

Filterbänke mit Überabtastung¹

H. Bölskei ÖVE, IEEE, F. Hlawatsch, IEEE²

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Hans Wilhelm Schüßler zum 70. Geburtstag gewidmet.

Überabgetastete Filterbänke bieten mehr Freiheit im Entwurf, bessere numerische Stabilität und größere Unempfindlichkeit gegenüber Quantisierungsrauschen als kritisch abgetastete Filterbänke. Diesen Vorteilen steht ein prinzipiell größerer Implementierungsaufwand gegenüber. Aus diesem Grund sind überabgetastete modulierte Filterbänke, die eine besonders effiziente Implementierung erlauben, von praktischem Interesse. In manchen Anwendungen (insbes. in der Bildcodierung) ist es weiters wichtig, daß alle Filter einer Filterbank linearphasig sind.

Der vorliegende Beitrag behandelt überabgetastete Filterbänke unter besonderer Berücksichtigung von cosinus-modulierten Filterbänken und linearphasigen Filtern. Wir stellen einen Zusammenhang zwischen überabgetasteten Filterbänken und redundanten Signalentwicklungen her. Weiters wird für überabgetastete Filterbänke eine Empfindlichkeitsanalyse durchgeführt. Die erhöhte Entwurfsfreiheit in überabgetasteten Filterbänken wird sowohl theoretisch als auch an Hand von Simulationen erläutert. Schließlich wird eine vereinheitlichte Theorie cosinus-modulierter Filterbänke entwickelt.

Schlüsselwörter: Filterbänke; Überabtastung; Frametheorie; Bildcodierung

Oversampled filter banks. Oversampled filter banks offer more design freedom, better numerical stability, and less sensitivity to quantization noise as compared to critically sampled filter banks. These advantages come at the cost of increased computational complexity. Therefore, oversampled modulated filter banks allowing a particularly efficient implementation are of practical interest. Furthermore, in certain applications (such as image coding) it is important to have linear phase filters in all channels of the filter bank.

In this paper we discuss oversampled filter banks with emphasis on cosine-modulated filter banks and linear phase filters. We establish a relation of oversampled filter banks with redundant signal expansions. We also perform an analysis of the numerical sensitivity of oversampled filter banks. The increased design freedom in oversampled filter banks is demonstrated both theoretically and by means of simulation examples. Finally, we present a unified theory of cosine-modulated filter banks.

Keywords: filter banks; oversampling; frame theory; image coding

1. Einleitung

Filterbänke werden in vielen praktischen Signalverarbeitungssystemen eingesetzt, insbesondere für moderne Kompressionsverfahren zur Quellcodierung von Audio- und Videosignalen (z. B. DCC, MPEG und

JPEG). Auf Filterbänken basierende Teilbandcodierungsverfahren ermöglichen eine an die menschliche Wahrnehmung angepaßte Codierung, bei der Frequenzanteile, die nicht oder nur wenig wahrgenommen werden, gröber quantisiert werden als perzeptuell wesentliche Frequenzen. Weiters kann die Codierung den Eigenschaften der zu verarbeitenden Signale (insbesondere den Signalleistungen in den einzelnen Kanälen) angepaßt werden. Weitere wichtige Anwendungen von Filterbänken liegen in der adaptiven Signalverarbeitung, in der A/D-Wandlung und in der Übertragungstechnik.

¹ Diese Arbeit wurde im Rahmen des FWF-Projekts P10531-ÖPY ausgeführt.

² Dipl.-Ing. Dr. Helmut Bölskei, Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Franz Hlawatsch, Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 25/389, A-1040 Wien.

Bis vor kurzem wurden vorwiegend kritisch abgetastete Filterbänke betrachtet, d. h. Filterbänke, bei denen die Anzahl aller Teilbandsignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit gleich der Anzahl der Eingangssignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit ist. Überabgetastete Filterbänke ([1] bis [4]) bieten aber wichtige Vorteile gegenüber kritisch abgetasteten Filterbänken:

- (1) Mehr Freiheit im Entwurf. Bei vorgegebener Analysefilterbank ist die Synthesefilterbank, die zu perfekter Rekonstruktion (PR) führt, nicht eindeutig bestimmt. Diese Mehrdeutigkeit erlaubt den Entwurf von Synthesefilterbänken mit speziellen erwünschten Eigenschaften (z. B. Frequenzselektivität, die insbesondere in der Bildcodierung wichtig ist). Weiters konvergieren Filterbankentwurfprogramme bei Überabtastung i. a. besser, weil weniger Nebenbedingungen zu erfüllen sind; dies führt in weiterer Folge zu besseren Filtern.
- (2) Größere Unempfindlichkeit gegenüber Quantisierung der Teilbandsignale. So ist z. B. in einer paraunitären Filterbank der durch eine Quantisierung der Teilbandsignale verursachte Rekonstruktionsfehler umgekehrt proportional zum Überabtastfaktor [1], [2]. Weiters erlauben überabgetastete Filterbänke eine spektrale Formung des Quantisierungsrausches (noise shaping [5]), durch die der Rekonstruktionsfehler weiter verringert werden kann.

Diesen Vorteilen steht prinzipiell ein größerer Implementierungsaufwand gegenüber, denn in einer Filterbank mit Überabtastfaktor K ist die Anzahl aller Teilbandsignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit die K -fache Anzahl der Eingangssignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit. (Übliche Werte für K liegen etwa zwischen 2 und 8.) Aus diesem Grund sind Filterbänke, die eine effiziente Implementierung erlauben, von besonderem praktischen Interesse. Modulierte Filterbänke wie DFT-Filterbänke und cosinus-modulierte Filterbänke (CMFBs) erlauben eine sehr effiziente Implementierung mittels FFT- bzw. DCT-Algorithmen. In praktischen Anwendungen werden hier meist CMFBs bevorzugt, weil sie eine reelle Signalverarbeitung gestatten, d. h. für reellwertige Eingangssignale sind die Teilbandsignale reellwertig, wenn der Analyseprototyp reellwertig ist. Trotz der weiter oben beschriebenen Vorteile der Überabtastung wurden in der Literatur bisher ausschließlich kritisch abgetastete CMFBs behandelt ([6] bis [12]).

Neben der effizienten Implementierung ist in manchen Anwendungen die Linearphasigkeit aller Filter der Filterbank wichtig. Dies trifft insbesondere auf die Bildverarbeitung zu, da hier nichtlinearphasige Filter oft zu perzeptuell störenden Verzerrungen führen. Die herkömmlichen in der Literatur beschriebenen CMFBs können nicht gleichzeitig die PR-Eigenschaft erfüllen und linearphasige Filter in allen Kanälen haben. Kürz-

lich wurden aber neuartige CMFBs vorgestellt, die beide Eigenschaften besitzen können ([11] bis [16]).

Im vorliegenden Beitrag wird in Abschnitt 2 eine allgemeine Theorie überabgetasteter Filterbänke vorgestellt, die z. T. auf der sogenannten Frametheorie [17] (einer mathematischen Theorie redundanter Signalentwicklungen) beruht. Zunächst wird eine Beziehung zwischen überabgetasteten Filterbänken und redundanten Signalentwicklungen aufgezeigt [3], [1]. Wir besprechen weiters eine allgemeine Parametrisierung von Synthesefilterbänken, die PR bei einer vorgegebenen überabgetasteten Analysefilterbank liefern. Dazu werden einige Entwurfsbeispiele präsentiert, die gewisse Vorteile der Überabtastung illustrieren. Schließlich werden wichtige numerische Eigenschaften überabgetasteter Filterbänke diskutiert.

Abschnitt 3 definiert überabgetastete CMFBs und entwickelt eine vereinheitlichte Theorie von CMFBs. Diese Theorie umfaßt sowohl den herkömmlichen CMFB-Typ als auch den neueren CMFB-Typ, der linearphasige Filter erlaubt. Beide Typen wurden in der Literatur nur für den Spezialfall kritischer Abtastung definiert und werden hier auf den Fall allgemeiner Überabtastung erweitert.

2. Allgemeine Theorie überabgetasteter Filterbänke

In diesem Abschnitt werden überabgetastete Filterbänke und deren Beziehung zu redundanten Signalentwicklungen diskutiert. Wir betrachten eine Filterbank mit N Kanälen und Dezimationsfaktor M in jedem Kanal (siehe Abb. 1). Die Impulsantworten der Analyse- und Synthesefilter sind mit $h_k[n]$ bzw. $f_k[n]$ bezeichnet, die zugehörigen Übertragungsfunktionen mit $H_k(z)$ bzw. $F_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$).

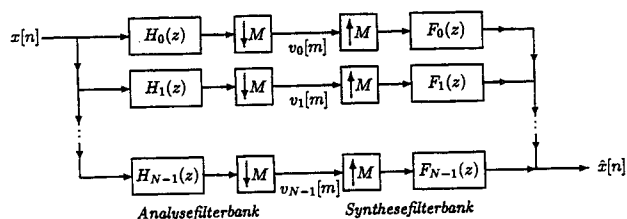


Abb. 1. Filterbank mit N Kanälen und Dezimationsfaktor M

In einer kritisch abgetasteten Filterbank ist $N = M$; dies impliziert, daß die Gesamtanzahl der Abtastwerte in den Teilbänden pro Zeiteinheit genauso groß ist wie die Anzahl der Eingangssignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit. Für $N > M$ wird die Filterbank als überabgetastet bezeichnet. Hier ist die Gesamtanzahl der Teilbandsignal-Abtastwerte pro Zeiteinheit größer als die Anzahl der Eingangssignal-Abtastwerte; dies bedeutet, daß die Teilbandsignale eine redundante Darstellung des Eingangssignals sind.



Diese durch die Überabtastung bewirkte Redundanz führt zu mehr Freiheit im Entwurf, besserer numerischer Stabilität und geräuschreduzierenden Eigenschaften falls die Teilbandsignale für die Speicherung oder die Übertragung quantisiert werden. Die geräuschreduzierenden Eigenschaften redundanter Signaldarstellungen wurden erstmals in [17], [18] beobachtet. Überabgetastete Filterbänke sind vergleichbar mit überabgetasteten A/D-Wandlern, wo das analoge Eingangssignal mit einer höheren Rate als der Nyquist-Rate abgetastet wird; auch hier führt die Überabtastung zu mehr Freiheit im Entwurf des Rekonstruktionsfilters und zu einer Geräuschunterdrückung [19], [20]. Die inhärente Geräuschunterdrückung in überabgetasteten Filterbänken erlaubt eine größere Quantisierung in den Teilbändern bei gleichbleibendem Rekonstruktionsfehler des Ausgangssignals.

2.1 Überabgetastete Filterbänke als redundante Signalentwicklungen

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen überabgetasteten Filterbänken und redundanten Signalentwicklungen genauer erläutern [1], [15], [21], [22], [3]. Die Teilbandsignale in einer N -Kanal-Filterbank mit Dezimationsfaktor M sind gemäß Abb. 1 durch

$$v_k[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_k[mM - n], \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

gegeben. Das rekonstruierte Signal $\hat{x}[n]$ wird aus den Teilbandsignalen $v_k[m]$ wie folgt berechnet,

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_k[m] f_{k,m}[n]$$

mit

$$v_k[m] = \langle x, h_{k,m} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_{k,m}^*[n], \quad (1)$$

wobei $f_{k,m}[n] = f_k[n - mM]$ und $h_{k,m}[n] = h_k^*[mM - n]$ (* bezeichnet komplexe Konjugation). Bei einer perfekt rekonstruierenden (PR) Filterbank ist das rekonstruierte Signal gleich dem Eingangssignal, $\hat{x}[n] = x[n]$. Gemäß (1) liefert eine PR-Filterbank hier eine Zerlegung des Eingangssignals bezüglich des Funktionensystems $\{f_{k,m}[n]\}$ ($k=0, 1, \dots, N-1, -\infty < m < \infty$). Im allgemeinen (insbesondere im überabgetasteten Fall) ist das Funktionensystem $\{f_{k,m}[n]\}$ nicht orthogonal, so daß die Entwicklungskoeffizienten durch Projektion von $x[n]$ auf ein duales Funktionensystem $\{h_{k,m}[n]\}$ berechnet werden. Die Entwicklungskoeffizienten entsprechen dabei den Teilbandsignalen, $\langle x, h_{k,m} \rangle = v_k[m]$.

Somit ist gezeigt, daß die Kombination von Filterbankanalyse und -synthese (bei Vorliegen von PR) als Signalentwicklung gedeutet werden kann. Bei Überabtastung ist diese Signalentwicklung redundant, d. h., es werden mehr Basisfunktionen $f_{k,m}[n]$ als nötig ver-

wendet. Im folgenden wird gezeigt, wie diese Redundanz gewinnbringend ausgenutzt werden kann.

2.2 Perfekte Rekonstruktion und Entwurfsfreiheit

Für die Diskussion der PR-Eigenschaft ist es zweckmäßig, zunächst die Polyphasenzerlegung kritisch abgetasteter Filterbänke ([22] bis [25]) auf den überabgetasteten Fall zu erweitern. Die N Analysefilter $H_k(z)$ werden hierbei in jeweils M Polyphasenkomponenten $E_{k,l}(z)$ zerlegt gemäß

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^l E_{k,l}(z^M) \quad \text{mit} \quad E_{k,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_k[nM - l] z^{-n}.$$

Die Analyse-Polyphasenmatrix $\mathbf{E}(z)$ ist definiert als eine rechteckige Matrix der Größe $N \times M$ mit den Elementen $[\mathbf{E}(z)]_{k,l} = E_{k,l}(z)$. In ähnlicher Weise werden die Synthesefilter $F_k(z)$ in M Polyphasenkomponenten $R_{k,l}(z)$ zerlegt,

$$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} R_{k,l}(z^M) \quad \text{mit} \quad R_{k,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k[nM + l] z^{-n}.$$

Die Synthese-Polyphasenmatrix $\mathbf{R}(z)$ ist definiert als eine rechteckige Matrix der Größe $M \times N$ mit den Elementen $[\mathbf{R}(z)]_{l,k} = R_{k,l}(z)$.

Mittels der Polyphasenkomponenten läßt sich nun eine notwendige und hinreichende Bedingung für PR angeben, aus der sich in weiterer Folge die bei Überabtastung existierende Entwurfsfreiheit ableiten läßt.

Durch Transformation der Eingangs-Ausgangsbeziehung (1) in den Polyphasenbereich erhält man

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \mathbf{R}(z) \mathbf{E}(z) \mathbf{x}(z)$$

mit den M -dimensionalen Vektoren $\mathbf{x}(z) = [X_0(z) X_1(z) \dots X_{M-1}(z)]^T$ und $\hat{\mathbf{x}}(z) = [\hat{X}_0(z) \hat{X}_1(z) \dots \hat{X}_{M-1}(z)]^T$ (T bezeichnet Transposition), wobei $X_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mM + n] z^{-m}$ und $\hat{X}_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{x}[mM + n] z^{-m}$. Daher ist die PR-Eigenschaft $\hat{x}[n] = x[n]$ dann und nur dann erfüllt, wenn ([22] bis [25])

$$\mathbf{R}(z) \mathbf{E}(z) = \mathbf{I}_M, \quad (2)$$

wobei \mathbf{I}_M die $M \times M$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Bezüglich der Lösung von (2) sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- (1) Bei kritischer Abtastung ($N=M$) sind $\mathbf{E}(z)$ und $\mathbf{R}(z)$ quadratische ($M \times M$)-Matrizen; hier ist dann bei vorgegebener Analyse-Polyphasenmatrix $\mathbf{E}(z)$ die Synthese-Polyphasenmatrix $\mathbf{R}(z)$ eindeutig festgelegt durch $\mathbf{R}(z) = \mathbf{E}^{-1}(z)$ ([22] bis [25]), wobei die Invertierbarkeit von $\mathbf{E}(z)$ (d. h. Rang $\{\mathbf{E}(z)\} = M$) angenommen wurde.
- (2) Bei Überabtastung ($N > M$) ist $\mathbf{R}(z)$ hingegen nicht eindeutig bestimmt: jede beliebige Linksinverse von $\mathbf{E}(z)$ liefert eine Synthese-Polyphasenmatrix

$\mathbf{R}(z)$, die PR garantiert. Es ist bekannt [26], daß jede Linksinverse von $\mathbf{E}(z)$ in der allgemeinen Form

$$\mathbf{R}(z) = \hat{\mathbf{R}}(z) + \mathbf{U}(z) [\mathbf{I}_N - \mathbf{E}(z) \hat{\mathbf{R}}(z)] \quad (3)$$

angeschrieben werden kann. Hierbei bezeichnet $\hat{\mathbf{R}}(z)$ die gemäß³

$$\hat{\mathbf{R}}(z) = [\tilde{\mathbf{E}}(z) \mathbf{E}(z)]^{-1} \tilde{\mathbf{E}}(z) \quad (4)$$

definierte Para-Pseudoinverse von $\mathbf{E}(z)$, und $\mathbf{U}(z)$ ist eine $M \times N$ -Matrix mit beliebigen Elementen $U_{k,l}(z)$, die $|U_{k,l}(e^{j2\pi\theta})| < \infty$ erfüllen. Die Para-Pseudoinverse $\hat{\mathbf{R}}(z)$ ist selbst eine spezielle Lösung von (2), die aus der allgemeinen Lösung (3) mit $\mathbf{U}(z) \equiv 0$ hervorgeht. Es ist zu beachten, daß für die Existenz von (4) und (3) – und damit für PR – notwendig und hinreichend ist, daß $\mathbf{E}(z)$ vollen Rang hat, d. h. $\text{Rang}\{\mathbf{E}(z)\} = M$.

Der allgemeine Ausdruck (3) stellt eine Parametrisierung sämtlicher Synthesefilterbänke mit PR dar; die (frei wählbaren) Parameter sind durch die MN Funktionen $U_{k,l}(z)$ gegeben. Diese Parametrisierung läßt sich äquivalent im Frequenzbereich anschreiben gemäß

$$F_k(z) = \hat{F}_k(z) + U_k(z) - \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \hat{F}_k(z W_M^r) \sum_{l=0}^{N-1} H_l(z W_M^l) U_l(z),$$

wobei $\hat{F}_k(z)$ die Übertragungsfunktionen der der Para-Pseudoinversen $\hat{\mathbf{R}}(z)$ entsprechenden Synthesefilterbank und $U_k(z)$ die Übertragungsfunktionen der Filter mit den Polyphasenkomponenten $U_{k,l}(z)$ bezeichnen. Weiters ist $W_M = e^{-j2\pi/M}$.

Die Tatsache, daß bei Überabtastung die Synthesefilterbank mit PR nicht eindeutig bestimmt ist, impliziert eine Entwurfsvfreiheit, die im kritischen Fall nicht existiert. Diese Entwurfsvfreiheit kann benutzt werden, um aus der Gesamtheit der möglichen PR-Synthesefilterbänke eine spezielle PR-Synthesefilterbank mit gewissen erwünschten Eigenschaften (z. B. Frequenzselektivität oder lineare Phase⁴) auszuwählen.

Wir wollen nun diese Ergebnisse durch einige Entwurfsbeispiele illustrieren. Abb. 2 a zeigt das Analyseprototypfilter in einer DFT-Filterbank mit $N=64$ Kanälen und Dezimationsfaktor $M=8$ (der Überabtastfaktor ist also $N/M=8$). Die Länge des Prototypfil-

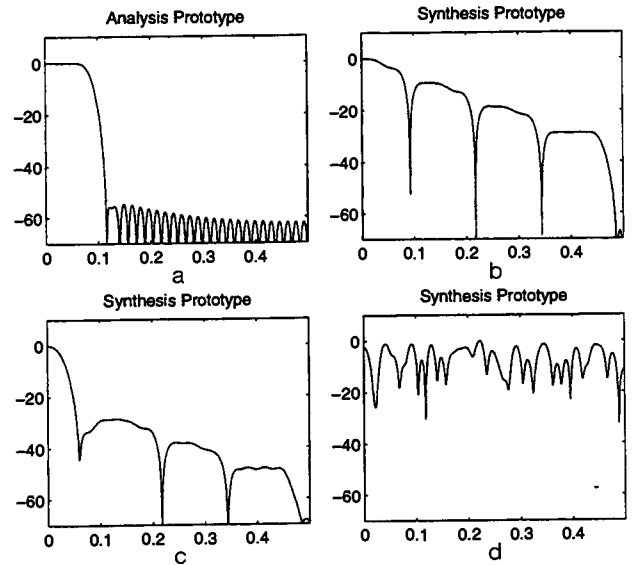


Abb. 2. 64-Kanal-DFT-Filterbank mit Überabtastfaktor 8 (sämtliche Filter haben Länge $L=64$). Dargestellt ist der Betrag der Übertragungsfunktion (in dB) als Funktion der normierten Frequenz θ für die folgenden Filter: a Analyseprototyp, b PR-Syntheseprototyp gemäß (4), c PR-Syntheseprototyp mit verbesserter Frequenzselektivität, d „zufälliger“ PR-Syntheseprototyp

ters ist $L=64$. Abb. 2 b zeigt das der Para-Pseudoinversen entsprechende Synthese-Prototypfilter. Man sieht, daß – im Gegensatz zur guten Sperrbereichsdämpfung des Analyseprototyps – der Syntheseprototyp nur etwa 8 dB Sperrbereichsdämpfung aufweist. In Abb. 2 c ist ein anderer Syntheseprototyp mit PR (entspricht einer anderen Linksinversen gemäß (3)) dargestellt, der etwa 25 dB Sperrbereichsdämpfung besitzt. Schließlich zeigt Abb. 2 d einen weiteren Syntheseprototyp mit PR, der durch zufällige Wahl der Parametermatrix $\mathbf{U}(z)$ in (3) gewonnen wurde. Diese Vielfalt von verschiedenen Syntheseprototypen – alle mit PR – demonstriert das Ausmaß der bei Überabtastfaktor 8 vorliegenden Entwurfsvfreiheit.

Es kann gezeigt werden [5], daß von allen PR-Synthesefilterbänken die der Para-Pseudoinversen entsprechende PR-Synthesefilterbank $\{\hat{F}_k(z)\}$ maximale Rauschunterdrückung aufweist (bei Annahme von weißem Rauschen in den Teilbändern). Andere PR-Synthesefilterbänke haben dagegen andere wünschenswerte Eigenschaften (z. B. Frequenzselektivität, vgl. Abb. 2). In diesem Sinn besteht also ein fundamentaler Tradeoff zwischen Entwurfsvfreiheit (d. h. Abweichen von der Para-Pseudoinversen) und Rauschunterdrückung.

2.3 Numerische Stabilität und Konditionszahl

In vielen praktischen Anwendungen ist eine gute numerische Stabilität bzw. Konditionierung von Filterbänken sehr wesentlich, d. h. die Eigenschaft, daß

³ $\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{E}^H(1/z^*)$ bezeichnet die Para-Konjugierte der Matrix $\mathbf{E}(z)$ [25]. Hierbei bedeutet H konjugierte Transposition.

⁴ Beide Eigenschaften sind in der Bildcodierung wichtig. Insbesondere ist gute Frequenzselektivität der Synthesefilter notwendig, wenn (wie bei der Bildcodierung üblich) die höherfrequenten Kanäle gröber quantisiert werden; hier würde eine durch schlechte Frequenzselektivität der Kanalfilter bewirkte „Verschmierung“ des resultierenden Quantisierungsfehlers auf die niederfrequenten Kanäle zu perceptuell unangenehmen Effekten führen.

kleine Störungen der Teilbandsignale (meistens verursacht durch Quantisierung) zu nur kleinen Fehlern im rekonstruierten Signal führen. Für diese numerische Stabilität soll nun eine Maßzahl (Konditionszahl) angegeben werden, die als Quotient der sogenannten Frameschranken definiert ist.

Im folgenden bezeichnen $\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$ die Energie des Eingangssignals und

$$\|v\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_k[m]|^2$$

die Gesamtenergie sämtlicher Teilbandsignale $v_k[m]$. Wir nehmen weiters an, daß die Teilbandsignale $v_k[m]$ nach unten und oben beschränkt ist gemäß

$$A\|x\|^2 \leq \|v\|^2 \leq B\|x\|^2 \quad \forall x[n] \in l^2(\mathbb{Z}), \quad (5)$$

wobei $0 < A \leq B < \infty$. Die Konstanten A und B werden Frameschranken genannt. Die Doppelungleichung (5) verallgemeinert die bekannte Energieerhaltungsgleichung $\|v\|^2 = \|x\|^2$ in orthogonalen Filterbänken [21].

Wir wollen nun an Hand einer Störungsanalyse zeigen, daß die Frameschranken ein Gütemaß für die numerische Stabilität einer Filterbank sind. Nehmen wir an, daß die Teilbandsignale $v_k[m]$ zum Eingangssignal $x[n]$ korrespondieren. Wir betrachten nun gestörte Teilbandsignale $v'_k[m] = v_k[m] + \Delta v_k[m]$; diese korrespondieren zu einem Eingangssignal $x'[n] = x[n] + \Delta x[n]$ und einem rekonstruierten Signal $\hat{x}'[n] = \hat{x}[n] + \Delta \hat{x}[n]$. Unter Verwendung der PR-Eigenschaft ($\hat{x}[n] = x[n]$ und $\hat{x}'[n] = x'[n]$) sowie der Linearität der Filterbank (die Teilbandsignal-Störungen $\Delta v_k[m]$ korrespondieren zum Eingangssignal $\Delta x[n]$) folgt aus (5) für die Energie $\|\Delta \hat{x}\|^2$ des Rekonstruktionsfehlers $\Delta \hat{x}[n] = \hat{x}'[n] - \hat{x}[n] = x'[n] - x[n] = \Delta x[n]$

$$A\|\Delta \hat{x}\|^2 \leq \|\Delta v\|^2 \leq B\|\Delta \hat{x}\|^2$$

bzw.

$$\frac{1}{B} \leq \frac{\|\Delta \hat{x}\|^2}{\|\Delta v\|^2} \leq \frac{1}{A}. \quad (6)$$

Für gegebene Teilband-Störenergie $\|\Delta v\|^2$ vermitteln somit die inversen Frameschranken $1/B$ und $1/A$ eine untere bzw. obere Schranke für die resultierende Rekonstruktionsfehler-Energie $\|\Delta \hat{x}\|^2$, welche minimiert wird, wenn $1/B$ möglichst klein und $1/A$ möglichst gleich $1/B$ ist. Die zweite Forderung bedeutet $A \approx B$ oder äquivalenterweise

$$\rho \triangleq \frac{B}{A} \approx 1.$$

Es ist bekannt [17], daß bei zunehmender Überabtastung (größerem Überabtastfaktor N/M) die Erzielung einer besseren Konditionszahl ρ leichter wird. Daher haben überabgetastete Filterbänke in der Regel bessere

numerische Eigenschaften als kritisch abgetastete Filterbänke.

Weiters kann im Fall einer paraunitären Filterbank [25] mit normierten Analysefiltern (d. h. $\|h_k\|^2 = 1$) gezeigt werden, daß die Frameschranken gleich dem Überabtastfaktor sind, $A = B = N/M$; hier folgt dann aus (6)

$$\frac{\|\Delta \hat{x}\|^2}{\|\Delta v\|^2} = \frac{1}{N/M}.$$

In einer paraunitären Filterbank ist also die Rekonstruktionsfehler-Energie umgekehrt proportional zum Überabtastfaktor. Die Überabtastung führt somit zu einer Geräuschreduktion; diese erlaubt in weiterer Folge eine gröbere Quantisierung der Teilbandsignale (bei gleichbleibender Rekonstruktionsfehler-Energie). Höhere Auflösung der Quantisierer kann also gegen höhere Überabtastung ausgetauscht werden. Ähnliche Resultate existieren für überabgetastete A/D-Wandler, wo die mittlere Leistung des Rekonstruktionsfehlers umgekehrt proportional zum Überabtastfaktor ist [19], [20].

Da, wie eben gezeigt, die Frameschranken wichtige numerische Eigenschaften von Filterbänken beschreiben, ist deren Berechnung von Interesse. Es kann gezeigt werden, daß die (engsten) Frameschranken A und B durch den kleinsten bzw. größten Eigenwert der Matrix $\mathbf{E}^H(e^{j2\pi\theta}) \mathbf{E}(e^{j2\pi\theta})$ gegeben sind, wobei $\mathbf{E}(z)$ die in Abschnitt 2.2 eingeführte Analyse-Polyphasenmatrix ist. In der Praxis ist man i. a. darauf angewiesen, die Matrixfunktion $\mathbf{E}(e^{j2\pi\theta})$ für diskrete Frequenzpunkte auszuwerten und Eigenanalysen der dadurch erhaltenen Matrizen $\mathbf{E}(e^{j2\pi\theta_l})$ mit $\theta_l = l/L$ ($l = 0, 1, \dots, L-1$) durchzuführen.

3. Überabgetastete cosinus-modulierte Filterbänke

Nach der allgemeinen Diskussion überabgetasteter Filterbänke wenden wir uns nun der Klasse der cosinus-modulierten Filterbänke (CMFBs) zu. Ein praktisch wichtiger Vorteil von CMFBs besteht darin, daß alle Analysefilter $h_k[n]$ und Synthesefilter $f_k[n]$ aus einem einzigen Analyse-Prototypfilter $h[n]$ bzw. einem einzigen Synthese-Prototypfilter $f[n]$ durch einfache reellwertige Operationen (Modulationen) abgeleitet werden. Der Filterbankentwurf reduziert sich somit auf den Entwurf der beiden Prototypen $h[n]$ und $f[n]$. Weiters ermöglichen CMFBs eine reellwertige Signalverarbeitung, falls das Eingangssignal $x[n]$ und die Prototypen $h[n]$ und $f[n]$ selbst reellwertig sind (ein wichtiger Unterschied zu den notwendigerweise komplexwertigen DFT-Filterbänken). Schließlich erlauben CMFBs eine effiziente Implementierung.

Bisher wurden CMFBs nur für den Fall kritischer Abtastung betrachtet ([6] bis [12]). Hier wollen wir

nun die beiden wesentlichsten CMFB-Typen auf den Fall der Überabtastung erweitern (wobei kritische Abtastung einen Spezialfall darstellt).

3.1 „Odd-stacked“ CMFBs

„Odd-stacked“ CMFBs (in [11] „class B“ genannt) sind die traditionelle Klasse von CMFBs; sie wurden für den Fall kritischer Abtastung in [6] bis [12] behandelt. Im allgemeinen Fall einer odd-stacked CMFB mit N Kanälen und Dezimationsfaktor M (die Filterbank ist überabtastet für $N > M$) werden die Analyse- bzw. Synthesefilter aus den Prototypen $h[n]$ bzw. $f[n]$ abgeleitet gemäß

$$h_k[n] = \sqrt{2} h[n] \cos\left(\frac{(k+1/2)\pi}{N}n + \phi_k^o\right),$$

$$f_k[n] = \sqrt{2} f[n] \cos\left(\frac{(k+1/2)\pi}{N}n - \phi_k^o\right)$$

für $k = 0, 1, \dots, N-1$. Die Phasen ϕ_k^o sind hier definiert als

$$\phi_k^o = -\alpha \frac{\pi}{2N} \left(k + \frac{1}{2}\right) + r \frac{\pi}{2} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1\}.$$

Man sieht, daß die Kanal-Mittenfrequenzen bei einer odd-stacked CMFB durch $\theta_k = \frac{k+1/2}{2N}$ gegeben sind; im besonderen ist der Kanal mit Index $k=0$ um die Frequenz $\theta_0 = \frac{1}{4N}$ zentriert, wie in Abb. 3a gezeigt.

Ein Nachteil von odd-stacked CMFBs ist, daß die Kanalfilter selbst bei linearphasigen Prototypen nicht-lineare Phase haben ([6] bis [12]).

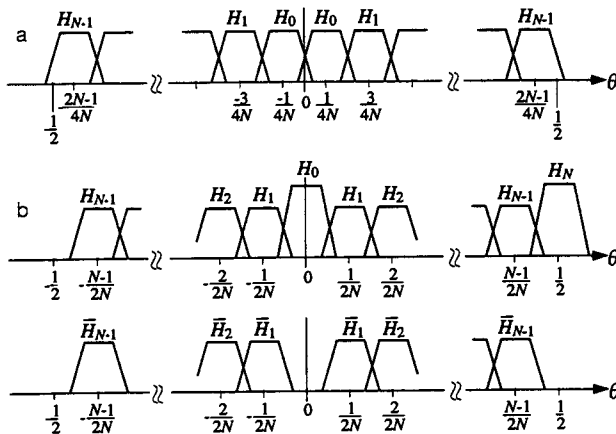


Abb. 3. Übertragungsfunktionen in a einer odd-stacked CMFB mit N Kanälen und b einer even-stacked CMFB mit $2N$ Kanälen

3.2 „Even-stacked“ CMFBs

Die kürzlich eingeführte Klasse der „even-stacked“ CMFBs [11], [13], [16], [14] (in [11] „class A“

genannt) erlaubt sowohl PR als auch lineare Phase in allen Kanälen.

Die Analysefilterbank in einer even-stacked CMFB mit $2N$ Kanälen und Dezimationsfaktor $2M$ (die CMFB ist überabtastet für $N > M$) besteht aus zwei Teilfilterbänken $\{h_k[n]\}_{k=0, \dots, N}$ und $\{\bar{h}_k[n]\}_{k=1, \dots, N-1}$, die von einem Analyseprototypen $h[n]$ abgeleitet werden gemäß

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n - rM], & k = 0 \\ \sqrt{2} h[n] \cos\left(\frac{k\pi}{N}n + \phi_k^c\right), & k = 1, \dots, N-1 \\ h[n - sM] (-1)^{n-sM}, & k = N \end{cases}$$

$$\bar{h}_k[n] = \sqrt{2} h[n - M] \sin\left(\frac{k\pi}{N}(n - M) + \phi_k^c\right),$$

$$k = 1, \dots, N-1.$$

Wir definieren hier die Phasenfunktionen ϕ_k^c als

$$\phi_k^c = -\alpha \frac{\pi}{2N} k + r \frac{\pi}{2} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{Z}, r \in \{0, 1\};$$

weitere ist $s \in \{0, 1\}$ mit $s = r$ für α gerade und $s = 1 - r$ für α ungerade. Die Synthesefilterbank umfaßt zwei aus einem Syntheseprototypen $f[n]$ auf analoge Weise abgeleitete Teilfilterbänke $\{f_k[n]\}_{k=0, \dots, N}$ und $\{\bar{f}_k[n]\}_{k=1, \dots, N-1}$.

Wie man sieht, gibt es in einer even-stacked Filterbank zwar $2N$ Kanäle, aber nur $N+1$ verschiedene Kanal-Mittenfrequenzen $\theta_k = \frac{k}{2N}$ ($k = 0, \dots, N$); im besonderen ist der Kanal mit Index $k=0$ um die Frequenz $\theta_0 = 0$ zentriert (siehe Abb. 3b). Für jede Wahl von $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1\}$ sind alle Filter linearphasig, wenn die Prototypen linearphasig sind. Dies ist ein wichtiger Vorteil gegenüber odd-stacked CMFBs.

Zwei spezielle even-stacked CMFBs wurden kürzlich in der Literatur vorgeschlagen:

- (1) Die den Parametern $\alpha = 0$ und $r = 0$ (dies impliziert $s = 0$) entsprechenden even-stacked CMFBs wurden (für kritische Abtastung) von Lin und Vaidyanathan eingeführt [12].
- (2) Mit $\alpha = N$ und $r = 0$ (dies impliziert $s = 0$ für gerades N und $s = 1$ für ungerades N) erhält man die von den Autoren in [13] eingeführten Wilson-Filterbänke, die der in [27] definierten zeitdiskreten Wilson-Entwicklung entsprechen. Wie in [16] gezeigt wird, weisen Wilson-Filterbänke gewisse Ähnlichkeiten mit den (für kritische Abtastung) von Fliege [28], [29] eingeführten MDFT-Filterbänken auf.

3.3 Bedingungen für perfekte Rekonstruktion

Es kann gezeigt werden [16], daß eine CMFB (odd- oder even-stacked) die PR-Eigenschaft $\hat{x}[n] = x[n]$

dann und nur dann besitzt, wenn die Prototypen $h[n]$ und $f[n]$ die zwei folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[n-mM] h[-n+mM+2lN] = \frac{1}{N} \delta[l]$$

und

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i f[n-iPM] h[n+iPM+\alpha+2lN] = 0,$$

$$l = 0, 1, \dots, Q-1,$$

wobei $P \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathbb{N}$ teilerfremd mit $\frac{N}{M} = \frac{P}{Q}$ sind

sowie $b_i = (-1)^{iQ}$ im odd-stacked Fall und $b_i = (-1)^{iP}$ im even-stacked Fall. Weiters bezeichnet $\delta[l]$ den zeitdiskreten Einsimpuls. Im Spezialfall ganzzahliger Überabtastung (d. h. $Q=1$ oder $N=PM$ mit $P \in \mathbb{N}$) vereinfacht sich die zweite Bedingung zu

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i f[n-iPM] h[n+iPM+\alpha] = 0,$$

wobei $b_i = (-1)^i$ im odd-stacked Fall und $b_i = (-1)^{iP}$ im even-stacked Fall. Kritische Abtastung ($N=M$) ist hier ein Spezialfall mit $P=1$.

4. Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden Filterbänke mit Überabtastung studiert. Es wurde gezeigt, daß Überabtastung zu mehr Freiheit im Entwurf führt; diese Entwurfsfreiheit kann ausgenutzt werden, um perfekt rekonstruierende Synthesefilter mit weiteren wünschenswerten Eigenschaften wie z. B. Frequenzselektivität oder linearer Phase zu entwerfen. Ein weiterer wichtiger Vorteil überabgetasteter Filterbänke ist deren numerische Stabilität und Geräuschreduktion, die den Einsatz von Quantisierern mit geringerer Auflösung zur Quantisierung der Teilbandsignale erlauben. Als (wegen ihrer effizienten Implementierbarkeit) aus praktischer Sicht besonders attraktive Klasse von Filterbänken wurden schließlich cosinus-modulierte Filterbänke diskutiert und auf den überabgetasteten Fall erweitert.

Schrifttum

- [1] Bölcskei, H., Hlawatsch, F., Feichtinger, H. G.: Frame-theoretic analysis of filter banks. Submitted to IEEE trans. signal processing, Feb. 1996.
- [2] Bölcskei, H., Hlawatsch, F., Feichtinger, H. G.: Frame-theoretic analysis and design of oversampled filter banks. In Proc. IEEE ISCAS-96, Atlanta, GA, May 1996, Vol. 2, pp. 409–412.
- [3] Cvetković, Z., Vetterli, M.: Oversampled filter banks. IEEE trans. signal processing, to appear.
- [4] Janssen, A. J. E. M.: Density theorems for filter banks. Tech. Rep. 6858, Philips Research Laboratories Eindhoven, The Netherlands, April 1995.
- [5] Bölcskei, H., Hlawatsch, F.: Oversampled filter banks: Optimal noise shaping, design freedom, and noise analysis. In Proc. IEEE ICASSP-97, Munich, Germany, April 1997, pp. 2453–2456.
- [6] Malvar, H. S.: Signal processing with lapped transforms. Artech House. 1992.
- [7] Koilpillai, R. D., Vaidyanathan, P. P.: Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction. IEEE trans. signal processing 40 (April 1992), pp. 770–783.
- [8] Gopinath, R. A., Burrus, C. S.: Some results in the theory modulated filter banks and modulated wavelet tight frames. Applied and computational harmonic analysis 2 (1995), pp. 303–326.
- [9] Nguyen, T. Q., Koilpillai, R. D.: The theory and design of arbitrary-length cosine-modulated filter banks and wavelets, satisfying perfect reconstruction. IEEE trans. signal processing 44 (March 1996), pp. 473–483.
- [10] Ramstad, T. A., Tanem, J. P.: Cosine-modulated analysis-synthesis filter bank with critical sampling and perfect reconstruction. In Proc. IEEE ICASSP-91, Toronto, Canada, May 1991, pp. 1789–1792.
- [11] Gopinath, R. A.: Modulated filter banks and wavelets – A unified theory. In Proc. IEEE ICASSP-96, Atlanta, GA, May 1996, pp. 1585–1588.
- [12] Lin, Y.-P., Vaidyanathan, P. P.: Linear phase cosine modulated maximally decimated filter banks with perfect reconstruction. IEEE trans. signal processing 42 (Nov. 1995), pp. 2525–2539.
- [13] Bölcskei, H., Hlawatsch, F.: Oversampled Wilson-type cosine modulated filter banks with linear phase. In Proc. 30th Asilomar conf. signals, systems, computers. Pacific Grove, CA, Nov. 1996, pp. 998–1002.
- [14] Bölcskei, H., Hlawatsch, F.: Oversampled cosine-modulated filter banks with linear phase. In Proc. IEEE ISCAS-97, Hong Kong, June 1997, pp. 357–360.
- [15] Bölcskei, H., Hlawatsch, F.: Oversampled modulated filter banks. In: Feichtinger, H. G., Strohmer, T. (eds.): Gabor analysis: Theory, algorithms, and applications. Birkhäuser. June 1998, pp. 295–322.
- [16] Bölcskei, H., Hlawatsch, F.: Oversampled cosine modulated filter banks with perfect reconstruction: Analysis and design. IEEE trans. circuits and systems II, to appear 1998.
- [17] Daubechies, I.: Ten lectures on wavelets. SIAM. 1992.
- [18] Munch, N. J.: Noise reduction in tight Weyl-Heisenberg frames. IEEE trans. inf. theory 38 (March 1992), pp. 608–616.
- [19] Claasen, T. A. C. M., Mecklenbräuker, W. F. G., Peek, J. B. H., Hurck, N. V.: Signal processing method for improving the dynamic range of A/D and D/A converters. IEEE trans. acoust. speech signal processing 28 (1980), no. 5, pp. 529–538.
- [20] Thao, N. T., Vetterli, M.: Deterministic analysis of oversampled A/D conversion and decoding improvement based on consistent estimates. IEEE trans. signal processing 42 (March 1994), pp. 519–531.
- [21] Chen, T., Vaidyanathan, P. P.: Vector space framework for unification of one- and multidimensional filter bank theory. IEEE trans. signal processing 42 (Aug. 1994), pp. 2006–2021.
- [22] Vetterli, M., Kovačević, J.: Wavelets and subband coding. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1995.

- [23] Vetterli, M.: A theory of multirate filter banks. IEEE trans. acoust. speech, signal processing 35 (March 1987), pp. 356–372.
- [24] Vaidyanathan, P. P.: Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property. IEEE trans. acoust. speech, signal processing 35 (April 1987), pp. 476–492.
- [25] Vaidyanathan, P. P.: Multirate systems and filter banks. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1993.
- [26] Kailath, T.: Linear systems. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1980.
- [27] Bölcskei, H., Feichtinger, H. G., Gröchenig, K., Hlawatsch, F.: Discrete-time Wilson expansions. In Proc. IEEE-SP int. sympos. time-frequency time-scale analysis, Paris, France, June 1996, pp. 525–528.
- [28] Fliege, N. J.: Computational efficiency of modified DFT polyphase filter banks. In Proc. 27th Asilomar conf. signals, syst., computers, Pacific Grove, CA, Nov. 1993, pp. 1296–1300.
- [29] Fliege, N. J.: Multirate digital signal processing. Wiley. 1994.

Nichtlineare Signalverarbeitung für die Sprachkommunikation

G. Kubin ÖVE¹

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Hans Wilhelm Schüßler zum 70. Geburtstag gewidmet.

Dieser Aufsatz gibt eine elementare Einführung in Probleme und Methoden der nichtlinearen Signalverarbeitung und stellt neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet im Überblick dar. Einen wichtigen Platz nimmt dabei die Modellierung und Verarbeitung eindimensionaler Signale ein, wie sie bei einfachen Sprachkommunikationssystemen auftritt. Das Wechselspiel und die Integration deterministischer und nicht-deterministischer Ansätze wird an Hand von aktuellen Forschungsergebnissen erläutert.

Schlüsselwörter: digitale Signalverarbeitung; nichtlineare Methoden; Sprachverarbeitung; deterministische dynamische Systeme; Signalmodelle; Chaostheorie

Non-linear signal processing for voice communication. This paper provides an elementary introduction to problems and methods of nonlinear signal processing and presents an overview of recent developments in this field. An important topic is the modeling and processing of one-dimensional signals as exemplified in simple voice communication systems. The interplay and integration of deterministic and non-deterministic approaches is illustrated with recent research findings.

Keywords: digital signal processing; nonlinear methods; speech processing; deterministic dynamical systems; computational signal models; chaos theory

1. Einleitung

Zahlreiche Methoden der analogen und digitalen Signalverarbeitung beruhen auf linearen Ansätzen zur Beschreibung von Signalen und Systemen und haben einen hohen Entwicklungsstand erreicht sowie breite Anwendung gefunden. Der Schritt in das weite Feld nichtlinearer Methoden wurde vielfach gescheut, da

zum einen damit eine deutliche Komplexitätssteigerung bei den durchzuführenden Verarbeitungsschritten erwartet wurde und zum anderen nichtlineare Effekte sehr häufig als nahezu vernachlässigbar gegenüber einem dominanten linearen Beitrag angesehen wurden. Die vorliegende Arbeit versucht zu zeigen, daß verschiedene jüngere Entwicklungen gemeinsam dazu geführt haben, das methodische Instrumentarium für die Signalverarbeitung unter Einbeziehung nichtlinearer Verfahren zu erweitern. Dafür stellt sicherlich der rasante Fortschritt bei der Signalprozessortechnologie

¹ Ass.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Gernot Kubin, Institut für Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 25/389, A-1040 Wien.