Über die Simulation differential-algebraischer Modelle mit nichttrivialem Index

Carina Pöll[1], Irene Hafner[2], Bernhard Heinzl[3], Felix Breitenecker[1]
[1]TU Wien, Institut für Analysis und Scientific Computing
[2]dwh GmbH Simulation Services, Wien
[3]TU Wien, Institut für Rechnergestützte Automation
carina.poell@tuwien.ac.at

Durch die Verwendung von komponentenbasierten Simulationswerkzeugen zur Modellierung physikalischer Systeme entstehen Gleichungssysteme mit Index höherer Ordnung. Dieses Paper soll einen Überblick über gängige Methoden der Indexreduktion bieten, wobei eine Klassifikation der verschiedenen Ansätze vorgenommen wird. Im letzten Abschnitt werden verschiedene Methoden anhand eines Beispiels vorgeführt.

1 Einleitung

Eine komponentenbasierte akausale Modellbeschreibung für physikalische Systeme, wie beispielsweise Modelica oder MATLAB/Simscape, führt in der Regel auf differential–algebraische Gleichungssysteme (DAEs) mit nichttrivialem differentiellem Index. Das numerische Lösen von DAEs mit Index höherer Ordnung ist mit herkömmlichen ODE–Lösungsmethoden im Allgemeinen sehr komplex und daher numerisch aufwändig bzw. kann sogar unmöglich sein. Diese Problematik führt auf die sogenannte Indexreduktion, bei dem die gegebene DAE in eine DAE mit Index niedrigerer Ordnung oder eine ODE umformuliert wird. Aufgrund der großen Unterschiede (Struktur, Eigenschaften, etc.) von DAEs findet man in der Literatur eine ganze Reihe verschiedener Ansätze und Methoden zur Reduktion des differentiellen Index. Einige dieser Ansätze sollen in dieser Arbeit gegenübergestellt und anhand von Fallstudien evaluiert werden.

2 Grundlegende Definitionen

Ein differential–algebraisches Gleichungssystem ist im Allgemeinen gegeben durch die implizite Gleichung

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \qquad (1)$$

mit $F: I \times D_x \times D_{\dot{x}} \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), wobei I ein reelles Intervall ist, $\dot{x}$ die Ableitung von x nach t symbolisiert und D_x, $D_{\dot{x}}$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind (siehe [1]). Ein differential–algebraisches Gleichungssystem zeichnet sich dadurch aus, dass differentielle und algebraische Gleichungen auftreten, wobei die algebraischen Gleichungen, die die Form $g(x) = 0$ mit einer Funktion $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $k < n$ besitzen, auch Zwangsbedingung genannt werden. Gleichung (1) besitzt den differentiellen Index $m \in \mathbb{N}$, wenn m die minimale Anzahl an Ableitungen darstellt so, dass sich aus dem System

$$F(t, x, \dot{x}) = 0, \frac{dF(t,x,\dot{x})}{dt} = 0, \dots, \frac{d^m F(t,x,\dot{x})}{dt^m} = 0 \qquad (2)$$

ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem (ODE) extrahieren lässt, das durch algebraische Umformungen auf die Form $\dot{x} = \varphi(t, x)$ mit $\varphi: I \times D_x \to \mathbb{R}^n$ gebracht werden kann (siehe [2]).

3 Methoden der Indexreduktion

Die folgende Klassifikation der Methoden zur Indexreduktion ist aus [2] entnommen.

3.1 Indexreduktion durch Differentiation

Ein erster Ansatz zur Reduktion des Index besteht darin, die Zwangsbedingung

$$g(x) = 0 \qquad (3)$$

zu differenzieren und die Zwangsbedingung durch ihre Ableitung zu ersetzen. Dieses Vorgehen wird durchgeführt bis das System den Index 1 besitzt. Ein Problem, das sich durch dieses Vorgehen ergibt, ist die Tatsache, dass durch das Ableiten Information verloren geht, da die für die Rückintegration notwendigen Anfangswerte unbekannt sind. Dadurch kann es zum sogenannten numerischen „Drift–off“ kommen, bei dem sich die numerisch berechnete Lösung von der exakten Lösung entfernt.

Ein etwas anderer Ansatz ist die Baumgarte–Methode (siehe [3]). Diese Methode ersetzt die Zwangsbedingung (3) durch eine Linearkombination von $g, \dot{g}$ und $\ddot{g}$, das heißt statt (3) wird folgende Gleichung verwendet

$$\ddot{g} + 2\alpha\dot{g} + \beta^2 g = 0. \qquad (4)$$

Die Methode wird dadurch motiviert, dass durch die Gestalt von Gleichung (4) bzw. das Auftreten der ursprünglichen Zwangsbedingung keine Information verloren geht und daher keine Anfangswerte notwendig sind. Die Konstanten α und β in Gleichung (4) sollen so gewählt werden, dass die Differentialgleichung asymptotisch stabil ist, das heißt $\alpha > 0$. Ein Problem dieser Methode stellt die Wahl der beiden Konstanten dar.

3.2 Stabilisierung durch Projektion

Bei diesem Ansatz wird die numerische Lösung, wenn sie die Zwangsbedingung nicht mehr erfüllt, das heißt von der tatsächlichen Lösung „wegdriftet“, auf die durch die Zwangsbedingung implizit definierte Mannigfaltigkeit projiziert. Diese sogenannte Lösungsmannigfaltigkeit ist daher gegeben durch

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}. \qquad (5)$$

Beispielsweise wird bei einem Index–2–Problem das durch Differenzieren der Zwangsbedingung erhaltene Index–1–Problem numerisch gelöst und im Fall, dass die Lösung die ursprüngliche Zwangsbedingung nicht mehr erfüllt, wird die numerische Lösung auf die durch die ursprüngliche Zwangsbedingung definierte Mannigfaltigkeit projiziert.

3.3 Methoden basierend auf lokaler Zustandstransformation

Bei dieser Methode wird die Lösung der DAE statt auf dem gesamten Zustandsraum nur auf einer Mannigfaltigkeit gesucht, die implizit definiert ist durch die Zwangsbedingung (siehe Gleichung (5)). Dadurch vereinfacht sich das Lösen einer DAE zum Lösen einer ODE auf der Mannigfaltigkeit M, die durch Einführung lokaler Koordinaten leichter gelöst werden kann.

4 Fallstudie

Als Anschauungsbeispiel wird die Bewegung eines Pendels auf einer Kreisbahn in kartesischen Koordinaten verwendet, der Einfachheit halber werden die Masse und die Länge des Seils mit 1 angenommen. Diese ist in expliziter Form gegeben durch die folgenden Gleichungen (siehe [4])

$$\dot{x} = v_x \qquad (6)$$

$$\dot{y} = v_y \qquad (7)$$

$$\dot{v_x} = -Fx \qquad (8)$$

$$\dot{v_y} = g - Fy \qquad (9)$$

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad (10)$$

wobei F die Kraft, die das Pendel auf der Kreisbahn hält, und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Mathematisch gesehen kann F als Lagrange Multiplikator interpretiert werden. Die Zwangsbedingung ist gegeben durch Gleichung (10). Die DAE (6)–(10) ist ein Index–3–Problem, was typisch für mechanische Systeme ist (siehe [2], [5]). Die Baumgarte–Methode angewendet auf diese Zwangsbedingung, liefert

$$2({v_x}^2 + {v_y}^2 - Fx^2 + gy - Fy^2) + 4\alpha\big(xv_x + yv_y\big) + \beta^2(x^2 + y^2 - 1) = 0. \qquad (11)$$

Das Lösen der DAE (6)–(10) mit Hilfe einer Lösungsmannigfaltigkeit ist in diesem Fall durch Transformation auf Polarkoordinaten sehr einfach möglich (vgl. Abschnitt 3.3). In [5] werden außerdem verschiedene Mehrschrittverfahren zur numerischen Lösung des Gleichungssystems (6)–(10) diskutiert.

5 Referenzen

[1] P. Kunkel und V. Mehrmann. *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution.* European Mathematical Society, Finnland, 2006.

[2] E. Hairer und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II.* Springer, Deutschland, 2002.

[3] E. Eich und M. Hanke. *Regularization Methods for Constrained Mechanical Multibody Systems.* ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, S. 761-773, 1995.

[4] F. E. Cellier und E. Kofman. *Continuous System Simulation.* Springer, USA, 2006.

[5] J. Frochte. *Evaluation and Adaption of Techniques for Higher Index DAE with Respect to Real-Time Simulation.* SNE Simulation Notes Europe, S. 45-52, 2012.