punktgruppen in sich unterschiedliches Verhalten zeigen, wurden dort ebenfalls Homogenisierungsvektoren gemessen.

Die Aufgabe des gesamten Testprojektes besteht aus zwei Teilen:

- Untersuchung der zwei EP-Gruppen im Bereich Feldkirch / Rankweil
- Vorschlag und Qualitätsbeurteilung einer Strategie für die Koordinatenhomogenisierung

#### 3.2. Untersuchung der EPs

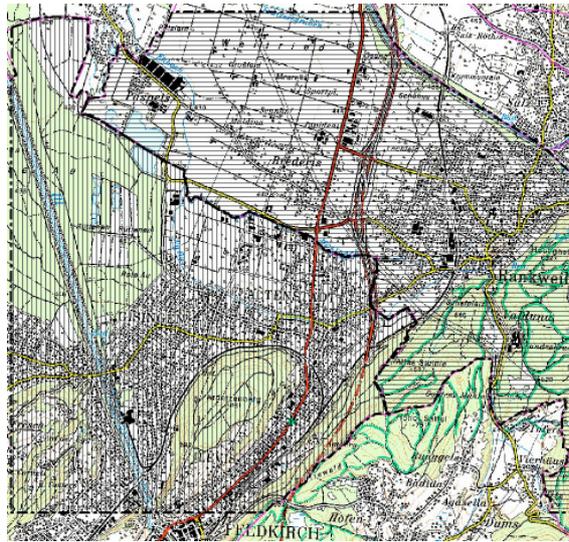


Abbildung 4: Testgebiete Feldkirch und Rankweil

Die Abbildung 4 zeigt die beiden Bereiche, in denen EPs mit gemessenen Homogenisierungsvektoren gegeben waren. Der südliche Teil (vertikal schraffiert) ist mit terrestrisch gemessenen EPs, der nördliche (horizontal schraffiert) mit photogrammetrisch gemessenen bedeckt. Als erste Aufgabe wurde getestet, inwieweit die EPs zu den Triangulationspunkten passen. Die Interpolationsfunktion für das TP-Netz wurde aufgestellt. Die automatische Bestimmung der Lagemessgenauigkeit aus empirischen Kovarianzen ergab ca.  $\pm 2$  cm. Jetzt erfolgte die Interpolation der Homogenisierungsvektoren der EPs, die dann mit den gemessenen Vektoren verglichen werden können. Die mittlere Abweichung wurde mit  $\pm 6$  cm berechnet. Dieser Wert scheint – in Hinblick auf den einzuhaltenden Punktlagefehler von  $\pm 7$  cm – von der Größe her in Ordnung zu sein. Betrachtet man aber das Bild der Vektoren (Abbildung 5), so fällt ein signifikanter systematischer Anteil von 4 cm in Nord-Südrichtung auf. Dies deutet darauf hin, dass die Lage der EPs nicht zur Lage der TPs passt. Die Ursache dafür müsste anhand der „Geschichte“ der EPs näher untersucht werden. Um noch zu prüfen, ob die EPs in sich stimmen, wurde mit ihnen ohne Berücksichtigung der TPs die Interpolationsfunktion aufgestellt. Die Abbildung 6 zeigt das Bild der sogenannten Filter-Vektoren nach der Interpolation, also des festgestellten Messrauschens, das sich mit  $\pm 3$  cm ergab.

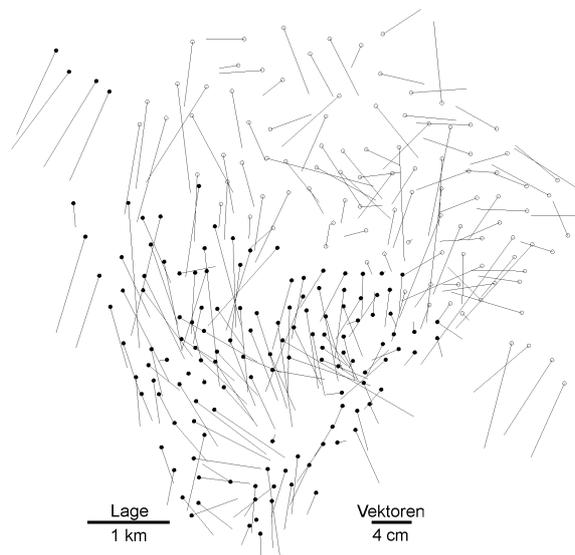


Abbildung 5: Differenz zwischen interpolierten und gemessenen Vektoren an EPs in Feldkirch (schwarz) u. Rankweil (weiß)

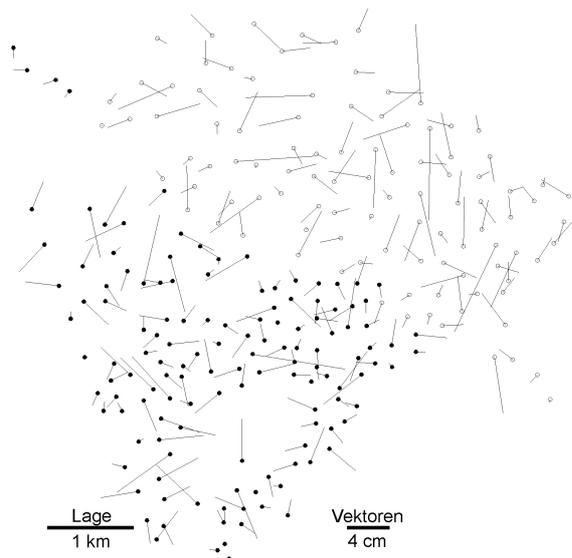


Abbildung 6: Die Filter-Vektoren an den EPs

Analysiert man die Größen der Filterbeträge (Abbildungen 7 und 8), so zeigt das terrestrisch vermessene und das photogrammetrisch vermessene EP-Feld ähnliche Eigenschaften, wenn auch die größeren Vektoren im photogrammetrischen Feld zu finden sind. Jedenfalls kann aus dieser Untersuchung nicht eindeutig festgestellt werden, dass die terrestrisch vermessenen EPs deutlich genauer wären als die photogrammetrisch vermessenen. Das wesentliche Problem bei einer Homogenisierung liegt hier sicherlich nicht in der Messgenauigkeit.

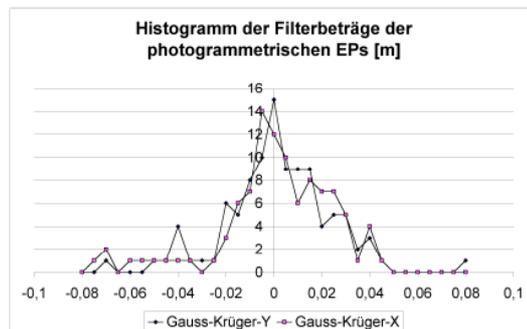


Abbildung 7: Histogramm der Filterbeträge der photogrammetrisch vermessenen EPs

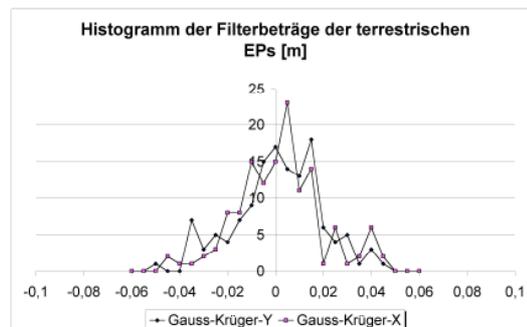


Abbildung 8: Histogramm der Filterbeträge der terrestrisch vermessenen EPs

### 3.3. Strategie für die Homogenisierung eines großen Gebietes

Ein großer Bereich Vorarlbergs wurde als engeres Testgebiet ausgewählt. In diesem Bereich wurde die automatisierte Recheneinheiten-Einteilung, wie oben erwähnt, realisiert (Abbildung 3) und Genauigkeitstests durchgeführt. Die Größe der Netto-Recheneinheit (NRE) war mit 20 km x 20 km gewählt worden. Die Brutto-Recheneinheitsgröße (BRE) ergab sich durch Erweiterung der NRE um 10 km in jeder Richtung, woraus man eine BRE-Größe von 40 km x 40 km erhält. Alle Triangulationspunkte innerhalb einer BRE werden als Stützpunkte verwendet, allerdings werden nur Punkte innerhalb der NRE interpoliert. Ist eine Recheneinheit abgearbeitet, so wird das Interessensgebiet um eine halbe NRE (das sind im konkreten Fall 10 km) horizontal oder vertikal weitergeschoben und eine neue Interpolationberechnung beginnt. Auf diese Weise wird jeder Punkt bis zu 4-Mal aus benachbarten BREs interpoliert. Der Rand des Untersuchungsgebietes ist erreicht, wenn nach dem Verschieben keine neuen Stützpunkte mehr in eine BRE geladen werden können. An den Rändern des Untersuchungsgebietes wird daher jeder Punkt nur 2-Mal, an den Ecken nur 1-Mal interpoliert.

#### *Fehlerrückmeldung und -eliminierung*

Die Eingangsdaten sind die ursprünglichen Koordinaten der Triangulationspunkte und der gemessenen Homogenisierungsvektoren. Die Eliminierung des Trends pro BRE erfolgt durch Reduktion auf den Mittelwert der Komponenten der Homogenisierungsvektoren. Die Residuen stellen dann die Stützwerte für die Interpolation dar. Stützwerte, die größer sind als der 2.5- bis 3-fache Mittelwert werden noch gesondert betrachtet, da es sich um mögliche Datenfehler handeln könnte. Tatsächlich sind einige eindeutig fehlerhafte Punkte entdeckt worden, die in diesem Test eliminiert wurden.

#### *Bestimmung des Messrauschens und der Kovarianzverhältnisse*

Die automatisierte Bestimmung der Kovarianzverhältnisse läuft sehr zuverlässig, da genügend Stützpunkte pro BRE vorhanden sind und außerdem eine gute Punktverteilung gegeben ist. Die Messgenauigkeit wurde mit  $\pm 3$  cm bis  $\pm 4$  cm pro Koordinate errechnet. Dies entspricht auch etwa den Erwartungen des maximal erlaubten mittleren Punktlagefehlers von  $\pm 5$  cm (äquivalent einem mittlerer Koordinatenfehler von  $\pm 3,5$  cm).

Abbildung 9 zeigt als Beispiel Triangulationspunkte eines kleinen Gebiet von ca. 7 km x 9 km mit ihren gemessenen und auf das Mittel  $-1,155$  m und  $0,314$  m zentrierten Vektoren. Die mittlere Rest-Vektorenlänge, für welche die Interpolation angesetzt wurde, war in X-Richtung 4,3 cm und in Y-Richtung 6,4 cm. In diesem Fall wurde die Messgenauigkeit mit 1 cm für jede Koordinaten vorgegeben. Nach der Interpolation verbleiben (Abbildung 10), wie erwartet, die Vektoren von ca. 1 cm in beiden Koordinatenrichtungen, welche die Messgenauigkeit repräsentieren.

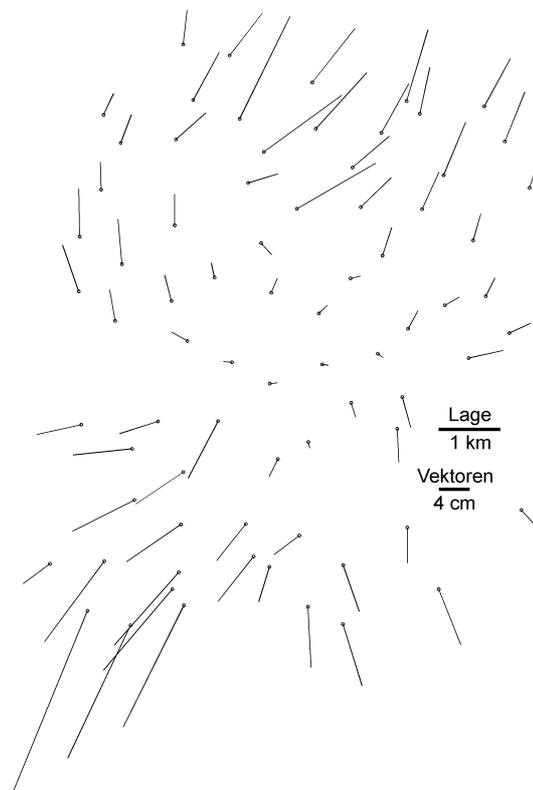


Abbildung 9: Zentrierte Homogenisierungsvektoren vor der Interpolation

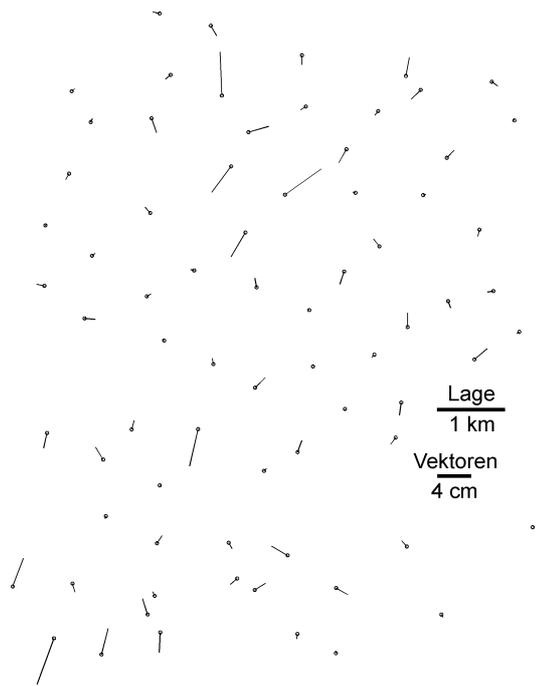


Abbildung 10: Filter-Vektoren = gefiltertes Messrauschen

Nach Durchlaufen des großen Gebietes mit Hilfe der Recheneinheiteneinteilung ergab sich der Interpolationsradius im Mittel mit  $35 \text{ km} \pm 5 \text{ km}$  und der Halbwertsradius mit  $7 \text{ km} \pm 1 \text{ km}$ . Die Festlegung der Brutto-Recheneinheitsgröße mit  $40 \text{ km} \times 40 \text{ km}$  könnte man daher als etwas zu knapp bemessen ansehen. Eine Verdoppelung der Recheneinheitengröße schiene daher besser den Kovarianzverhältnissen zu entsprechen. Es ist aber zu bedenken, dass die Schranke, welche den Interpolationsradius bestimmt, willkürlich auf einen extrem kleinen Wert gesetzt ist (hier konkret auf  $10^{-8}$ ). Man darf daher erwarten, dass die kleineren Recheneinheiten das Interpolationsergebnis nicht merklich verfälschen.

#### Güte der Interpolation

Die Güte der Interpolation wurde auf mehrere Arten beurteilt. Wie eben erwähnt, können die interpolierten Punkte mehrfach bestimmt werden. Die Abweichung dieser Mehrfachbestimmungen stellen ein gewisses Maß dar für den Einfluss der Recheneinheiten-Einteilung auf das Interpolationsergebnis. Die interpolierten EPs unterschieden sich in der Lage maximal um ca. **5 cm**, im Mittel um  **$\pm 0,6 \text{ cm}$** . Die maximale Abweichung liegt daher im Bereich der gesetzlich erlaubten Größe von  $\pm 7 \text{ cm}$ .

Eine andere Beurteilung erhielt man, indem jeder zweite Stützpunkte aus dem Datensatz vorerst entfernt wurde, um ihn später dann als Prüfpunkt verwenden zu können. 50% der Punkte dienen als Stützpunkte, die restlichen 50% als Prüfpunkte. Liefert die Interpolation ein optimales Ergebnis, so darf die mittlere Abweichung zwischen interpoliertem und bekanntem Stützwert nicht mehr als das Messrauschen betragen. Im konkreten Fall ergab sich eine mittlere Abweichung von knapp  **$\pm 3 \text{ cm}$**  und entspricht daher ziemlich genau der davor bestimmten Messgenauigkeit.

Eine weitere Möglichkeit bot der Vergleich der interpolierten mit den gemessenen Werten an den insgesamt 1018 im Testgebiet gelegenen EPs mit Homogenisierungsvektoren. Es wird erwartet, dass diese Differenzen unterhalb des erlaubten Maximums von  $\pm 7 \text{ cm}$  liegen. Tatsächlich ergibt sich eine mittlere Abweichung von  **$\pm 5 \text{ cm}$** . Allerdings gibt es einige EPs (ca. 5%) mit zu großen Werten. Das Maximum lag sogar bei  $50 \text{ cm}$ . Was der Grund dafür war, konnte nicht festgestellt werden. In der Praxis müßte man diese Punkte näher überprüfen. Es könnte sich um in der Natur lagemäßig veränderte EPs handeln, bei denen die angegebenen Koordinaten nicht mehr dem tatsächlichen Punkt entsprechen, auf welchem die GPS-Messung durchgeführt worden war.

Als letzter Qualitätstest wurde die Geradentreue untersucht. Zu diesem Zweck wurden 20 über das Testgebiet verteilte und in zufälliger Orientierung liegende 1 km lange Geradenstücke definiert. In der Folge wurden Punkte entlang der Geraden interpoliert und diese Koordinaten überprüft, inwieweit sie von einer idealen Geraden abweichen. Die maximale Abweichung war knapp über **1 cm**, die mittlere Abweichung bei  **$\pm 0,4 \text{ cm}$** . Die Geradenlängen wichen im Mittel um  $\pm 0,9 \text{ cm}$  ab. Dieser Test sollte zeigen, ob nach der Transformation von Grenzpunkten mit Problemen zu rechnen wäre. Der erhaltene Wert liegt aber deutlich unter der gesetzlich erlaubten Messgenauigkeit. Die Genauigkeiten sind in der Tabelle 1 noch einmal übersichtlich dargestellt.

Art der Genauigkeitskontrolle	Genauigkeit
EPs (Mehrfachinterpolation in REs)	$\pm 0,6$ cm (max. 5 cm)
TP (50% Stützpunkte, 50% interpol.)	$\pm 3$ cm
EPs (gemessen-interpoliert)	$\pm 5$ cm (max. 50 cm !!)
Geradentreue (1 km Länge)	$\pm 0,4$ cm (Länge $\pm 0,9$ cm)

Tabelle 1: Erreichte Genauigkeiten

#### 4. Schlussfolgerungen

Die „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ erwies sich als sehr gut geeignet für die Homogenisierung des Festpunktnetzes und ist in hohem Maße automatisierbar. Sie kann auch die Genauigkeitsanforderungen problemlos erfüllen.

Die „Interpolation nach kleinsten Quadraten“ bietet mehrere hilfreiche Eigenschaften. Lässt man die Kovarianzfunktion automatisch bestimmen, so eröffnen sich einige schöne Kontrollmöglichkeiten. Durch die Bestimmung des Scheitelwertes etwa erhält man den unregelmäßigen Fehleranteil der Stützwerte und damit eine qualitative Bewertung der Messgenauigkeit der Eingangsdaten. Kennt man das auf diese Weise bestimmte Messrauschen, so kann mit Hilfe einer Filterung das interpolierte Signal von den stochastischen Ungenauigkeiten der Eingangsdaten befreit werden. Außerdem ist das Verfahren unempfindlich gegen Ausschwingen und ist daher auch im nahen Extrapolationsbereich gefahrlos zu verwenden. Diese Eigenschaften sind besonders beachtenswerte Vorteile gegenüber manchen anderen Interpolationsverfahren.

Dennoch ist zu beachten, dass Fehler in den Koordinaten der Punkte, die nicht als Stützpunkte verwendet wurden und die mittels Interpolation in das neue Referenzsystem transformiert werden sollen, nicht wahrgenommen und daher auch nicht korrigiert werden können. Mit der Interpolation bestimmt man den wahrscheinlichsten Transformationsvektor für einen beliebigen geometrischen Ort, wobei nicht geprüft werden kann, ob ein Punkt an diesem Ort ursprünglich falsch oder richtig vermessen worden war. Deshalb sind auch alte Spannungen und lokale Inhomogenitäten in der Verteilung der zu transformierenden Punkte durch die Homogenisierung nicht eliminiert. Solche Schwachstellen in den ursprünglichen Punktkoordinaten könnten nur durch Neuvermessung oder Neuberechnung nach Rückverfolgung der „Entstehungsgeschichte“ eines Punktes beseitigt werden. Ein derartiger Prozess ist allerdings extrem aufwendig und teilweise auch mangels brauchbarer Unterlagen nicht durchführbar. Obwohl die Dichte des Triangulationsnetzes im Test ausgereicht hat, um die Homogenisierung kontrolliert mit genügender Genauigkeit durchzuführen, wird dennoch vorgeschlagen, für weitere Punkte (z.B. EPs oder Grenzpunkte) in regelmäßiger Verteilung und in bekannten Problemgebieten Homogenisierungsvektoren mit GPS zu messen. So hat man zumindest die Chance, die eine oder andere interne Spannung aufzudecken und gleichzeitig bietet sich eine Kontrolle der Berechnungen.

Nach diesem Test kann die Empfehlung einer Homogenisierung des gesamten österreichischen Datensatzes (EPs und Grenzpunkte) ausgesprochen werden. Der erforderliche zeitliche und finanzielle Aufwand hält sich in Grenzen. Nach der Homogenisierung wären die Koordinaten aller Punkte mit „Katastergenauigkeit“ im neuen ETRS89 System verfügbar.

#### Literatur

- [1] Assmus, E., Kraus K.: Die Interpolation nach kleinsten Quadraten – Prädiktionswerte simulierter Beispiele und ihre Genauigkeiten. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe A, Heft 76, München 1974.
- [2] Boljen, E.: Bezugssystemumstellung DHDN90  $\leftrightarrow$  ETRS89 in Schleswig-Holstein. Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 4/2003, 128. Jg., S. 244 - 250.
- [3] Höggerl, N., Weber R., Pesec, P., Stangl, G., Fragner, E.: Die Realisierung moderner 3-D Referenzsystem für Wissenschaft und Praxis. Österr. Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, Heft 3+4, 2002.
- [4] Kraus K.: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen, 40. Jg., Heft 1, 1972, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, S. 7 – 12.
- [5] Kraus K.: Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme. Dümmler Verlag, 2000.
- [6] Moritz, H.: Eine allgemeine Theorie der Verarbeitung von Schweremessungen nach kleinsten Quadraten. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe A, Heft 67, München, 1970.
- [7] Wieser, A., Lienhart W., Brunner F.K.: Nachbarschaftstreue Transformation zur Berücksichtigung von Spannungen im amtlichen Festpunktnetz. Österr. Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, Heft 2, 2003.

Anschrift der Autoren

Josef Jansa: Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, Gusshausstraße 27-29, 1040

Wien. Email: [jj@ipf.tuwien.ac.at](mailto:jj@ipf.tuwien.ac.at)

Lukas Augustin: Diplomand am Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung. Email: [lukasa@yahoo.com](mailto:lukasa@yahoo.com)