

# Rheologische Modelle zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphalten

## Rheological Models characterizing the deformation behavior of hot mix asphalts

*Die analytische Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphalten hat großes Potenzial, die derzeit vorherrschenden zeit- und kostenintensiven Materialprüfungen in Zukunft durch numerische Simulationen mit Hilfe von Finite-Elemente-Methoden zumindest zum Teil zu ersetzen. Außerdem ist es damit möglich, das Verhalten bei hohen Temperaturen – Stichwort: Spurrinnenprognose – vorherzusagen und die Materialwahl so zu optimieren, dass Straßen lange Lebensdauern erzielen. Es werden zunächst Grundlagen der Rheologie und einfache rheologische Modelle (Maxwell, Kelvin-Voigt, Burgers) dargestellt, bevor komplexe Modelle mit fraktionalen Dämpfern (Power-law, Huet, Huet-Sayegh) diskutiert und mathematisch beschrieben werden. Anschließend wird gezeigt, wie diese Modelle verwendet werden, um Materialparameter für unterschiedliche Asphalttypen aus zyklisch-dynamischen Materialversuchen zu erhalten, und Ergebnisse werden diskutiert.*

*To describe the deformation behavior of hot mix asphalts (HMA) analytically gains more and more importance in road material engineering. Conventional material testing which is time-consuming and demands high financial efforts can be partly replaced by FEM-simulation. If an adequate rheological model is used, it is possible to predict the material behavior at high temperatures. This leads to a realistic rutting-prediction. To begin with this paper shows the basics of rheology and simple rheological models (Maxwell, Kelvin-Voigt, Burgers). On this basis more complex models containing fractional dashpots (Power-law, Huet, Huet-Sayegh) are discussed. Finally a method how to use these models to obtain material parameters from fundamental material tests for different types of HMAs is presented and results will be discussed.*

**Keywords:** Rheologie, Numerische Modellierung, Finite Elemente Methoden, Verformungsverhalten von Asphalten,

## 1 Einführung

In den letzten Jahren haben so genannte gebrauchsvorhaltensorientierte (GVO) Prüfverfahren in den Alltag der Materialprüfung Eingang gefunden. Durch diese Verfahren erhält man physikalisch fundierte, vergleichbare und damit auch naturwissenschaftlich anerkannte Parameter für Asphalte.

Ein weiterer Schritt ist die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Asphalten mit Hilfe rheologischer Modelle. Erste brauchbare Modelle lieferten Huet und Sayegh in den Sechzigerjahren des letzten Jahrhunderts, die seither weiterentwickelt und verfeinert wurden. So lassen sich zu einem bestimmten Modell Parameter für verschiedene Asphalte ableiten, die dann unter anderem zur numerischen Simulation mit Finite-Elemente-Methoden (FEM) verwendet werden können.

Innerhalb der Materialwissenschaften hat die numerische Simulation des mechanischen Verhaltens von industriell verwertbaren Stoffen hohen Stellenwert. Die Möglichkeit Zeit- und Finanzmitteleinsatz zu minimieren, indem man anstatt aufwendiger konventioneller Materialprüfungen, virtuelle, rechnerunterstützte numerische Simulationen durchführt, ist

nicht der einzige Grund für Forschung auf diesem Gebiet. Vielmehr geht es auch darum, durch die Modellierung von realen Stoffen das Detailwissen über das Verhalten dieser Materialien bei mechanischer Beanspruchung zu erhöhen und in weiteren Schritten die Möglichkeit zu schaffen, ein Material für einen bestimmten Anwendungszweck mit spezifischen Randbedingungen dahingehend zu optimieren, dass diese Anforderungen bestmöglich erfüllt werden.

## 2 Grundlagen der Rheologie

Die Rheologie (von griech. *rhei*: fließen, *logos*: Lehre) versteht sich als Teilgebiet der Mechanik, das sich mit dem Verformungs- und Fließverhalten von Materie beschäftigt.

### 2.1 Begriffsbestimmung

Die **konstitutiven Beziehungen**, auch Werkstoffgleichungen genannt, stellen das Bindeglied zwischen Verzerrungen und Spannungen dar. In der allgemeinen Formulierung für elastisches Material lautet die Beziehung:

$$E_{ij} = G(S_{ik}) \quad (1)$$

In dieser Gleichung stellen  $E_{ij}$  den Green'schen Verzerrungstensor und  $S_{ik}$  den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor dar.

Wird eine konstante Verzerrung  $\varepsilon^{(0)}$  vorausgesetzt, so stellt sich die Beziehung im einaxialen Fall wie folgt dar:

$$\sigma(t) = R(t)\varepsilon^{(0)} \quad (2)$$

$R(t)$  wird in dieser Formel als **Relaxationsmodul** bezeichnet und kann für beliebige rheologische Modelle – analytisch oder numerisch – berechnet werden.

Setzt man eine konstante Spannung  $\sigma^{(0)}$  voraus, kann man die konstitutiven Beziehungen im einaxialen Fall so formulieren:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)} \quad (3)$$

$J(t)$  stellt die **Kriechnachgiebigkeit** dar. (Mang, Hofstetter 2000)

### 2.2 Grundelemente rheologischer Modelle

Rheologische Modelle sind aus einzelnen Elementen, die die verschiedenen Arten des Verformungsverhaltens repräsentieren, zusammengesetzt. Eine Zusammenstellung der gebräuchlichen Symbole zeigt Bild 1.

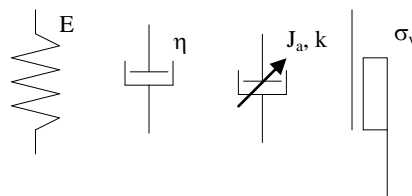


Bild 1: Symbole für Feder, linearen Dämpfer, fraktionalen Dämpfer und St.-Venant-Element

Während Feder, linearer Dämpfer und St.-Venant-Element in der Literatur hinreichend beschrieben sind – sie repräsentieren lineare Elastizität, lineare Viskosität und Plastizität – liegt beim **fraktionalen Dämpfer** ein Element vor, von dem nicht häufig Gebrauch gemacht wird.

Im Gegensatz zum linearen Dämpfer, dessen Kriechnachgiebigkeit durch

$$J_{lin}(t) = \frac{t}{\eta} \quad (4)$$

beschrieben wird, lautet die allgemeine Formel der Kriechnachgiebigkeit eines fraktionalen Dämpfers

$$J_{\text{frac}}(t) = J_a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \quad (5)$$

wobei  $k$  einen dimensionslosen, materialbezogenen Parameter,  $J_a$  [1/MPa] die Kriechnachgiebigkeit bei  $t = \tau$  und  $\tau$  [sec] die charakteristische Zeit des viskosen Verhaltens darstellt.  $\tau$  dient als Faktor zur Kalibrierung des Temperaturverhaltens des Dämpfers. Zum Zeitpunkt  $t = \tau$  nimmt  $J_{\text{frac}}$  den Wert  $J_a$  an, davor und danach lässt sich durch den Faktor  $k$  bestimmen, ob sich ein degressives oder progressives Verhalten einstellt.

### 3 Lineare rheologische Modelle

Die oben angeführten Grundelemente stellen die einzelnen, idealisierten Verformungsarten bei mechanischer Beanspruchung dar. Um der Realität von Stoffen näher zu kommen, werden die Elemente mit Hilfe von Kopplungsvorschriften – Serien- bzw. Parallelschaltung – zu Modellkörpern kombiniert.

Dabei genügt die Parallelschaltung diesen Bedingungen:

$$\sigma = \Sigma \sigma_i, \quad R = \Sigma R_i, \quad \varepsilon = \varepsilon_i, \quad \dot{\varepsilon} = \Sigma \dot{\varepsilon}_i \quad (6)$$

Analog dazu gilt für die Serien- oder Reihenschaltung:

$$\varepsilon = \Sigma \varepsilon_i, \quad J = \Sigma J_i, \quad \sigma = \sigma_i, \quad \dot{\sigma} = \Sigma \dot{\sigma}_i \quad (7)$$

(Findley, Lai et al. 1989)

Die im Folgenden behandelten rheologischen Modelle zählen zu den linearen Systemen, bei denen die einzelnen Elemente linearen Werkstoffgesetzen entsprechen. Schematische Darstellungen der Modelle zeigt Bild 2. Es sind an dieser Stelle nur die wichtigsten Parameter des Maxwell-, Kelvin-Voigt-, und Burgers-Modell dargestellt. Die Herleitung kann in der diesem Artikel zugrundeliegenden Arbeit (Hofko 2006) nachgelesen werden.

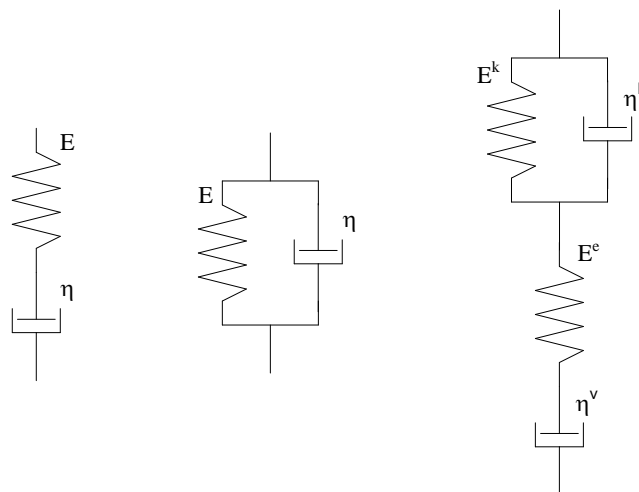


Bild 2: v.l.n.r.: Maxwell-Modell, Kelvin-Voigt-Modell, Burgers-Modell

#### 3.1 Maxwell-Modell

Das nach J. C. Maxwell (1832 – 1879) benannte Modell besteht aus einem linearen Feder-Dämpfer-System, das in Serie geschaltet ist. Aus der konstitutiven Beziehung für Feder und Dämpfer, sowie der Berücksichtigung der Kopplungsbedingungen für parallel geschaltete Modelle, ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (8)$$

Wird ein Stoff, der sich nach dem Maxwell-Modell verhält, mit einer konstanten Spannung  $\sigma^{(0)}$  während  $0 \leq t < t_1$  belastet, so gilt für diesen Zeitraum:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)}, \quad J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}t \quad (9)$$

Nach dem Zeitpunkt der Entlastung  $t_1$  bleibt die Verzerrung des Dämpfers vorhanden. Es gilt also für  $t_1 \leq t < \infty$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta} t_1 \quad (10)$$

Das fehlende Rückkriechen (es ergibt sich eine konstant bleibende Verzerrung nach Belastungsentfernung) ist ein Charakteristikum nicht nur des Maxwell-Modells, es betrifft alle rein in Serie geschalteten Modelle.

Um das Relaxationsverhalten, die Spannungsabnahme bei konstant gehaltener Dehnung, zu bestimmen, wird eine konstante Dehnung  $\varepsilon(t) = \varepsilon^{(0)}$  vorausgesetzt. Damit ergibt sich

$$\sigma(t) = R(t)\varepsilon^{(0)}, \quad R(t) = Ee^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (11)$$

### 3.2 Kelvin-Voigt-Modell

Das vorliegende Modell ist nach W. T. Kelvin (1824 – 1907) und W. Voigt (1850 – 1919) benannt. Es besteht ebenfalls aus einem linearen Feder-Dämpfer-System, das jedoch parallel geschaltet ist. Es ergibt sich für eine konstante Spannung  $\sigma = \sigma^{(0)}$  während  $0 \leq t < t_1$  wirkend folgendes Kriechverhalten:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)}, \quad J(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \quad (12)$$

Nach Entlastung zum Zeitpunkt  $t = t_1$  zeigt sich ein Rückkriechen:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_1)e^{-\frac{E}{\eta}(t-t_1)} \quad (13)$$

Das Relaxationsverhalten kann nicht durch ein rein parallel geschaltetes Modell beschrieben werden, da sich bei konstant gehaltener Dehnung eine konstante Spannung hält und die Relaxationsfunktion  $R(t)$  ebenfalls eine Konstante darstellt.

Zusammenfassend lassen einige Aussagen zum Verhalten und zur Verwendbarkeit rein parallel bzw. seriell geschalteter Systeme treffen.

Während bei Parallelschaltung das Relaxationsverhalten wegen der vorhandenen e-Funktion realitätsnahe beschrieben werden kann, ist dies bei Serienschaltung nicht möglich.

Auf der anderen Seite zeigt sich beim Kriechphänomen ein gespiegeltes Bild – die Reihenschaltung vermag hier durch exponentielles Verhalten die Realität recht gut anzunähern, während das parallel geschaltete System nur eine lineare Kriechkurve aufweist und auch nur ein sehr beschränktes Rückkriechverhalten beschreiben kann.

Um nun die Vorteile beider Systeme vereinen zu können, besteht eine Möglichkeit Kelvin-Voigt und Maxwell in einem Modell zu verbinden, wie dies auf serielle Weise beim in der Folge behandelten Burgers-Körper erfolgt.

### 3.3 Burgers-Modell

Das Modell, das nach dem niederländischen Physiker J. M. Burger (1895 – 1981) benannt ist, kann aus drei Elementen bestehend betrachtet werden, die in Serie geschaltet sind. Es sind dies eine linear elastische Feder, ein linear viskoser Dämpfer und ein Kelvin-Voigt'scher

Körper. Die Herleitung des Kriechverhaltens, wenn eine konstante Spannung  $\sigma^{(0)}$  angelegt wird, ergibt für  $0 \leq t < t_1$ :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{E^e} + \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t}\right) \quad (14)$$

Das Rückkriechverhalten nach Wegnahme der Spannung  $\sigma^{(0)}$  zum Zeitpunkt  $t_1$  stellt sich wie folgt dar:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t_1 + \frac{\sigma^{(0)}}{E^k} e^{-\frac{E^k}{\eta^k} t} \left(e^{\frac{E^k}{\eta^k} t_1} - 1\right) \quad (15)$$

und führt, bei  $t \rightarrow \infty$  zur Deformation des Dämpfers ( $\eta^v$ ) zum Zeitpunkt der Entlastung  $t = t_1$

$$\varepsilon(t = \infty) = \frac{\sigma^{(0)}}{\eta^v} t_1 \quad (16)$$

Das Relaxationsverhalten, das sich einstellt, wenn während  $0 \leq t < t_1$  eine konstante Verzerrung  $\varepsilon^{(0)}$  wirkt, zeigt sich dermaßen:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon^{(0)}}{A} [(q_1 - q_2 r_1) e^{-r_1 t} - (q_1 - q_2 r_2) e^{-r_2 t}] \quad (17)$$

wobei folgende Abkürzungen

$$p_1 = \frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}, \quad p_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^e E^k}, \quad q_1 = \eta^v, \quad q_2 = \frac{\eta^v \eta^k}{E^k}, \quad r_1 = \frac{p_1 - A}{2p_2}, \quad r_2 = \frac{p_1 + A}{2p_2}, \quad A = \sqrt{p_1^2 - 4p_2}$$

in (17) enthalten sind. (Findley, Lai et al. 1989)

## 4 Verhalten von viskoelastischem Material unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung

Im Straßenverkehr wirkt die Belastung auf den Asphalt meist dynamisch ein. Für die Analyse solcher Belastungsfälle sind zyklisch-dynamische Materialversuche notwendig, bei denen die Last in Form von sinusförmigen Schwingungen aufgebracht wird. Dabei ergeben sich im Unterschied zu statischen Versuchen veränderte, so genannte komplexe oder dynamische Module und Nachgiebigkeiten, die im Folgenden diskutiert werden.

### 4.1 Der komplexe Modul und die komplexe Nachgiebigkeit

Gegeben sei eine externe Kraft, die mit konstanter Amplitude und bestimmter Frequenz auf einen viskoelastischen Probekörper einwirkt. Die schwingende Belastung kann damit durch  $F = F^{(0)} \cos \omega t$  ausgedrückt werden. Dabei stellt  $F_0$  die Amplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Belastung dar. Diese äußere Kraft führt im Probekörper zu einer Spannung

$$\sigma = \sigma^{(0)} \cos \omega t \quad (18)$$

Hier stellt  $\sigma^{(0)}$  die Amplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingung dar. Mit  $T = 2\pi/\omega$  wird die Periode der Schwingung bezeichnet. Die Herleitung der komplexen Kriechnachgiebigkeit  $J^*$  erfolgt über den komplexen Zahlenraum und ergibt in der Formulierung mit Hilfe von Differentialoperatoren:

$$\frac{\varepsilon^*}{\sigma^{(0)}} = J^*(\omega) = \frac{p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \dots}{q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \dots} \quad (19)$$

$J^*$  ist – analog zur Kriechnachgiebigkeit aus den quasistatischen Versuchen – als komplexe oder dynamische Nachgiebigkeit definiert. Sie ist – anders als die statische Kriechnachgiebigkeit – von der Kreisfrequenz der Schwingung  $\omega$  abhängig.

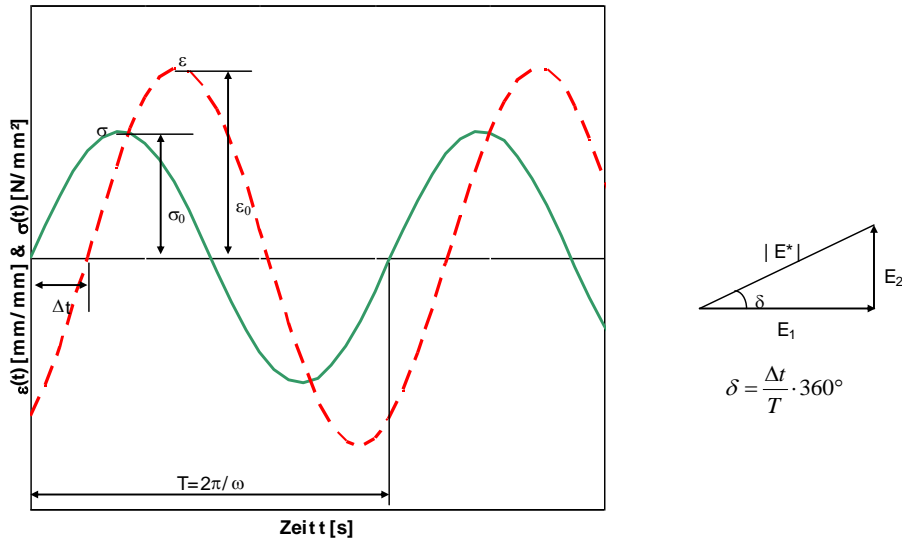


Bild 3: sinusförmig schwingende Belastung  $\sigma$ , Verzerrungsantwort  $\epsilon$  und Phasenwinkel  $\delta$

Ähnlich verläuft die Herleitung des komplexen Moduls, wenn eine sinusförmig schwingende Verzerrung als Belastung auf den Probekörper einwirkt. Man erhält

$$\frac{\sigma^*}{\epsilon^{(0)}} = E^*(\omega) = \frac{q_0 + i\omega q_1 + (i\omega)^2 q_2 + \dots}{p_0 + i\omega p_1 + (i\omega)^2 p_2 + \dots} \quad (20)$$

$E^*$  stellt den komplexen oder dynamischen Modul dar und ist wie die komplexe Nachgiebigkeit eine Funktion von  $\omega$ . Es ist wie bei jeder komplexen Zahl möglich, den komplexen Modul in einen realen und einen imaginären Teil zu trennen. Dazu wird  $\sigma^*$  in obiger Gleichung durch den äquivalenten Ausdruck  $\sigma^{(0)} e^{i\delta}$  ersetzt. Damit ergibt sich

$$E^* = \frac{\sigma^{(0)}}{\epsilon^{(0)}} e^{i\delta} = \frac{\sigma^{(0)}}{\epsilon^{(0)}} (\cos \delta + i \sin \delta) = E_1 + iE_2 = |E^*| e^{i\delta} \quad (21)$$

Der erste Term auf der rechten Seite schwingt phasengleich mit der Verzerrung und stellt gleichzeitig den realen oder elastischen Teil des komplexen Moduls dar. Er wird als Speichermodul bezeichnet.

$$E_1 = \frac{\sigma^{(0)}}{\epsilon^{(0)}} \cos \delta \quad (22)$$

Der zweite Term rechts ist der imaginäre oder viskose Teil des dynamischen Moduls; eine andere Bezeichnung für ihn ist Verlustmodul.

$$E_2 = \frac{\sigma^{(0)}}{\epsilon^{(0)}} \sin \delta \quad (23)$$

Bild 3 zeigt die grafische Interpretation dieses Sachverhalts. Zudem gilt:

$$\tan \delta = \frac{E_2}{E_1} \quad (24)$$

Der Betrag des komplexen Moduls ergibt sich zu

$$|E^*| = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2} = \frac{\sigma^{(0)}}{\epsilon^{(0)}} \quad (25)$$

Völlig analog geht die Herleitung der Speicher- und Verlustnachgiebigkeit vonstatten. Es gilt:

$$J^* = \frac{\epsilon^*}{\sigma^{(0)}} = \left(\frac{\epsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\right) e^{-i\delta} = \left(\frac{\epsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}}\right) (\cos \delta - i \sin \delta) = J_1 - iJ_2 = |J^*| e^{-i\delta} \quad (26)$$

Wiederum ist  $J_1$  der Speicher- und  $J_2$  der Verlustanteil der komplexen Nachgiebigkeit. Der Betrag von  $J^*$  lautet:

$$|J^*| = (J_1^2 + J_2^2)^{1/2} = \frac{\varepsilon^{(0)}}{\sigma^{(0)}} \quad (27)$$

Und auch hier seien die Beziehungen zwischen  $J_1$ ,  $J_2$  und  $\delta$  dargestellt.

$$\tan \delta = \frac{J_2}{J_1} \quad (28)$$

$$J_1 = |J^*| \cos \delta = |J^*| (1 + \tan^2 \delta)^{-1/2} \quad (29)$$

$$J_2 = |J^*| \sin \delta = |J^*| \tan \delta (1 + \tan^2 \delta)^{-1/2} \quad (30)$$

Betrachtet man die beiden Gleichungen (19) und (20) näher, so ist erkennbar, dass  $J^*$  und  $E^*$  reziprok sind. Damit gilt

$$J^* E^* = 1 \quad (31)$$

(Findley, Lai et al. 1989)

In Bild 4 sind als Anschauungsbeispiel sowohl die komplexe Nachgiebigkeit  $J^*$ , als auch der Verlust- und Speicheranteil, sowie der Phasenwinkel  $\delta$  in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  [Hz] für einen Kelvin-Voigt'schen Körper unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung dargestellt. Die Feder soll eine Steifigkeit von 0,50, der Dämpfer eine Viskosität von 1,00 aufweisen. Für sehr kleine Frequenzen bis etwa 0,02 Hz, was einer Schwingungsdauer von 50 sec entspricht, kann von einer Verlustnachgiebigkeit  $J_2 = 0$  ausgegangen werden. In diesem Bereich entspricht der Betrag der dynamischen Nachgiebigkeit dem Wert der statischen Kriechnachgiebigkeit  $1/E$ . Im anderen Extrem, nämlich bei sehr hohen Frequenzen über 1000 Hz bzw. einer Schwingungsdauer von 1/1000 sec geht die komplexe Nachgiebigkeit gegen Null, sowohl Verlust- also auch Speicheranteil nehmen den Wert Null an. Die Phasenverschiebung hingegen erreicht mit  $90^\circ$  den maximal möglichen Wert. Das System verhält sich wie ein Starrkörper, es tritt keine Verformung mehr als Antwort auf die Spannung auf.

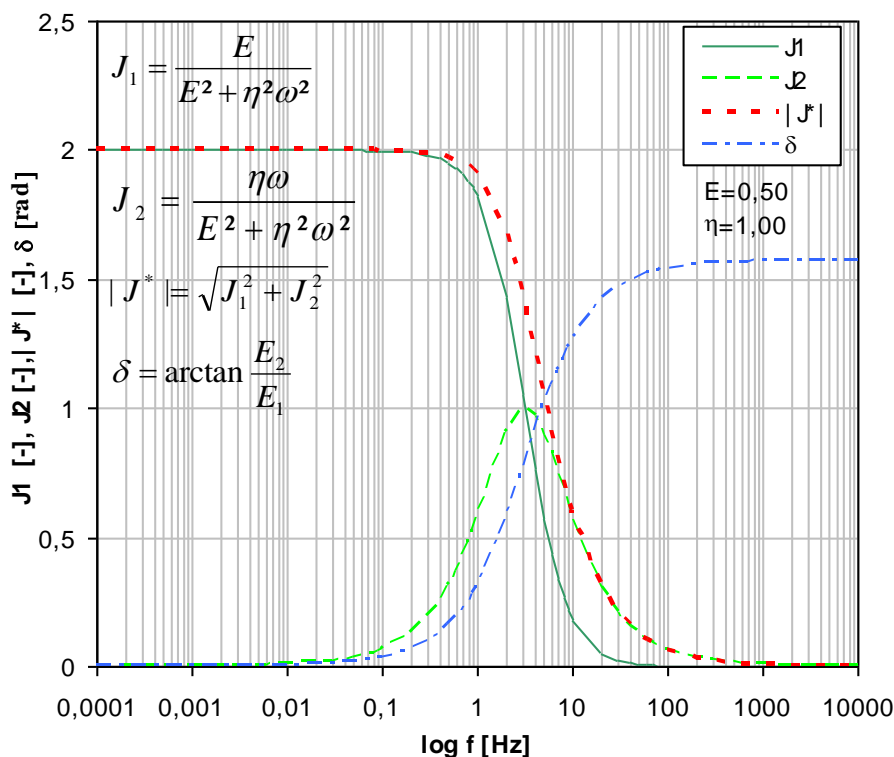


Bild 4: Kelvin-Voigt'scher Körper unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung

Im Übergangsbereich, dessen Frequenzspektrum beim Kelvin-Voigt'schen Körper vom Verhältnis  $\eta/E$  abhängt, verändert sich das Materialverhalten. Die komplexe Nachgiebigkeit sinkt rapide ab, das System wird steifer, der Phasenwinkel nimmt zu und der Speicheranteil der Nachgiebigkeit geht gegen Null. In einem gewissen Frequenzbereich erreicht die Verlustnachgiebigkeit ein Maximum, hier bei etwa 6 Hz; danach fällt sie wieder ab gegen Null.

Für zwei Frequenzen,  $10^{-4}$  und 6 Hz, sind in Bild 5 die Spannungs- und Verzerrungsverläufe in Abhängigkeit der Zeit aufgetragen. Links ist das Verhalten bei sehr niedrigen Frequenzen ablesbar. Der Phasenwinkel ist vernachlässigbar klein und die Verzerrung entspricht der Verzerrung bei statischen Versuchen. Im Fall, der rechts dargestellt ist, zeigt sich der Einfluss von zyklisch-dynamischer Beanspruchung.

Ein Phasenwinkel von etwa  $62^\circ$  tritt auf, gleichzeitig sinkt die Verzerrungsamplitude ab, was ein Anzeichen für den Anstieg der Systemsteifigkeit ist.

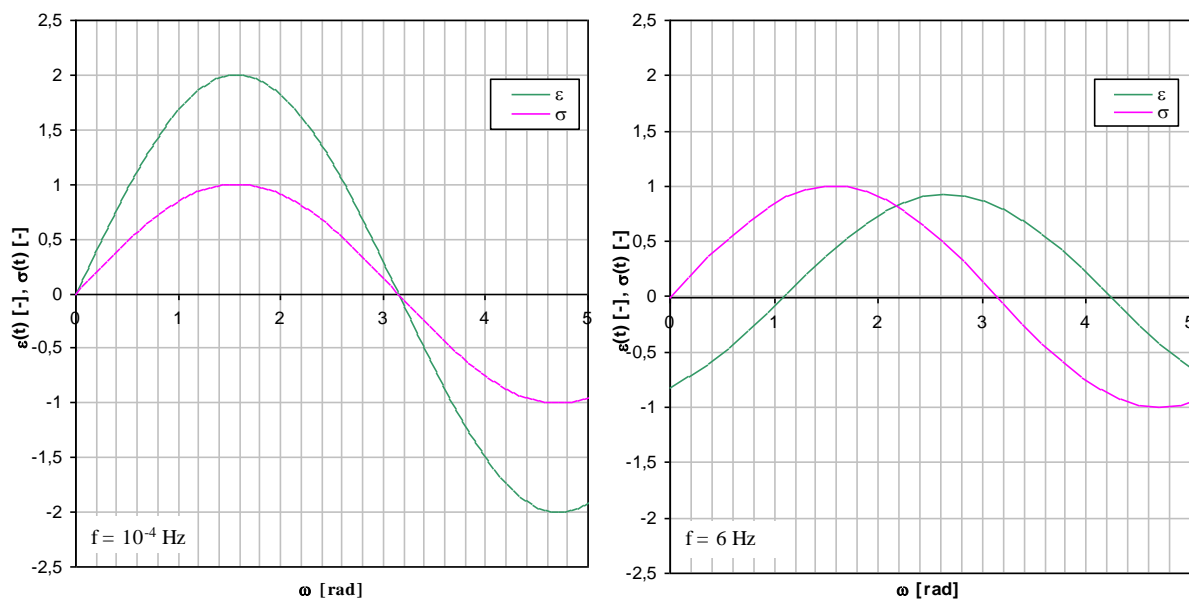


Bild 5: Spannungs-, Verformungsverlauf eines Kelvin-Voigt'schen Körpers unter zyklisch-dynamischer Beanspruchung mit  $E = 0,50$ ,  $\eta = 1,00$  und  $\sigma^{(0)} = 1,00$ . Links: Frequenz  $f = 10^{-4}$  Hz; Rechts:  $f = 6,00$  Hz

#### 4.2 Komplexer Modul und komplexe Nachgiebigkeit der bisher behandelten Modelle

Eine detaillierte Herleitung und mathematische, sowie grafische Diskussion der bisher behandelten Modelle muss aus Platzgründen an dieser Stelle entfallen. Es sei wiederum auf (Hofko 2006) verwiesen. Dort werden alle Modelle im Detail diskutiert. Tabelle 1 zeigt die dynamischen Kennwerte im Überblick

Tabelle 1: Zusammenfassung wichtiger Modellkennwerte für zeitlich lineare Modelle

Kennwert	Maxwell	Kelvin-Voigt	Burgers
Diff.gleich.	$\sigma + \frac{\eta}{E} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon}$	$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} = q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon}$
P	$1 + \frac{\eta}{E} \frac{\partial}{\partial t}$	1	$1 + p_1 \frac{\partial}{\partial t} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
$p_0$	1	1	1
$p_1$	$\frac{\eta}{E}$	0	$\frac{\eta^v}{E^e} + \frac{\eta^v}{E^k} + \frac{\eta^k}{E^k}$



$p_2$	0	0	$\frac{\eta^v \eta^k}{E^e E^k}$
Q	$\eta \frac{\partial}{\partial t}$	$E + \eta \frac{\partial}{\partial t}$	$q_1 \frac{\partial}{\partial t} + q_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}$
$q_0$	0	$E$	0
$q_1$	$\eta$	$\eta$	$\eta^v$
$q_2$	0	0	$\frac{\eta^v \eta^k}{E^k}$
$E^*(\omega)$	$\frac{i\omega\eta}{1 + \frac{\eta}{E}}$	$E + i\omega\eta$	$\frac{[p_1 q_1 \omega^2 - q_2 \omega^2 (1 - p_2 \omega^2)] +}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2} +$ $\frac{i[p_1 q_2 \omega^2 + q_1 (1 - p_2 \omega^2)]\omega}{p_1^2 \omega^2 + (1 - p_2 \omega^2)^2}$
$ E^*(\omega) $	$\frac{\omega\eta}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 \eta^2}{E^2}}}$	$\sqrt{E^2 + \eta^2 \omega^2}$	$\sqrt{E_1^2 + E_2^2}$
$E_1(\omega)$	$\frac{\frac{\eta^2 \omega^2}{E}}{1 + \frac{\eta^2 \omega^2}{E^2}}$	$E$	$\text{Re}(E^*)$
$E_2(\omega)$	$\frac{\eta\omega}{1 + \frac{\eta^2 \omega^2}{E^2}}$	$\eta\omega$	$\text{Im}(E^*)$
$J^*(\omega)$	$\frac{1}{E} - i \frac{1}{\eta\omega}$	$\frac{1}{E + i\omega\eta}$	$\frac{1}{E^*}$
$ J^*(\omega) $	$\frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 \eta^2}{E^2}}}{\omega\eta}$	$\frac{1}{\sqrt{E^2 + \eta^2 \omega^2}}$	$\frac{1}{ E^* }$
$J_1(\omega)$	$\frac{1}{E}$	$\frac{E}{E^2 + \eta^2 \omega^2}$	$\text{Re}(J^*)$
$J_2(\omega)$	$\frac{1}{\omega\eta}$	$\frac{\eta\omega}{E^2 + \eta^2 \omega^2}$	$\text{Im}(J^*)$
$\delta$	$\frac{E}{\omega\eta}$	$\frac{\eta\omega}{E}$	$\frac{E_2}{E_1}$

## 5 Modelle mit fraktionalem Dämpfern

Da Bitumen ein temperaturabhängiges Materialverhalten aufweist, das sich bei Belastung in Bezug auf die Zeit nichtlinear verhält, vermögen Modelle, die ausschließlich aus linearen Elementen aufgebaut sind keine ausreichend genaue Beschreibung des Materialverhaltens. Daher beinhalten die nun diskutierten Modelle auch fraktionale Dämpfer, bei denen eine Temperaturkalibrierung möglich ist und auch das zeitliche Verhalten durch geeignete Wahl des Exponenten  $k$  an die Realität angepasst werden kann. Bild 6 zeigt die behandelten Modelle in der Übersicht.

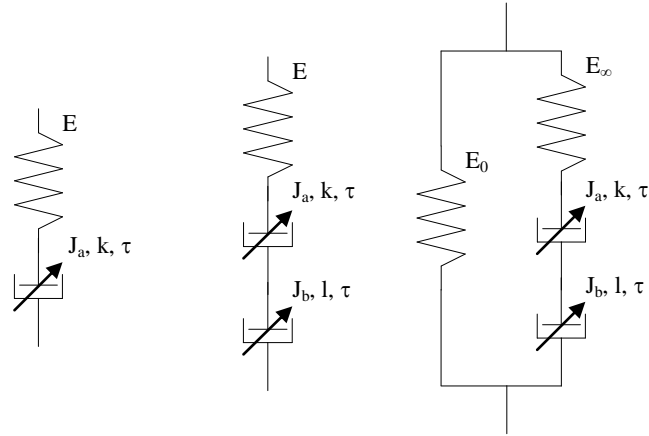


Bild 6: v.l.n.r.: Power-law-Modell, Huet-Modell, Huet-Sayegh-Modell

## 5.1 Power-law-Modell

Der Power-law-Körper kann als Erweiterung des Maxwell'schen Modells gesehen werden. Er besteht aus einer linearen Feder, die als Kennwert die Federkonstante  $E$  aufweist und einem fraktionalen Dämpfer mit den Kennwerten  $J_a$ ,  $\tau$  und  $k$ .

Für eine konstante Spannung  $\sigma^{(0)}$ , die von  $0 \leq t < t_1$  vorhanden ist, ergibt sich die zeitabhängige Verzerrung  $\varepsilon(t)$  wie folgt:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)} = \left[ \frac{1}{E^e} + J_a \left( \frac{t}{\tau} \right)^k \right] \sigma^{(0)} \quad (32)$$

Wird nun zu einem Zeitpunkt  $t_1$  die Belastung  $\sigma^{(0)}$  weggenommen, so nimmt gleichzeitig der elastische Anteil der Verzerrung den Wert Null an, die Verformung des fraktionalen Dämpfers bleibt bestehen, damit lautet die Rückkriechfunktion für  $t_1 \leq t \leq \infty$

$$\varepsilon(t) = J_a \left( \frac{t_1}{\tau} \right)^k \sigma^{(0)} = \text{konst.} \quad (33)$$

Im Vergleich zum herkömmlichen Maxwell-Modell zeigt sich der entscheidende Vorteil, dass die Kriechgeschwindigkeit je nach realem Materialverhalten durch die zusätzlichen Parameter des fraktionalen Dämpfers angepasst werden kann und nicht mehr zwangsweise linear verläuft.

Die komplexen Kennwerte eines Materials, das sich nach dem Power-law-Modell verhält, können berechnet werden, indem die folgende Beziehung im Laplace-Raum zwischen statischen und komplexen Kennwerten genutzt wird.

$$J^*(\omega) = i\omega \int_0^\infty J(\xi') e^{-i\omega\xi'} d\xi' = (i\omega) L[J(\xi')]_{s=i\omega} \quad (34)$$

Dieses Vorgehen führt zu folgenden Kennwerten, die das dynamische Verhalten des Power-law-Körpers beschreiben.

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) (i\omega)^{-k} \quad (35)$$

mit dem realen und imaginären Anteilen

$$J_1 = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} \quad (36)$$

$$J_2 = J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} \quad (37)$$

Aus dem Verhältnis  $J_2/J_1$  lässt sich der Phasenwinkel bestimmen:

$$\delta = \arctan\left(\frac{J_a \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\Gamma(k+1)\tau^{-k}E^e\omega^{-k}}{1 + J_a \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\Gamma(k+1)\tau^{-k}E^e\omega^{-k}}\right) \quad (38)$$

Aus diesen Kennwerten lassen sich durch einfache Operationen der komplexe Modul und dessen Speicher- und Verlustanteil berechnen. Zunächst gilt, dass sowohl  $E^*$  und  $J^*$ , als auch  $|E^*|$  und  $|J^*|$  zueinander reziprok sind. Zudem gelten folgende Zusammenhänge:

$$E_1 = \frac{1}{|J^*|} \cos \delta = \frac{J_1}{J_1^2 + J_2^2} \quad (39)$$

$$E_2 = \frac{1}{|J^*|} \sin \delta = \frac{J_2}{J_1^2 + J_2^2} \quad (40)$$

Daraus ergeben sich der reale und imaginäre Anteil des komplexen Moduls

$$E_1 = \frac{\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}}{\left(\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}\right)^2 + J_a^2 \tau^{-2k} \Gamma(1+k)^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2} \omega^{-2k}} \quad (41)$$

$$E_2 = \frac{J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k}}{\left(\frac{1}{E} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos \frac{k\pi}{2} \omega^{-k}\right)^2 + J_a^2 \tau^{-2k} \Gamma(1+k)^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2} \omega^{-2k}} \quad (42)$$

(Findley, Lai et al. 1989)

## 5.2 Huet-Modell

Fügt man dem Power-law-Modell einen weiteren fraktionalen Dämpfer in Serie hinzu, so erhält man das Huet-Modell. Es wurde 1963 von C. Huet im Rahmen einer Dissertation an der Faculté des Sciences de l'Université de Paris entwickelt.

Da auch bei diesem Modell reine Serienschaltung vorliegt, kann die Kriechnachgiebigkeit des Systems aus den Einzelkriechnachgiebigkeiten berechnet werden.

Es ergibt sich

$$J(t) = J^e + J^{frak1}(t) + J^{frak2}(t) = \frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t}{\tau}\right)^l \quad (43)$$

Bringt man nun auf einen Huet-Körper eine konstante Spannung  $\sigma^{(0)}$  auf, so lassen sich die zeitabhängigen Verzerrungen wie folgt berechnen:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma^{(0)} = \left[\frac{1}{E^e} + J_a \left(\frac{t}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t}{\tau}\right)^l\right]\sigma^{(0)} \quad (44)$$

Entfernt man zum Zeitpunkt  $t_1$  die Belastung, so geht auch sofort der elastische Verformungsanteil der Feder auf Null zurück. Die Verzerrungen der fraktionalen Dämpfer bleiben erhalten. Damit lautet die mathematische Beschreibung des Rückkriechens für  $t_1 \leq t \leq \infty$

$$\varepsilon(t) = \left[J_a \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^k + J_b \left(\frac{t_1}{\tau}\right)^l\right]\sigma^{(0)} = konst \quad (45)$$

Der Vorteil des zweiten Dämpfers liegt darin, das Kriechen unter Belastung noch genauer an die Realität anpassen zu können.

Die komplexe Kriechnachgiebigkeit kann aufgrund der Serienschaltung durch die Summe der Einzelnachgiebigkeiten erhalten werden. Damit ergibt sich:

$$J^*(\omega) = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(k+1) (i\omega)^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(l+1) (i\omega)^{-l} \quad (46)$$

Und weiters die Anteile dieser komplexen Zahl:

$$J_1 = \frac{1}{E^e} + J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \cos\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} \quad (47)$$

$$J_2 = J_a \tau^{-k} \Gamma(1+k) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \omega^{-k} + J_b \tau^{-l} \Gamma(1+l) \sin\left(\frac{l\pi}{2}\right) \omega^{-l} \quad (48)$$

Der Übersichtlichkeit halber sind in Annex J von (Blab, Kappl, et al. 2006) die komplexen Kennwerte auch mit folgenden Abkürzungen formuliert worden.

$$J_1 = b \quad (49)$$

$$J_2 = c \quad (50)$$

$E^*$  erhält man aus dem Reziprokwert von  $J^*$ ,  $E_1$  und  $E_2$  aus  $J_1/(J_1^2+J_2^2)$  und  $J_2/(J_1^2+J_2^2)$ :  
Damit ergeben sich unter Verwendung der Abkürzungen die weiteren Werte zu:

$$J^*(\omega) = b - ic \quad (51)$$

$$E^*(\omega) = \frac{1}{b - ic}, \quad E_1 = \frac{b}{b^2 + c^2}, \quad E_2 = \frac{c}{b^2 + c^2} \quad (52)$$

Huet entwickelte sein Modell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Bitumen unter zyklisch-dynamischer Belastung. Gleichzeitig kann man das Verformungsverhalten von Asphalten mit dem vorliegenden Modell beschreiben; jedoch nur bei ausreichend tiefen Temperaturen.

### 5.3 Huet-Sayegh-Modell

Das nun schon oft zitierte Problem mit allen seriellen Modellen, dass keine adäquate Beschreibung des Rückkriechens möglich ist, führte auch im Bereich der Modelle mit fraktionalen Dämpfern dazu parallel geschaltete Systeme zu entwickeln. Mit dem Huet'schen Modell lässt sich das mechanische Verhalten von Werkstoffen, wie etwa Bitumen auch im zyklisch-dynamischen Bereich über ein weites Spektrum der Temperatur und der Frequenz gut beschreiben. Für Festkörper mit Bitumen als Bindemittel ist eine befriedigende Modellierung vor allem bei niedrigen Frequenzen und hohen Temperaturen nicht gegeben. Dies liegt vor allem daran, dass der komplexe Modul beim Huet'sche Modell bei diesen Randbedingungen Richtung Null geht, während aus Versuchen bekannt ist, dass er sich z.B. bei Asphalten einem von Null verschiedenen Wert  $E_0$  annähert.

Unter diesem Aspekt entwickelte G. Sayegh in seiner Dissertation (Sayegh 1965) ein erweitertes, parallelgeschaltetes, bi-fraktionales Modell, das Huet-Sayegh-Modell, das häufig zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Asphalten bei zyklischer Beanspruchung herangezogen wird.

Die analytische Herleitung der statischen Materialparameter ist nicht mehr möglich. Auf eine numerische Annäherung wird an dieser Stelle verzichtet.

Unter Berücksichtigung der eingeführten Abkürzungen in (49) und (50) und dem Zusatz, dass

$$E_0 = a \quad (53)$$

ergeben sich die Kennwerte des Modells wie folgt:

$$E^*(\omega) = a + \frac{1}{b - ic}, \quad |E^*| = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2ac + 1}{b^2 + c^2}} \quad (54)$$

$$E_1 = a + \frac{b}{b^2 + c^2}, \quad E_2 = \frac{c}{b^2 + c^2} \quad (55)$$

$$J^*(\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{b - ic}} = \frac{ab^2 + b + c^2 a - ic}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2ab + 1}, \quad |J^*| = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + 2ac + 1}} \quad (56)$$

$$J_1 = \frac{ab^2 + b + c^2a}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ab + 1}, \quad J_2 = \frac{c}{a^2b^2 + a^2c^2 + 2ab + 1} \quad (57)$$

## 6 Parameteridentifikation mittels Datafitting

Wie schon weiter oben angeführt, kann das mechanische Verhalten verschiedener, realer Stoffe für jeweils eingeschränkte Randbedingungen mit Hilfe bestimmter rheologischer Modelle abgebildet werden. Führt man an einem Material zyklische Versuche bei unterschiedlichen Temperaturen über ein Spektrum an Frequenzen durch und berechnet über die erfassten Messwerte den Speicher- und Verlustmodul, so kann man zunächst aus diesen Daten den Betrag des komplexen Moduls und den Phasenwinkel bestimmen, sowie die gewonnenen Werte in einem Cole-Cole- und einem Black-Diagramm darstellen. Das Cole-Cole-Diagramm ist eine Darstellung des elastischen Anteils des dynamischen Moduls ( $E_1$ ) auf der x-Achse und des viskosen Anteils ( $E_2$ ) auf der y-Achse. Das Black-Diagramm stellt den Phasenwinkel über dem Betrag des dynamischen Moduls dar.

Nun ist es möglich durch gezielte Variation der Modellparameter Kurven des gewählten Modells an die aus den Versuchen gewonnenen Daten zu approximieren, wodurch eine analytische Beschreibung des mechanischen Verhaltens möglich wird. Dieser Vorgang wird als Parameteridentifizierung durch Datafitting bezeichnet.

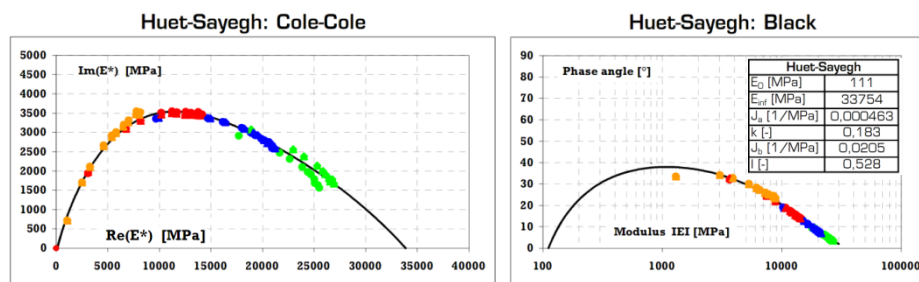


Bild 7: Cole-Cole-Diagramm (links), Black-Diagramm (rechts)

Bild 7 zeigt ein Cole-Cole-Diagramm von ausgewerteten, zyklisch-dynamischen Materialversuchen und des gefitteten Huet-Sayegh-Modells. Jede Farbe bezeichnet Versuche bei einer Temperatur und unterschiedlichen Frequenzen, wobei gegen den linken Ast der Kurve hohe Temperaturen und niedrige Frequenzen vorliegen (weiches Materialverhalten) und am rechten Ast der Kurve tiefe Temperaturen und hohe Frequenzen zu finden sind (steifes Materialverhalten). Die schwarze Kurve beschreibt das Huet-Sayegh-Modell mit den Parametern, die rechts oben in Bild 7 zu sehen sind.

Zur Parameteridentifikation wurde für die drei in diesem Artikel diskutierten Modelle mit fraktionalen Dämpfern am CD-Labor des Instituts für Straßenbau und Straßenerhaltung der TU-Wien ein Programm entwickelt, mit dem die Modellparameter gezielt so variiert werden, dass die Summe des Fehlerquadrats zwischen den Datenpunkten aus den Materialversuchen und der Modellkurve ein Minimum erreicht und so eine bestmögliche Anpassung der Modelle an die Versuchsergebnisse und damit an das Materialverhalten bei dynamischer Belastung möglich ist.

Im Rahmen eines Forschungsprojekts wurden für eine Vielzahl von Asphalttypen mit unterschiedlichen Bindemittelsorten und Gesteinen zyklisch-dynamische Materialversuche durchgeführt und für diese Modellparameter bestimmt. Diese Parameter bilden die Grundlage für eine Simulation des Verformungsverhaltens mit Hilfe einer FEM-Software.

## 6.1 Verhalten von Asphalten bei verschiedenen Belastungsarten

Bild 8 zeigt die Cole-Cole-Diagramme für vier Materialprüfverfahren, die nach ÖNORM EN 12697-26 geregelt sind. Es sind dies die direkte Zugprüfung (DT-CY), die direkte Druckprüfung (DC-CY), die direkte Zug-Druckprüfung (DTC-CY) und die Prüfung am 4-Punktbiegebalken (4PBB-PR). Wirft man einen genaueren Blick auf die  $E_{\infty}$ -Werte (es ist dies der rechte Schnittpunkt der Kurven mit der x-Achse), die gleichzeitig den Glasmodul bei tiefen Temperaturen und hohen Frequenzen repräsentieren, so findet sich die größte Steifigkeit beim direkten Druckversuch, das Minimum kann dem Analogon im Zugbereich, dem direkten Zugversuch zugeordnet werden, lässt man den 4-Punktbiegebalken außer Acht, dessen Ergebnisse nur indirekt mit den drei anderen vergleichbar sind. Für eine direkte Vergleichbarkeit sind zu große Unterschiede in der Geometrie und der Lage des Probekörpers in der Prüfmaschine, sowie in der Belastungsart vorhanden. Damit zeigen die Ergebnisse das Verhalten des Asphalts bei unterschiedlichen Belastungsarten (Zug, Druck, Zug/Druck, Biegung) sehr gut. Im direkten Zugversuch reagieren Asphalte einerseits weicher, gleichzeitig sind die viskosen Verformungsanteile – dargestellt durch die Maxima der Kurven – und damit die Verlustwinkel höher als im Druckbereich. Der auf Biegung beanspruchte Prüfkörper im 4-PBB-Versuch weist zwar ein noch weiches Verhalten auf, die viskosen Anteile sind jedoch niedriger als bei allen anderen Versuchstypen.

Aus den Ergebnissen der unterschiedlichen Versuchstypen lässt sich klar erkennen, dass bei der Verwendung von Parametern für computerunterstützte Modellierungen Rücksicht auf die Versuchsart, die Datengrundlage der Parameteridentifizierung war, genommen werden muss. In Abstimmung mit den Randbedingungen der Modellierung – etwa ob Zug-, Druck- oder Biegebeanspruchung simuliert werden soll – müssen auch die dazugehörigen Parameter des richtigen Versuchstypus verwendet werden.

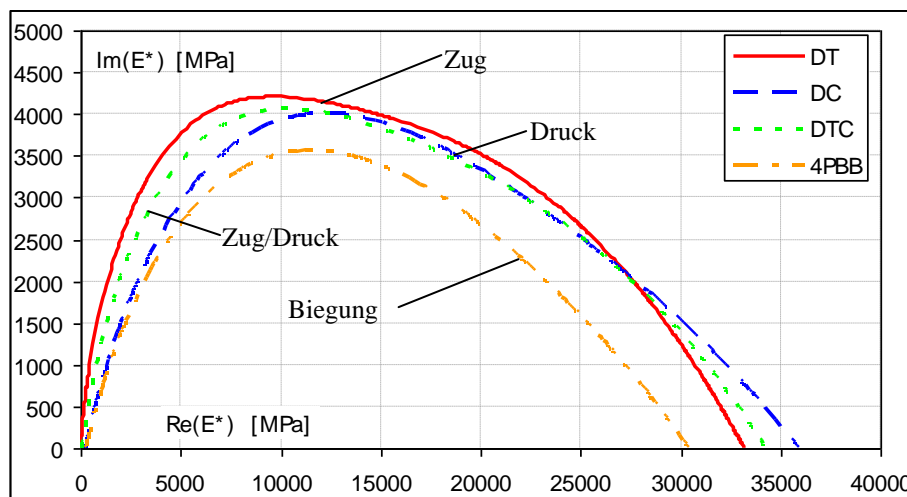


Bild 8: Cole-Cole-Diagramme (Huet-Sayegh) für einen Asphalttyp bei Auswertung unterschiedlicher Prüfmethoden

## 7 Ausblick

Die hier vorliegenden Modelle vermögen das Verformungsverhalten von Asphalten bei tiefen Temperaturen sehr gut zu beschreiben. Auch FEM-Simulationen verlaufen für diese Randbedingungen erfolgreich. Bei Temperaturen, die über Raumtemperatur liegen, werden jedoch die plastischen Verformungsanteile von Asphalten immer größer und bei hohen Temperaturen über 40°C dominant. Da die beschriebenen Modelle keine plastischen Elemente besitzen, ergeben sich bei der Modellierung des Hochtemperaturverhaltens mit diesen Modellen keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Eine Aufgabe besteht also darin, rheologische Modelle zu entwickeln, die auch die plastischen Verformungsanteile von

Asphalten realitätsnahe beschreiben können. Dies ist auch Gegenstand eines Forschungsprojekts am CD-Labor des Instituts für Straßenbau und Straßenerhaltung der TU-Wien.

Die hier gezeigten Versuchsergebnisse stammen allesamt aus Steifigkeitsversuchen nach ÖNORM EN 12697-26. Diese weggesteuerten Versuche lassen auch bei hohen Temperaturen keine plastischen Verformungen zu. Daher müssen Prüfverfahren entwickelt werden, die ein Analogon zum Steifigkeitsversuch bieten, ein großes Temperatur- und Frequenzspektrum abdecken und gleichzeitig plastische Verformungen bei hohen Temperaturen zulassen. Ein dementsprechender Ansatz mit Hilfe von triaxialen Druckschwellversuchen befindet sich gerade in oben genanntem Labor in Entwicklung – erste Ergebnisse sind vielversprechend.

Parallel dazu werden FEM-Simulation durchgeführt um die gewählten Modellansätze zu überprüfen und zu validieren.

Ziel der Bemühungen ist es, eine analytisch fundierte Prognose des Hochtemperaturverhaltens (Spurrinnenprognose) mit einer guten Prognosequalität in Abhängigkeit beliebiger Verkehrslastspektren und Klimaszenarien zu entwickeln.

Zum Autor:

*Dipl. Ing. Bernhard Hofko ist als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Straßenbau und Straßenerhaltung der TU-Wien beschäftigt und schreibt dort an seiner Dissertation.*

Anschrift:

*Institut für Straßenbau und Straßenerhaltung*

*Technische Universität Wien*

*Gusshausstraße 28/233*

*A-1040 Wien*

Kontakt:

*Tel.: 0664/6104988*

*E-Mail: [bhofko@istu.tuwien.ac.at](mailto:bhofko@istu.tuwien.ac.at)*

Bankverbindung:

*Oberbank AG*

*BLZ: 15000*

*Kontonummer: 545015455*

## **Literaturverzeichnis**

Bartsch H.-J. (2001): Taschenbuch mathematischer Formeln. Carl Hanser Verlag, München

Blab R.; Kappl K.; Lackner R.; Aigner E. (2006): SAMARIS – Permanent Deformation of bituminous bound Materials in flexible Pavements. SAM-05-D28, Competitive and Sustainable Growth (GROWTH) Programme (EU Commission), Brussels

Findley W. N.; Lai J. S.; Onarn K. (1989): Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic Materials. Dover Publications Inc., New York

Hofko B. (2006): Rheologische Modelle zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Asphalten. Technische Universität Wien, Wien

Huet C. (1963): Etude par une méthode d'impédance du comportement viscoélastique des matériaux hydrocarbonés. Dissertation an der Faculté des Sciences de l'université de Paris, Paris

Mang H.; Hofstetter G. (2000): Festigkeitslehre. Springer-Verlag, Wien

Sayegh G. (1965): Variation des modules de quelques bitumes purs et bétons bitumineux. Dissertation an der Faculté des Sciences de l'université de Paris, Paris