

DIPLOMARBEIT

**CDA-Verdichtergitter:
Berechnung der ebenen turbulenten Strömung
und Grundlagen der inversen Auslegung**

ausgeführt am Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. H.HASELBACHER
und
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.techn. R.WILLINGER

durch
Federico CERVETTO
Zollergasse 26
A-1170 Wien

Wien, 10. Oktober 2001

TESI DI LAUREA

**Pala di compressore CDA:
Calcolo della corrente piana turbolenta
e cenni di progettazione inversa**

svolto presso l'Institut für
Thermische Turbomaschinen und Energieanlagen
an der Technischen Universität Wien

sotto la coordinazione di
Prof. C.OSNAGHI e
Prof. H.HASELBACHER

da
Federico CERVETTO
Zollergasse 26
A-1170 Wien

Wien, 10. Oktober 2001

Prefazione

In questo spazio voglio ringraziare il prof. *C. Osnaghi* per la possibilità offertami di svolgere la mia tesi presso di lui, per la disponibilità e per l'aiuto donatomi in questi mesi di lavoro.

Questa tesi è dedicata ai miei genitori.

Riassunto della tesi in italiano

La prima parte di questa tesi tratta il calcolo della corrente piana turbolenta attraverso una corona di pale di compressore CDA. I risultati dei calcoli vengono confrontati con le misurazioni effettuate da *Elazar e Shreeve* [2], *Sanger e Shreeve* [11] e *Shreeve et al.* [12]. Inoltre è stato svolto anche un confronto con alcuni valori calcolati con il modello di turbolenza low-Reynoldsnumber- $k-\epsilon$ da *Kang et al.* [6].

Prima della discussione dei risultati ottenuti viene descritto nel secondo capitolo il profilo della pala di compressore CDA, profilo che è stato ottenuto tramite una tecnica di design inverso. In seguito vengono trattate nel capitolo 3 le equazioni fondamentali per il calcolo di una corrente piana turbolenta e nel capitolo 4 i modelli di turbolenza adottati. Il capitolo 5 espone i fondamenti della teoria degli Elementi Finiti, che sono stati utilizzati tramite il pacchetto software CFD FIDAP. Infine nel sesto capitolo vengono esposti e discussi i risultati del calcolo.

La seconda parte della tesi tratta il metodo di dimensionamento inverso, che viene descritto nel capitolo 7.

Introduzione

Negli ultimi anni la progettazione di turbomacchine tramite computer ha assunto sempre maggiore importanza. Un'applicazione di questa tecnica nella meccanica dei fluidi permette una più veloce analisi dei problemi e di conseguenza una ricerca ed una produzione più rapide. Infatti le ricerche sperimentali abbisognano di maggior tempo e innalzano i costi. Perciò viene ricercato un metodo efficace, che simuli gli effetti viscosi della corrente, cioè la transizione da moto laminare a turbolento e il distacco dello strato limite. Oggigiorno si cerca di sviluppare nel campo della simulazione al computer nuove tecniche che garantiscono una migliore concordanza con i fluidi reali. Una grande difficoltà è rappresentata dalla formulazione matematica della corrente turbolenta. Un modello che garantisca un calcolo corretto del punto di transizione sulla pala e della turbolenza in presenza di forti gradienti di pressione non esiste ancora. Tuttavia negli ultimi anni sono stati proposti diversi modelli di turbolenza. In questo lavoro vengono analizzati i modelli di turbolenza $k-\epsilon$ e $k-\omega$.

Un'importanza particolare per la progettazione al computer viene rivestita dalla pala di compressore CDA. Infatti questa pala è stata sviluppata nel 1983 a partire dalla pala DCA per sfruttare le possibilità di un processo di ottimizzazione numerica. Lo scopo era quello di ottenere una pala lungo la cui superficie la distribuzione del gradiente di pressione assicuri la mancanza di distacco dello strato limite. Inoltre questa caratteristica doveva valere non solo per il punto di progetto, ma anche per angoli da esso distanti. Perciò la pala CDA presenta un campo di valori di angoli di incidenza che portano ad un moto senza distacco dello strato limite maggiore di qualsiasi altra pala. In questa sono stati presi in considerazione sei angoli di incidenza differenti. Inoltre i calcoli sono stati effettuati sia col modello di turbolenza $k-\epsilon$ che con quello $k-\omega$, e ciò permette un confronto tra i due modelli.

A seconda del modo in cui vengono risolte le equazioni si può distinguere tra dimensionamen-

to diretto ed inverso. Nel dimensionamento diretto la corrente viene completamente definita dalla geometria della pala e dalle condizioni del fluido all'ingresso ed all'uscita. Il dimensionamento inverso si basa sulla distribuzione della velocità lungo la superficie della pala. Il campo di velocità viene calcolato con la soluzione dell'equazione potenziale tramite le differenze finite. Queste grandezze, insieme al rapporto tra la lunghezza della corda ed il passo ed alle condizioni al contorno all'ingresso ed all'uscita permette di calcolare la geometria della pala. Per ottenere la pala CDA è stato utilizzato questo procedimento. Nella seconda parte di questa tesi vengono esposti e confrontati i due metodi di progettazione.

Profilo e proprietà della pala CDA

La pala di compressore CDA è stata sviluppata nel 1983 da *Sanger* [10]. Lo scopo era quello di applicare un processo di progettazione automatizzato tramite l'utilizzo di metodi di ottimizzazione numerica. Le proprietà richieste erano un più alto rapporto di compressione nel primo stadio, migliori proprietà per angoli lontani da quello di progetto e un maggiore rendimento. Per soddisfare queste richieste fu utilizzato un metodo che consente una decelerazione controllata del fluido lungo il profilo della pala. Questo metodo conduce ad un'ottimizzazione delle velocità lungo il lato di pressione e quello di aspirazione, in modo tale da impedire un distacco dello strato limite. I moderni metodi di progettazione consentono di dare a priori la distribuzione di velocità all'interno del canale e, tramite il dimensionamento inverso, di calcolare la geometria della pala a partire da questa. La pala CDA presenta perdite minori della pala DCA, a partire dalla quale è stata sviluppata. Questa proprietà vale non solo per il punto di progetto, ma per tutto il campo di applicazione e vale anche nei confronti della pala NACA65. Rispetto a queste due pale la CDA presenta inoltre un numero di Mach critico più elevato.

Equazioni fondamentali

Le correnti turbolente sono instazionarie, tridimensionali, vorticosi e stocastiche. In molti casi di importanza pratica si può assumere la corrente stazionaria. In questo modo si considerano solo i valori medi delle grandezze.

Per calcolare una corrente piana turbolenta, sotto l'ipotesi di incompressibilità e stazionarietà, si introducono le seguenti equazioni:

- Equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (0.1)$$

- Equazione dell'impulso in direzione x :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (0.2)$$

- Equazione dell'impulso in direzione y :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (0.3)$$

Introducendo la lunghezza della corda c e la velocità di ingresso w_1 si può passare alle grandezze adimensionali:

$$u^* = \frac{u}{w_1} \quad x^* = \frac{x}{c} \quad (0.4)$$

Se inoltre si introducono le ulteriori grandezze adimensionali $p^* = p/(\rho w_1^2)$ e $(cw_1)/\nu = Re$ si ottengono le equazioni adimensionali per il caso bidimensionale:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (0.5)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (0.6)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (0.7)$$

Se si considera il caso più generale di corrente tridimensionale e instazionaria e si effettua una media temporale dell'equazione di moto, per esempio in direzione x , si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{(u'u')} \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{(u'v')} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{(u'w')} \right] \end{aligned} \quad (0.8)$$

Equazioni simili si ottengono nelle direzioni y e z . In queste equazioni di moto compaiono nove termini che vengono definiti tensioni turbolente. Questi nove termini formano il cosiddetto tensore di Reynolds:

$$(\sigma_{ij})_{tur} = -\rho \begin{pmatrix} \frac{\overline{u'u'}}{\overline{v'u'}} & \frac{\overline{u'v'}}{\overline{v'v'}} & \frac{\overline{u'w'}}{\overline{v'w'}} \\ \frac{\overline{v'u'}}{\overline{w'u'}} & \frac{\overline{v'v'}}{\overline{w'v'}} & \frac{\overline{v'w'}}{\overline{w'w'}} \\ \frac{\overline{w'u'}}{\overline{w'u'}} & \frac{\overline{w'v'}}{\overline{w'v'}} & \frac{\overline{w'w'}}{\overline{w'w'}} \end{pmatrix} \quad (0.9)$$

A causa della simmetria del tensore rimangono sei incognite. Per poter risolvere le equazioni di moto si deve dunque introdurre un modello di turbolenza adeguato.

Il sistema di equazioni non è più chiuso, a causa della comparsa delle tensioni incognite: ci sono più incognite che equazioni, a differenza che nel caso laminare. Perciò si riducono le sei tensioni incognite ad un'unica grandezza incognita tramite l'ipotesi di Boussinesq:

$$\sigma_{ij,ges} = \sigma_{ij,lam} + \sigma_{ij,tur} = -\left(p + \frac{2}{3}\rho k\right) \delta_{ij} + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (0.10)$$

L'unica incognita rimasta è adesso la viscosità turbolenta:

$$\mu_t = \mu_t(x, y, z) \quad (0.11)$$

La viscosità turbolenta cambia da punto a punto. Questa grandezza è molto importante, poichè rappresenta la base per molti modelli di turbolenza, che propongono diverse equazioni per questa grandezza, in modo da chiudere il sistema.

Modelli di turbolenza

Ci sono diversi tipi di modelli di turbolenza:

- Reynolds Averaged Navier Stokes equations (RANS)
- Large Eddy Simulation (LES)
- Simulazione numerica diretta (DNS)

In questa tesi vengono trattati solo i modelli RANS, ed in particolare i modelli che offrono equazioni per ricavare il valore della viscosità turbolenta. Tali modelli si dividono in:

- Modelli di turbolenza algebrici
- Modelli ad una equazione
- Modelli a due equazioni

In questo lavoro vengono descritti i modelli a due equazioni k - ϵ e k - ω .

Il modello di turbolenza k - ϵ

Questo modello è il più noto ed è stato introdotto da *Launder* e *Spalding* nel 1974. Per giungere alla soluzione del problema vengono risolte equazioni differenziali di trasporto per l'energia cinetica turbolenta

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} \right) \quad (0.12)$$

e per il coefficiente di dissipazione turbolento

$$\epsilon = \nu \left(\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right) \quad (0.13)$$

sotto l'ipotesi di turbolenza isotropa. In questo modello la viscosità turbolenta viene così espressa:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (0.14)$$

L'equazione di trasporto per l'energia turbolenta è:

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \epsilon \quad (0.15)$$

e per il coefficiente di dissipazione:

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (0.16)$$

dove

$$P = -\overline{u'_j u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (0.17)$$

è il coefficiente di produzione turbolenta. Questa è una funzione delle tensioni turbolente di Reynolds e viene calcolata iterativamente. Le costanti del modello presentano valori che sono riportati nella Tab. 0.1:

$C_\mu = 0.09$	$\sigma_k = 1.0$	$\sigma_\epsilon = 1.3$	$C_1 = 1.44$	$C_2 = 1.92$
----------------	------------------	-------------------------	--------------	--------------

Tabelle 0.1: Konstanten des k - ϵ Turbulenzmodells

Funzioni alla parete

Il modello di turbolenza appena descritto è valido per numeri di Reynolds elevati, ed è quindi adatto a descrivere correnti pienamente turbolente. Vicino alla parete vi è una regione in cui il numero di Reynolds è così basso che gli effetti viscosi sono preponderanti rispetto a quelli turbolenti. Questa regione, che si trova all'interno dello strato limite turbolento, prende il nome di substrato limite laminare. Man mano che ci si avvicina alla parete le variazioni di velocità e quindi le tensioni turbolente diventano sempre più piccole. Vale la seguente uguaglianza:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} = konst \quad (0.18)$$

Tramite la grandezza

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (0.19)$$

si calcolano la velocità adimensionale vicino alla parete e la distanza adimensionale dalla parete:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (0.20)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (0.21)$$

Nelle estreme vicinanze della parete si possono ignorare i prodotti $\overline{u'v'}$. In questa regione si ottiene:

$$u^+ = y^+ \quad (0.22)$$

Questa è la distribuzione universale di velocità nel substrato limite laminare, che prende anche il nome di legge di Prandtl. Man mano che ci si allontana dalla parete assume sempre maggiore significato il termine $\overline{u'v'}$ della tensione. In questa regione vale la legge logaritmica alla parete:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (0.23)$$

La costante κ è la costante di von Karman e vale 0,4. Per superficie aerodinamiche piane si ha $E = 9.0$.

Modello di turbolenza low-Reynoldsnumber $k-\epsilon$

In molti casi le funzioni alla parete non sono più sufficienti a descrivere i fenomeni che avvengono nei pressi della parete per bassi numeri di Reynolds, soprattutto per quanto riguarda la transizione. Per migliorare la descrizione è stato introdotto un modello $k-\epsilon$ per bassi numeri di Reynolds [13]. In questo modello vengono impiegate formule che sono valide sia nella regione laminare che in quella di transizione che in quella turbolenta, senza bisogno di funzioni alla parete. Tutte le costanti che compaiono nel modello $k-\epsilon$ standard vengono moltiplicate per delle funzioni di smorzamento:

$$C_\mu \Rightarrow f_\mu C_\mu \quad C_1 \Rightarrow f_1 C_1 \quad C_2 \Rightarrow f_2 C_2 \quad (0.24)$$

$$f_\mu, f_1, f_2 = f \left(\frac{k^2}{\nu \epsilon}, \frac{\sqrt{k} y}{\nu}, \frac{u_\tau y}{\nu} \right) \quad (0.25)$$

Si ottiene per la viscosità turbolenta:

$$\mu_\tau = \rho f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (0.26)$$

Questa grandezza viene introdotta nelle equazioni di trasporto per k ed ϵ .

Il modello di turbolenza k - ω

Questo modello è stato introdotto per ottenere dei risultati migliori nel caso di strati limite con gradiente negativo di pressione di quelli ottenibili con il modello k - ϵ [16]. Oltre alle equazioni di continuità e di impulso, vengono introdotte le equazioni di trasporto per l'energia cinetica turbolenta e il coefficiente specifico di dissipazione:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \sigma_{ij,tur} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (0.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \omega) = (\gamma \omega / k) \sigma_{ij,tur} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (0.28)$$

dove il coefficiente specifico di dissipazione ω vale:

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k} \quad (0.29)$$

e la viscosità turbolenta vale:

$$\mu_t = \gamma^* \frac{\rho k}{\omega} \quad (0.30)$$

I valori delle costanti sono riportate nella Tab.0.2 [17].

$\beta = 3/40$	$\beta^* = 9/100$	$\gamma = 5/9$	$\gamma^* = 1$	$\sigma = 1/2$	$\sigma^* = 1/2$
----------------	-------------------	----------------	----------------	----------------	------------------

Tabelle 0.2: Konstanten des k - ω Modells

Transizione

La descrizione della transizione da moto laminare a turbolento rappresenta un problema irrisolto della meccanica dei fluidi. Tramite l'applicazione dei modelli di turbolenza non si può sapere dove e come avviene questa transizione. Poichè non è possibile calcolare la transizione, il programma calcola lo strato limite sempre come turbolento. Per questo le perdite vengono sempre calcolate più grandi di quelle reali.

Processo numerico di soluzione

Funzioni di interpolazione

Il metodo degli Elementi Finiti permette una riduzione da un problema continuo con infiniti gradi di libertà ad un problema discreto con un numero finito di gradi di libertà. Il dominio di calcolo viene suddiviso in elementi. Per questo lavoro ci si è serviti di elementi a nove nodi per il modello $k-\epsilon$ e di elementi a quattro nodi per il modello $k-\omega$. L'elemento a nove nodi presenta un'interpolazione biquadratica della velocità, dell'energia cinetica turbolenta e del coefficiente di dissipazione ed una interpolazione bilineare della pressione. L'elemento a quattro nodi presenta invece una funzione bilineare di interpolazione per la velocità, l'energia cinetica turbolenta ed il coefficiente di dissipazione. La pressione viene approssimata come costante all'interno dell'elemento. Per risolvere le equazioni differenziali è stato utilizzato il metodo di Galerkin.

Generazione del profilo e della griglia

Il pacchetto di programmi FIDAP offre la possibilità di produrre la griglia tramite un Graphical User Interface (GUI). Il file sorgente è stato scritto nel linguaggio interno del FIDAP ed è disponibile nell'appendice A. Il profilo della pala è stato ottenuto tramite interpolazione di curve del terzo ordine e cerchi. Per la generazione della griglia si è fatto ricorso ad una griglia non strutturata. Tramite il cambiamento del numero di nodi si può scegliere il grado di finezza della griglia.

Il numero di elementi per il modello $k-\omega$ è molto maggiore che per il modello $k-\epsilon$. Questo metodo abbisogna infatti di una griglia molto più fine, soprattutto nelle vicinanze della parete, perchè il valore di y^+ deve essere circa cento volte più piccolo di quello del modello $k-\epsilon$, dove per y^+ si intende la distanza adimensionale del primo elemento della griglia dalla parete della pala. Per il modello $k-\epsilon$ dovrebbe variare tra 30 e 100, mentre per il modello $k-\omega$ deve essere minore di 1.

Per non superare il massimo valore ammissibile di y^+ sono stati utilizzati nei pressi della parete boundary-edges, tramite i quali è possibile scegliere lo spessore del primo elemento e il rapporto tra gli spessori degli elementi successivi. Per il modello $k-\epsilon$ sono stati realizzati quattro strati, per il $k-\omega$ ne sono stati necessari dodici per mantenere il valore di y^+ in un range di valori accettabili. All'interno del primo elemento i modelli $k-\epsilon$ e $k-\omega$ perdono la loro validità.

Condizioni iniziali ed al contorno

Per cominciare a calcolare il programma necessita di valori iniziali. Inoltre il numero di Reynolds e la densità devono essere dati. Questi sono stati presi dalle condizioni nominali di esperimento (Tab.0.3). Il fluido viene considerato incomprimibile. Dal valore del numero

Re	700000
EINTRITT	
Temperatur	294 K
Totaler Druck	1.03 ATM
Machzahl	0.25
AUSTRITT	
Statischer Druck	1.00 ATM

Tabelle 0.3: Nominale Bedingungen

di Mach è possibile ricavare la velocità di ingresso, che risulta essere pari a 85.77m/s. Con questa grandezza e l'angolo di ingresso è possibile calcolare le componenti della velocità u e v e da qui l'energia cinetica turbolenta e quindi il grado di turbolenza. Per calcolare il valore di ingresso del coefficiente di dissipazione turbolenta si possono seguire due vie, e cioè si può calcolarlo tramite la lunghezza di mescolamento turbolenta o il rapporto tra la viscosità turbolenta e la viscosità laminare.

Le condizioni al contorno sono la condizione di velocità nulla alla parete e, per quanto riguarda le grandezze in uscita deve valere:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0. \quad (0.31)$$

Inoltre viene richiesta la periodicità nelle condizioni al contorno.

La soluzione si ottiene tramite un processo di calcolo iterativo. Le incognite u , v , p , k , ϵ vengono poste costanti come valore iniziale su tutto il dominio di calcolo. Il limite per il calcolo iterativo di una grandezza u viene raggiunto quando:

$$\frac{\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\|}{\|\vec{u}_n\|} \leq 10^{-4} \quad (0.32)$$

Per influenzare la convergenza del processo iterativo viene introdotto un fattore di rilassamento, che può variare tra zero e uno. Più questo fattore è basso, più si forza la convergenza. Per ottenere una convergenza nei calcoli effettuati si è fatto variare il valore di questo fattore tra 0,5 e 0,8.

Risultati

La Tab.0.4 mostra le distanze dal bordo di uscita dei sei piani di misurazione in cui sono stati calcolate le diverse grandezze nella scia della pala. Tali distanze sono espresse in percentuale della lunghezza della corda.

Auswertungsebene	$e1$	$d1$	$e2$	$d2$	$d3$	$d4$
Abstand von der Profilhinterkante in % der axialen Sehnenlänge	5.2	13.5	21.2	27.7	48.5	66.9

Tabelle 0.4: Lage der Auswertungsebenen

Per quanto riguarda i calcoli eseguiti con il programma FIDAP la convergenza voluta è stata raggiunta senza problemi sia nel caso della griglia $k-\epsilon$ che nel caso della griglia $k-\omega$. Sono stati considerati sei angoli di incidenza: $\beta_1 = 24^\circ, 28^\circ, 33^\circ, 40^\circ, 43^\circ, 46^\circ$. Il punto di progetto corrisponde a $\beta_1 = 40^\circ$.

Isobare

Le isobare sono definite tramite il coefficiente di pressione statica

$$C_{p1} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2} = konst \quad (0.33)$$

e permettono di individuare i punti in cui la pressione raggiunge il valore massimo (punto di ristagno) e quello minimo (sul lato di aspirazione). Tramite le isobare (pagg. 32-40) può venire verificata anche la periodicità delle condizioni al contorno. Al crescere dell'angolo di incidenza il punto di ristagno si sposta lungo il lato di pressione in direzione del bordo di uscita e il punto di pressione minima si sposta lungo il lato di aspirazione in direzione del bordo d'attacco.

Corrente all'interno del canale

La conoscenza della corrente nel canale tra due pale è molto importante per capire da dove scaturiscono le perdite. Il punto in cui si ha una transizione da moto laminare a turbolento determina se e dove ha luogo un distacco dello strato limite. Le misure effettuate mostrano la presenza di una bolla di distacco sul lato aspirato, a cui fa seguito un riattaccamento turbolento. Al crescere dell'angolo di incidenza la bolla diventa sempre più lunga. In ogni caso, anche per $\beta_1 = 46^\circ$ non si riscontra un distacco dello strato limite.

I valori di y^+ calcolati per il modello $k-\epsilon$ risultano soddisfacenti (pagg.43-44). In tutti i casi non è stato superato il limite massimo mentre il minimo è all'incirca pari a 20. Più grandi scostamenti sono da riscontrare in corrispondenza dei bordi di attacco e d'uscita. Questi scostamenti non hanno però significato, perchè i metodi della funzione alla parete perdono valore in queste regioni. Diverse grandezze sono state calcolate all'interno del canale:

- l'angolo ed i profili di velocità del fluido all'ingresso ed all'uscita del canale (grafici da pag.45 a pag.49)
- la distribuzione del coefficiente di pressione statica lungo la pala (da pag.50 a pag.52)
- il coefficiente di tensione tangenziale c_f (pagg.53 e 54)

In ogni caso sono riscontrabili corrispondenze molto buone tra i valori calcolati e quelli misurati, per tutti e sei gli angoli considerati. Ciò è vero in particolar modo per la distribuzione del coefficiente di pressione statica. Errori più grossi sono sempre riscontrabili sul lato di aspirazione. Sul lato di pressione la distribuzione del coefficiente di pressione statica è costante, mentre sul lato di aspirazione ad un iniziale piccolo valore di C_{p1} dovuto al fatto che la corrente deve aggirare il bordo d'attacco fa seguito un innalzamento di pressione, dopodichè la corrente viene nuovamente accelerata con corrispondente leggero calo di pressione. Da $x/c = 0,25$ in avanti comincia la decelerazione del fluido sul lato di aspirazione. Decisivo per avere uno strato limite stabile è il fatto che tale decelerazione inizi più marcata per poi diminuire procedendo verso il bordo d'uscita. Questo comportamento viene riscontrato in questo caso.

Si può osservare come i risultati del calcolo con il modello $k-\epsilon$ siano più vicini ai valori reali dei risultati ottenuti con il modello $k-\omega$, probabilmente perchè quest'ultimo calcola uno strato limite troppo spesso lungo il lato di aspirazione. Questo fatto è ben riscontrabile soprattutto nei grafici che si riferiscono al calcolo dell'angolo di uscita del fluido dal canale. Sempre dagli stessi grafici si evince chiaramente la differenza di spessore tra gli strati limite sul lato di pressione e sul lato di aspirazione.

Per quanto riguarda il coefficiente di tensione tangenziale si ha una buona corrispondenza tra risultati dei calcoli e misurazioni per il lato di pressione, mentre sul lato di aspirazione il programma non ha potuto calcolare la bolla di distacco riscontrabile nelle prove sperimentali.

Corrente nella scia

Poichè tutte le imperfezioni del processo di calcolo numerico e del modello di turbolenza si sommano nella scia, un'analisi delle grandezze calcolate in quest'ultima è molto importante per poter giudicare la qualità dei risultati. Le misurazioni con cui i risultati vengono confrontati sono state effettuate da *Shreeve et al.* [12]. Nella scia sono stati calcolati per tre angoli di incidenza differenti:

- la velocità adimensionale w/w_1 in sei piani di rilevamento (grafici da pag.55 a pag.61)

- l'angolo di uscita del fluido (pagg.66 e 67)
- il grado di turbolenza in due differenti piani di rilevamento (da pag.68 a pag.71)

Per quanto riguarda i risultati, dai grafici relativi alla distribuzione della velocità adimensionale nella scia si evince che è stata sottostimata la riaccelerazione del fluido nella regione dello strato limite. Nella regione relativa alla corrente libera si ha un'ottima corrispondenza tra i calcoli e le misurazioni. Meno buono risulta il confronto tra i risultati del calcolo e le misurazioni nel lato della scia proveniente dal lato di aspirazione della pala, dove il modello $k-\epsilon$ presenta risultati migliori del modello $k-\omega$. Con l'aumentare dell'angolo di incidenza del fluido aumenta anche lo spessore dello strato limite sul lato di aspirazione.

Per quanto riguarda il calcolo dell'angolo di uscita del fluido, i grafici mostrano che le variazioni abbastanza forti riscontrabili nelle misurazioni dovute allo spesso bordo d'uscita della pala sono qualitativamente ben riportate anche nei risultati. I valori di questi ultimi risultano però in valore assoluto minore.

Il grado di turbolenza è stato calcolato per diversi piani di misurazione e angoli di incidenza. Nella regione di fluido non disturbata il valore del grado di turbolenza rispecchia quello registrato all'ingresso, $Tu = 1,4\%$. All'interno della scia il valore sale fino a raggiungere il $10\% \div 12\%$. Gli elevati gradienti nella distribuzione del grado di turbolenza non vengono calcolati bene, soprattutto nel caso del modello $k-\epsilon$ (griglia non abbastanza fine). D'altra parte con il modello $k-\omega$ in alcune zone viene calcolato un valore troppo alto. I valori massimi del grado di turbolenza risultano essere stati ben calcolati.

Grandezze mediate

Risultati particolarmente interessanti di questo lavoro sono le caratteristiche della pala CDA (grafici a pag.73 e 74). Queste sono costituite dall'angolo di uscita del fluido e dal coefficiente di perdita di pressione totale in funzione dell'angolo di ingresso. Il calcolo fornisce queste due grandezze mediate lungo un piano di rilevamento. I dati sperimentali di confronto sono stati presi da *Sanger e Shreeve*.

Al crescere dell'angolo di ingresso del fluido l'angolo di uscita aumenta leggermente. Questo trend viene calcolato bene da entrambi i modelli di turbolenza. Le più grosse differenze di valore tra i valori calcolati e quelli misurati sono di circa $\pm 0,7^\circ$.

I coefficienti di perdita di pressione totale sono invece chiaramente sovrastimati. Il modello di turbolenza $k-\epsilon$ presenta risultati migliori del $k-\omega$. Entrambi i modelli non sono in grado di calcolare la transizione da moto laminare a turbolento, transizione che avviene soprattutto nello strato limite del lato aspirato della pala. L'aumento delle perdite nel caso di incidenza positiva o negativa viene riportato bene dai calcoli.

Dimensionamento inverso

Nella progettazione di turbomacchine vengono ricercati con sempre maggiore insistenza nuove tecniche che permettono un risparmio di tempo, un abbassamento dei costi ed un'elevata efficienza. Nella meccanica dei fluidi si è cercato, soprattutto negli ultimi anni, di sviluppare un processo di calcolo numerico, la cui applicazione faciliterebbe il dimensionamento di macchine con poche perdite e diminuirebbe il numero di esperimenti costosi per tempo e denaro. È risaputo che una forte decelerazione sul lato di aspirazione di una pala di compressore può provocare un distacco dello strato limite, che provoca un innalzamento delle perdite. Tramite un'adeguata scelta del profilo della pala si può però impedire o perlomeno ridurre questo fenomeno. Scopo del dimensionamento inverso è proprio quello di raggiungere un profilo che assicuri delle perdite molto basse. Infatti, mentre nel dimensionamento diretto si calcola la

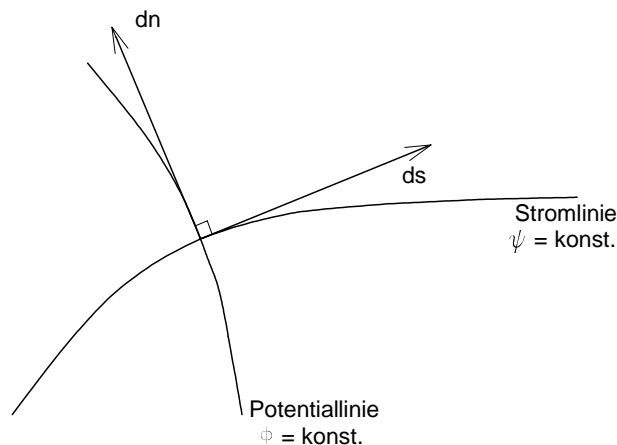


Abbildung 0.1: *Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential*

distribuzione della velocità per una forma della pala già fissata, nel caso del dimensionamento inverso si ottiene la geometria della pala da una distribuzione di velocità lungo il profilo definita a priori.

Per portare a termine un calcolo esatto bisognerebbe tener conto della tridimensionalità del problema, dell'attrito e delle correnti secondarie. Questo richiederebbe però dei tempi di calcolo troppo elevati, e perciò ci si limita a considerare delle correnti piane e irrotazionali.

Teoria del processo di dimensionamento inverso

In generale si può affermare che, quando la velocità prefissata lungo una parete di un canale è differente dalla velocità lungo l'altra parete, l'angolo di uscita del fluido differisce da quello d'ingresso. Questa differenza non può essere scelta liberamente, ma dipende dalla distribuzione di velocità prefissata lungo le pareti. Delle equazioni sono state sviluppate da *Stanitz* [14] per calcolare questo cambiamento di direzione, sotto l'ipotesi di fluido incompressibile e non viscoso. Queste ipotesi restringono il calcolo a correnti che presentano uno strato limite sottile. Infatti in canali con uno strato limite laminare spesso gli effetti rotazionali e le correnti secondarie non sono più trascurabili, e quindi non vale più un calcolo bidimensionale. Vengono introdotte innanzi tutto le definizioni di funzione di corrente ψ

$$d\psi = \rho Q dn \quad (0.34)$$

e di funzione potenziale ϕ

$$d\phi = Q ds \quad (0.35)$$

dove Q rappresenta la velocità in un punto del campo di corrente e ρ la densità del fluido; s è una coordinata parallela ad una linea di corrente e n è un'altra coordinata perpendicolare alla linea di corrente. Questo significa che la funzione di corrente è costante lungo una linea di corrente, mentre la funzione potenziale lo è su una linea perpendicolare ad essa.

Il sistema di riferimento ϕ - ψ è necessario perchè in questo piano sono note le linee che descrivono la distribuzione di velocità fissata a priori. Infatti i confini del dominio di calcolo coincidono con linee lungo le quali la funzione di corrente è costante. Inoltre è possibile esprimere la velocità come funzione di ϕ .

Per applicare il processo di dimensionamento inverso bisogna introdurre un'equazione differenziale che descriva la distribuzione di velocità nel piano ϕ - ψ e, una volta risoltala, calcolare punto per punto la direzione della corrente. Fatto questo, si può tornare al piano cartesiano x - y in cui vengono estrapolate le coordinate delle pareti.

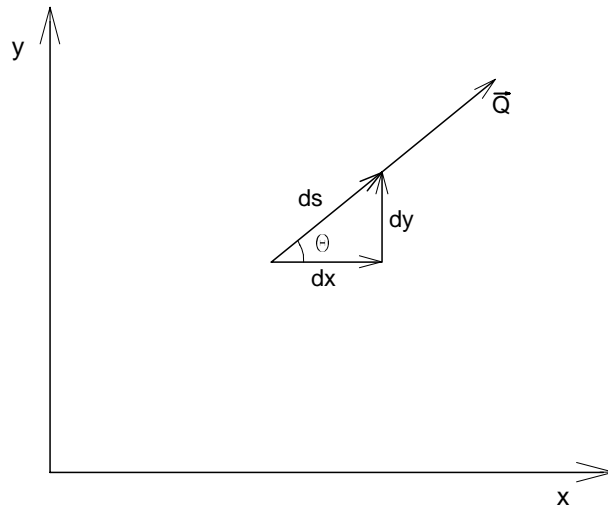


Abbildung 0.2: *Betrag und Richtung der Geschwindigkeit in der x - y -Ebene*

Nella tesi viene anche presentato un esempio di dimensionamento inverso, preso dal NACA-Report 1115 [14] di *Stanitz*.

Infine viene anche illustrato brevemente il procedimento di dimensionamento inverso per moderne pale di compressore.

Kurzfassung

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die Berechnung der ebenen turbulenten Strömung durch ein CDA-Verdichtergitter behandelt. Die Berechnungsergebnisse werden mit den Messungen, die aus *Elazar und Shreeve* [2], *Sanger und Shreeve* [11] und *Shreeve et al.* [12] genommen wurden verglichen. Außerdem ist auch ein Vergleich mit den von *Kang et al.* [6] mit dem low-*Reynoldsnumber*- k - ϵ Modell berechneten Werten vorhanden.

Am Anfang wird das mit dem inversen Verfahren ausgelegte Profil der Schaufel vorgestellt. Ein Vergleich mit dem NACA 65-Verdichtergitter und mit dem DCA-Verdichtergitter wird ausgeführt.

Bevor man das Rechenverfahren betrachtet, werden die Grundbegriffe der in der Berechnungen verwendeten Turbulenzmodelle, und zwar das k - ϵ - und das k - ω Modell, erläutert. Ein Blick auf das low-*Reynoldsnumber*- k - ϵ Modell wird auch geworfen.

Danach werden die Grundlagen der Theorie der Finiten-Elemente, die in der Berechnung mit dem CFD-Softwarepaket FIDAP verwendet werden, präsentiert.

Anschließend werden die Berechnungsergebnisse diskutiert. Eine Analyse der berechneten Isobaren wird ausgeführt, und Vergleiche zwischen berechneten und gemessenen Größen sowohl der Schaufel entlang als auch in der Nachlaufdele werden dargestellt. Aus den berechneten lokalen Größen werden Mittelwerte für den Abströmwinkel und für den Totaldruckverlustbeiwert ermittelt. Eine qualitative gute Übereinstimmung besteht zwischen berechneten und gemessenen Werten, überhaupt für das k - ϵ Modell. Die Profilverluste wurden jedoch zu hoch berechnet.

Der zweite Teil dieser Arbeit betrachtet die Grundlagen der inversen Auslegung. Die Forderung nach Energieeinsparung und Leistungskonzentration in modernen Turbomaschinen kann nur durch den Einsatz neuer Technologien erfüllt werden. Eine dieser Technologien entspricht dem inversen Auslegungsverfahren. Das CDA-Verdichtergitter wurde mit dieser Technik entworfen. Bei dem inversen Verfahren wird die Gestalt der Schaufel aus einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung berechnet. Eine Entwicklung dieser Technik würde die Anzahl der zeit- und kostenintensiven Experimente verringern. Die Theorie des Verfahrens wird kurz behandelt und ein einfaches Beispiel wird präsentiert.

Zum Abschluß werden weitere Arbeiten in dem Gebiet der numerischen Strömungsberechnung vorgeschlagen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Profil und Eigenschaften des CDA-Gitters	3
3	Grundgleichungen	8
3.1	Eigenschaften turbulenter Strömungen	8
3.2	Grundgleichungen	9
4	Turbulenzmodellierung	12
4.1	Turbulenzmodelle	12
4.2	Das k - ϵ Turbulenzmodell	13
4.3	Methode der Wandfunktionen	14
4.4	Low-Reynoldsnumber k - ϵ Turbulenzmodell	16
4.5	Das k - ω Turbulenzmodell	16
4.6	Laminar-turbulent Übergang	17
5	Numerisches Lösungsverfahren	20
5.1	Interpolationsfunktionen	20
5.2	Verfahren der gewichteten Residuen	21
5.2.1	Das Galerkin'sche Verfahren	21
5.2.2	Lösung bei FIDAP	22
5.3	Profil- und Netzgenerierung	22
5.4	Anfangs- und Randbedingungen	26
5.5	Relaxation	28
6	Ergebnisse	30
6.1	Lage der Auswertungsebenen	30
6.2	Konvergenz	31
6.3	Darstellung der Isobaren	32
6.4	Strömung im Schaufelkanal	40
6.4.1	Zustand der Grenzschicht	40
6.4.2	Dimensionsloser Wandabstand y^+	42
6.4.3	Strömung am Kanaleintritt und -austritt	45
6.5	Profildruckverteilung	49
6.6	Schubspannungsbeiwert	53
6.7	Strömung im Gitternachlauf	55
6.7.1	Dimensionslose Geschwindigkeiten im Gitternachlauf	55
6.7.2	Strömungswinkel im Gitternachlauf	65
6.7.3	Turbulenzgrad im Gitternachlauf	68
6.8	Gemittelte Strömungsgrößen	71
6.8.1	Mittelungsverfahren	71

6.8.2	Berechnungsergebnisse	73
7	Inverse Auslegung	76
7.1	Einleitung	76
7.2	Theorie des inversen Auslegungsverfahrens	77
7.2.1	Strömungsfeld	77
7.2.2	Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential	78
7.3	Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung	81
7.4	Geometrie der Kanalwände	82
7.4.1	Strömungsrichtung Θ	82
7.4.2	Koordinaten der Kanalwände	83
7.4.3	Umlenkungswinkel	83
7.5	Numerisches Beispiel	84
7.5.1	Vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung	84
7.5.2	Ergebnisse	86
7.6	Inverse Profilauslegung für moderne Verdichterschaufel	89
7.6.1	Der Rechenmodul	90
7.6.2	Der Modifikationsmodul	91
8	Zusammenfassung und Ausblick	92
A	FIDAP-Eingabefile	96

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten Jahren hat die rechnergestützte Auslegung Thermischer Turbomaschinen zunehmende Bedeutung gewonnen. Eine Anwendung dieser Technik in der Strömungsmechanik erlaubt eine schnellere Analyse von Strömungsproblemen, die zu einer schnelleren und wirtschaftlicheren Forschung und Produktion führt. Die traditionellen, experimentellen Versuche brauchen nämlich mehr Zeit und erhöhen die Entwicklungskosten. Eine wirkungsvolle Methode wird gesucht, die die viskosen Wirkungen der Strömung simuliert, und zwar laminar-turbulent Übergang, Ablösungsblase, Wiederanlegepunkt und Grenzschichtablösung. Deswegen werden heutzutage im Bereich der rechnergestützten Simulation neue Techniken gesucht, die eine bessere Anpassung an die realen Strömungen garantieren. Eine beträchtliche Schwierigkeit stellt die mathematische Formulierung der turbulenten Strömung dar. Ein Modell, das eine korrekte Voraussage des Umschlagpunktes an der Schaufel und der Turbulenz unter starken Druckgradienten garantiert, existiert noch nicht. Trotzdem wurden verschiedene Turbulenzmodelle in den letzten Jahren vorgeschlagen. Die wichtigsten für diese Arbeit sind das k - ϵ -Zweigleichungsmodell und das k - ω -Zweigleichungsmodell. Beide Modelle betrachten eine inkompressible, reibungsbehaftete und turbulente Strömung. In dieser Arbeit werden zuerst kurz die Grundgleichungen der Strömungsmechanik und die hauptsächlichen Turbulenzmodelle, mit besonderer Rücksicht auf die k - ϵ - und k - ω -Turbulenzmodelle, eingeführt. Besondere Schwierigkeiten werden in der Betrachtung des Übergangs vom laminaren zum turbulenten Bereich und der Ablösung der Grenzschicht bemerkt. Deswegen werden diese zwei Begriffe analysiert, besonders ihre Beziehung zu den Verlusten des Gitters.

Besondere Bedeutung für die rechnergestützte Auslegung besitzt das CDA-Verdichtergitter. Dieses Gitter ist im Jahre 1983 als Erweiterung des DCA-Gitters entwickelt worden, um die Möglichkeit eines numerischen Optimierungsverfahrens zu benutzen. Das Ziel war eine nicht viskose Strömungsberechnung zu benutzen und eine Schaufel zu erreichen, auf deren Oberfläche die Verteilung des Druckgradienten keine Ablösung der Grenzschicht garantiert. Es ist außerdem wichtig, daß diese Ablösungsfreiheit nicht nur im Auslegungspunkt gilt, sondern auch bei Winkeln, die nah zum Bauchstoß und zum Rückenstoß liegen. Das CDA-Gitter sichert einen größeren ablösungsfreien Bereich als jedes andere Gitter, besonders im Vergleich mit einem DCA-Gitter. Deswegen werden mehrere Anströmwinkel betrachtet, und die Ergebnisse der rechnergestützten Analyse werden mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Die k - ϵ - und die k - ω -Turbulenzmodellierung werden in der Berechnung verwendet, so daß es möglich ist, die Vor- und Nachteile beider Verfahren zu zeigen. Die experimentellen Daten wurden in einem Windkanal aus LDA-Messungen, kalibrierten Druckuntersuchungen und Hitzdrahtmessungen gewonnen.

Nach der Art der Lösung der Strömungsgleichungen kann man zwischen direktem und inversem Auslegungsverfahren unterscheiden. Im direkten Verfahren wird das Strömungsfeld

vollständig von der Gittergeometrie und von der Anström- und Abströmbedingung beschrieben. Das inverse Verfahren stützt sich auf die Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufeloberfläche. Das Geschwindigkeitsfeld wird durch die Lösung der Potentialgleichung mit finiten Differenzen bestimmt. Diese gegebene Größe, zusammen mit dem Sehnenlänge-Teilung Verhältnis und den Anström- und Abströmbedingungen, erlaubt das entsprechende Gitter festzulegen. Diese Methode wird verwendet, wenn ein ganz neues Gitter entwickelt werden muß. Das CDA-Verdichtergitter wurde durch diesen modernen Auslegungsprozess entworfen. Das direkte Verfahren ist bevorzugt, wenn die Geometrie modifiziert werden muß, und um die Strömung für Winkel, die nicht dem Auslegungspunkt entsprechen, zu bestimmen. In dieser Arbeit werden diese zwei Auslegungsverfahren betrachtet und verglichen, mit besonderer Rücksicht auf die inverse Methode, von der ein einfaches Beispiel präsentiert wird.

Kapitel 2

Profil und Eigenschaften des CDA-Gitters

Das CDA-Gitter (Controlled-Diffusion Airfoil), von dem diese Diplomarbeit handelt, wurde im Jahre 1983 von *Sanger* [10] als Leitgitter der ersten Stufe eines zweistufigen NASA-Fans entwickelt. Das Ziel war, eine Entwicklung von automatisierten Auslegungsverfahren durch Verwendung von numerischen Optimierungsmethoden des CDA-Gitters zu überprüfen. Die erforderlichen Eigenschaften waren [15]:

- Höheres Druckverhältnis in der ersten Stufe
- Bessere Eigenschaften bei Zuström winkeln, die nicht dem Auslegungspunkt entsprechen
- Höherer Wirkungsgrad

Um diese Anforderungen zu gewährleisten, wurde eine Methode verwendet, die eine kontrollierte Verzögerung entlang des Schaufelprofils erlaubt. Diese Methode führt zu einer Optimierung der Geschwindigkeiten an der Saug- und Druckseite, so daß eine Grenzschichtablösung vermieden wird. Den drei Anforderungen entsprechend, versuchte man:

- Hohe Belastung
- Breiten Anström winkelbereich
- Ablösungsfreie Grenzschicht

zu erreichen. Die modernen Auslegungsverfahren, die für die Entwicklung des Profils gebraucht wurden, erlaubten die Geschwindigkeitsverteilung im Schaufelkanal anzugeben. Nach der Lösungsmethode der Strömungsgleichungen kann man zwischen direkten und inversen Rechenverfahren unterscheiden. Beim direkten Verfahren ist die Strömung vollständig von der bestimmten Schaufelgeometrie und den Zuström- und Abströmbedingungen beschrieben. Das inverse Verfahren stützt sich auf die Geschwindigkeitsverteilung auf dem Schaufelprofil. Bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung wird die Gittergeometrie bestimmt.

Um eine ablösungsfreie Grenzschicht zu erhalten, ist ein abnehmender Geschwindigkeitsgradient hinter dem Umschlagpunkt notwendig. Durch Übereinstimmung zwischen der Geschwindigkeitsverteilung und der benötigten Zirkulation und Profildicke, erhält man die Machzahl-Verteilung nach Abb.2.1.

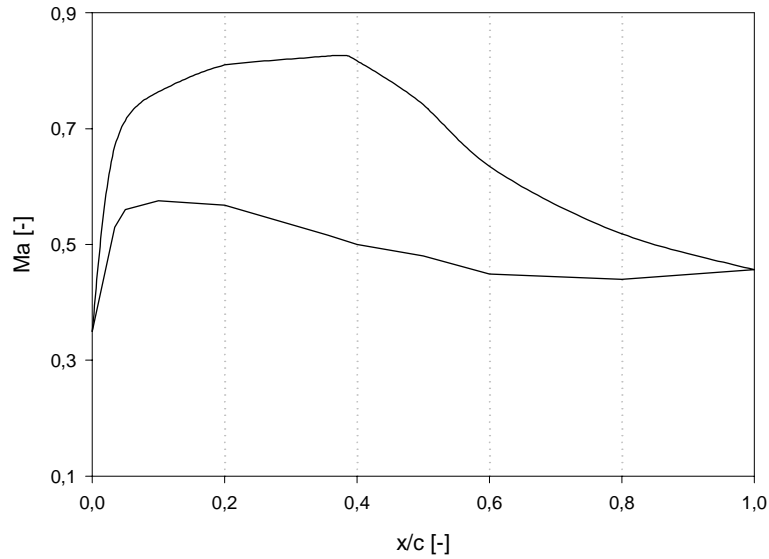


Abbildung 2.1: *Machzahlverteilung an der Saug- und Druckseite*

Man kann verschiedene Bereiche identifizieren:

1. Eine fortlaufende Beschleunigung von der Vorderkante bis zur maximalen Machzahl an der Saugseite, um eine vorzeitige laminare Grenzschichtablösung oder Umschlag zu vermeiden.
2. Eine kontinuierliche Verzögerung an der Saugseite von der maximalen Machzahl bis zur Hinterkante, um eine Ablösung der turbulenten Grenzschicht zu vermeiden.
3. Eine fast konstante Machzahlverteilung an der Druckseite.

Das CDA-Gitter hat kleinere Verluste als das originale DCA-Gitter im ganzen Betriebsbereich, außer für sehr hohe Anströmwinkel. Das Schaufelprofil ist in der Abb.2.2 dargestellt. Die Skelettlinie besteht aus zwei Polynomkurven. Die Geometrie des Gitters ist in Tab.2.1 gegeben. Die Koordinaten der Punkte des Profils, die in Tab. 2.2 gezeigt werden, wurden aus [2] genommen. Die Ordinaten des zweiten und des fünfundzwanzigsten Punktes auf der Druck- und Saugseite sind unterschiedlich.

Sehnenlänge	12.73cm
Solidity	1.67
Vorderkantenradius	0.114cm
Hinterkantenradius	0.157cm
Teilung	7.638cm
Staffelungswinkel	14.27°
Schaufelhöhe	25.40cm

Tabelle 2.1: Gittergeometrie

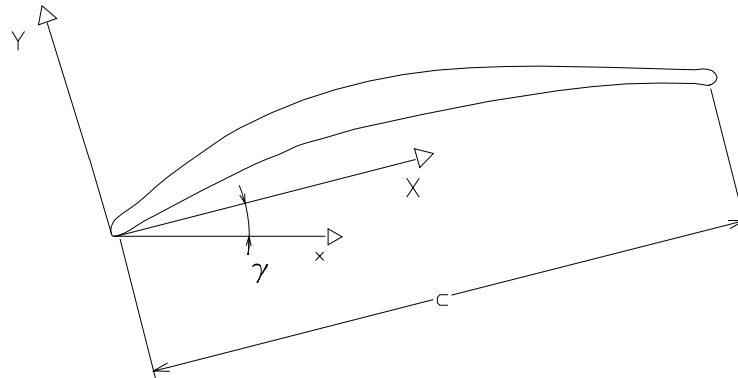


Abbildung 2.2: *Profil einer CDA-Schaufel*

X (cm)	Y(Druckseite) (cm)	Y(Saugseite) (cm)
0.000	0.114	0.114
0.056	-	0.213
0.145	0.005	-
0.564	0.112	0.498
1.128	0.257	0.780
1.692	0.394	1.024
2.256	0.526	1.240
2.819	0.648	1.425
3.383	0.759	1.577
3.947	0.838	1.684
4.511	0.889	1.755
5.075	0.912	1.791
5.639	0.912	1.798
6.203	0.894	1.781
6.767	0.869	1.730
7.330	0.841	1.651
7.894	0.805	1.549
8.458	0.765	1.430
9.022	0.714	1.295
9.586	0.653	1.151
10.150	0.577	0.998
10.714	0.485	0.843
11.278	0.371	0.686
11.841	0.226	0.528
12.405	0.048	0.368
12.510	0.010	-
12.609	-	0.310
12.725	0.157	0.157

Tabelle 2.2: Punkte des Schaufelprofils

Eine besondere Eigenschaft des CDA-Gitters stellt der große Radius der Vorder- und Hinterkante dar (Abb. 2.3 und 2.4). Diese Besonderheit ergibt sich aus der Optimierung der Gestalt, aus den Druckgradienten in der Nähe der Vorder- und Hinterkante [4].

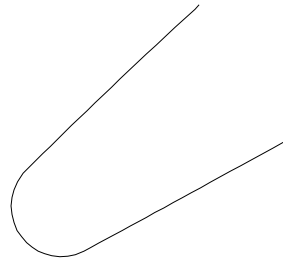


Abbildung 2.3: CDA-Vorderkante

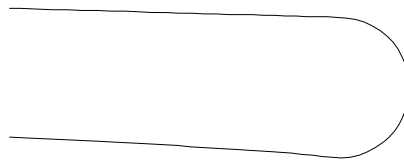


Abbildung 2.4: CDA-Hinterkante

Trotz der Dicke der Vorder- und Hinterkante besitzt das CDA-Gitter eine höhere kritische Machzahl und einen breiteren nützlichen Bereich des Zuström winkels als das NACA 65- und das DCA-Gitter, wie von *Hobbs* und *Weingold* gezeigt wurde [5] (Abb. 2.5 u. 2.6).

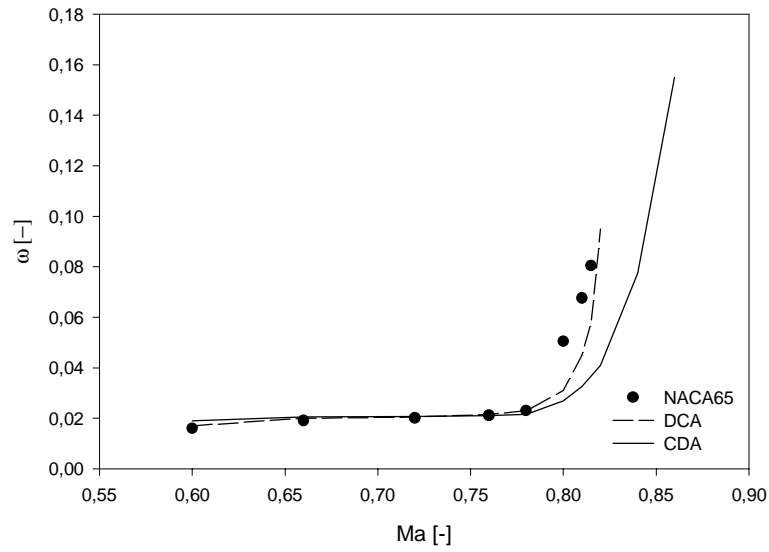


Abbildung 2.5: Totaldruckverlustbeiwert bei NACA65-, DCA- und CDA-Gitter [5]

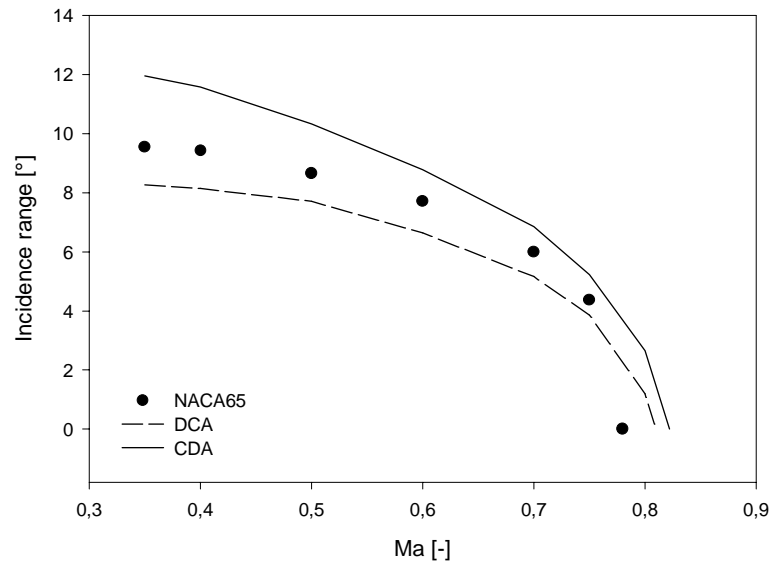


Abbildung 2.6: Nutzbarer Zuströmwinkelbereich bei NACA65-, DCA- und CDA-Gitter [5]

Kapitel 3

Grundgleichungen

3.1 Eigenschaften turbulenter Strömungen

Turbulente Strömungen, die in der Praxis sehr wichtig sind, sind instationär, räumlich, wirbelbehaftet und stochastisch. Wenn ein Gitter mit einer Anströmgeschwindigkeit w_1 angeströmt wird, kann man die Reynoldszahl

$$Re = \frac{w_1 c}{\nu} \quad (3.1)$$

eingeführen, wobei c die Sehnenlänge ist. An der als Platte betrachteten Schaufel [9] bildet sich eine laminare Grenzschicht, deren Dicke und Länge von der Anströmgeschwindigkeit, der Plattenrauigkeit und der Turbulenz der freien Strömung abhängt. Von den selben Parametern hängt auch der Umschlag von laminarer auf turbulente Strömung in der Grenzschicht ab. In den praktisch wichtigen Fällen kann die Strömung statistisch stationär betrachtet werden. Die Größen werden so ausgedrückt:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

wobei

$u(x, y, z, t)$	der Momentanwert
$\bar{u}(x, y, z)$	der zeitliche Mittelwert
$u'(x, y, z, t)$	der Schwankungswert von u

sind (Abb.3.1).

Der zeitliche Mittelwert ist definiert als

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(x, y, z, t) dt. \quad (3.3)$$

Das Zeitintervall Δt muß hinreichend groß gewählt werden. Die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgrößen sind gleich Null, aber die Mittelwerte der Produkte zweier Schwankungsgrößen sind ungleich Null:

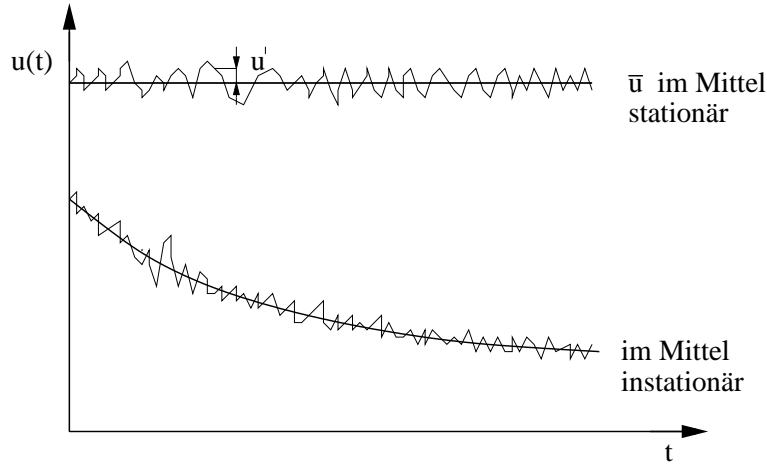
$$\overline{u'}(x, y, z, t) = 0 \quad (3.4)$$

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'} \right) \quad (3.5)$$

Die Größe k hat die Dimension einer Energie und wird als kinetische Energie der Turbulenz bzw. Turbulenzenergie definiert. Eine andere wichtige Größe stellt der Turbulenzgrad dar:

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'u'}}}{\bar{u}} \quad (3.6)$$

Diese Größe gibt an, wie turbulent eine Strömung ist.

Abbildung 3.1: Geschwindigkeit in x -Richtung an einem festen Punkt

3.2 Grundgleichungen

Zur Berechnung einer ebenen stationären inkompressiblen turbulenten Strömung ist die Lösung der folgenden Gleichungen notwendig:

- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

- Impulsgleichung in x -Richtung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.8)$$

- Impulsgleichung in y -Richtung:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.9)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen u und v die skalaren Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{w} in x - bzw. in y -Richtung des kartesischen Koordinatensystems, ρ die als konstant betrachtete Dichte des Mediums, p den Druck und ν die kinematische Viskosität. Für die weitere Betrachtung ist es besser, die Gleichungen dimensionslos zu machen. Die charakteristische Geschwindigkeit, auf die die anderen Geschwindigkeiten bezogen sind, ist die Anströmgeschwindigkeit w_1 . Als charakteristische Länge betrachtet man die Sehnenlänge c . Somit gilt z.B. für u und x :

$$u^* = \frac{u}{w_1} \quad x^* = \frac{x}{c} \quad (3.10)$$

Setzt man die dimensionslosen Größen in die Glg.(3.7), erhält man:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.11)$$

und für die Glg.(3.8):

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho w_1^2} \frac{\partial p}{\partial x^*} + \frac{\nu}{c w_1} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.12)$$

Wenn in dieser Gleichung die dimensionslosen Größen $p^* = p/(\rho w_1^2)$ und $(cw_1)/\nu = Re$ eingeführt werden, ergibt sich:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.13)$$

Daraus folgen die dimensionslosen, zweidimensionalen Gleichungen [16]:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.14)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.15)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3.16)$$

Wir betrachten jetzt den allgemeinen instationären und dreidimensionalen Fall, der die reelle Strömung besser beschreibt. Die folgenden Gleichungen gelten sowohl für die laminaren als auch für die turbulenten Strömungen, aber man ist an den zeitlichen Mittelwerten interessiert. Diese Grundgleichungen werden als Reynolds'sche Gleichungen bezeichnet. Die Reynoldsmittelung der Massenbilanz ergibt also [19]:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dt + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) dt = 0 \quad (3.17)$$

Durch die Vertauschung von Differentiation und Integration erhält man:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{u} dt \right)}_{\bar{u}} + \dots + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u' dt \right)}_0 + \dots = 0 \quad (3.18)$$

Es folgt:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

Die Massenbilanz gilt sowohl für die zeitlichen Mittelwerte, als auch für die turbulenten Schwankungsgrößen.

Nach zeitlicher Mittelung der Bewegungsgleichung fallen die linearen Terme der turbulenten Schwankungsgrößen weg. Für den Teil der Gleichung, der auf der linken Seite steht, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} \right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underbrace{\left(u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right)}_0 + \\ &+ u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \underbrace{\left(u' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) \right)}_0 + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} dt &= \dots = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial (u'u')}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + \frac{\partial (u'w')}{\partial z} \right] dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nach Vertauschung von Differentiation und Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t} u' u' dt \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t} u' v' dt \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_t^{\Delta t} u' w' dt \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Setzt man diese Terme in die Bewegungsgleichung, die in x -Richtung gilt ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho (\overline{u'u'}) \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho (\overline{u'v'}) \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho (\overline{u'w'}) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich in y - und z -Richtung. In diesen Bewegungsgleichungen treten insgesamt neun Spannungen auf, die Reynoldsspannungen genannt werden. Sie werden in einem sogenannten Reynolds'schen Spannungstensor zusammengefaßt:

$$(\sigma_{ij})_{tur} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Wegen der Symmetrie des Reynolds'schen Spannungstensors verbleiben sechs neue unbekannte Größen. Um die Glg.(3.23) lösen zu können, muß man den Reynolds'schen Spannungstensor durch geeignete Turbulenzmodelle modellieren.

Das Gleichungssystem ist wegen des Auftretens der Spannungen nicht mehr geschlossen: es gibt mehr Unbekannten als Gleichungen, im Gegensatz zum laminaren Problem. Deswegen wird man versuchen, die sechs unbekannten Komponenten des Reynolds'schen Spannungstensors auf eine einzige unbekannte Größe zu reduzieren. Das erhält man durch den Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq. Der turbulente Spannungstensor (3.24) kann wie ein molekularer betrachtet werden, mit Normal- und Schubspannungen. Diese Größen werden in laminare und turbulente Spannungen geteilt. Der Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq lautet

$$\sigma_{ij,ges} = \sigma_{ij,lam} + \sigma_{ij,tur} = - \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) \delta_{ij} + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.25)$$

wobei k die turbulente kinetische Energie (Glg.3.5),

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{bei } i = j \\ 0 & \text{bei } i \neq j \end{cases}$$

das Kronecker-Symbol und

$$\sigma_{ij,lam} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \sigma_{ij,tur} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3.26)$$

die laminaren und turbulenten Spannungen darstellen.

Die einzige Unbekannte ist jetzt die Wirbelviskosität:

$$\mu_t = \mu_t(x, y, z) \quad (3.27)$$

Die Wirbelviskosität ist eine Ortsfunktion, die sich im Strömungsfeld ändert. Diese Größe ist sehr wichtig, weil sie die Grundlage von vielen Turbulenzmodellen ist, die verschiedene Gleichungen für die kinematische Wirbelviskosität $\nu_t = \mu_t/\rho$ anbieten, um das System zu schliessen.

Kapitel 4

Turbulenzmodellierung

4.1 Turbulenzmodelle

Heutzutage werden verschiedene Wege bei der Turbulenzmodellierung begangen, und zwar [13]:

- Reynoldsgemittelte Navier-Stokes Gleichungen (RANS)
- Large Eddy Simulation (LES)
- Direkte Numerische Simulation (DNS)

Die letzten beiden Vorgangsweisen haben noch keine Anwendung in großem Umfang gefunden. Bei der Direkten Numerischen Simulation werden die vollständigen, dreidimensionalen und zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst, ohne daß Turbulenzmodelle zu Hilfe genommen werden, d.h. die Reynoldsschen Gleichungen werden nicht benutzt und Schließungsannahmen sind nicht erforderlich. Seit etwa zehn Jahren hat dieses Modell eine praktische Anwendung gefunden, aber der Aufwand an Computerzeit für solche Rechnungen ist jedoch gewaltig und wächst mit zunehmender Reynoldszahl, weil die Auflösung des Geschwindigkeitsfeldes bis hin zu den kleinsten Wirbel gewährleistet sein muß. Um den enormen Rechenaufwand zu begrenzen, beschränkt sich die Large Eddy Simulation bei der vollständigen Rechnung auf die großen Wirbeln und verwendet für die Feinstruktur der Turbulenz einfache empirische Turbulenzmodelle. Die Anwendung dieses Rechenverfahrens bei Turbulenzproblemen befindet sich noch im Anfangsstadium. Beide Methoden sind für praktische Zwecke noch nicht anwendbar, aber sie können detaillierte Informationen über das Turbulenzfeld liefern.

In dieser Arbeit werden nur die RANS-Modelle betrachtet. Sie verteilen sich in Wirbelviskositätsmodelle, die Gleichungen für die Wirbelviskosität ν_t vorschlagen, und Reynoldsspannungsmodelle, die jedes Glied des Reynoldsspannungstensors berechnen. Die Wirbelviskositätsmodelle sind:

- Nullgleichungsmodelle (algebraische Turbulenzmodelle)
- Eingleichungsmodelle
- Zweigleichungsmodelle

In diesem Abschnitt wird eine kurze Beschreibung der k - ϵ - und der k - ω -Zweigleichungsmodelle durchgeführt.

4.2 Das k - ϵ Turbulenzmodell

Dieses ist das bekannteste und am meistens angewandte Turbulenzmodell. Es wurde im Jahr 1974 von *Launder* und *Spalding* [8] eingeführt. Zur Erfassung der turbulenten Transportvorgänge sowie der Vorgeschichte der turbulenten Strömung werden Transport-Differentialgleichungen für die turbulente kinetische Energie (Glg.3.5) und die turbulente Dissipationsrate

$$\epsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \quad (4.1)$$

gelöst, unter der Annahme von isotroper Turbulenz:

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} \quad (4.2)$$

Die kinetische Energie der Turbulenz wird dabei den großen Turbulenzwirbeln der Strömung entzogen und durch viskose Kräfte des Strömungsmediums in den kleinen Turbulenzbewegungen dissipiert, d.h., in innere Energie überführt. Hohe Turbulenz-Reynoldszahlen, die proportional zum Verhältnis μ_t/μ sind, stellen eine grundlegende Voraussetzung für die Anwendung des Standard k - ϵ Modelles dar. In unmittelbarer Wandnähe ist die molekulare Viskosität von gleicher Größenordnung wie die Wirbelviskosität, und für diesen Bereich gelten die oben beschriebenen Annahmen nicht. Daher kehrt man dort zu sogenannten Wandfunktionen zurück, die später behandelt werden.

Das k - ϵ -Turbulenzmodell ist ein Wirbelviskositätsmodell, das sich auf den Ansatz von Bousinesq stützt. Man sucht eine Funktion, die die Wirbelviskosität in Abhängigkeit von der kinetischen Turbulenzenergie und der turbulenten Dissipationsrate ausdrückt:

$$\nu_t = f(k, \epsilon) \quad (4.3)$$

Um das zu erreichen, bedient man sich einer Dimensionsanalyse (Tab. 4.1):

	L	M	T
ν_t	2	0	-1
k	2	0	-2
ϵ	2	0	-3

Tabelle 4.1: Dimensionsanalyse

Dadurch bekommt man ein dimensionsloses Produkt

$$\Pi = \left(\frac{\nu_t \epsilon}{k^2} \right) = C_\mu, \quad (4.4)$$

wo C_μ eine Konstante ist.

Wegen $\nu_t = \mu_t/\rho$ folgt daraus:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (4.5)$$

Wenn man die Verteilung der Wirbelviskosität im Strömungsfeld kennt, kann man die Strömung berechnen. Um das zu gewährleisten muß man die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie k und der Dissipationsrate ϵ haben. Somit wurde der bei turbulenten Strömungen auftretende unbekannte Reynolds'sche Spannungstensor auf die Bestimmung von k und ϵ

zurückgeführt. Dazu werden die Transportgleichungen für diese zwei Größen eingeführt. Für die turbulente kinetische Energie einer ebenen Strömung erhält man

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P - \epsilon \quad (4.6)$$

und für die Dissipationsrate

$$u \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (4.7)$$

wobei

$$P = -\overline{u'_j u'_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.8)$$

die turbulente Produktionsrate ist. Diese ist eine Funktion der Reynoldsspannungen und wird iterativ berechnet. Die Modellkonstanten besitzen die Werte, die in der Tab. 4.2 angegeben sind:

$C_\mu = 0.09$	$\sigma_k = 1.0$	$\sigma_\epsilon = 1.3$	$C_1 = 1.44$	$C_2 = 1.92$
----------------	------------------	-------------------------	--------------	--------------

Tabelle 4.2: Konstanten des k - ϵ Turbulenzmodells

Diese Werte gelten für eine große Klasse von Strömungen.

4.3 Methode der Wandfunktionen

Wie vorher erklärt wurde, ist dieses Standard k - ϵ -Modell ein sogenanntes High-Reynoldsnumber-Modell, d.h., es ist nur für voll turbulente Strömungen geeignet. In der Wandnähe gibt es einen Bereich, wo die Reynoldszahl so niedrig ist, daß die viskosen Wirkungen gegenüber den turbulenten vorherrschen. Dieser Bereich, der innerhalb der turbulenten Grenzschicht liegt, wird als laminare oder als viskose Unterschicht bezeichnet. Hier werden die Geschwindigkeitsschwankungen und damit auch die Reynolds'sche Schubspannung immer kleiner, bis diese direkt an der Oberfläche verschwinden. Es gilt:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \left(\overline{u'v'} \right) = konst \quad (4.9)$$

Mit Hilfe der Größe

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (4.10)$$

die man Schubspannungsgeschwindigkeit nennt, berechnet man die Größen

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (4.11)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (4.12)$$

die als dimensionslose Geschwindigkeit in Wandnähe (Glg.4.11) und dimensionsloser Wandabstand (Glg.4.12) bezeichnet werden. In unmittelbarer Nähe der Wand kann man die Produkte $\overline{u'v'}$ vernachlässigen. In diesem Bereich erhält man:

$$u^+ = y^+ \quad (4.13)$$

Diese ist die universelle Geschwindigkeitsverteilung in der viskosen Unterschicht, die als Prandtl'sches Wandgesetz bezeichnet wird. Wenn man sich von der Wand entfernt, nimmt der dimensionslose Wandabstand y^+ zu, und damit auch der Anteil von $\overline{u'v'}$ an der Schubspannung, während der molekulare Anteil immer kleiner wird. In diesem Bereich gilt das logarithmische Wandgesetz:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (4.14)$$

Die Konstante κ wird als von Karman'sche Konstante bezeichnet. Die Glg. (4.14) wird als universelle Geschwindigkeitsverteilung im vollturbulenten Gebiet bezeichnet. Die Abb.4.1 zeigt die universelle Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht.

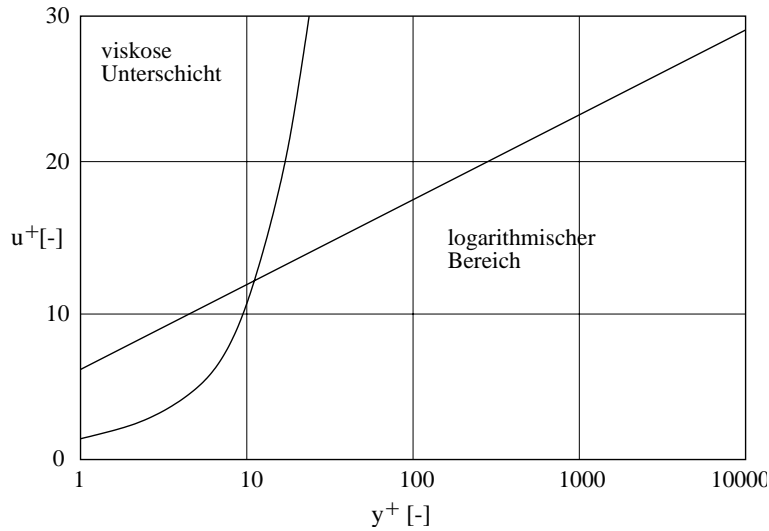


Abbildung 4.1: Universelle Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

Die Konstanten der Glg. (4.14) wurden experimentell zu $\kappa = 0.4$ und für aerodynamisch glatte Oberflächen $E = 9.0$ ermittelt. In Wandnähe befinden sich also drei verschiedene Bereiche, die durch die Größe von y^+ charakterisiert werden können:

$$\begin{array}{ll} 0 < y^+ < 5 & \text{viskose Unterschicht} \\ 5 < y^+ < 30 & \text{Übergangsschicht} \\ y^+ > 30 & \text{vollturbulente Schicht} \end{array}$$

Weiters muß man auch einen Defektbereich an der Grenze zwischen Grenzschicht und freier Strömung berücksichtigen, in dem die Gleichung

$$\frac{\Delta u}{u_\tau} = h \left(\frac{y}{\delta} \right) \quad (4.15)$$

gilt, wobei Δu den Geschwindigkeitsdefekt darstellt:

$$\Delta u = u_\infty - u \quad (4.16)$$

Man benutzt das Standard k - ϵ Turbulenzmodell nur im vollturbulenten Gebiet, das heißt für $y^+ > 30$. In den anderen Bereichen muß man zu den Wandfunktionen zurückkehren. Diese Methode wird häufig angewendet und für praktische Zwecke bevorzugt. Die Vorteile sind: ein wirtschaftliches und schnelles Rechenverfahren und die Möglichkeit, zusätzliche, empirische Informationen in besonderen Fällen, wie z.B. bei nicht glatten Oberflächen, einzuführen (für raue Oberflächen hängt die Konstante E von der Rauigkeit ab).

4.4 Low-Reynoldsnumber k - ϵ Turbulenzmodell

In vielen Fällen können die wandnahen Vorgänge nicht mehr mit Wandgesetzen wiedergegeben werden. Ein Beispiel hierfür ist der laminar-turbulente Grenzschichtumschlag, dessen genaue Berechnung eine schwierige Aufgabe der Strömungsmechanik ist. Die Beschreibung transistionaler Grenzschichten mit dem k - ϵ Modell erfordert daher Modellerweiterungen für den Bereich niedriger Reynoldszahlen. Ein solches Modell ist das Low-Reynoldsnumber-Modell, das das erste Mal in den Jahren 1972-73 von *Jones* und *Laundner* auf transitionale Strömungen angewendet wurde. Das Ziel war, das prinzipielle Potential des Verfahrens zu einer genaueren Vorhersage des Umschlages bei Vorhandensein von Außenturbulenz aufzuzeigen [13]. In diesem Modell benutzt man Gleichungen, die für den laminaren, Übergangs- und vollturbulenten Bereich gültig sind, ohne Wandfunktionen zu brauchen. Alle konstanten Größen, die im Standard k - ϵ Turbulenzmodell auftreten, werden hier mit Dämpfungsfunktionen multipliziert:

$$C_\mu \Rightarrow f_\mu C_\mu \quad C_1 \Rightarrow f_1 C_1 \quad C_2 \Rightarrow f_2 C_2 \quad (4.17)$$

$$f_\mu, f_1, f_2 = f \left(\frac{k^2}{\nu \epsilon}, \frac{\sqrt{k} y}{\nu}, \frac{u_\tau y}{\nu} \right) \quad (4.18)$$

Somit erhält man für die Wirbelviskosität:

$$\mu_\tau = \rho f_\mu C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (4.19)$$

Diese Größe wird in die Transportgleichungen für k und ϵ eingesetzt.

Dieses Modell unterscheidet sich vom Standard k - ϵ -Modell auch durch die Beibehaltung der molekularen Diffusionsglieder in den Transportgleichungen. Die Dämpfungsfunktionen f_1, f_2 und f_μ werden eingeführt, um die Effekte kleiner Turbulenz-Reynoldszahlen in der Nähe fester Wände zu berücksichtigen. Im vollturbulenten Strömungsgebiet, d.h., im Bereich hoher Turbulenz-Reynoldszahlen und vernachlässigbarem Viskositätseinfluß, streben die Dämpfungsfunktionen gegen Eins. Für den Wandnächstenknoten muß gelten:

$$y^+ \leq 1 \quad (4.20)$$

Deswegen wird bei der Berechnung die Knotenanzahl viel höher als beim High-Reynoldsnumber Modell, weil das Netz viel feiner in der Nähe der Wand sein muß. Daraus folgen höhere Rechenzeit und größerer notwendiger Speicherplatz.

4.5 Das k - ω Turbulenzmodell

Dieses Turbulenzmodell wurde entwickelt, um eine genauere Berechnung von Grenzschichten mit negativem Druckgradient durchzuführen, als die, die das k - ϵ Modell erlaubt [17]. Neben den Kontinuitäts- und Impulsgleichungen (Glg. 3.7, 3.8 und 3.9) werden die turbulente kinetische Energie (Glg. 3.5) und die spezifische Dissipationsrate

$$\omega = \frac{\epsilon}{\beta^* k} \quad (4.21)$$

eingeführt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) = \sigma_{ij,tur} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \omega) = (\gamma \omega / k) \sigma_{ij,tur} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.23)$$

Man benutzt auch in diesem Fall den Wirbelviskositätsansatz von Boussinesq, und es ergibt sich:

$$\mu_t = \gamma^* \frac{\rho k}{\omega} \quad (4.24)$$

Die Werte der konstanten Größen, die in diesen Gleichungen vorkommen, sind in Tab.4.3 dargestellt [18].

$\beta = 3/40$	$\beta^* = 9/100$	$\gamma = 5/9$	$\gamma^* = 1$	$\sigma = 1/2$	$\sigma^* = 1/2$
----------------	-------------------	----------------	----------------	----------------	------------------

Tabelle 4.3: Konstanten des k - ω Modells

Diese Gleichungen, wie schon beim Low-Reynoldsnnumber k - ϵ Modell, müssen bis zur unmittelbaren Wandnähe gelten. Deshalb braucht man hier auch ein feines Netz und eine höhere Knotenanzahl.

4.6 Laminar-turbulent Übergang

Die Vorhersage des Überganges vom laminaren zum turbulenten Zustand stellt ein ungelöstes Problem der Strömungsmechanik dar. Durch die Verwendung des k - ϵ -Modells kann man nicht wissen, wo und wie dieser Übergang stattfindet. Das qualitative Verhalten beim laminar-turbulent Übergang wird in Abb.4.2 gezeigt. Da es nicht möglich ist, den Übergang

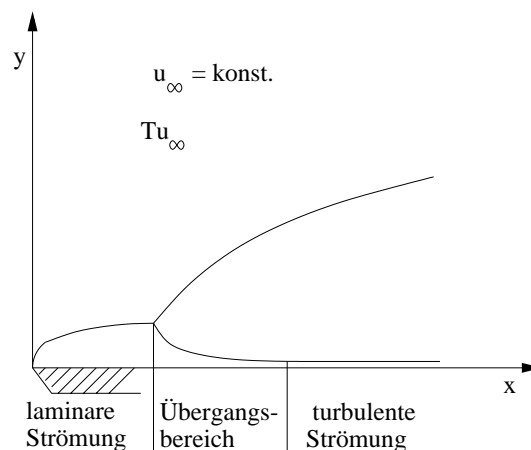


Abbildung 4.2: Grenzschicht beim laminar-turbulent Übergang

zu berücksichtigen, betrachtet das Programm die Grenzschicht vom Entstehungsort an als turbulent. Das heißt, die laminare Unterschicht wird nicht betrachtet. Deswegen werden die Verluste immer deutlich größer als jene in der Wirklichkeit berechnet. Alle die Fehler, die das

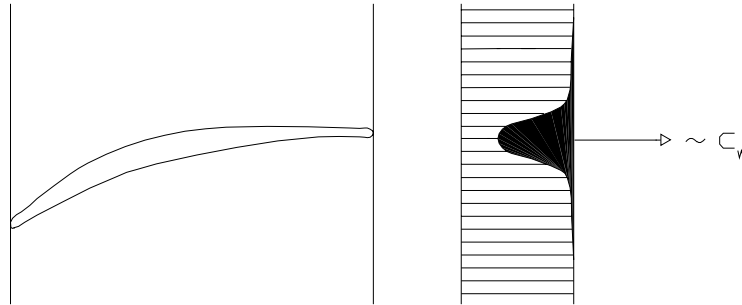


Abbildung 4.3: Geschwindigkeitsprofil im Nachlauf

Programm im Eintritts- und Schaufelbereich macht, addieren sich im Nachlauf. Deswegen besitzt eine Analyse des Geschwindigkeits- und Druckprofils in verschiedenen Nachlaufebenen eine große Bedeutung. Die schwarze Fläche in Abb.4.3 ist proportional zum Widerstandsbeiwert, der als

$$c_w = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho(u_\infty)^2 A} \quad (4.25)$$

definiert ist. Dadurch werden die Verluste ermittelt.

Der Übergang findet normalerweise bei einer Reynoldszahl $Re_T \simeq 2 \cdot 10^5 \div 5 \cdot 10^5$ statt, hängt aber stark von dem Turbulenzgrad ab (siehe Abb.4.4), wobei c_w der Widerstandsbeiwert ist.

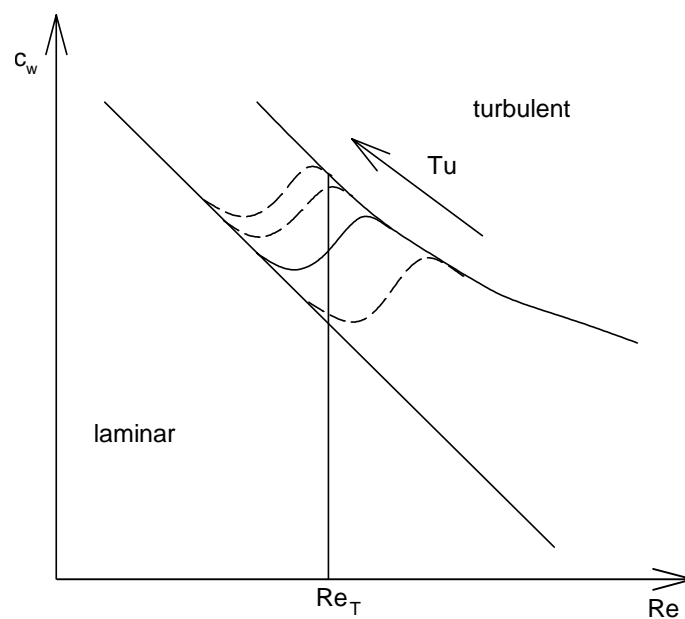


Abbildung 4.4: Übergangspunkt

Je höher der Turbulenzgrad der Außenströmung ist, desto früher erfolgt der laminar-turbulent Umschlag.

Kapitel 5

Numerisches Lösungsverfahren

5.1 Interpolationsfunktionen

Die Methode der Finiten Elemente erlaubt eine Reduzierung des Kontinuumsproblem mit unendlich vielen Freiheitsgraden auf ein diskretes Problem mit endlich vielen Freiheitsgraden. Die in unserem Fall ebene Strömung wird in eine angemessene Anzahl geformter Elemente (Finite Elemente) unterteilt, deren Form der jeweiligen Aufgabenstellung und den gesuchten Ergebnissen anpasst sein muß. In dieser Arbeit wurden neunknotige Elemente für das k - ϵ - und vierknotige Elemente für das k - ω -Modell verwendet (siehe Abb. 5.1).

Das neunknotige Element bietet eine biquadratische Interpolation der Geschwindigkeit, der kinetischen turbulenten Energie k und der turbulenten Dissipationsrate ϵ und eine stetige bilineare Interpolation des Druckes an. Die Interpolationsfunktion für die Geschwindigkeit lautet [3]

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}rs(1-r)(1-s) \\ -\frac{1}{4}rs(1+r)(1-s) \\ \frac{1}{4}rs(1+r)(1+s) \\ -\frac{1}{4}rs(1-r)(1+s) \\ -\frac{1}{2}s(1-s)(1-r^2) \\ \frac{1}{2}r(1+r)(1-s^2) \\ \frac{1}{2}s(1+s)(1-r^2) \\ -\frac{1}{2}r(1-r)(1-s^2) \\ (1-r^2)(1-s^2) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

und für den Druck

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) \\ (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Das vierknotige Element besitzt eine bilineare Interpolationsfunktion von u , v , k und ϵ in der Form der Glg.(5.2), wobei die Werte für diese Größen an den vier Ecken des Elementes berechnet werden. Der Druck wird stückweise konstant angenähert, d.h. die Ansatzfunktion für den Druck ist $\phi = 1$, wobei der Wert des Druckes in der Mitte des Elementes ausschlaggebend ist. Die Reduktion der Ordnung bei der Interpolation des Druckes ist notwendig, um keine Oszillationen im Druckfeld zu haben (*Brezzi-Babuska*-Formulierung). Diese Interpolationsfunktionen gelten für alle Elemente des Netzes bis auf diejenigen der ersten Schicht am Profil. Für diese Elemente gelten spezielle Funktionen die mit Hilfe des *Reichhardt*'schen Gesetzes gebildet werden.

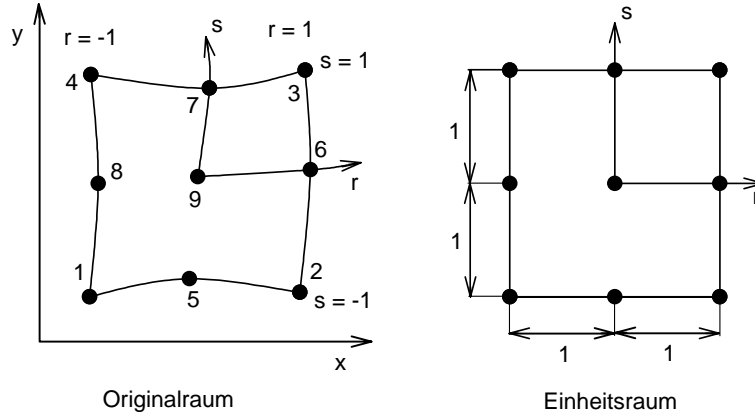


Abbildung 5.1: Neunknotiges Element

5.2 Verfahren der gewichteten Residuen

5.2.1 Das Galerkin'sche Verfahren

Während man in der Strukturmechanik als Lösungsansatz für die Differentialgleichungen das Variationsprinzip anwenden kann, (Ritz'sches Verfahren), findet man in der Strömungsmechanik keine geeignete Variationsmöglichkeit. Deswegen verwendet man die Methode der gewichteten Residuen, die auch als Galerkin-Verfahren bezeichnet wird. Dieses Verfahren benutzt die Differentialgleichungen des zu untersuchenden Problems [1]

$$D(u(x, y)) = 0 \quad (5.3)$$

wo D den Differentialoperator dargestellt und $u(x, y)$ die gesuchte Funktion. Für diese letzte Größe wird als Näherung der Ritz'sche Ansatz eingeführt:

$$u^*(x, y) = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i(x, y) \quad (5.4)$$

wobei q_i unbekannte Koeffizienten und die Funktionen ϕ_i passend gewählte linear unabhängige Ansatzfunktionen sind, die die Randbedingungen des Problems erfüllen müssen. Wenn die Gleichung (5.4) in die Gleichung (5.3) eingeführt wird, erhält man

$$D(u^*(x, y)) = R, \quad (5.5)$$

wobei das Residuum R aus der Näherung entsteht. Dieses soll durch geeignete Wahl der Koeffizienten minimiert werden. Es wird immer kleiner mit steigendem n . Nach der Methode der gewichteten Residuen muß das Integral der mit den linear unabhängigen Funktionen $g_i(x, y)$ gewichteten Residuen über den Berechnungsbereich V verschwinden:

$$\int_V R g_i dV = 0 \quad (5.6)$$

wobei g_i die Gewichtsfunktionen darstellen. Nach dem Galerkin'schen Verfahren setzt man für die g_i die Ansatzfunktionen $\phi_i(x, y)$ ein. Man erhält

$$\int_V R \phi_i dV = 0 \quad (5.7)$$

beziehungsweise

$$\int_V D(u^*(x, y)) \phi_i dV = 0. \quad (5.8)$$

Man hat damit ein System mit n Freiheitsgraden erhalten. Aus den n Gleichungen bestimmt man die unbekannten Koeffizienten q_i , und wenn n gegen ∞ geht, konvergiert die Näherungslösung gegen die exakte Lösung.

5.2.2 Lösung bei FIDAP

Im Matrixschreibweise wird die Gleichung (5.8)

$$\mathbf{K}(\vec{u}) \vec{u} = \vec{F} \quad (5.9)$$

wobei \mathbf{K} die globale Systemmatrix, \vec{u} der Vektor der Unbekannten und \vec{F} der Vektor der Randbedingungen sind. FIDAP bietet [3]

- die "fully-coupled solver"
- die "segregated solver"

um dieses Gleichungssystem zu lösen. Die erste Methode ist für praktische Anwendungen, auf Grund hoher Rechenzeiten, nicht brauchbar. Beim "segregated solver" werden die Gleichungen nicht simultan, sondern entkoppelt gelöst. Die daraus folgenden kleineren Ansprüche an die Computerressourcen macht diese Methode attraktiver. Dieses Verfahren erfordert, daß der Druck anders als die Geschwindigkeit behandelt wird. Die "pressure protection version", die den Druck in jedem Iterationsschnitt direkt berechnet und die Kontinuitätsgleichung in jedem Iterationsschnitt erfüllt, wurde gewählt.

5.3 Profil- und Netzgenerierung

Das Programmpaket FIDAP bietet die Möglichkeit, die Geometrie durch ein Graphical User Interface (GUI) zu erzeugen. Das Eingabefile wurde in der FIDAP-internen Sprache erstellt. Man kann es im Anhang A finden. Das Profil wurde durch Interpolierung mit Kurven der dritten Ordnung und Kreisen (für die Vorder- und Hinterkante) der in Tab.2.2 angegebenen Punkte erzeugt.

Diese Koordinaten wurden durch die Sehnenlänge c dividiert und um den Staffelungswinkel γ gegen den Uhrzeigersinn gedreht, um die Punkte des FIDAP-Eingabefiles zu erreichen.

Für die Netzgenerierung wurde ein unstrukturiertes Netz benutzt. Durch Änderung der Knotenanzahl auf der Schaufeldruck- und Saugseite als auch auf den Randlinien des Rechengebietes kann man die Feinheit des Netzes kontrollieren. Um eine zulässige Geometrie zu erreichen wurde es notwendig, zwei Geraden zu zeichnen, die die Profilverder- und Hinterkante mit dem Eintritt bzw. Austritt verbinden. Durch die Änderung der Knotenanzahl und des geometrischen Stufungsfaktors auf diesen zwei Geraden kann man vermeiden, daß man in der Nähe der Vorder- und Hinterkante zu rasch von einer relativ groben auf eine sehr feine Elementverteilung übergeht. In den Abbildungen 5.2 und 5.3 sind die Netze für das $k-\epsilon$ - bzw. für das $k-\omega$ -Modell dargestellt. Die Tabelle 5.1 faßt die Knoten- und Elementzahlen der beiden Modelle zusammen.

Modell	Knotenzahl	Elementzahl
$k-\epsilon$	12044	3233
$k-\omega$	14884	15424

Tabelle 5.1: Knoten- und Elementzahl

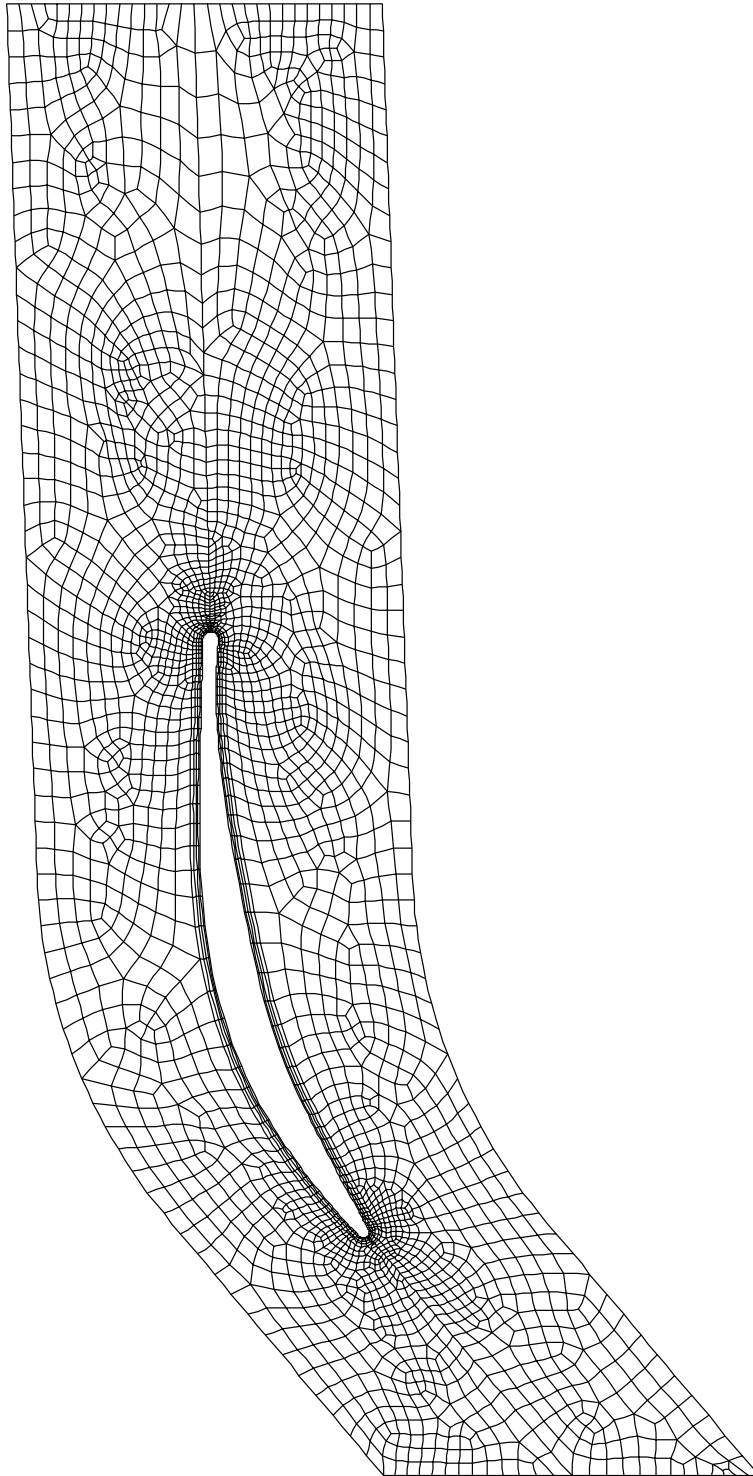


Abbildung 5.2: Netz für das k - ϵ -Modell

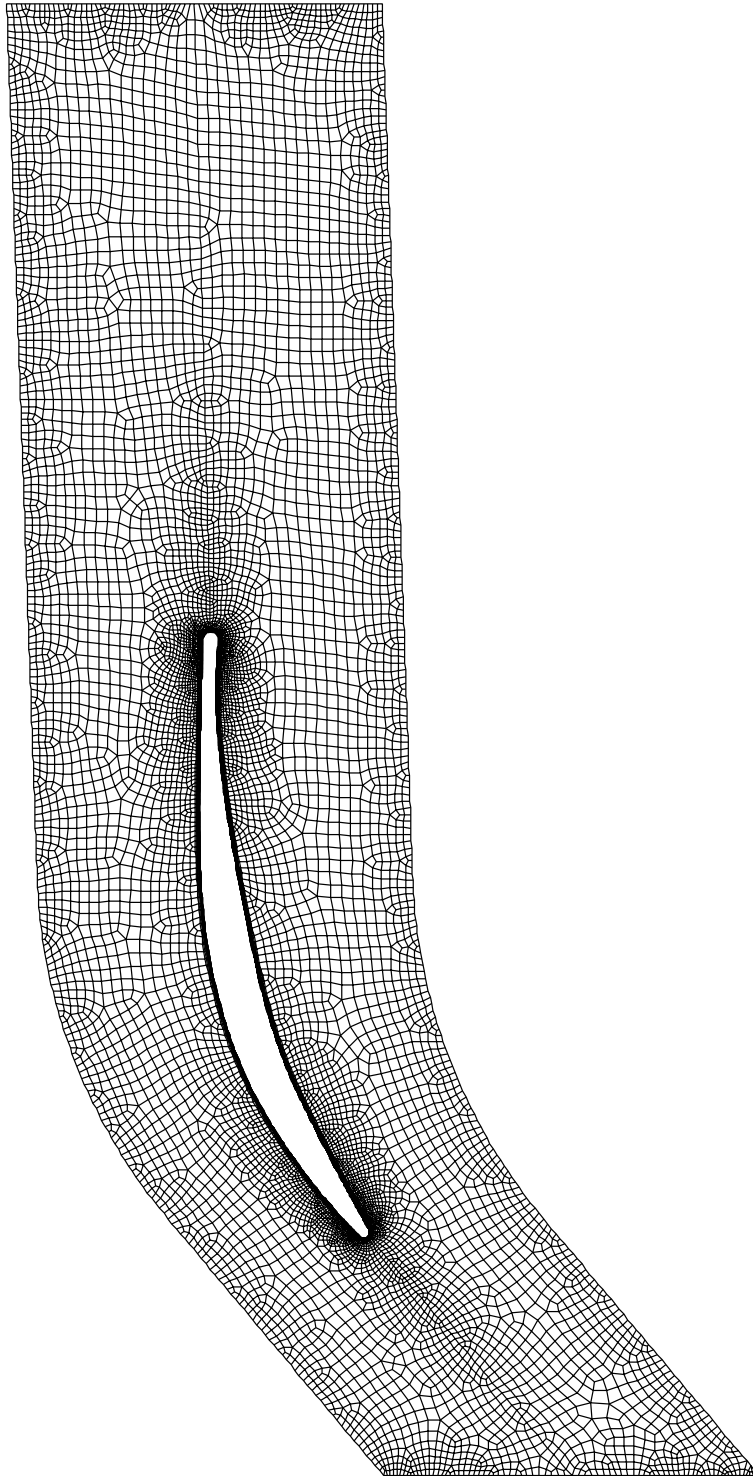


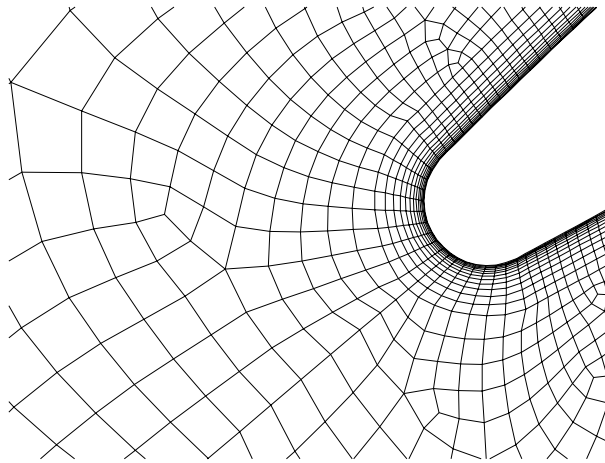
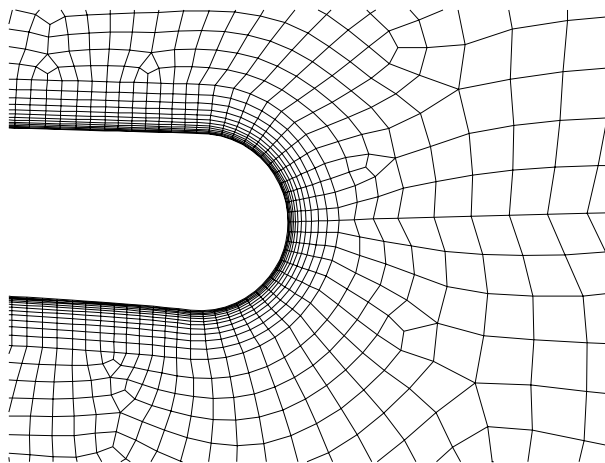
Abbildung 5.3: Netz für das k - ω -Modell

Man kann bemerken, wie die Knoten- und Elementzahlen beim k - ω -Modell viel höher sind. Dieses Verfahren benötigt in der Tat ein feineres Netz als das k - ϵ Modell, besonders im oberflächennahen Bereich des Profils, weil der y^+ -Wert um ungefähr hundert Mal kleiner als bei diesem Modell sein muß (Tab. 5.2).

$k-\epsilon$	$30 < y^+ < 100$
$k-\omega$	$y^+ < 1$

Tabelle 5.2: Zulässige Werte für y^+

Dieser Wert ist sehr wichtig. Um das maximal zulässige y^+ nicht zu überschreiten, wurden in Wandnähe die "boundary-edges" verwendet, die bei FIDAP zu Verfügung stehen. Dadurch kann der Benutzer die Dicke des ersten Elements und das Dickenverhältnis der darauffolgenden Schichten eingeben. Bei der $k-\epsilon$ -Modellierung wurden vier Schichten erzeugt, die den y^+ -Wert in akzeptable Grenzen hielten. Bei der $k-\omega$ -Modellierung mußten mehr Schichten geschaffen werden, und zwar zwölf. Außerdem wurden zwei zusätzliche Punkte auf den zwei Geraden eingeführt, um stufenweise den Übergang von den feinsten Elementen bei der Vorder- und Hinterkante auf die größeren Elementen zu erreichen, bis eine akzeptable Geometrie erreicht wurde (Abb. 5.4 und 5.5).

Abbildung 5.4: Netz an der Vorderkante für das $k-\omega$ -ModellAbbildung 5.5: Netz an der Hinterkante für das $k-\omega$ -Modell

Innerhalb der ersten Elementschicht verlieren das $k-\epsilon$ -Modell und das $k-\omega$ -Modell ihre Gültigkeit wegen der kleinen Reynoldszahlen. Die Reynoldsgleichungen werden für das ganze Strömungsfeld bis an die feste Wand hin verwendet, die Transportgleichungen für k und ϵ jedoch nur außerhalb der ersten Elementschicht, in der die Turbulenzmodellierung nach *van Driest* benutzt wird, zusammen mit dem universellen Wandgesetz nach *Reichhardt*.

5.4 Anfangs- und Randbedingungen

Um die Berechnung zu starten, braucht das Programm die Anfangswerte und Angaben über die Reynoldszahl und die Dichte (siehe Abb.5.6).

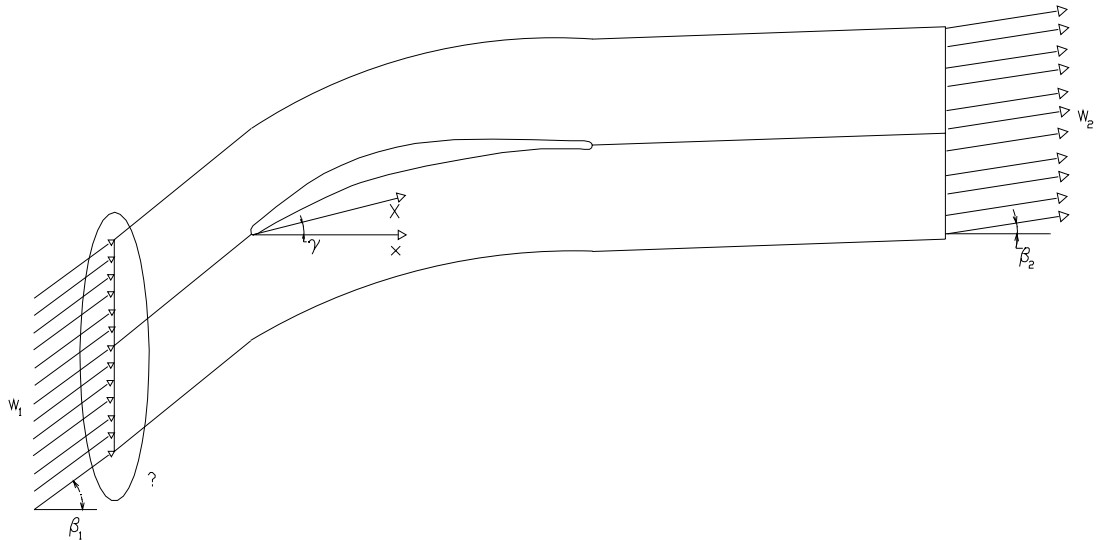


Abbildung 5.6: Eintrittsbedingungen, wichtige Geschwindigkeiten und Winkel im Rechenbereich

Diese wurden von den nominalen experimentellen Bedingungen, die in der Tab.5.3 zusammengefaßt sind, abgeleitet. Das Fluid wird als inkompressibel betrachtet. Die Reynoldszahl

Re	700000
EINTRITT	
Temperatur	294 K
Totaler Druck	1.03 ATM
Machzahl	0.25
AUSTRITT	
Statischer Druck	1.00 ATM

Tabelle 5.3: Nominale Bedingungen

ist definiert als

$$Re = \frac{w_1 c}{\nu}, \quad (5.10)$$

wobei w_1 die Zuströmgeschwindigkeit und c die Sehnenlänge der Schaufel darstellen.

Aus dem Wert der Machzahl kann man die Eintrittsgeschwindigkeit w_1 ermitteln, durch die Gleichung

$$Ma_1 = \frac{w_1}{\sqrt{\kappa RT}}, \quad (5.11)$$

wobei $\kappa = 1.4$ der Isentropenexponent und $R = 286\text{J/kgK}$ die Gaskonstante sind. Als Ergebnis erhält man eine Geschwindigkeit von $w_1 \approx 85.77\text{m/s}$. Mit dieser Größe und dem Anströmwinkel kann man die Geschwindigkeitskomponenten u und v berechnen. Unter der Annahme isentroper Turbulenz kann man für die kinetische Turbulenzenergie schreiben (siehe Glg.(3.5))

$$k_1 = \frac{3}{2} \overline{(w'_1)^2} \quad (5.12)$$

und aus der Definition des Turbulenzgrades erhält man

$$k_1 = \frac{3}{2} (w_1 T u)^2. \quad (5.13)$$

Wenn man jetzt die dimensionslose kinetische Turbulenzenergie

$$k_1^* = \frac{k}{w_1^2} \quad (5.14)$$

einsetzt, hat man schließlich

$$k_1^* = \frac{3}{2} (T u)^2. \quad (5.15)$$

Um den Eintrittswert der turbulenten Dissipationsrate zu berechnen, kann man zwei Wegen folgen:

1. Annahme für das bezogene turbulente Längenmaß, die lautet:

$$\frac{l_t}{c} = 0,01 \quad (5.16)$$

wobei

$$l_t = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad (5.17)$$

das turbulente Längenmaß ist. Dadurch ergibt sich die dimensionslose Dissipationsrate:

$$\epsilon_1^* = \frac{C_\mu \sigma k_1^{*3/2}}{(l_t/\delta)_1} \quad (5.18)$$

2. Annahme für das Viskositätsverhältnis:

$$\left(\frac{\nu_t}{\nu} \right) \cong 100 \quad (5.19)$$

Es ergibt sich

$$\epsilon_1^* = \frac{C_\mu Re k_1^{*2}}{(\nu_t/\nu)_1} \quad (5.20)$$

Für die Berechnung wurde die dimensionslose Dissipationsrate nach 1 ermittelt. Auf dem Schaufelprofil wird die Haftbedingung auferlegt:

$$u = v = 0 \quad (5.21)$$

Die Austrittsbedingungen für den Berechnungsbereich lauten

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0. \quad (5.22)$$

Periodizität in den Randbedingungen wird gebraucht, um die Strömung in einem Verdichtergitter und nicht um ein einzelnes Profil zu untersuchen.

Die Lösung erfolgt iterativ. Deswegen braucht das Rechenprogramm Startwerte, die man in den Anfangsbedingungen findet. Die Unbekannten u, v, p, k, ϵ werden konstant im ganzen Strömungsfeld gesetzt. Die Abbruchschranke für das numerische Lösungsverfahren ist so definiert:

$$\frac{\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\|}{\|\vec{u}_n\|} \leq 10^{-4} \quad (5.23)$$

Der Term auf der linken Seite wird als "Relativ Error Velocity" bezeichnet.

5.5 Relaxation

Um die Konvergenz des iterativen Lösungsprozeß zu beeinflussen wird ein sogenannter Relaxationsfaktor α eingeführt:

$$\vec{u}_{rel,n} = \alpha \vec{u}_{rel,n-1} + (1 - \alpha) \vec{u}_n \quad (5.24)$$

Dabei liegt der Wert des Relaxationsfaktors α zwischen 0 und 1. Um befriedigende Ergebnisse zu erhalten, ist es oft notwendig, einen Wert des Relaxationsfaktors nahe zu Eins zu wählen. Diese Wahl führt zu einem längeren Rechenverfahren, aber versichert eine gute Stabilität. Die Abbildung 5.7 zeigt die "Relative Error Velocity" (e) als Funktion der Iterationsschritte (i) mit α als Parameter.

Die Tabelle 5.4 gibt die für die Berechnung verwendeten Relaxationsfaktoren an.

Variable	$u^*[-]$	$v^*[-]$	$p^*[-]$	$k^*[-]$	$\epsilon^*[-]$
$\alpha(k - \epsilon)$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$\alpha(k - \omega)$	0.7	0.7	0.8	0.8	0.8

Tabelle 5.4: Relaxationsfaktoren der abhängigen Variablen

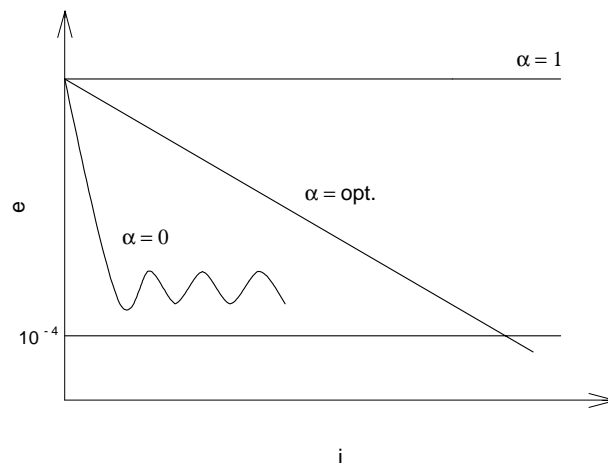


Abbildung 5.7: Einfluß des Relaxationsfaktors auf die Konvergenz

Man kann sehen, daß das k - ω -Modell höhere Relaxationsfaktoren benötigte, weil es schwieriger war, Konvergenz bei diesem Modell zu erreichen als beim k - ϵ -Modell.

Kapitel 6

Ergebnisse

6.1 Lage der Auswertungsebenen

Abb.6.1 stellt sowohl die in der Berechnung verwendeten Winkel und Längen, als auch die Lage der Auswertungsebenen dar, deren Abstände von der Profilhinterkante in Tab.6.1 zusammengefaßt sind. In der Tabelle werden die Auswertungsebenen, bei denen die Messung

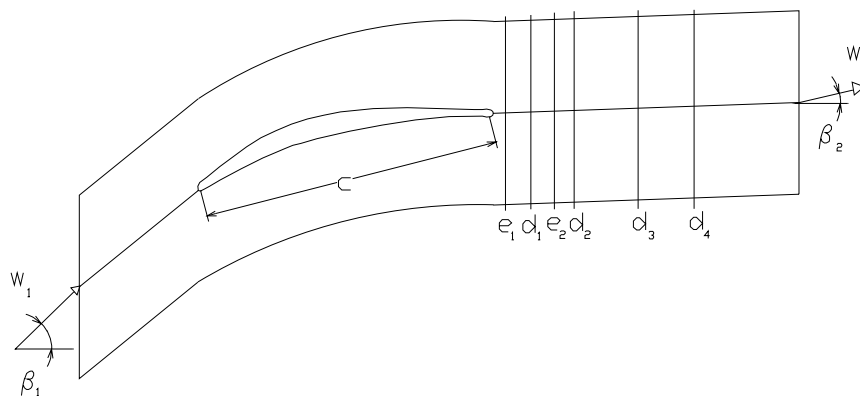


Abbildung 6.1: Definition der geometrischen Größen

mit LDA (Laser-Doppler Anemometrie) bzw. pneumatischen Sonden ausgeführt wurde, mit den Buchstaben e bzw. d gekennzeichnet.

Auswertungsebene	e_1	d_1	e_2	d_2	d_3	d_4
Abstand von der Profilhinterkante in % der axialen Sehnenlänge	5.2	13.5	21.2	27.7	48.5	66.9

Tabelle 6.1: Lage der Auswertungsebenen

6.2 Konvergenz

Um akzeptable Ergebnisse zu erreichen, muß die Glg.(5.23) gewährleistet werden. In diesem Fall wurde der Grenzwert sowohl beim k - ϵ - als auch beim k - ω -Modell ohne Probleme unterschritten, wie die Abb. 6.2 und 6.3 zeigen. Der betrachtete Winkel ist $\beta_1 = 40^\circ$; bei den anderen Zuström winkeln ist das Verlauf der Konvergenz sehr ähnlich. Allgemein kann gesagt werden, daß die Anzahl der erforderlichen Iterationen bei steigender Inzidenz zunimmt. Das Konvergenzverhalten ist beim Zuström winkeln der Auslegung ($\beta_1 = 39^\circ$) am besten. Beim

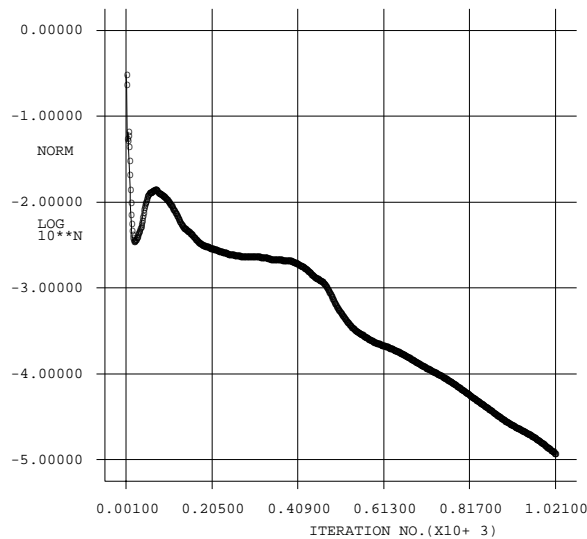


Abbildung 6.2: Konvergenz bei $\beta_1 = 40^\circ$, k - ϵ -Modell

k - ω -Modell mußte man höhere Relaxationfaktoren einsetzen. Trotzdem kann man größere Schwankungen in der Konvergenzlinie beobachten. Bei vielen praktischen Geometrien ist die

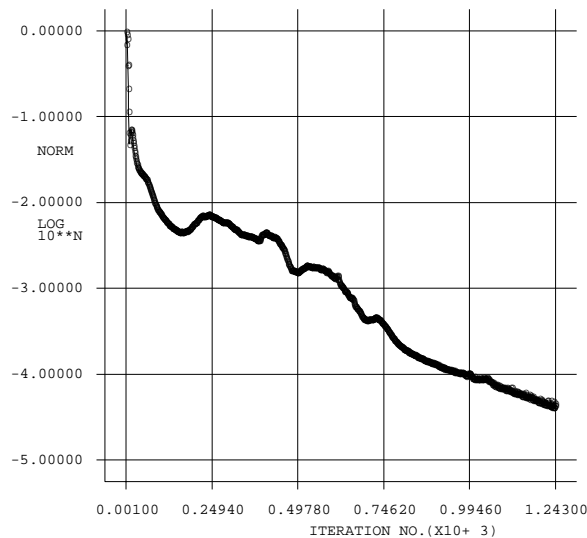


Abbildung 6.3: Konvergenz bei $\beta_1 = 40^\circ$, k - ω -Modell

Anwendung des k - ω Modells schwierig, da besonderer Wert auf die Netzqualität in Wandnähe gelegt werden muß.

6.3 Darstellung der Isobaren

Die Isobaren sind durch den statischen Druckkoeffizient definiert:

$$C_{p1} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho w_1^2} = konst \quad (6.1)$$

Sie erlauben, die Lage des Druckmaximums (am Staupunkt) und des Druckminimums (an der Saugseite) zu erkennen. Die Abb. 6.4 und 6.5 zeigen diese Übereinstimmung zwischen der Lage des Staupunktes und des Druckmaximums.

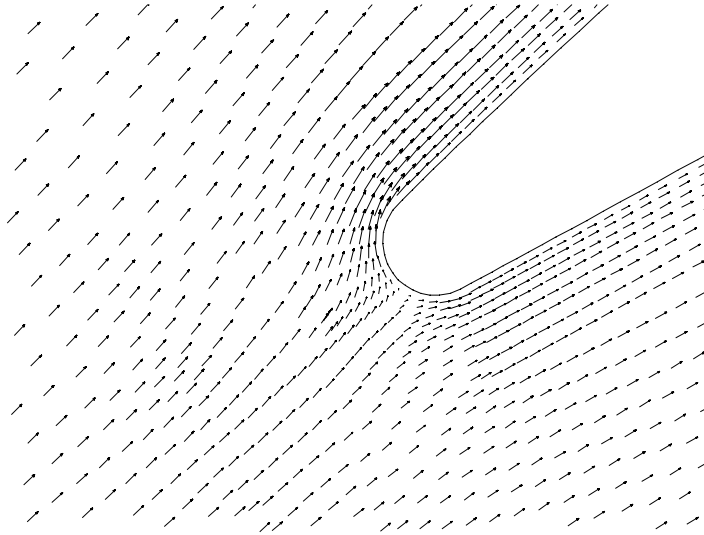


Abbildung 6.4: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 40^\circ$, k - ϵ -Modell

Man kann bemerken, daß die Staustromlinie fast genau an die Nasenspitze trifft (der Auslegungspunkt ist bei $\beta_1 = 39^\circ$).

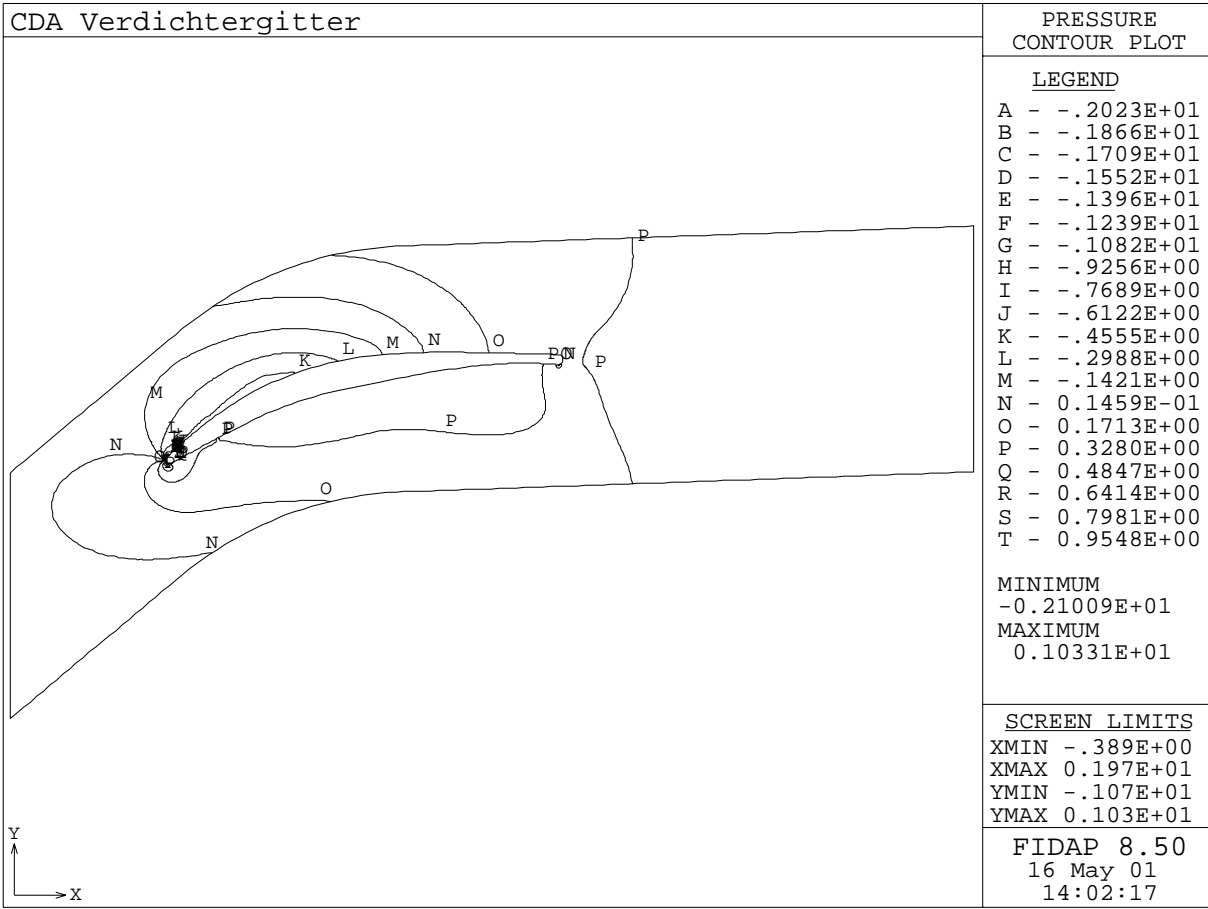


Abbildung 6.5: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 40^\circ$, k - ϵ -Modell

Durch die Isobaren kann man auch die Periodizität der Randbedingungen kontrollieren: jede Isobare, die das Berechnungsgebiet an einem periodischen Rand verläßt, muß an der selben Stelle x am zweiten Rand wieder in das Rechenggebiet eintreten.

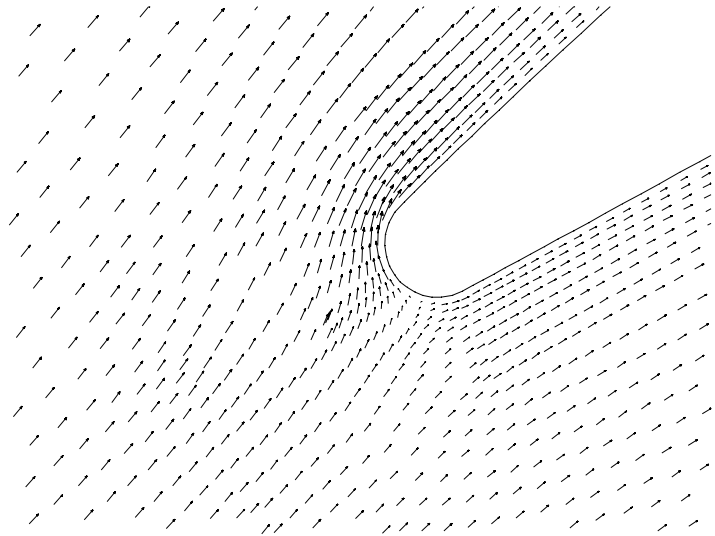


Abbildung 6.6: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 43^\circ$, k - ϵ -Modell

Mit steigendem Anströmwinkel bewegt sich der Staupunkt an der Druckseite in Richtung

der Hinterkante, und der Druckminimumpunkt in Richtung der Profalnase, wie man aus den Abb.6.6 bis 6.9 sehen kann.

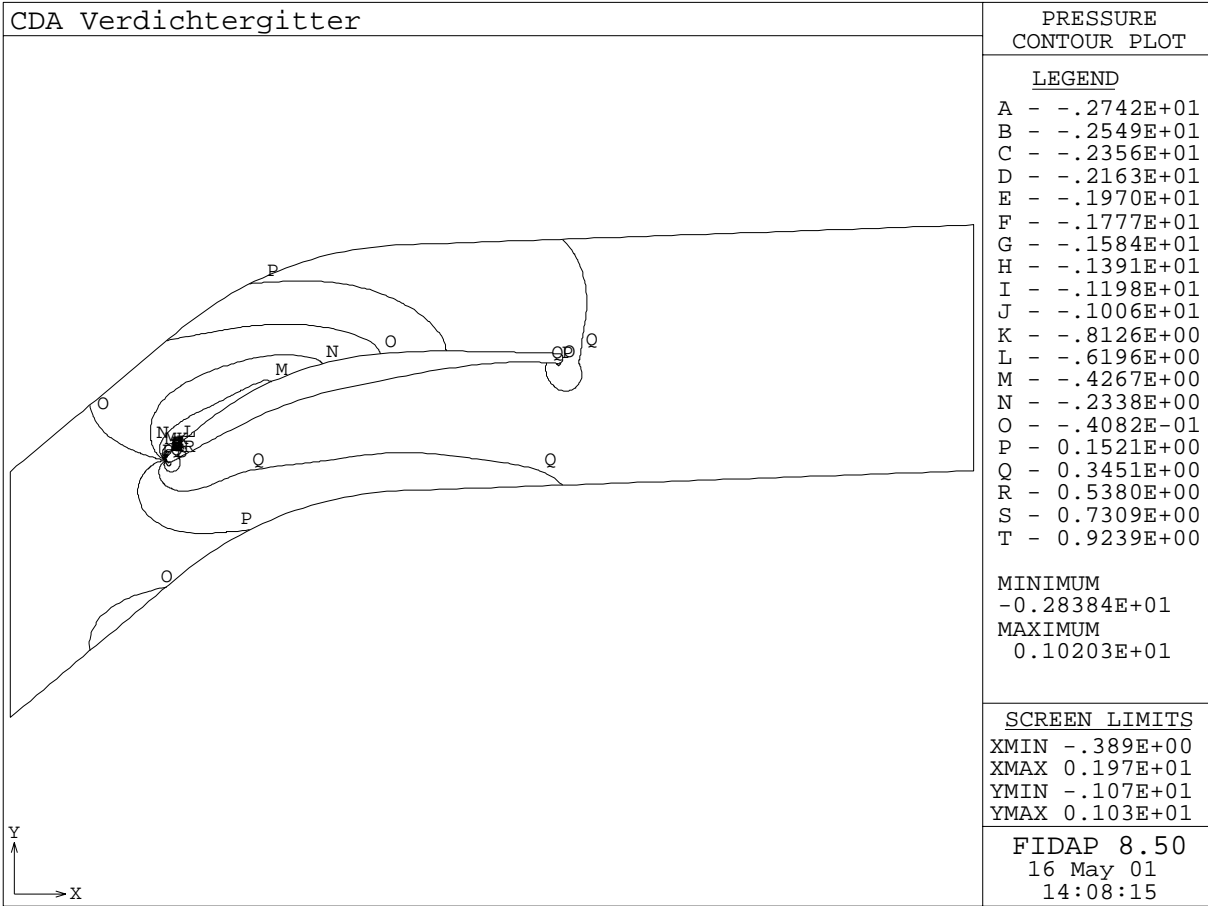


Abbildung 6.7: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 43^\circ$, k - ϵ -Modell

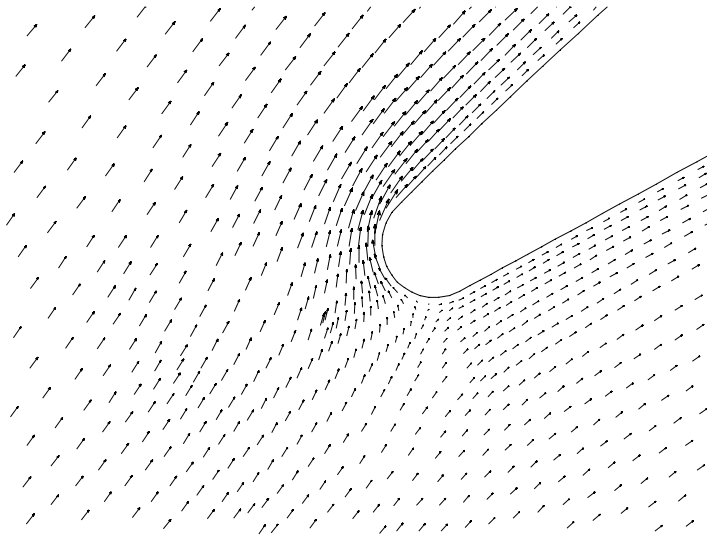
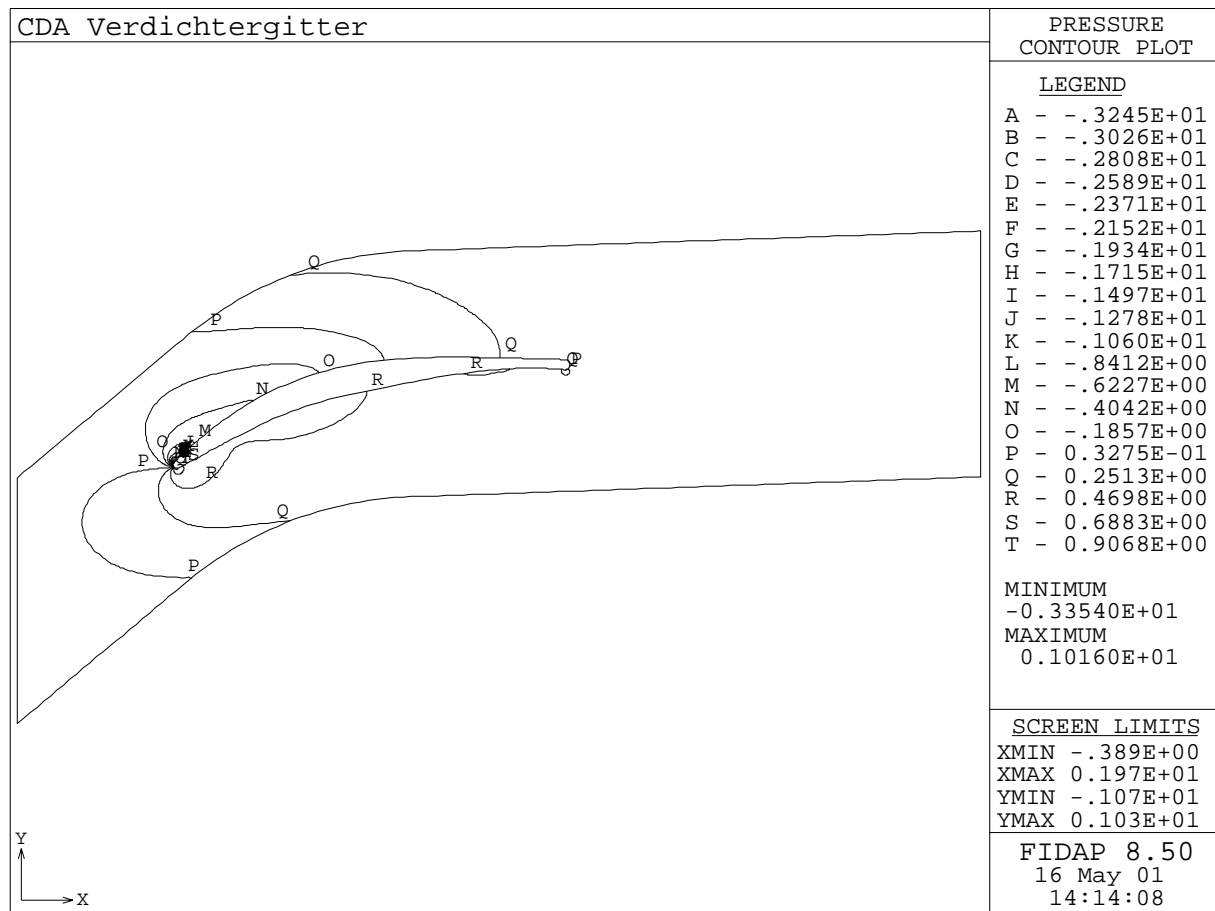
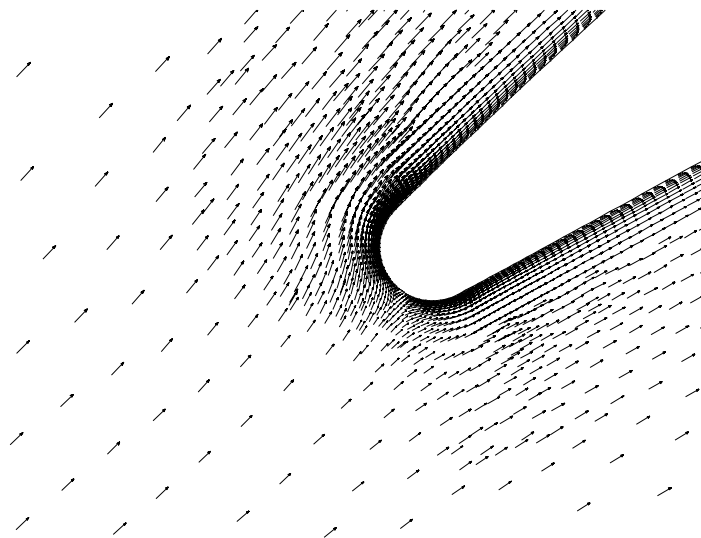


Abbildung 6.8: Profilnasenumströmung bei $\beta_1 = 46^\circ$, k - ϵ -Modell

Im Fall $\beta_1 = 46^\circ$ kann eine Umströmung der Nase gut erkannt werden.

Abbildung 6.9: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 46^\circ$, $k-\epsilon$ -Modell

Die Abb.6.10 bis 6.12 zeigen die berechneten Geschwindigkeitsvektoren für $\beta_1 = 40^\circ$ und die Isobaren für diesen Winkel sowie für $\beta_1 = 46^\circ$. Die Darstellungen gelten jeweils für das $k-\omega$ -Modell.

Abbildung 6.10: Geschwindigkeitsvektoren an der Vorderkante für $\beta_1 = 40^\circ$, $k-\omega$ -Modell

Man kann sehen, wie bei diesem Modell die Dichte der Geschwindigkeitsvektoren an der Vorderkante viel größer als beim $k-\epsilon$ -Modell ist, aufgrund des feineren Netzes. Außerdem ist

der Übergang vom relativ groben Netz auf das feinere Netz an der Vorderkante rascher als beim $k-\epsilon$ -Modell.

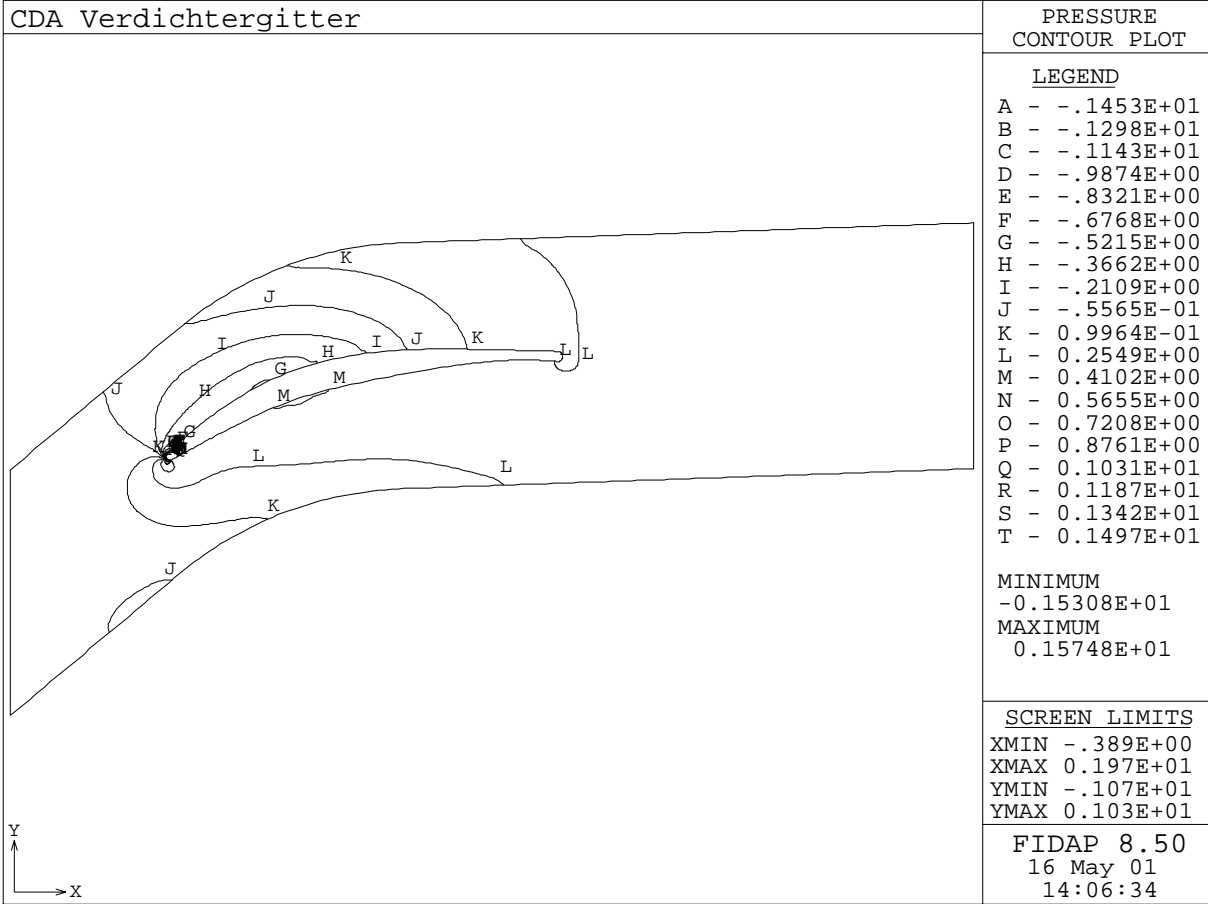


Abbildung 6.11: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 40^\circ$, $k-\omega$ -Modell

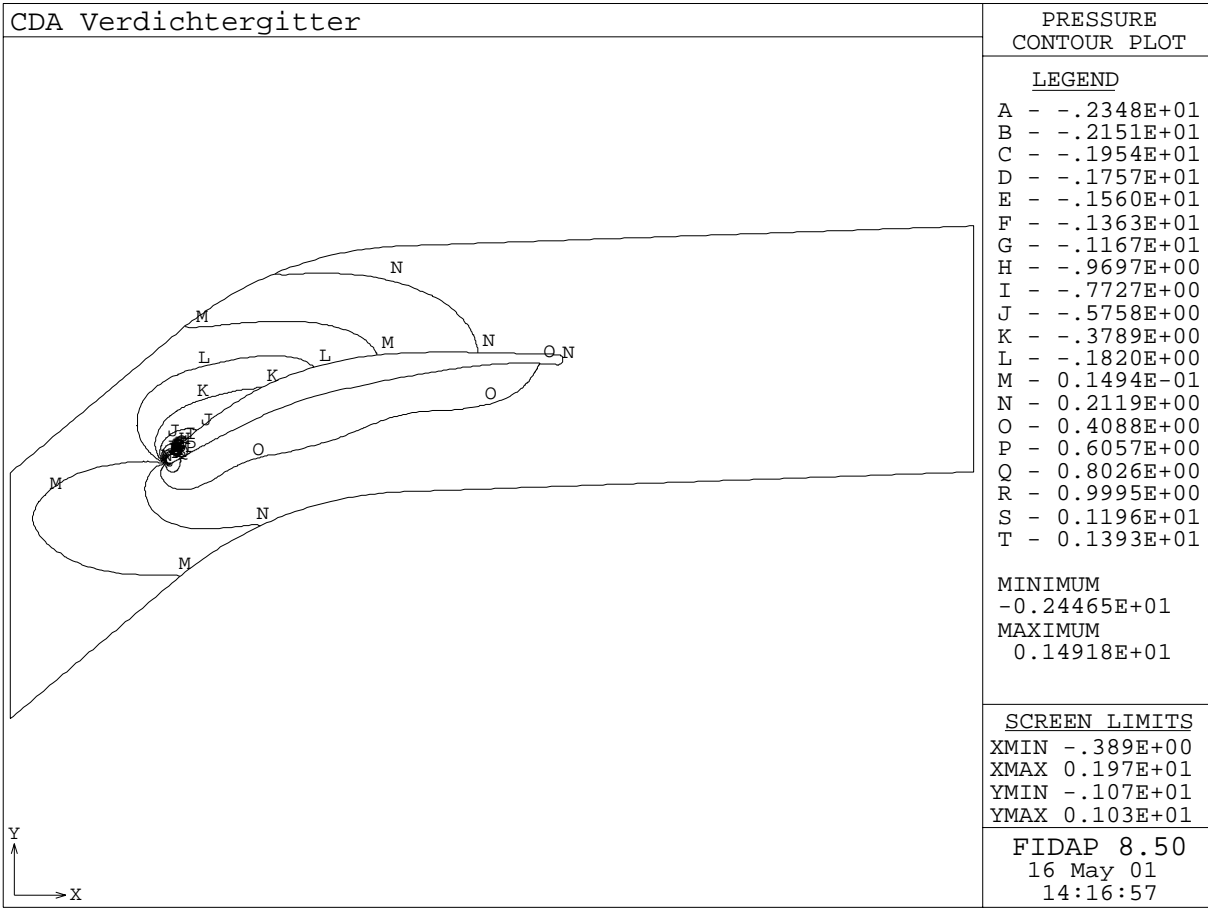


Abbildung 6.12: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 46^\circ$, $k\text{-}\omega$ -Modell

In den Abb.6.13 bis 6.16 sind die statischen Druckkoeffizienten für $\beta_1 = 33^\circ$, 28° und 24° dargestellt.

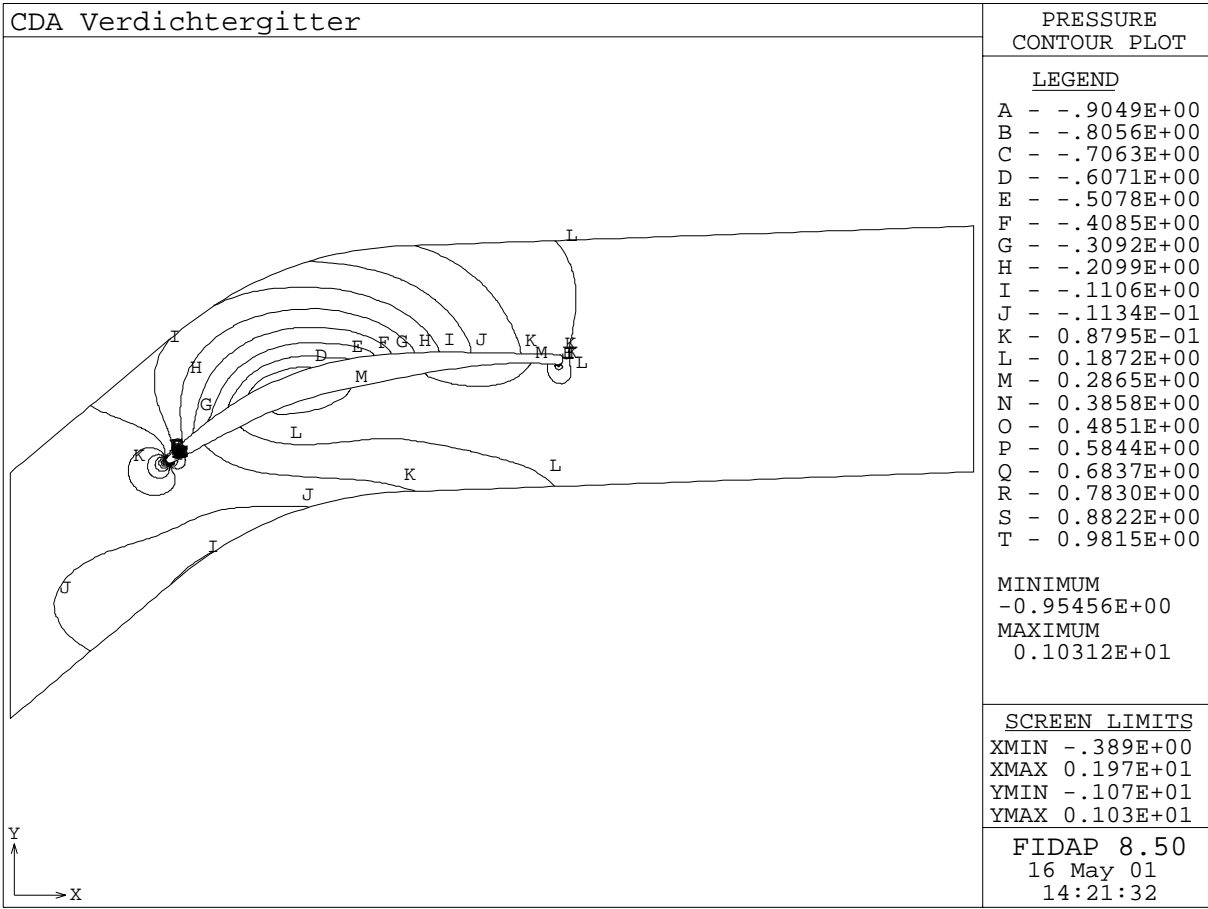


Abbildung 6.13: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 33^\circ$, k - ϵ -Modell

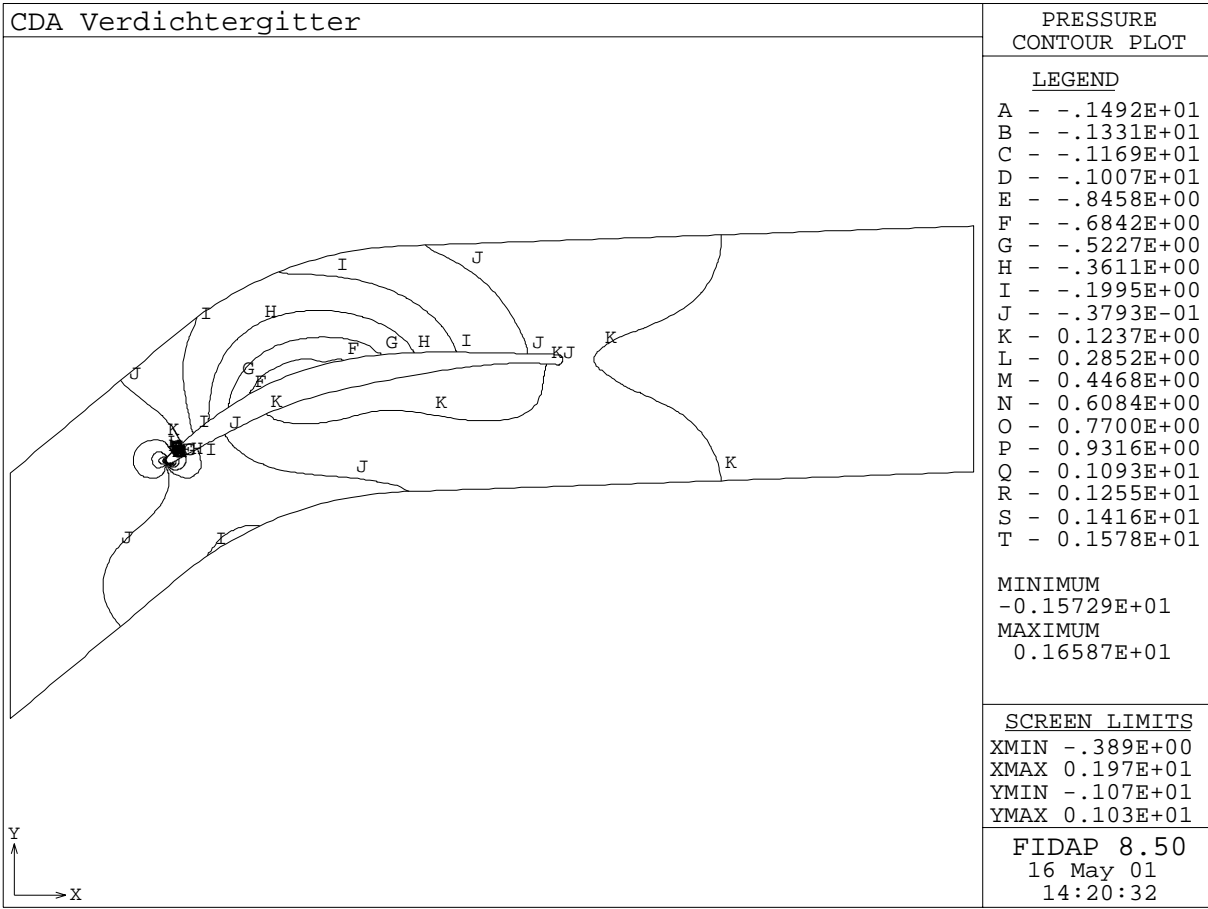


Abbildung 6.14: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 28^\circ$, k - ϵ -Modell

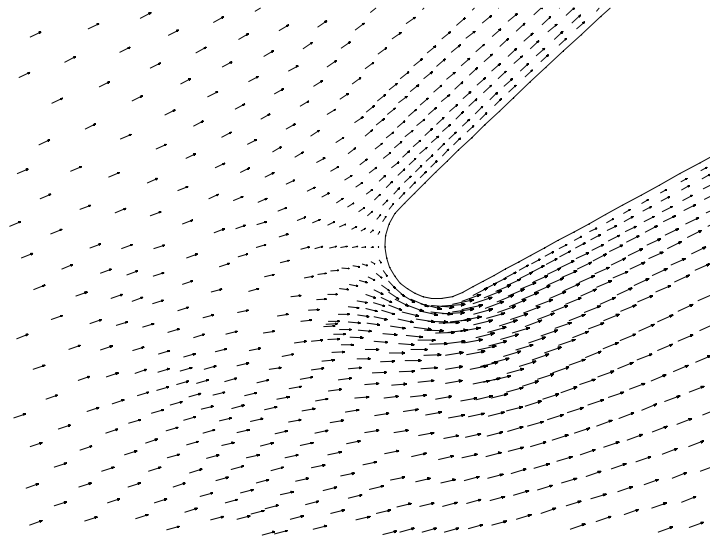


Abbildung 6.15: Profilasenumströmung bei $\beta_1 = 24^\circ$, k - ϵ -Modell

Für den Fall $\beta_1 = 24^\circ$ ist die saugseitige Lage des Staupunkts gut erkennbar. Aus der relativen Länge der Geschwindigkeitsvektoren erkennt man die hohe Geschwindigkeit bei der druckseitigen Nasenumströmung.

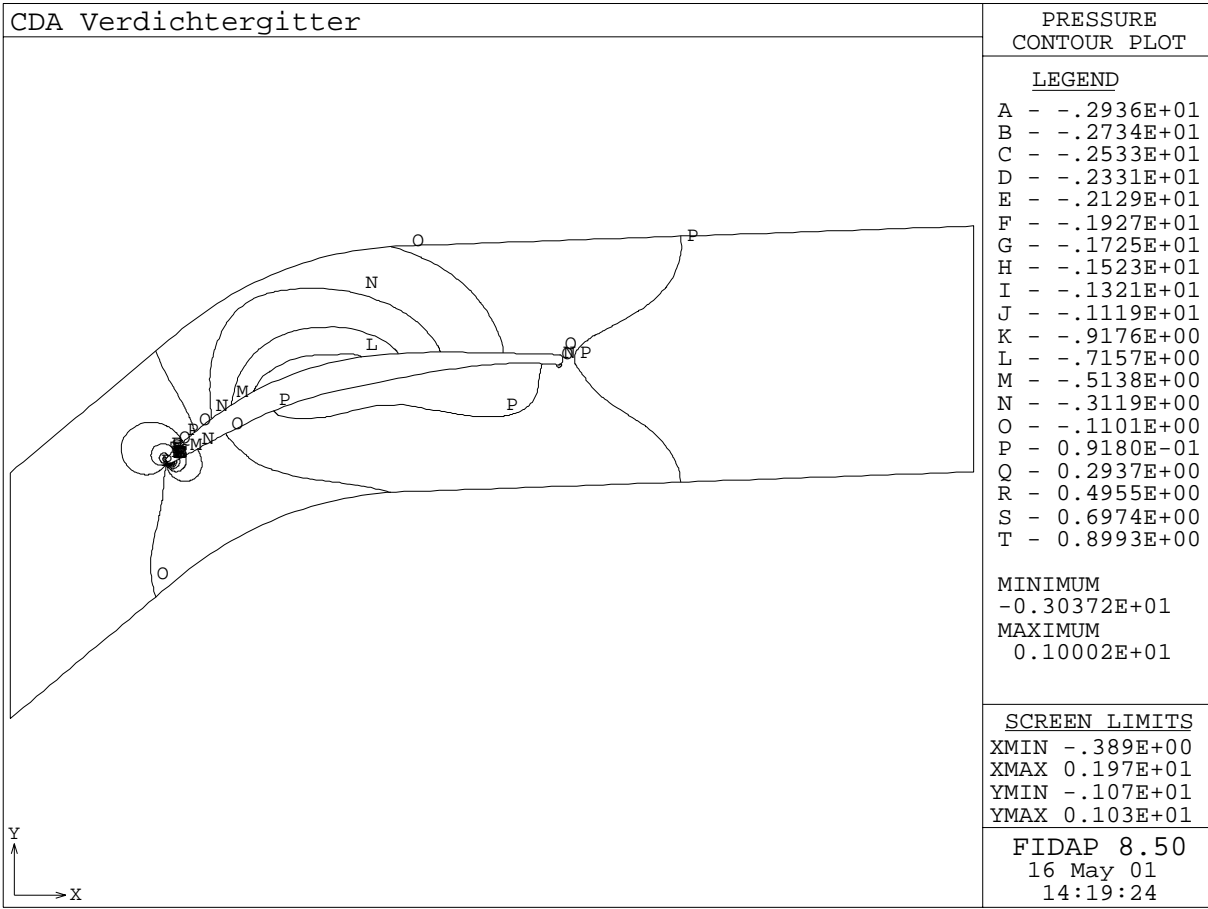


Abbildung 6.16: Statischer Druckkoeffizient bei $\beta_1 = 24^\circ$, k - ϵ -Modell

6.4 Strömung im Schaufelkanal

6.4.1 Zustand der Grenzschicht

Die Kenntnis der Strömung im Schaufelkanal ist sehr wichtig, um zu verstehen, wo die Verluste entstehen. Allgemein kann man sagen, daß das Auftreten einer Ablösungsblase (so sie überhaupt vorkommt) und die Lage des Überganges von laminarer zu turbulenter Strömung festlegt, ob und wo eine Ablösung an der Saugseite der Schaufel auftritt (Abb.6.17).

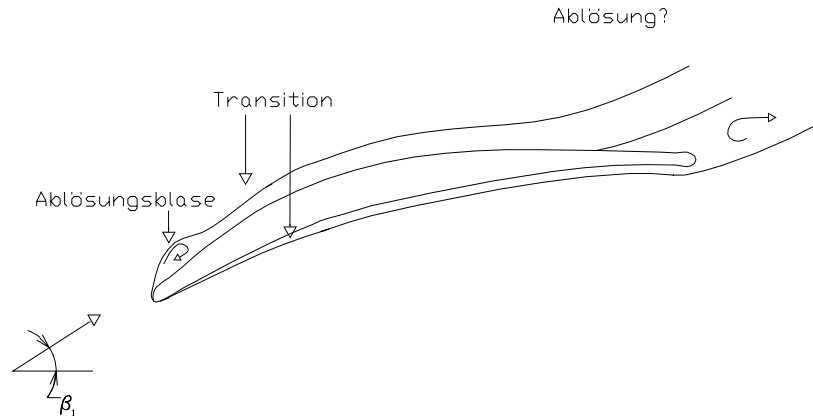


Abbildung 6.17: Zustand der Schaufelgrenzschicht

Verschiedene Experimente wurden mit dem CDA-Gitter durchgeführt, um das Verhalten der Strömung innerhalb des Kanals zu bestimmen (*Elazar* und *Shreeve*, [2]; *Sanger* und *Shreeve*, [11]). Die Messungen zeigen das Vorkommen einer Ablösungsblase an der Saugseite, der eine turbulente Wiederanlegung folgt. Mit steigendem Anströmwinkel wird die Ablösungsblase immer länger (die Lage der Wiederanlegung befindet sich bei 15% der Sehnenlänge bei $\beta_1 = 40^\circ$ und bei 40% bei $\beta_1 = 46^\circ$, [6]). In jedem Fall, auch bei $\beta_1 = 46^\circ$, tritt keine Ablösung der Grenzschicht auf. Die Verteilung der bezogenen Grenzschichtdicke δ/c und des Formfaktors H , dessen Definition

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (6.2)$$

lautet, sind in den Abbildungen 6.18 und 6.19 für die Saugseite dargestellt. Es handelt sich dabei um Messungen von *Elazar* und *Shreeve* [2].

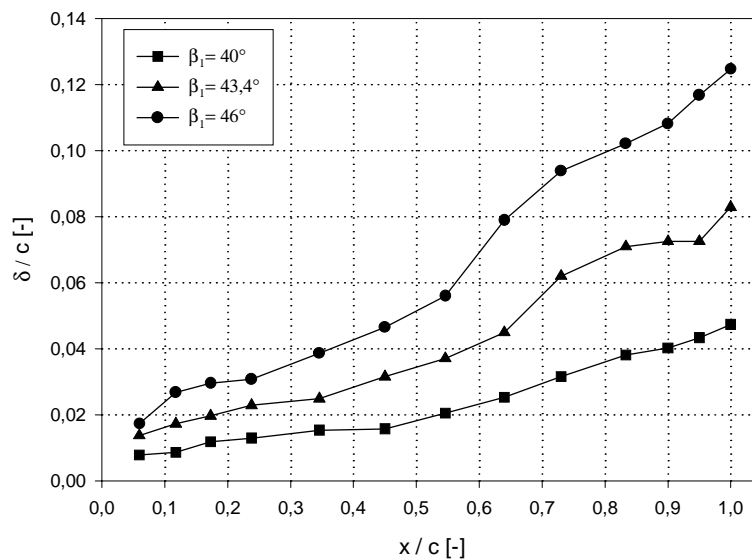


Abbildung 6.18: Bezogene Grenzschichtdicke an der Saugseite [2]

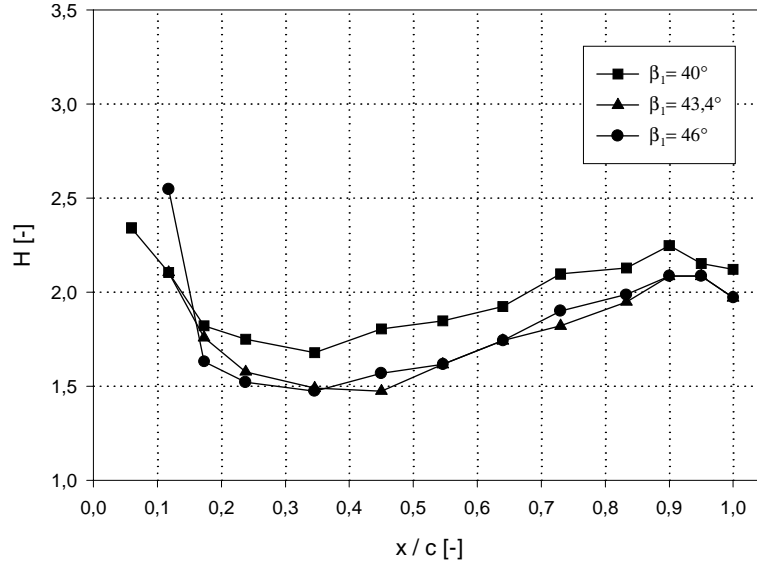


Abbildung 6.19: Formfaktor an der Saugseite [2]

Die Größen δ_1 bzw. δ_2 bezeichnen die Verdrängungsdicke bzw. die Impulsverlustdicke:

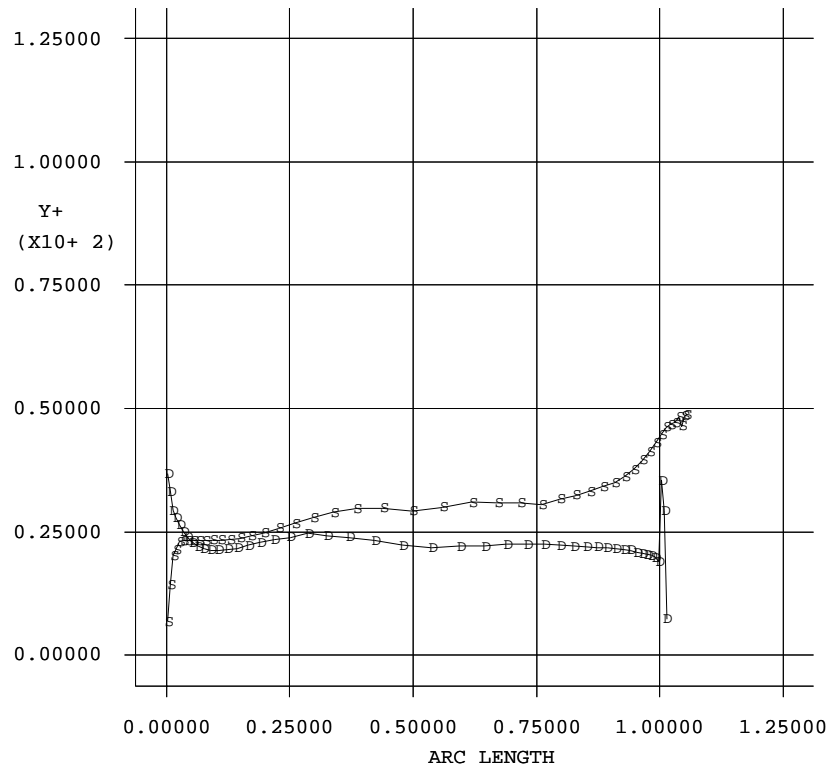
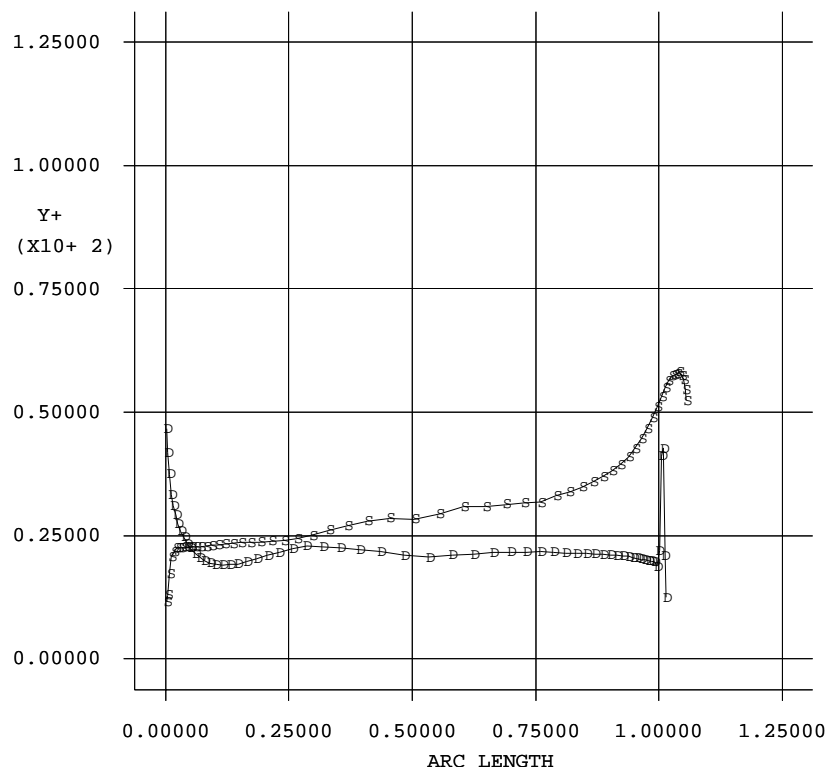
$$\delta_1 = \int_{y=0}^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy \quad (6.3)$$

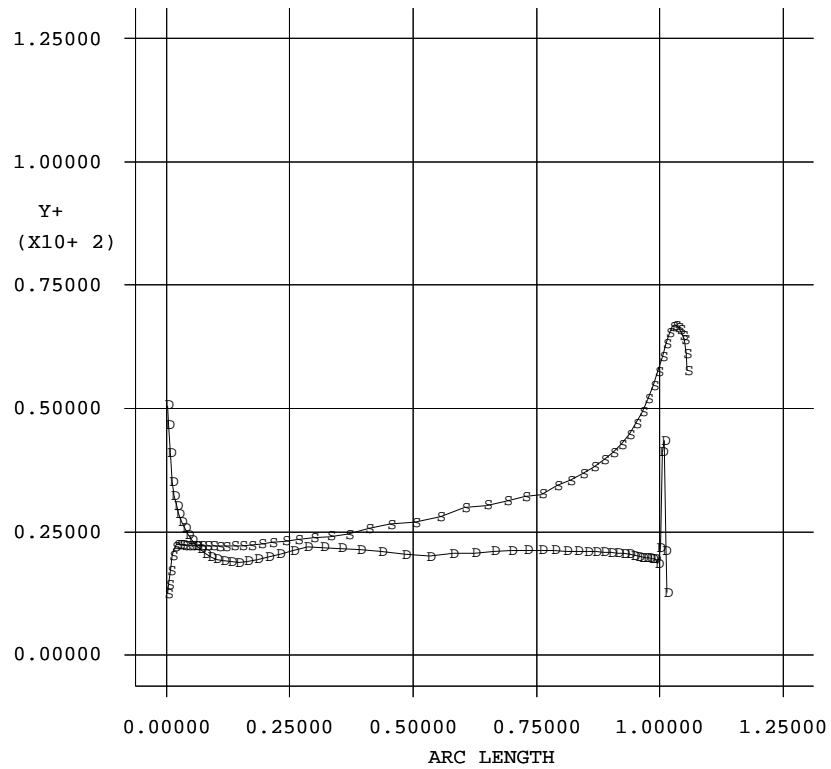
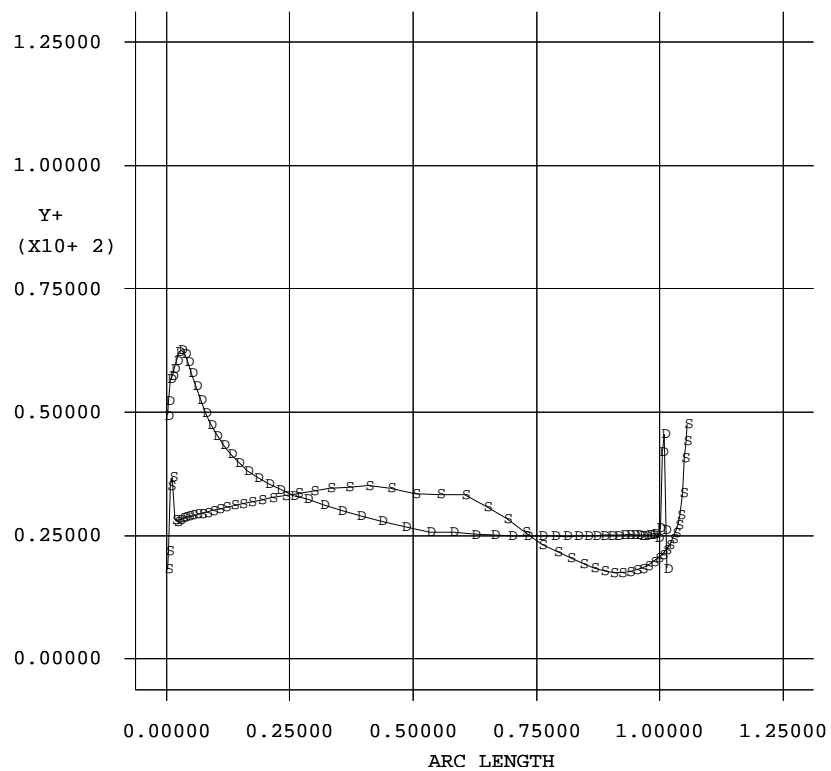
$$\delta_2 = \int_{y=0}^{\delta} \frac{u}{u_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy \quad (6.4)$$

An der Saugseite findet der turbulente Übergang in der Ablösungsblase statt. Nach der Ablösungsblase beobachtet man eine Zunahme der Grenzschichtdicke. Je größer der Anströmwinkel wird, desto dicker ist die Grenzschicht. Bei $\beta_1 = 46^\circ$ versperst diese mehr als 20% des Kanals. Bei jedem Eintrittswinkel erreicht H ein Minimum bei der Wiederanlegung und steigt danach bis zur Hinterkante. An der Druckseite erfolgt der laminar-turbulent Übergang der sehr dünnen Grenzschicht durch natürliche Transition. An dieser Stelle soll auch darauf hingewiesen werden, daß weder das k - ϵ - noch das k - ω -Modell in der Lage sind, einen laminar-turbulent Übergang zu berechnen.

6.4.2 Dimensionsloser Wandabstand y^+

Zuerst wird kontrolliert, ob die Bedingung für das k - ϵ -Modell für den dimensionslosen Abstand, nämlich $30 \leq y^+ \leq 100$ eingehalten wurde. Die Abbildungen 6.20 bis 6.23 stellen den y^+ -Wert für vier repräsentative Anströmwinkel β_1 dar. Die Indizes "S" bzw. "D" bezeichnen die Saug- bzw. Druckseite des Profils. In allen vier Fällen wird die obere Grenze für y^+ nicht überschritten, während der minimale Wert von y^+ bei etwa 20 liegt. Größere Abweichungen treten an der Vorder- und Hinterkante auf. Diese Abweichungen sind aber ohne weitere Bedeutung, da die Methode der Wandfunktionen im Staupunkt (Vorderkante) und bei Ablösung (Hinterkante) ihre Gültigkeit verliert.

Abbildung 6.20: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 40^\circ$ Abbildung 6.21: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 43^\circ$

Abbildung 6.22: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 46^\circ$ Abbildung 6.23: Der y^+ -Verlauf bei $\beta_1 = 24^\circ$

6.4.3 Strömung am Kanaleintritt und -austritt

Die Abb.6.24 zeigt die verwendeten Koordinatensysteme für die Auswertung der Strömung am Kanaleintritt und -austritt. Die Auswertungsebenen gehen durch das Zentrum der Kreise an der Vorder- und Hinterkante der Schaufel.

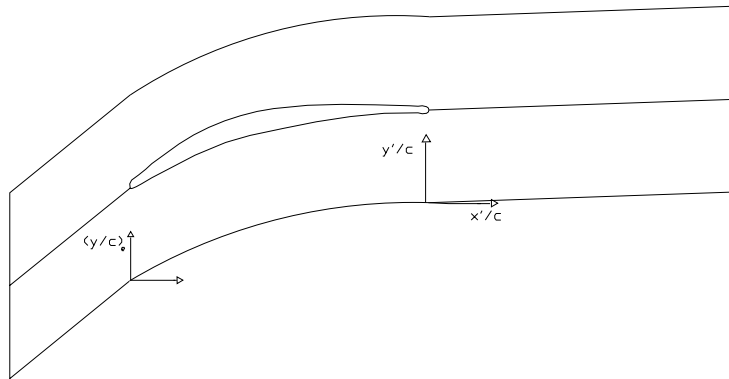


Abbildung 6.24: Eintritt- und Austrittskordinaten

Dimensionslose Geschwindigkeiten w/w_1 und Strömungswinkel β am Kanaleintritt sind für die beiden Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ$ und $\beta_1 = 46^\circ$ in den Abb.6.25 bis 6.28 dargestellt.

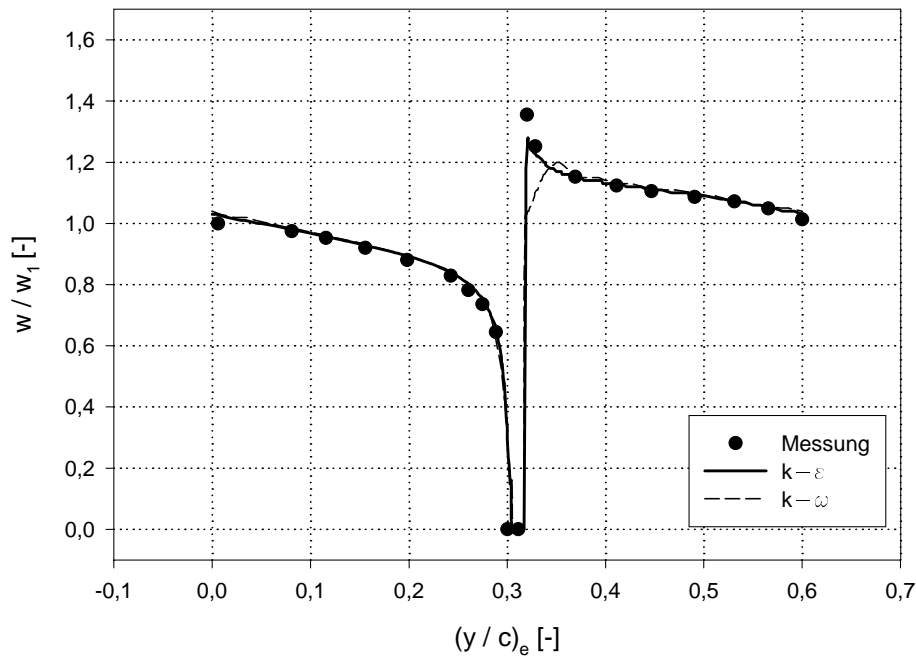


Abbildung 6.25: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung am Kanaleintritt, $\beta_1 = 40^\circ$

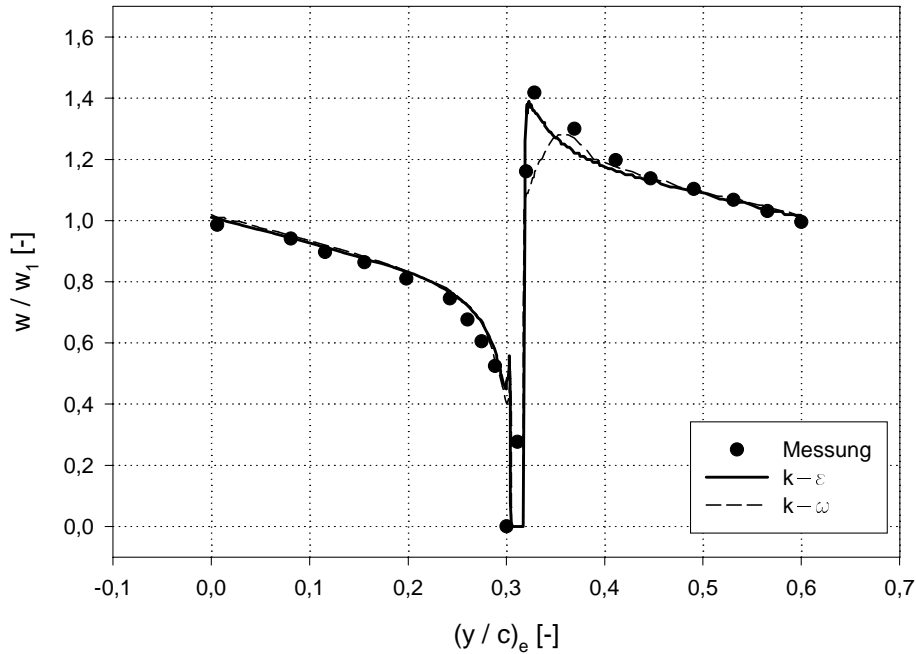


Abbildung 6.26: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung am Kanaleintritt, $\beta_1 = 46^\circ$

Die dimensionslose Geschwindigkeit weist einen Abfall von Saug- zu Druckseite auf. Dieser Geschwindigkeitsgradient ist eine Folge der Strömungsumlenkung im Schaufelkanal. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist gut, wobei das $k-\epsilon$ Modell etwas bessere Ergebnisse liefert. Das ist eher überraschend, da das $k-\epsilon$ Modell mit Wandfunktionen gerade im Eintrittsbereich (Staupunkt, anschließende starke Beschleunigung) problematisch ist.

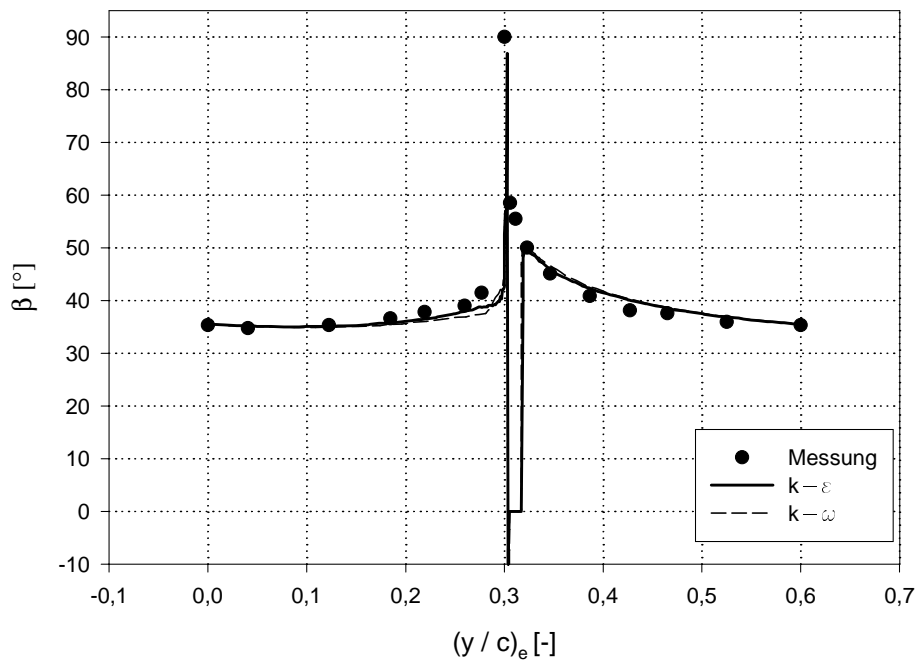
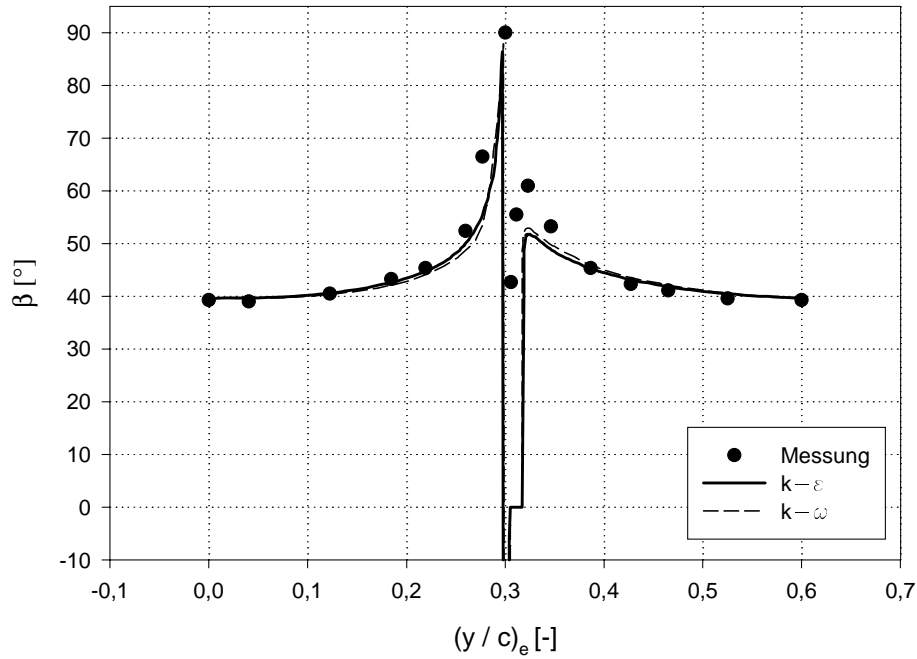
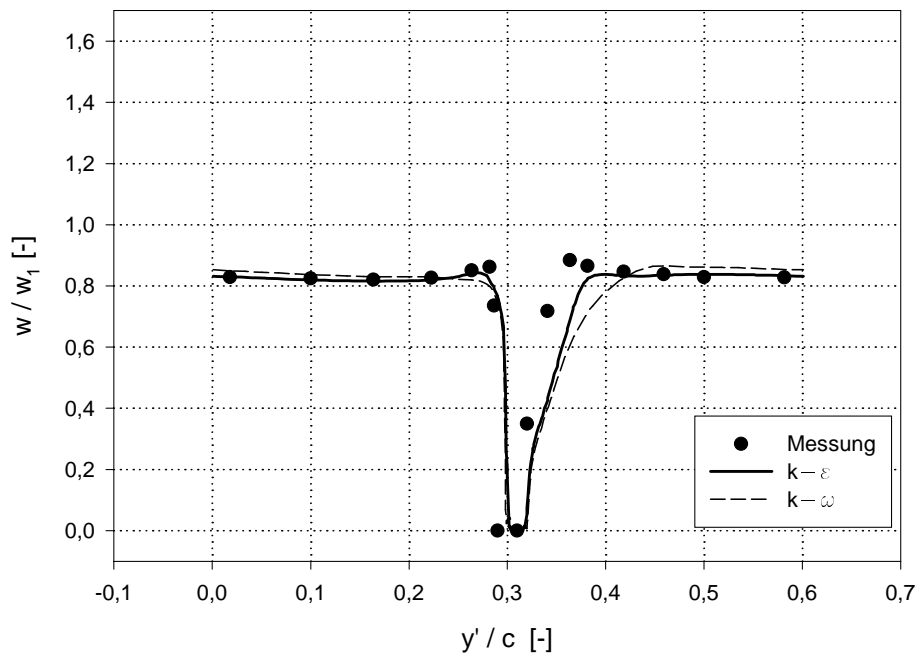


Abbildung 6.27: Strömungswinkel am Kanaleintritt, $\beta_1 = 40^\circ$

Abbildung 6.28: Strömungswinkel am Kanaleintritt, $\beta_1 = 46^\circ$

In der ungestörten Strömung liegt der Strömungswinkel am Kanaleintritt etwas unter den Werten β_1 der Zuströmung. In der Nähe des Staupunktes steigt der Strömungswinkel deutlich an, was auf die induzierte Inzidenz zurückzuführen ist. Auch beim Strömungswinkel kann eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung festgestellt werden.

Zur Beurteilung der Turbulenzmodelle besser geeignet sind die Verteilungen am Kanalausstritt. Dimensionslose Geschwindigkeiten w/w_1 und Strömungswinkel β sind für die beiden Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ$ und $\beta_1 = 46^\circ$ in den Abb.6.29 bis 6.32 dargestellt.

Abbildung 6.29: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung am Kanalausstritt, $\beta_1 = 40^\circ$

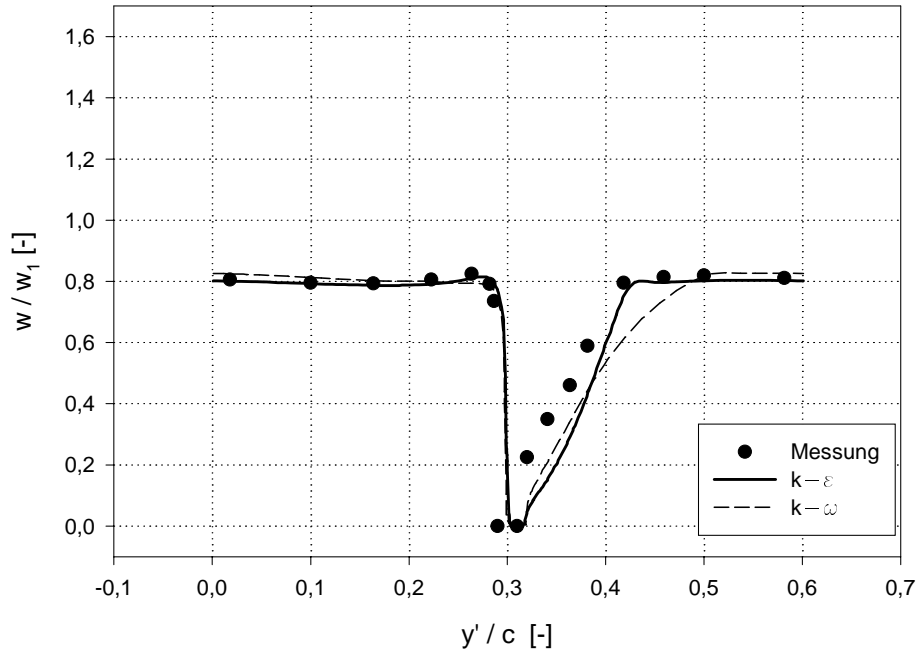


Abbildung 6.30: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung am Kanalausstritt, $\beta_1 = 46^\circ$

Grundsätzlich ist keine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zu erwarten, da die Turbulenzmodelle die transitionalen Grenzschichten nicht beschreiben können und sich die Fehler bis zum Kanalausstritt aufsummieren. Trotzdem herrscht bei der Geschwindigkeitsverteilung gute Übereinstimmung in der ungestörten Strömung und auf der Druckseite. Größere Abweichungen ergeben sich auf der Saugseite, wobei das $k-\epsilon$ Modell etwas bessere Ergebnisse liefert. Deutlich ist zu erkennen, daß die saugseitige Grenzschicht wesentlich dicker als die druckseitige ist, was auf den Druckanstieg auf der Saugseite zurückzuführen ist.

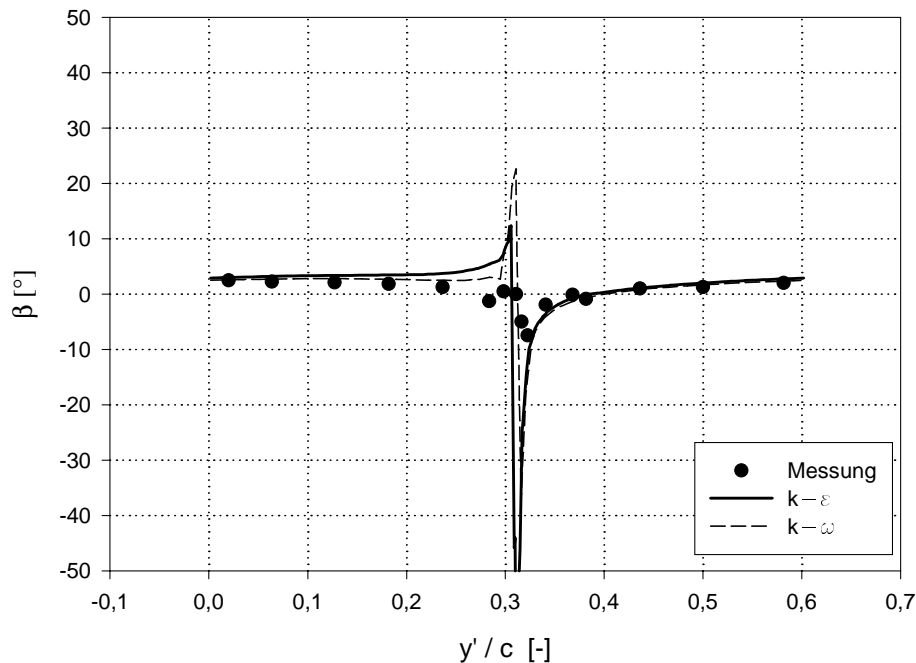
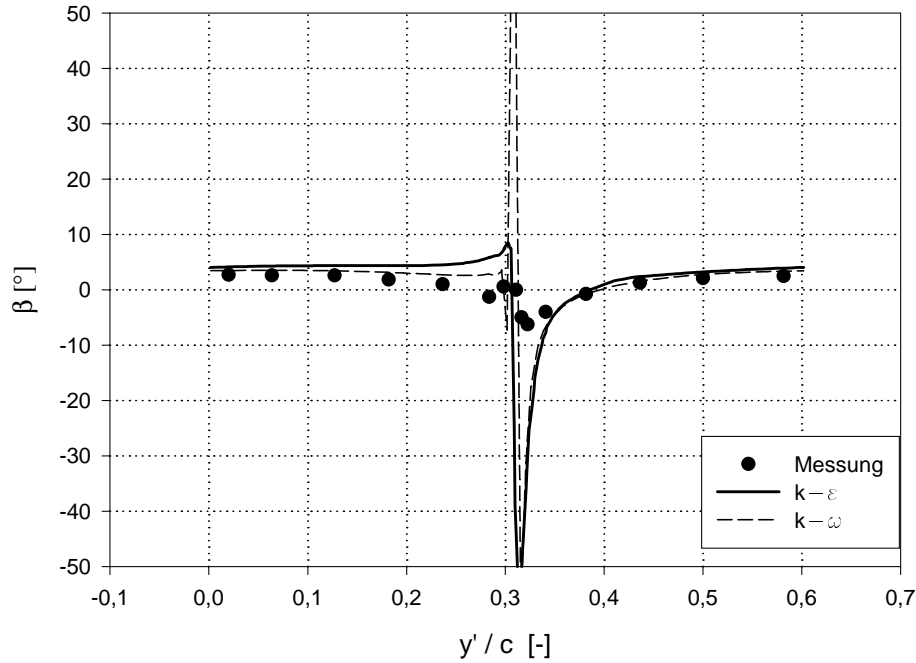


Abbildung 6.31: Strömungswinkel am Kanalausstritt, $\beta_1 = 40^\circ$

Abbildung 6.32: Strömungswinkel am Kanaleintritt, $\beta_1 = 46^\circ$

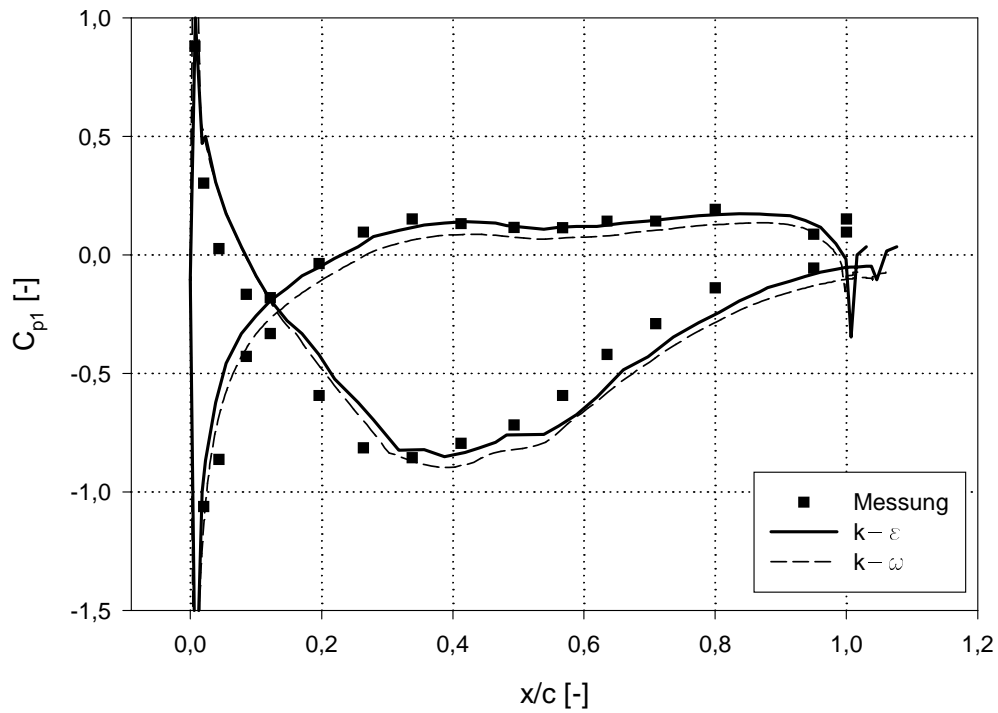
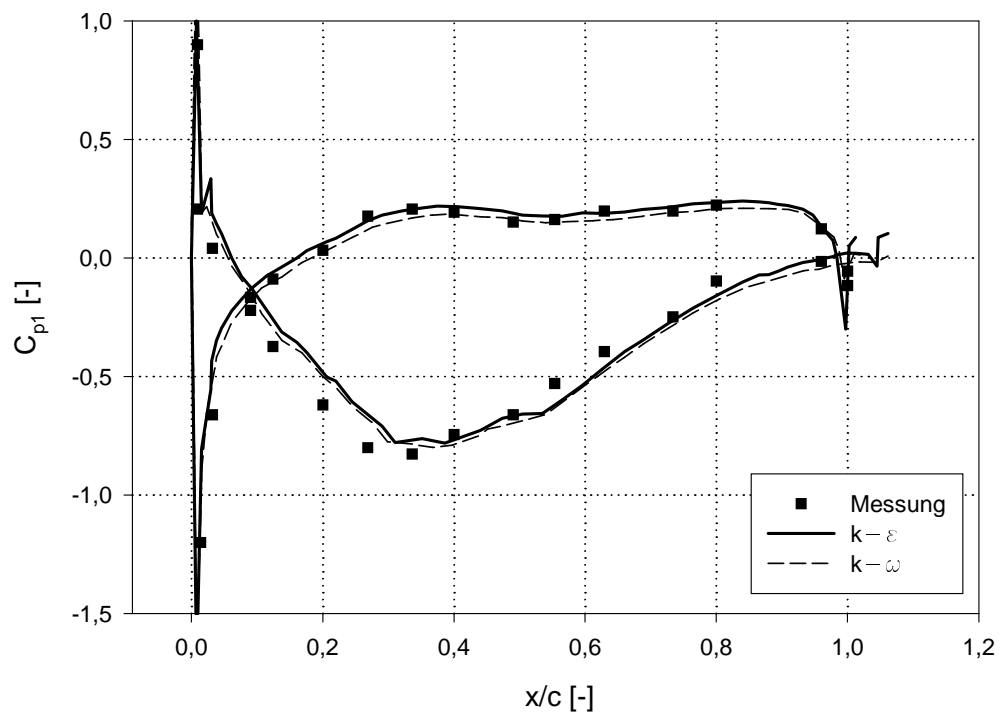
Bei den Strömungswinkeln am Kanalaustritt liefert das $k-\omega$ Modell etwas bessere Ergebnisse, im Vergleich zu den Meßwerten.

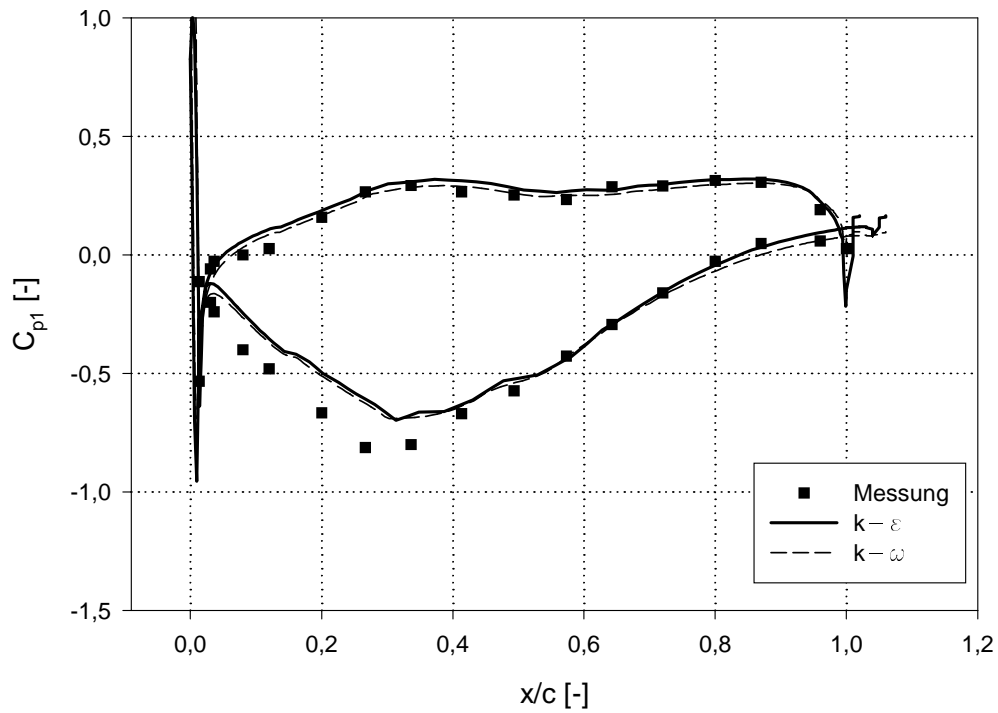
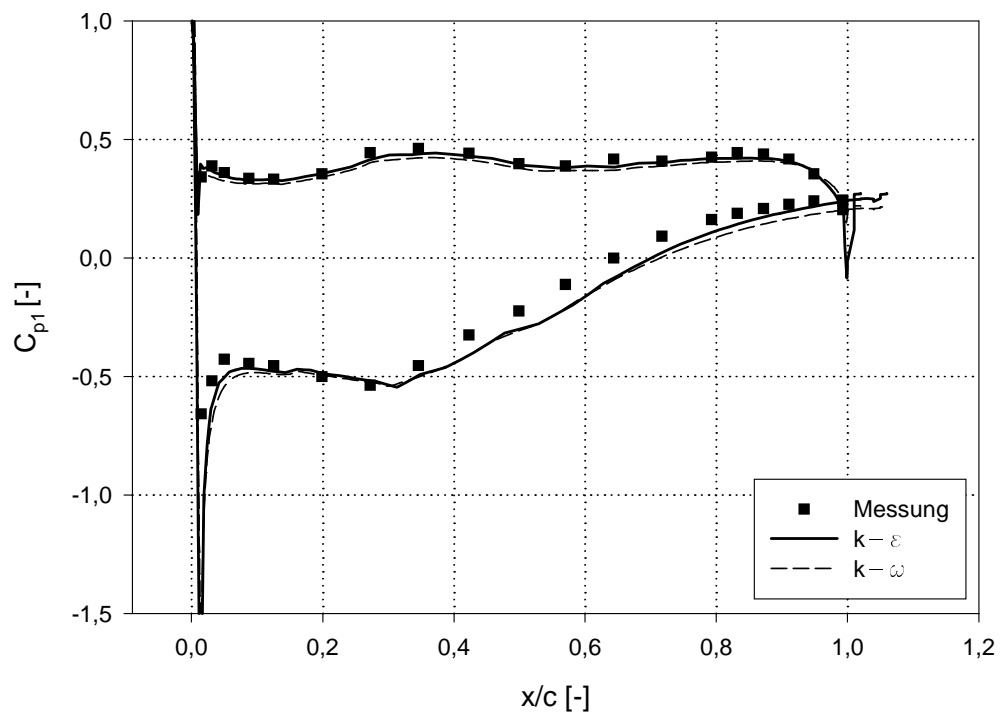
6.5 Profildruckverteilung

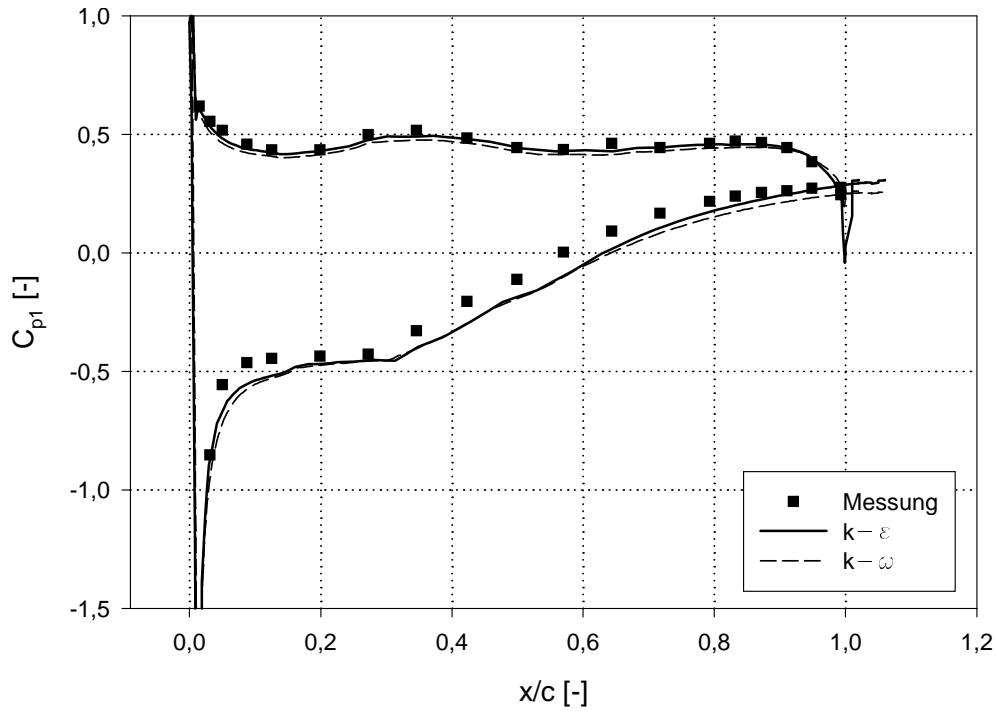
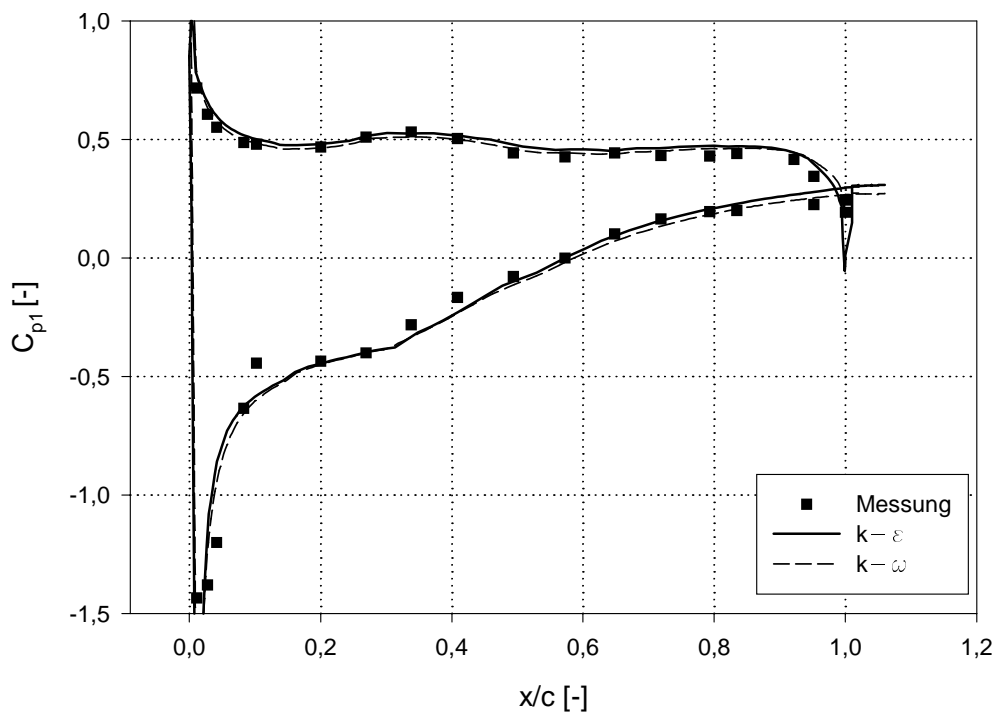
In den Abb.6.33 bis 6.38 sind die Profildruckverteilungen für die sechs verschiedenen Zuströmungswinkel dargestellt. Die jeweiligen Abszissen zeigen die Lauflängs Koordinate entlang der Sehne bezogen auf die Sehnenlänge c . Auf den Ordinaten ist der statische Druckbeiwert

$$C_{p1} = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho w_1^2} \quad (6.5)$$

aufgetragen. Während die Zuströmung durch $C_{p1} = 0$ gekennzeichnet ist, gilt im Staupunkt $C_{p1} = 1,0$. Dargestellt sind in den Diagrammen die gemessene Profildruckverteilung sowie die mittels $k-\epsilon$ und $k-\omega$ Turbulenzmodelle berechneten Werte.

Abbildung 6.33: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 24^\circ$, VergleichAbbildung 6.34: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 28^\circ$, Vergleich

Abbildung 6.35: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 33^\circ$, VergleichAbbildung 6.36: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Vergleich

Abbildung 6.37: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 43^\circ$, VergleichAbbildung 6.38: Profildruckverteilung bei $\beta_1 = 46^\circ$, Vergleich

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist allgemein gut, wobei die Unterschiede auf der Saugseite etwas größer als auf der Druckseite sind. Beim Auslegungszuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ$ läßt sich an Hand der Profildruckverteilung das Auslegungskonzept der CDA-Profile erkennen. Auf der Druckseite ist die Profildruckverteilung konstant. Auf der Saugseite kommt es nach dem Staupunkt zu einer Umströmung der Profilnase mit entsprechend kleinen C_{p1} -Werten. Nach einem steilen Druckanstieg wird die Strömung wieder

beschleunigt, was zu einem leichten Abfall des statischen Druckkoeffizienten führt. Ab etwa $x/c = 0,25$ setzt dann die saugseitige Verzögerung ein. Entscheidend für eine stabile Grenzschicht ist, daß die Verzögerung anfänglich stärker ist und gegen die Hinterkante hin abnimmt. Eben dieses Verhalten ist aus der Profildruckverteilung herauszusehen.

6.6 Schubspannungsbeiwert

Mit Hilfe der von FIDAP berechneten Schubspannungen an der Schaufeloberfläche wurde der Schubspannungsbeiwert aus der Glg.(4.25) ermittelt. Dieser Wert wurde danach mit den Ergebnissen von *Kang et al.* [6] verglichen (Abb.6.39 und 6.40). Diese Ergebnisse wurden durch ein Low-Reynoldsnumber Turbulenzmodell (L-S in den Abbildungen) berechnet. Betrachtet ist der Eintrittswinkel $\beta_1 = 46^\circ$.

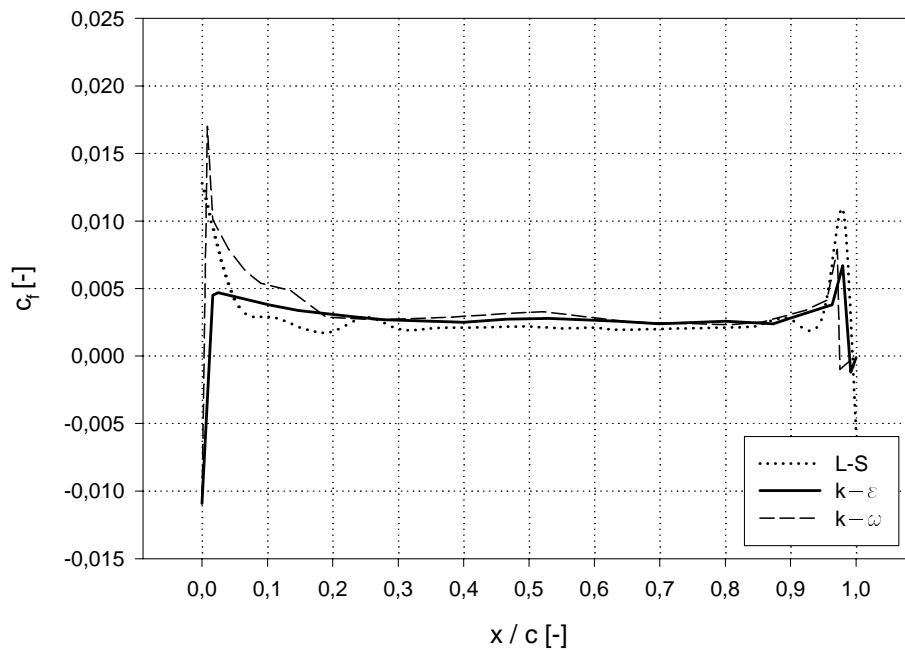


Abbildung 6.39: Schubspannungsbeiwert an der Druckseite, $\beta_1 = 46^\circ$

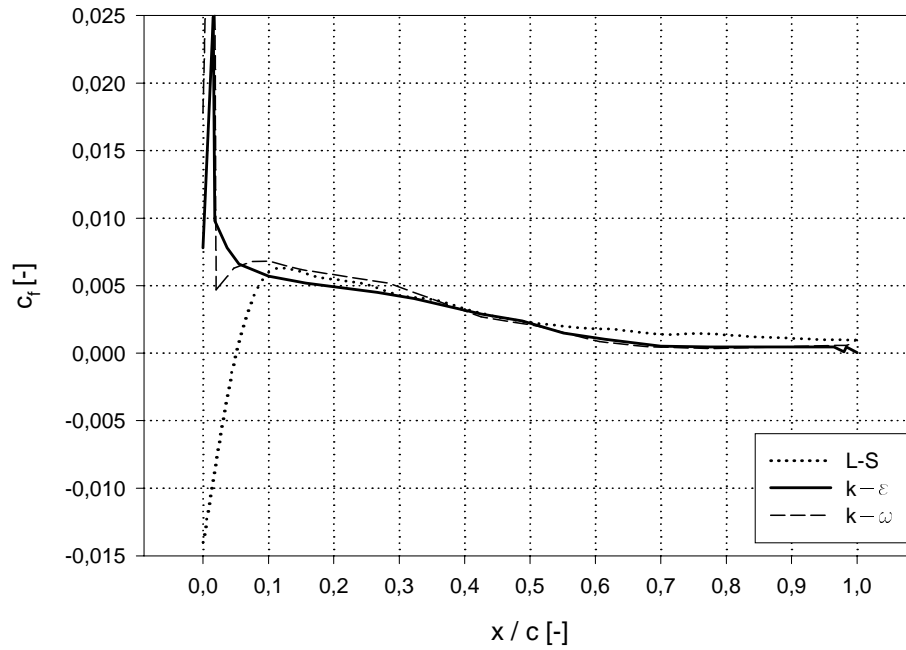


Abbildung 6.40: Schubspannungsbeiwert an der Saugseite, $\beta_1 = 46^\circ$

Die Übereinstimmung ist relativ gut für die Druckseite und für die Saugseite bei $x/c > 0.1$. Die im Experiment beobachtete saugseitige Ablöseblase wurde auch von *Kang et al.* [6] berechnet. In Abb.6.40 ist diese Ablöseblase durch die negativen Schubspannungsbeiwerte bei $x/c < 0.05$ zu erkennen. In der vorliegenden Berechnung ist weder das $k-\epsilon$ Modell, noch das $k-\omega$ Modell in der Lage, die saugseitige Ablöseblase zu berechnen.

6.7 Strömung im Gitternachlauf

Da alle die Unvollkommenheiten in der numerischen Berechnung und in der Turbulenzmodellierung sich bis zum Nachlauf addieren, ist eine Analyse der Nachlaufströmung sehr wichtig, um die Qualität der Ergebnisse zu beurteilen. Die Auswertungsebenen, in denen die Analyse ausgeführt wurde, sind in Abb.6.1 gezeichnet. Die Messungen, mit denen die Ergebnisse verglichen werden, wurden von *Shreeve et al.* [12] durchgeführt.

6.7.1 Dimensionslose Geschwindigkeiten im Gitternachlauf

In diesem Abschnitt sind die dimensionslosen Geschwindigkeiten w/w_1 über der bezogenen Koordinate y'/c in verschiedenen Auswertungsebenen dargestellt. Dabei liegt der Bereich $0 \leq y'/c < 0,3$ hinter der Druckseite, der Bereich $0,3 < y'/c \leq 0,6$ dagegen hinter der Saugseite. Das jeweilige Profil ist bei $y'/c = 0,3$ angeordnet. Die Abb.6.41 bis 6.46 zeigen die Nachlaufdellen in sechs Auswertungsebenen für den Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ$. Durch die verschiedenen parallelen Auswertungsebenen läßt sich die Ausmischung der Nachlaufdelle verfolgen. Es ist zu erkennen, daß beide Turbulenzmodelle eine, gegenüber den Versuchsergebnissen, zu langsame Ausmischung berechnen. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung ist umso besser, je näher man sich an der Gitterhinterfront befindet. Im Bereich der ungestörten Strömung und hinter der Druckseite besteht gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung. Weniger gut ist die Übereinstimmung im saugseitigen Teil der Nachlaufdelle, wobei das $k-\epsilon$ Modell gegenüber dem $k-\omega$ Modell etwas bessere Ergebnisse liefert.

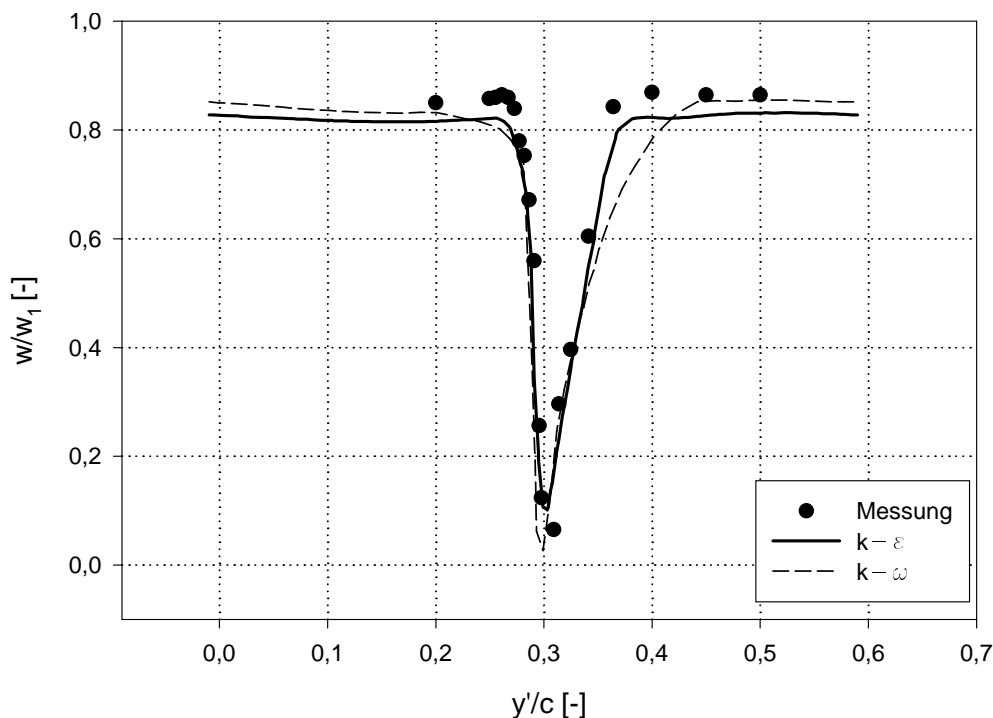


Abbildung 6.41: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene ϵ_1

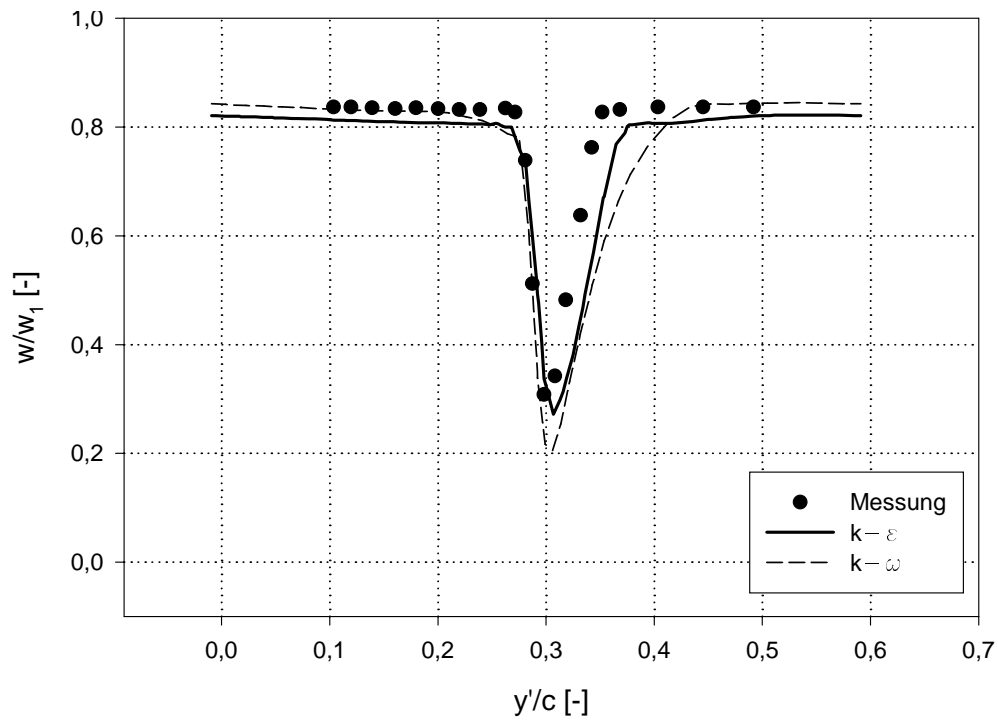


Abbildung 6.42: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene e_2

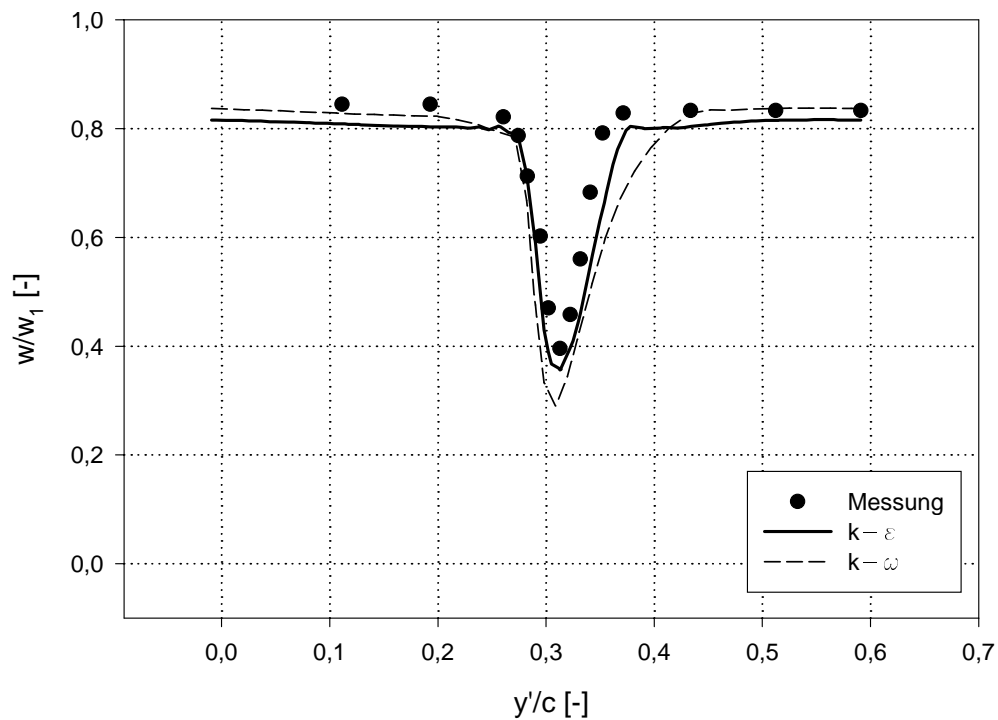


Abbildung 6.43: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene d_1

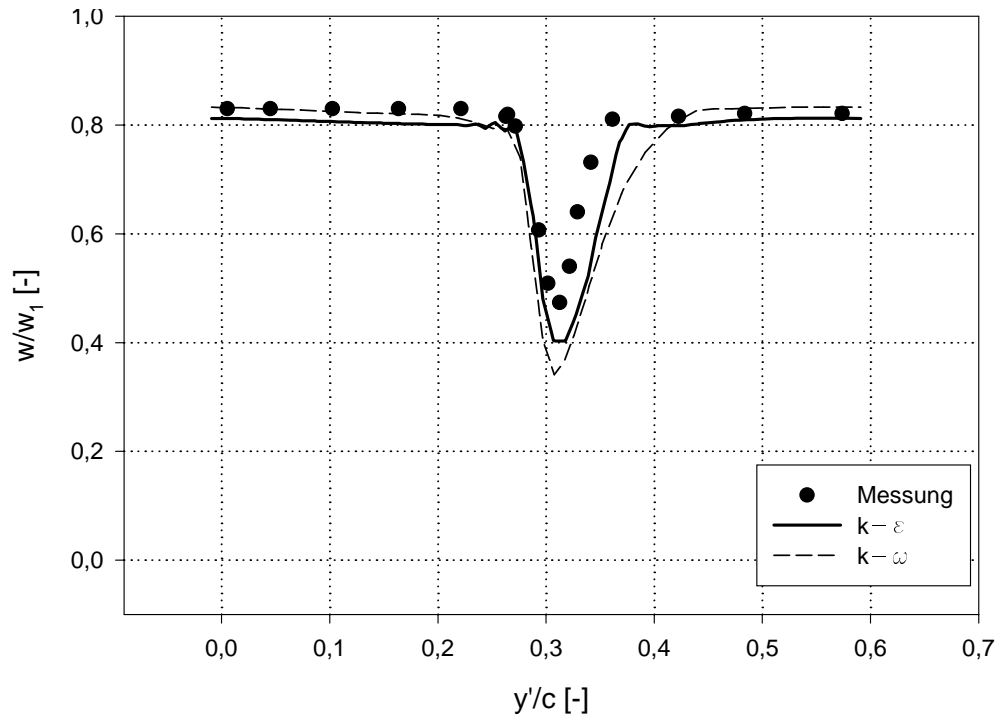


Abbildung 6.44: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene d_2

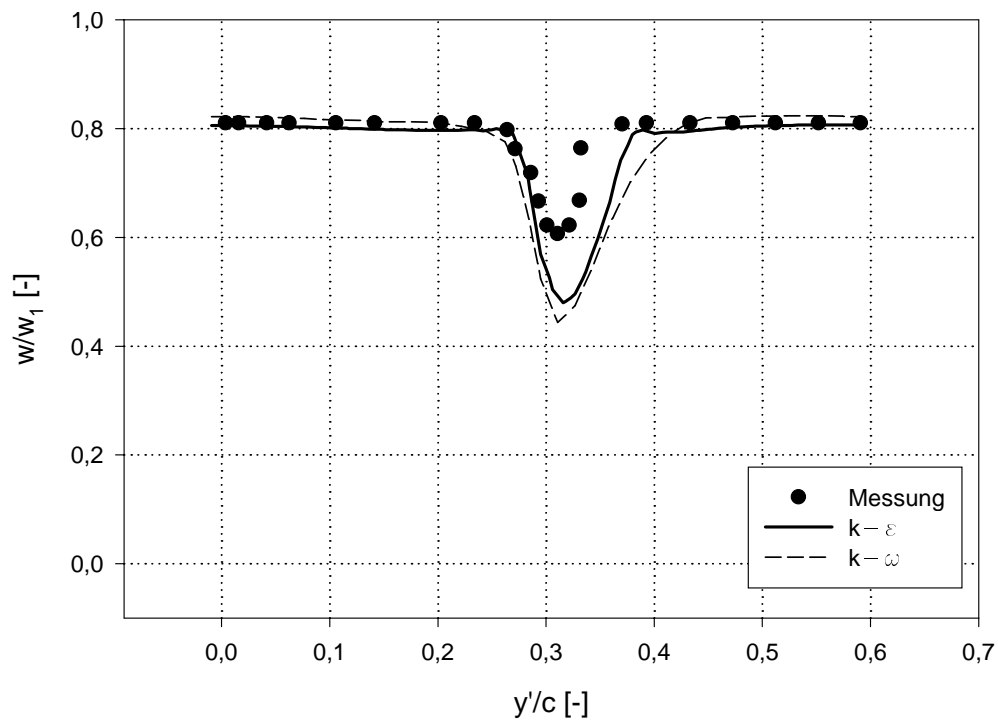


Abbildung 6.45: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene d_3

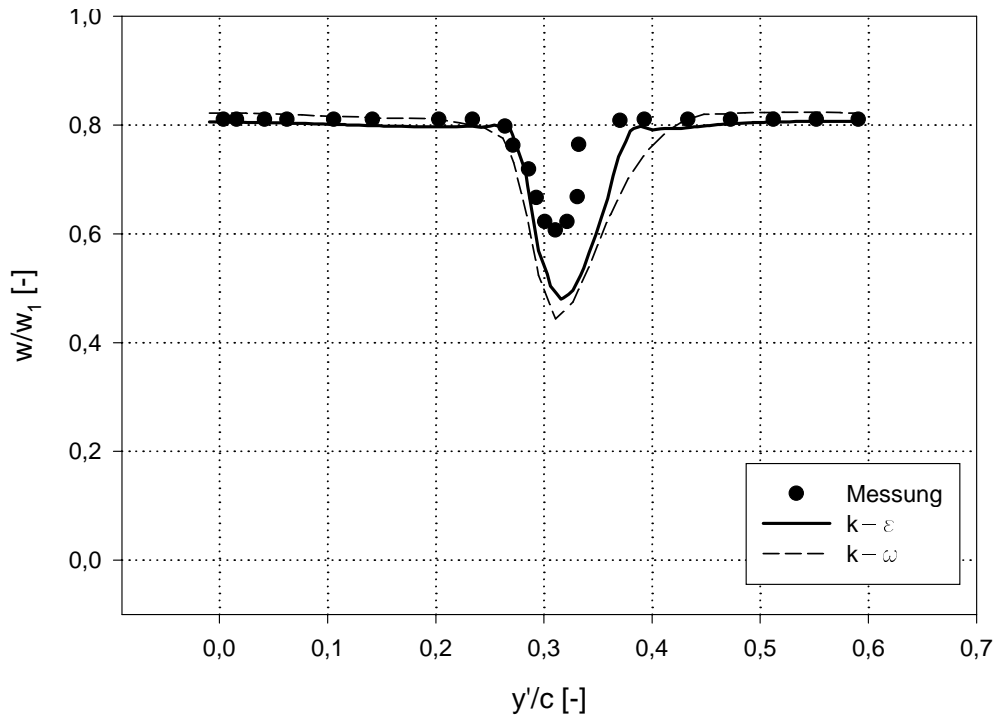


Abbildung 6.46: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene d_4

Ähnliche Aussagen gelten auch für $\beta_1 = 43^\circ$, wie aus den Abb. 6.47 bis 6.50 ersichtlich ist. Dort sind die Nachlaufdellen in vier Auswertungsebenen dargestellt.

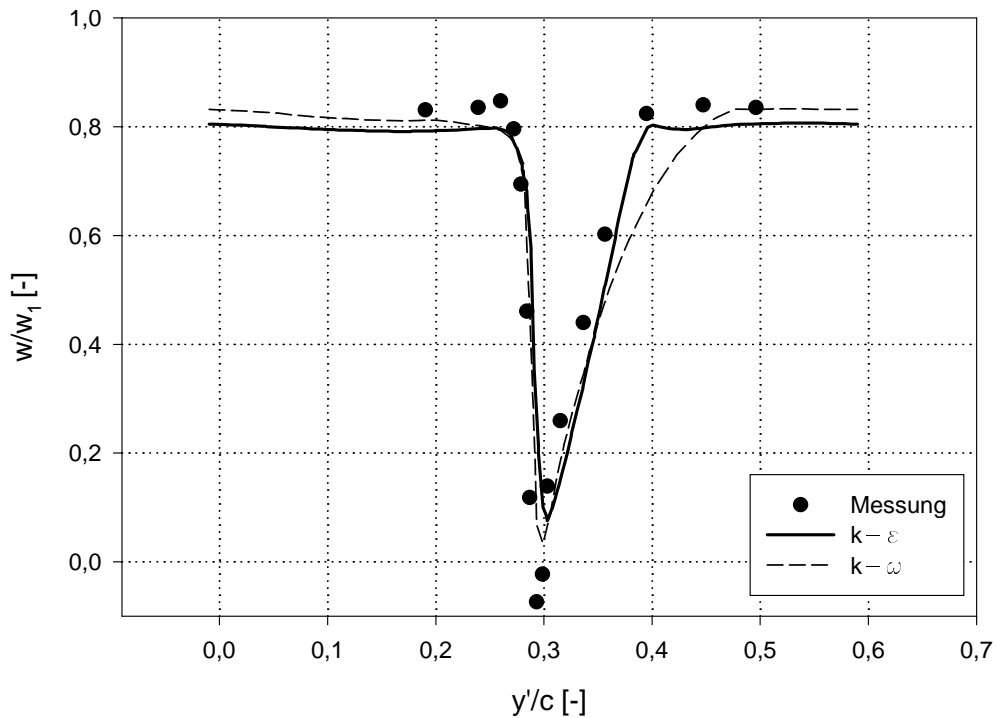


Abbildung 6.47: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene e_1

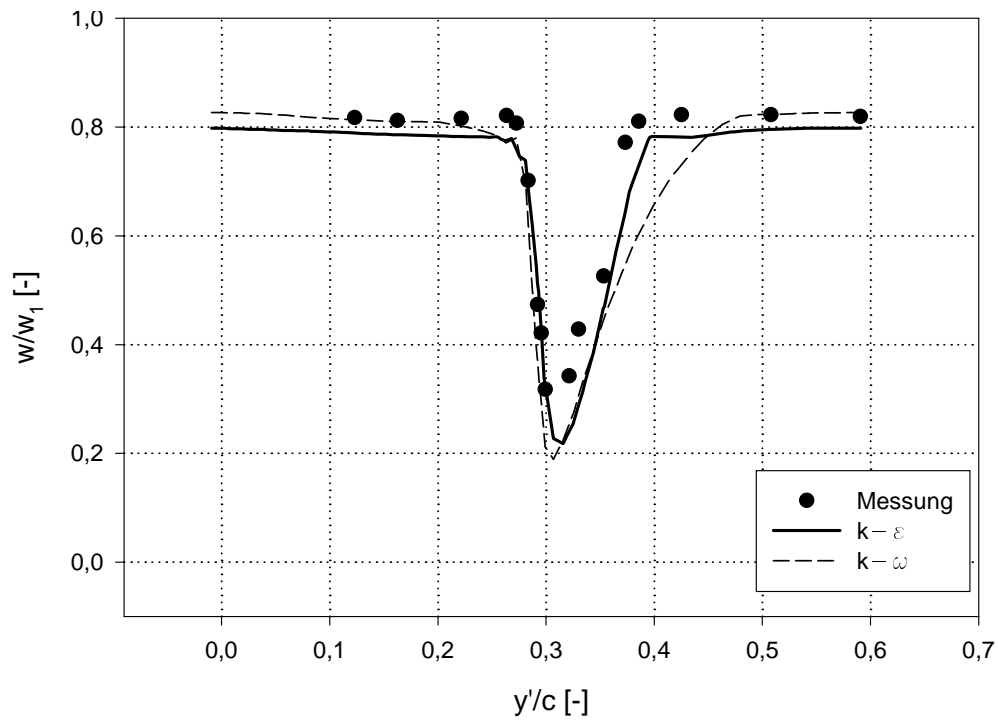


Abbildung 6.48: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene e_2

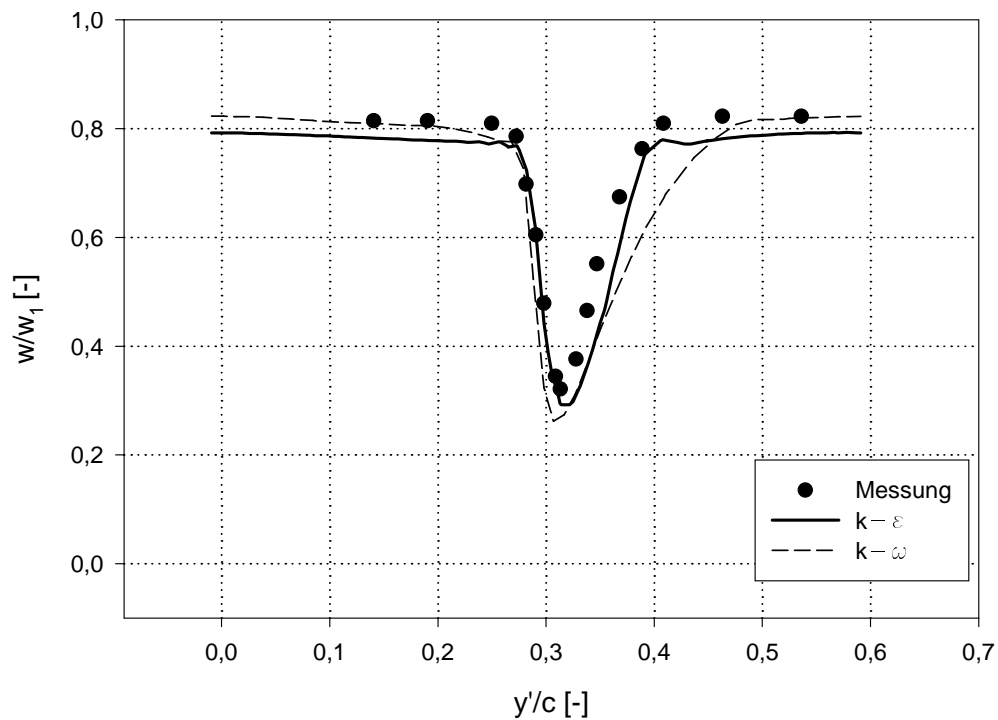


Abbildung 6.49: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene d_1

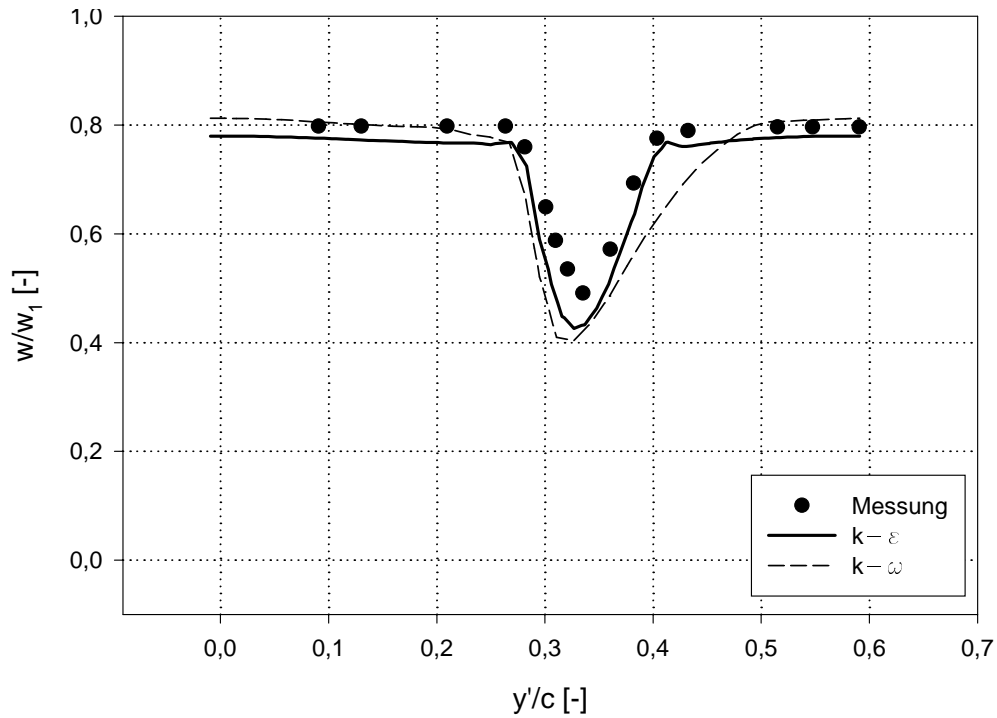


Abbildung 6.50: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene $d2$

Schließlich zeigen die Abb.6.51 und 6.52 die Nachlaufdüellen in zwei Auswertungsebenen für $\beta_1 = 46^\circ$. Mit steigendem Zuströmwinkel β_1 nimmt die Verzögerung der saugseitigen Grenzschicht zu, die Unsymmetrie der Nachlaufdüellen zwischen Druck- und Saugseite wird verstärkt.

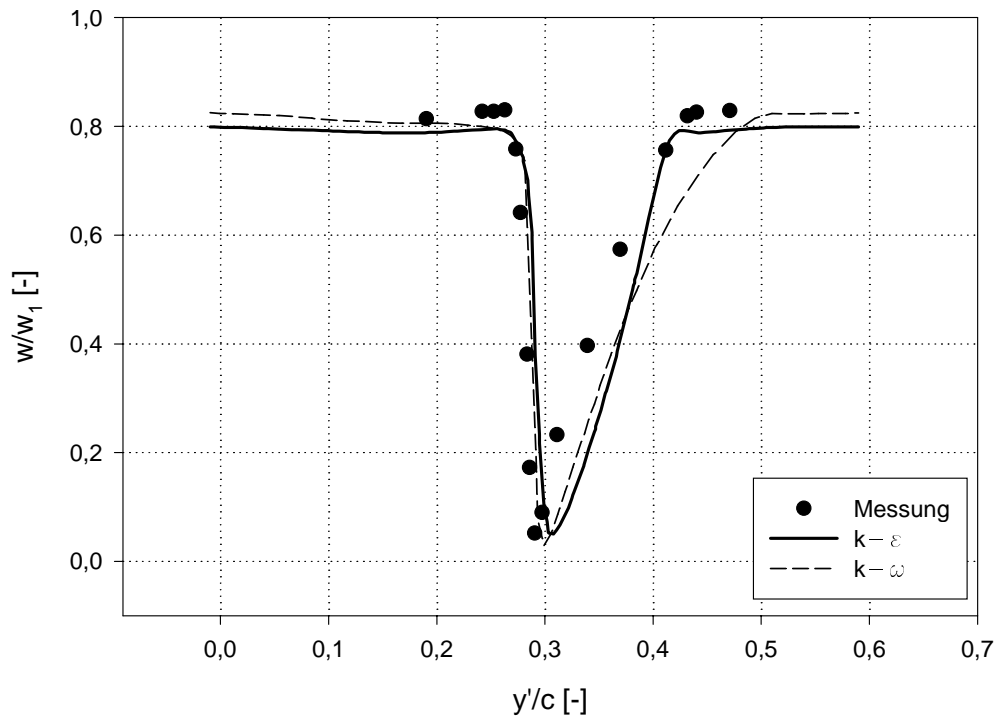


Abbildung 6.51: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 46^\circ$, Auswertungsebene $e1$

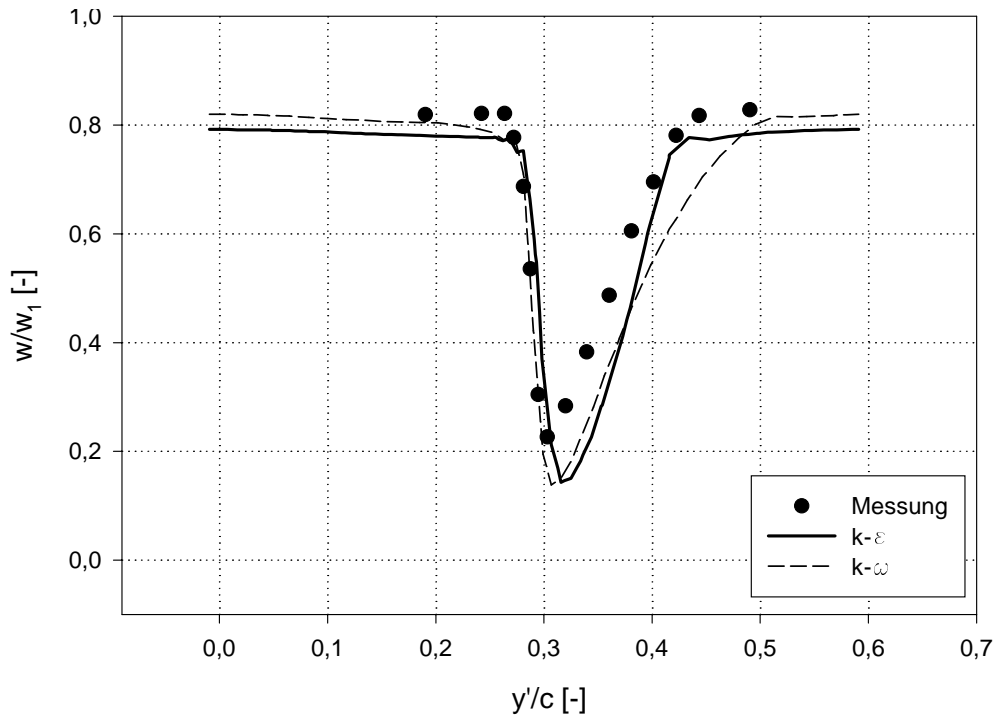


Abbildung 6.52: Dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung bei $\beta_1 = 46^\circ$, Auswertungsebene ϵ_2

Die Unsymmetrie zwischen Druck- und Saugseite ist auch an Hand der Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante ersichtlich. Diese sind für das $k-\epsilon$ Modell in Abb.6.53 und für das $k-\omega$ Modell in Abb.6.54 dargestellt. Wird der Zuströmwinkel verkleinert, so nimmt die Unsymmetrie ab und die Rechnung liefert zwei gegenläufige Wirbel an der Hinterkante. Die Abb. 6.55 und 6.56 zeigen diese Wirbel für den kleinsten Zuströmwinkel $\beta_1 = 24^\circ$, für beide Turbulenzmodelle. Im Experiment sind diese Wirbel vermutlich nicht stationär sondern bilden eine periodische Wirbelablösung. In *Sanger und Shreeve* [11] wird z.B. berichtet, daß bei den kleineren Zuströmwinkeln eine periodische Wirbelablösung mit einer Strouhalzahl von 0,17 (gebildet mit der Hinterkantendicke) beobachtet wurde.

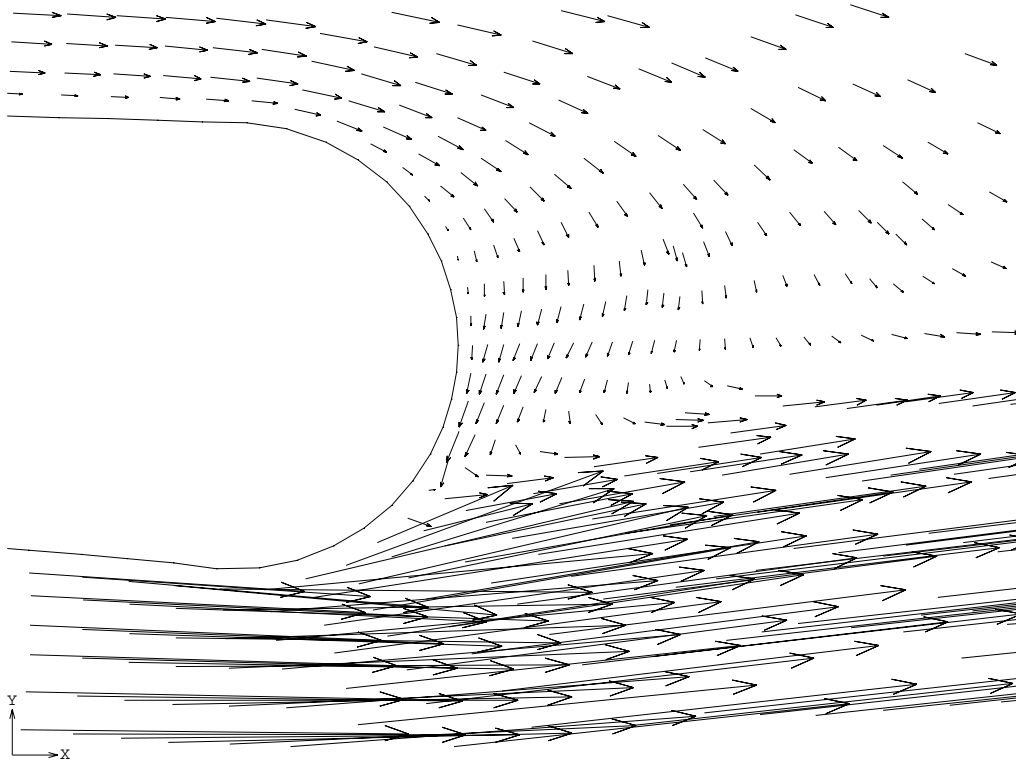


Abbildung 6.53: Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante bei $\beta_1 = 46^\circ$, k - ϵ -Modell

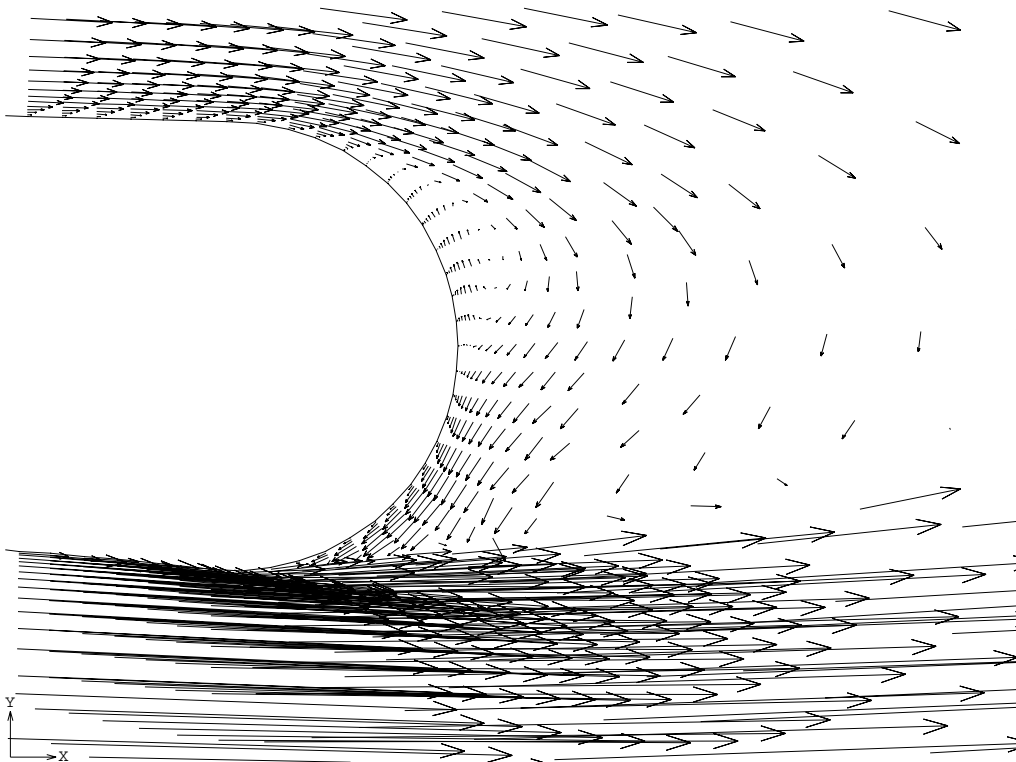


Abbildung 6.54: Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante bei $\beta_1 = 46^\circ$, k - ω -Modell

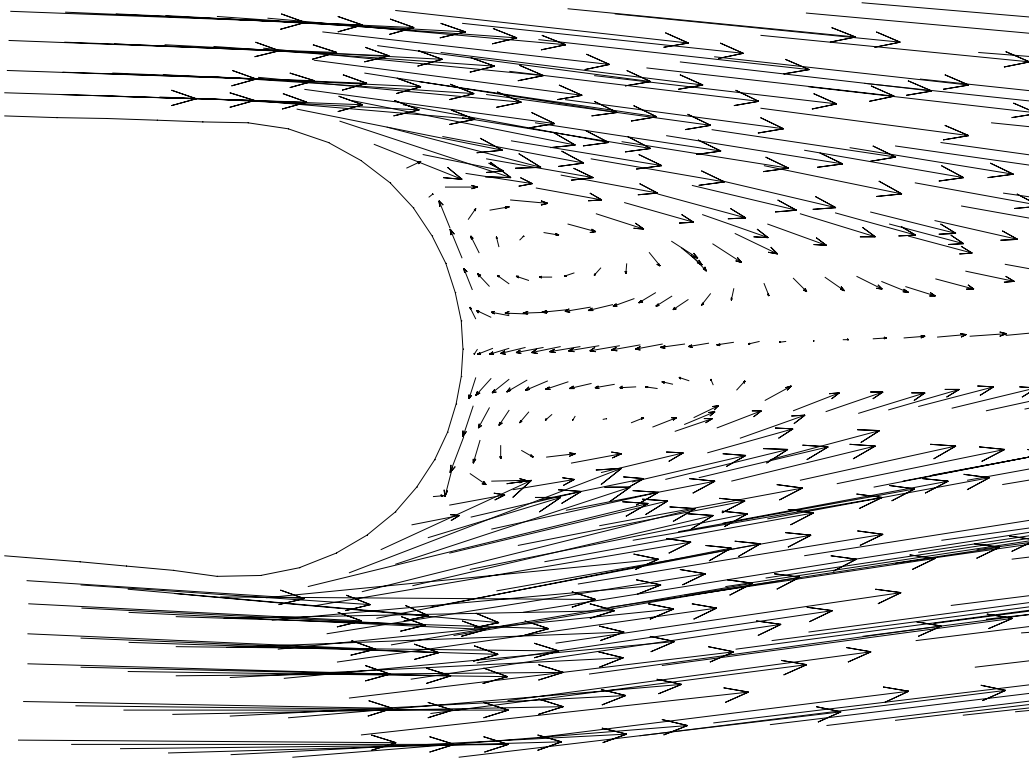


Abbildung 6.55: Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante bei $\beta_1 = 24^\circ$, $k-\epsilon$ -Modell

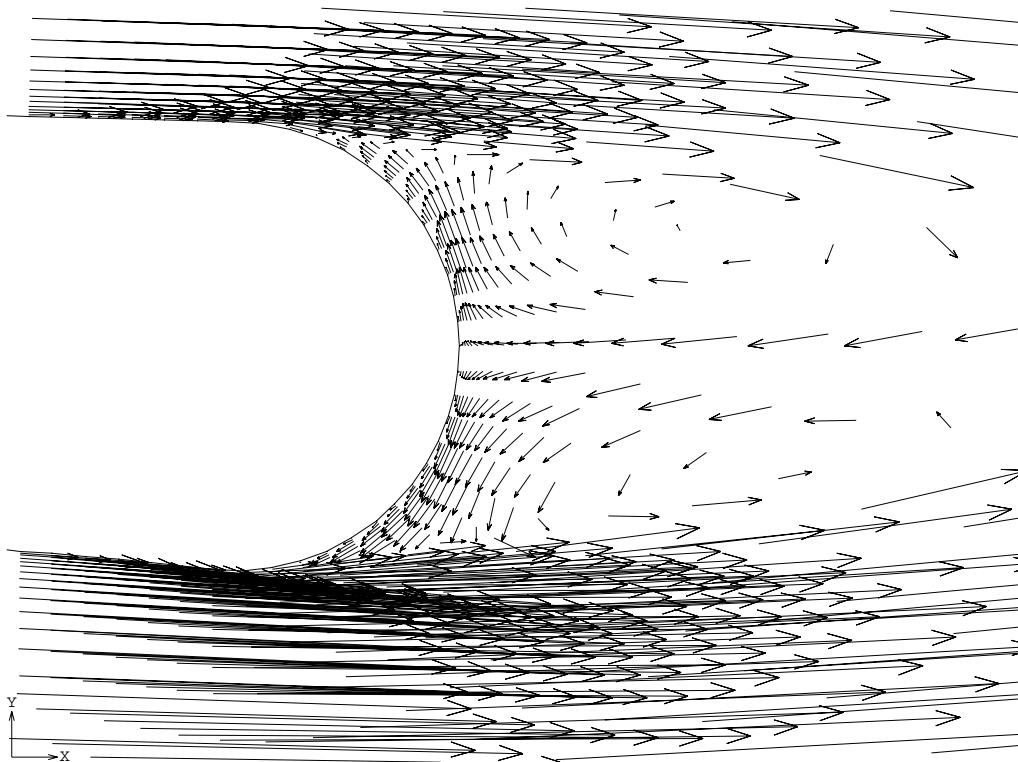
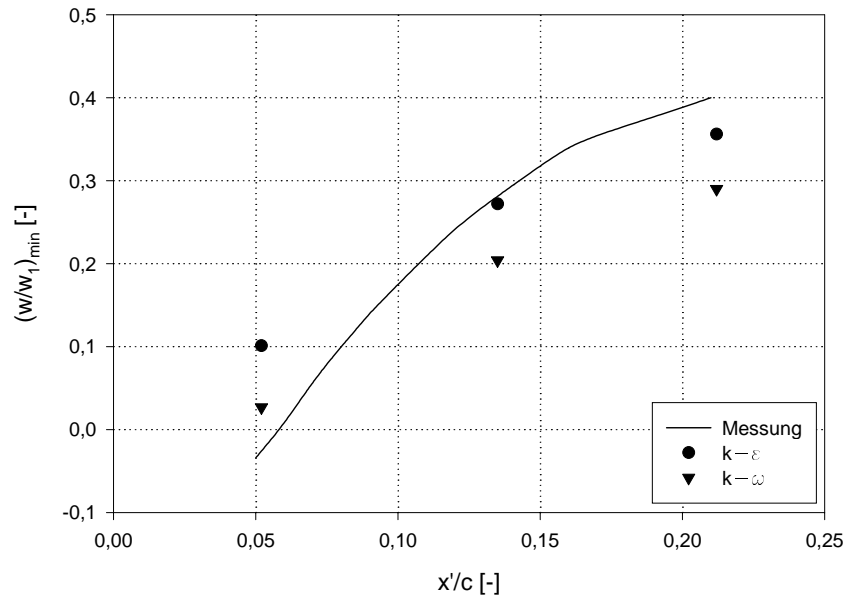
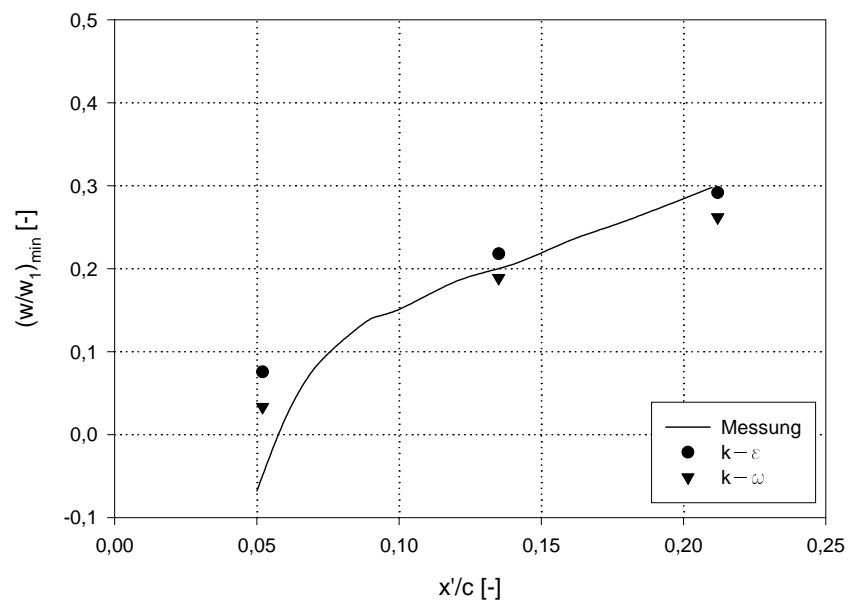


Abbildung 6.56: Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante bei $\beta_1 = 24^\circ$, $k-\omega$ -Modell

Die Abb.6.57 bis 6.59 zeigen den Vergleich zwischen den experimentellen und den berechneten Werten der Geschwindigkeitsminima im Nachlauf für die Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ$, 43° und 46° . Eine gute Übereinstimmung ist erkennbar, sowohl für $\beta_1 = 40^\circ$ als auch für $\beta_1 = 43^\circ$.

Abbildung 6.57: Geschwindigkeitsminimum im Nachlauf bei $\beta_1 = 40^\circ$ Abbildung 6.58: Geschwindigkeitsminimum im Nachlauf bei $\beta_1 = 43^\circ$

Beim Zuströmwinkel $\beta_1 = 46^\circ$ treten größere Unterschiede in der Auswertungsebene $d2$ ($x'/c = 0.277$) auf.

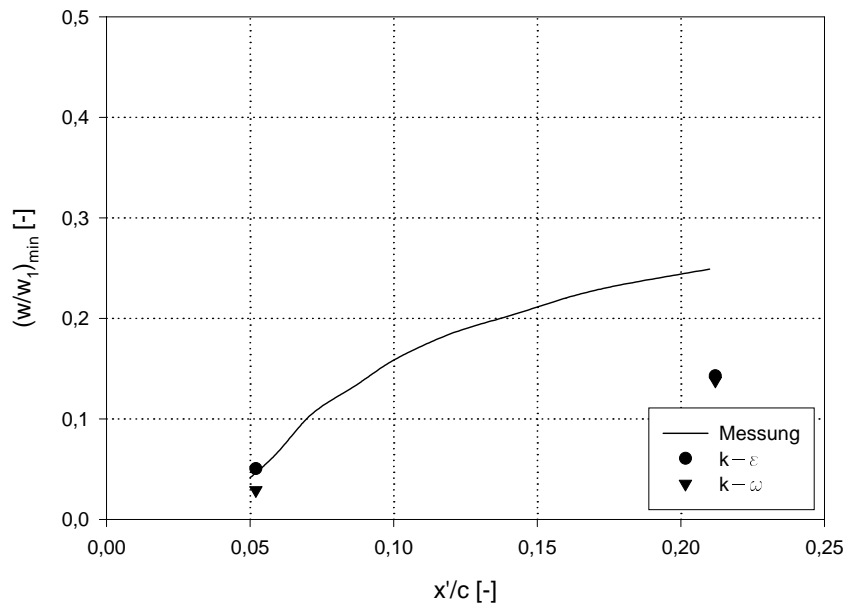


Abbildung 6.59: Geschwindigkeitsminimum im Nachlauf bei $\beta_1 = 46^\circ$

In den Abb.6.60 und 6.61 wird die Lage des Geschwindigkeitsminimums im Nachlauf für $\beta_1 = 40^\circ$ und 43° verglichen. Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den berechneten Werten ist sehr gut für beide Modelle. Das $k-\omega$ -Modell ist in diesem Fall genauer als das $k-\epsilon$, auch wenn die Unterschiede sehr klein sind.

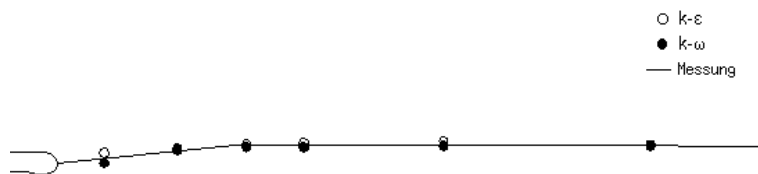


Abbildung 6.60: Lage des Geschwindigkeitsminimums im Nachlauf bei $\beta_1 = 40^\circ$

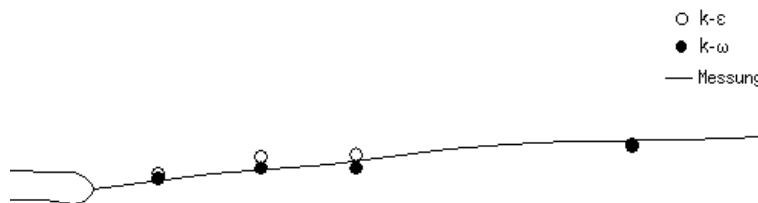


Abbildung 6.61: Lage des Geschwindigkeitsminimums im Nachlauf bei $\beta_1 = 43^\circ$

6.7.2 Strömungswinkel im Gitternachlauf

In den Abb.6.62 bis 6.64 ist der Strömungswinkel in der Ebene $d1$ für die drei Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ, 43^\circ$ und 46° dargestellt. Die Meßergebnisse zeigen durchwegs Schwankungen von $\pm 7^\circ$ gegenüber dem jeweiligen Mittelwert. Bei der Annäherung an die Druckseite kommt es zu einem Anstieg des Strömungswinkels, bei der Annäherung an die Saugseite zu einer Abnahme des Strömungswinkels. Diese Schwankungen entstehen durch das Zusammenfließen von druck- und saugseitiger Grenzschicht hinter der relativ dicken Hinterkante (2,5% der

Sehnenlänge). Dieser Trend wird von der Berechnung gut wiedergegeben. Dabei liefert das $k-\omega$ Modell gegenüber dem $k-\epsilon$ Modell durchwegs etwas kleinere Strömungswinkel ($0,5^\circ \div 1^\circ$).

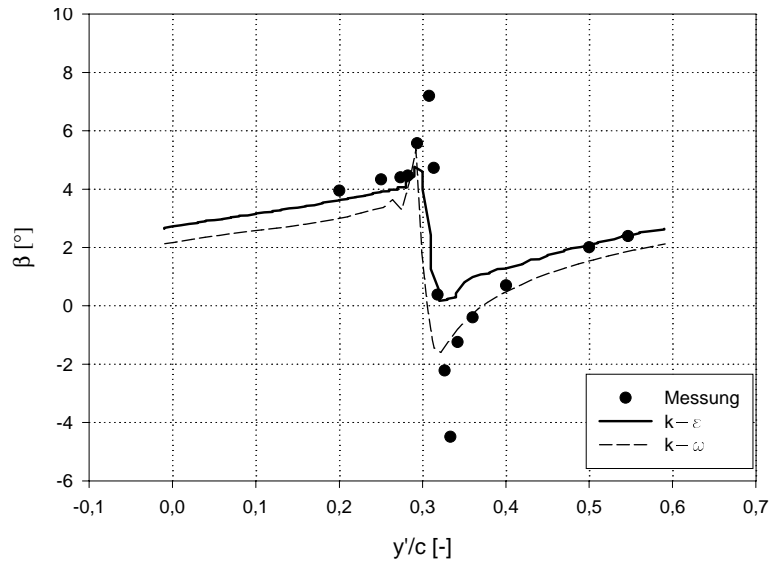


Abbildung 6.62: Strömungswinkel bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene d1

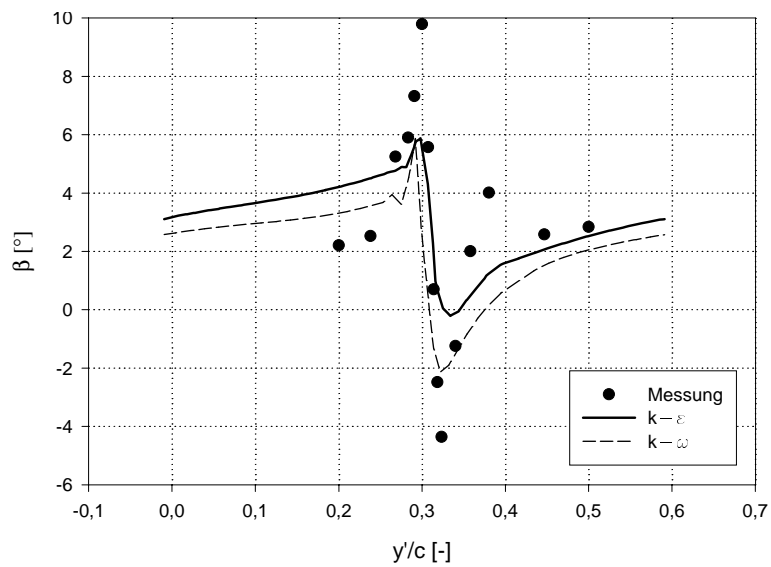


Abbildung 6.63: Strömungswinkel bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene d1

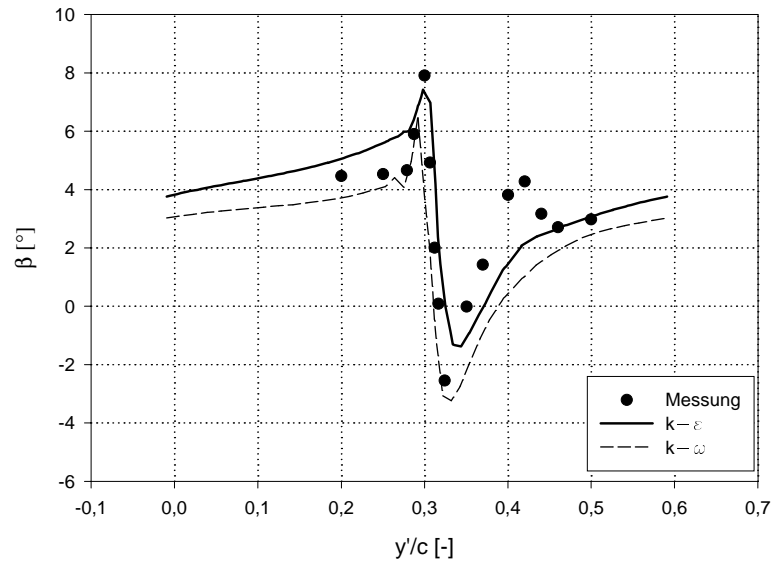


Abbildung 6.64: Strömungswinkel bei $\beta_1 = 46^\circ$, Auswertungsebene d1

6.7.3 Turbulenzgrad im Gitternachlauf

Der Turbulenzgrad in den Nachlaufebenen e_1 und e_2 ist für die drei Zuströmwinkel $\beta_1 = 40^\circ, 43^\circ$ und 46° in den Abb. 6.65 bis 6.70 dargestellt. Dabei ist anzumerken, daß der Turbulenzgrad nicht mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit, sondern mit der Zuströmgeschwindigkeit, entsprechend

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{(w')^2}}}{w_1} \quad (6.6)$$

gebildet wurde. In der ungestörten Strömung beträgt der Turbulenzgrad, entsprechend dem Wert am Eintritt, $Tu = 1.4\%$. Innerhalb der Nachlaufdelle steigt der Turbulenzgrad auf etwa $10\% \div 12\%$ an. Dabei ist auch in der Verteilung des Turbulenzgrades die im Vergleich zur Druckseite wesentlich dickere Grenzschicht an der Saugseite ersichtlich. Die hohen Gradienten in der Verteilung des Turbulenzgrades werden vor allem durch das $k-\epsilon$ Modell (gröberes Netz) unzureichend aufgelöst. Es kommt zu Oszillationen im Turbulenzgrad. Andererseits werden die Turbulenzgrade im druck- und saugseitigen Teil der Nachlaufdelle durch das $k-\omega$ Modell durchwegs zu hoch berechnet. Die maximalen Turbulenzgrade von etwa 10% werden durch die Rechnung gut wiedergegeben.

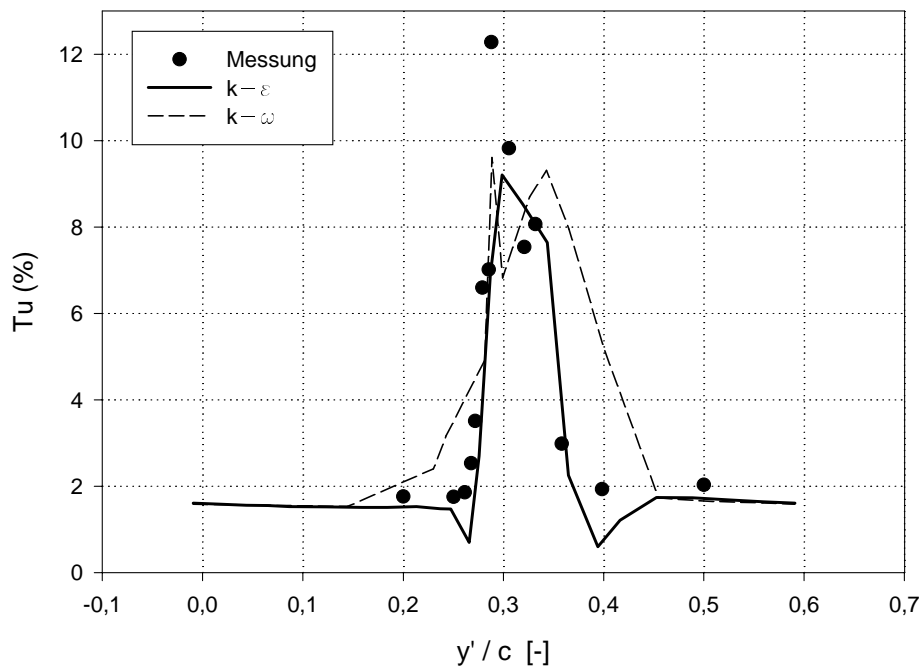
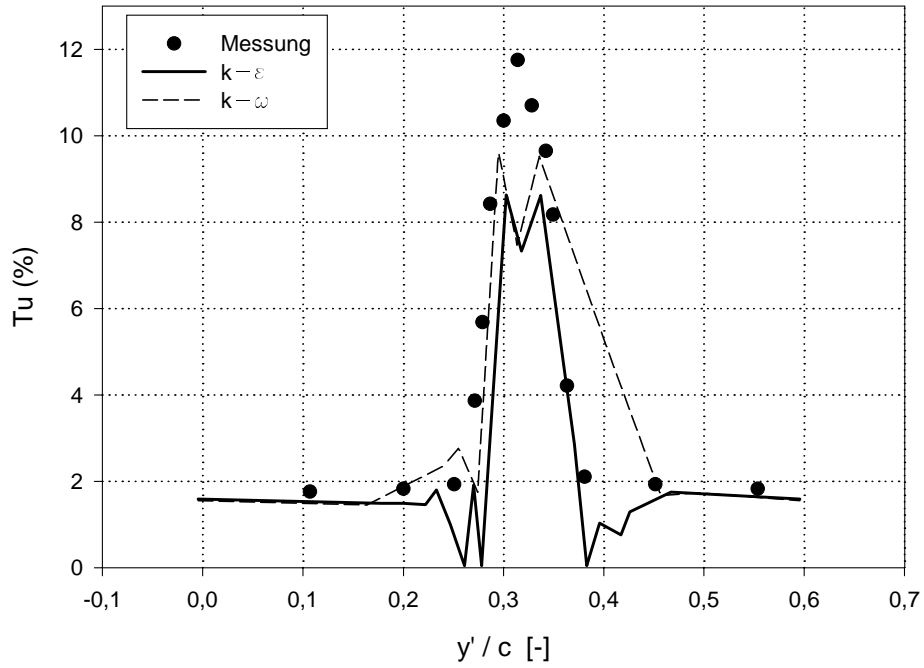
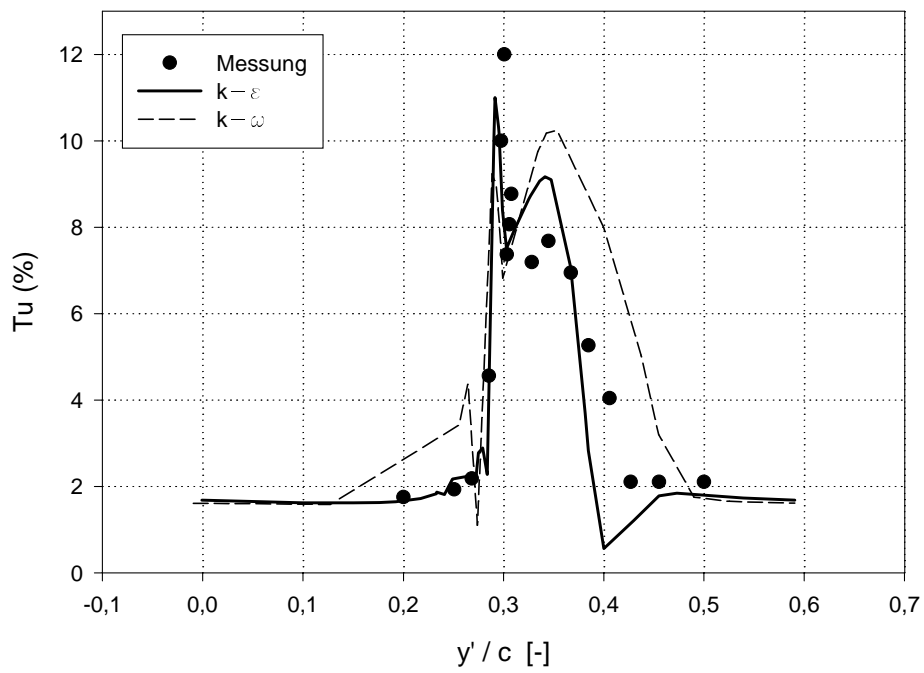
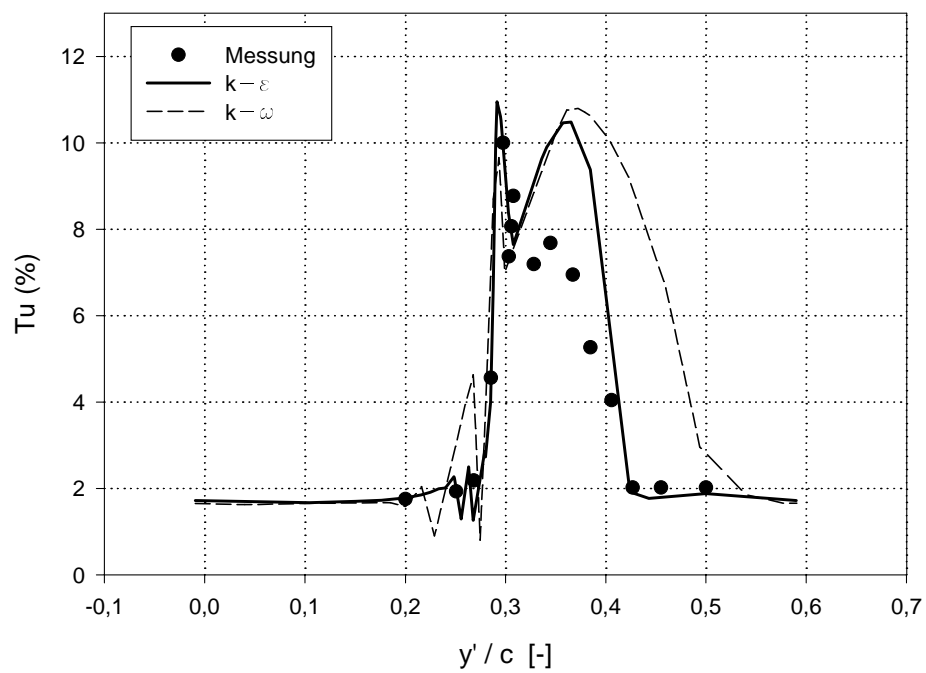
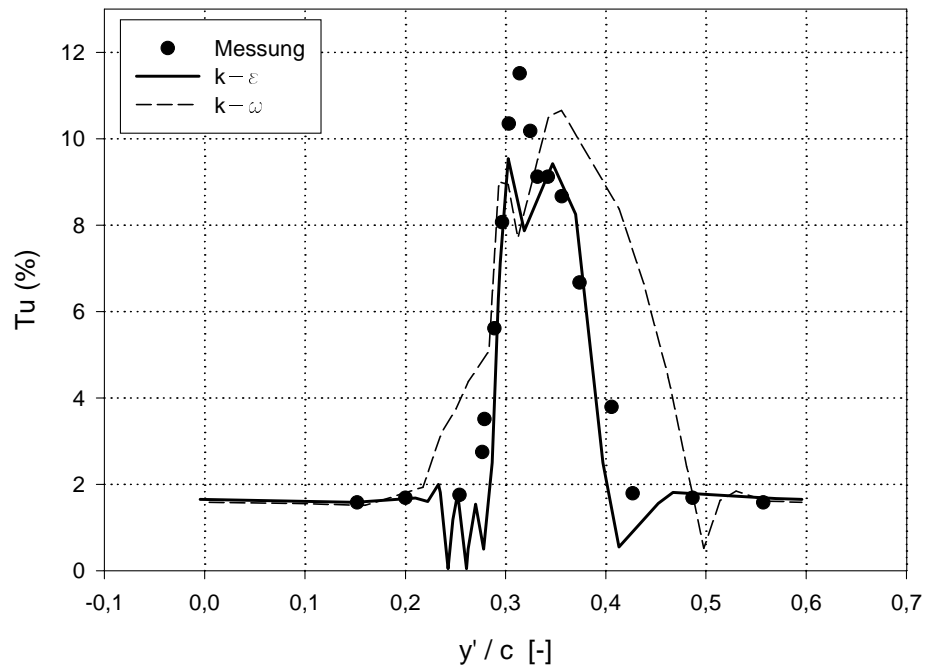
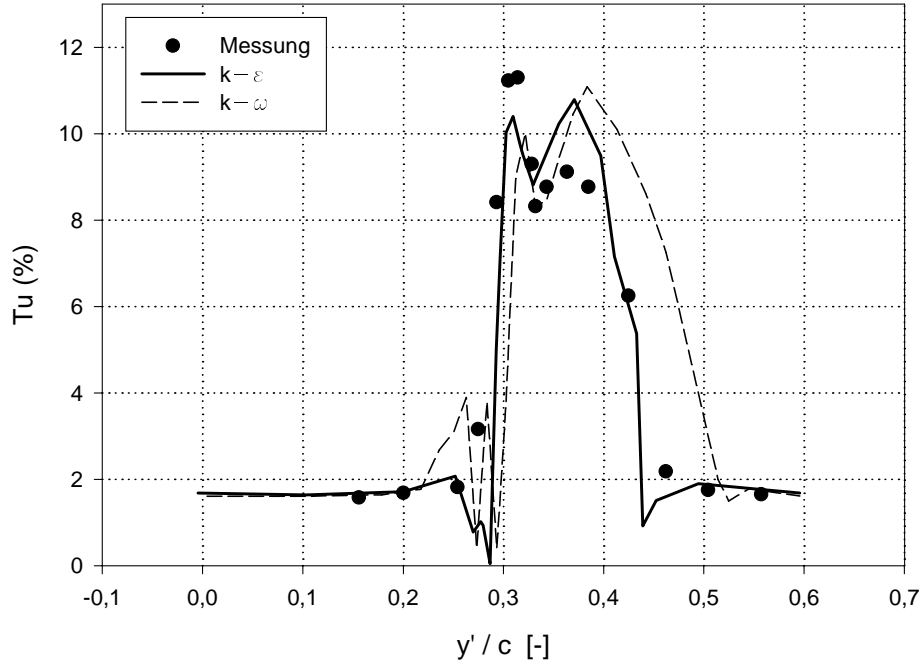


Abbildung 6.65: Turbulenzgrad bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene e_1

Abbildung 6.66: Turbulenzgrad bei $\beta_1 = 40^\circ$, Auswertungsebene e_2 Abbildung 6.67: Turbulenzgrad bei $\beta_1 = 43^\circ$, Auswertungsebene e_1



Abbildung 6.70: Turbulenzgrad bei $\beta_1 = 46^\circ$, Auswertungsebene e_2

6.8 Gemittelte Strömungsgrößen

Besonders interessant, um die Qualität der Ergebnisse zu überprüfen, ist die Erstellung der gemittelten Abströmwinkel $\bar{\beta}_2$ und des gemittelten Totaldruckverlustbeiwertes $\bar{\omega}_1$ als Funktionen des Anströmwinkels β_1 . Der Totaldruckverlustbeiwert reagiert dabei besonders empfindlich auf Mängel in der Turbulenzmodellierung und auf Fehler durch numerische Dissipation. Die mit dem FIDAP Programm berechneten Werte werden mit den von *Sanger* und *Shreeve* [11] gemessenen Werten verglichen.

6.8.1 Mittelungsverfahren

Der Totaldruckkoeffizient in einer Berechnungsebene hinter der Schaufel ist so definiert:

$$\omega_1(y') = \frac{p_{t1} - p_{t2}(y')}{p_{t1}} \quad (6.7)$$

Diese lokale Größe wird in den mit der Massenstromdichte gewogenen teilungsgemittelten Totaldruckkoeffizient umgerechnet. Diese Mittelung für die berechneten Werte wurde mit dem Visualisierungsprogramm IDL durchgeführt. Dieses Programm bietet die Möglichkeit, durch Eingeben der in einer Berechnungsebene ermittelten Werte von β_2 , ω_1 und w_2 die teilungsgemittelten Größen für einen bestimmten Anströmwinkel β_1 festzustellen.

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\int_0^s \omega_1(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (6.8)$$

In Gleichung (6.8) tritt die Dichte nicht auf, da bei den vorliegenden kleinen Machzahlen die Strömung als inkompressibel angesehen werden kann.

Die selbe Mittelung angewendet für die Abströmgeschwindigkeit und den Abströmwinkel lautet:

$$\bar{w}_2 = \frac{\int_0^s w_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (6.9)$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\int_0^s \beta_2(y') w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'}{\int_0^s w_2(y') \cos(\beta_2(y')) dy'} \quad (6.10)$$

6.8.2 Berechnungsergebnisse

Der teilungsgemittelte Abströmwinkel $\overline{\beta}_2$ in Abhängigkeit des Anströmwinkel β_1 ist in Abb. 6.71 dargestellt. Diese Winkel stellen wichtige Größen dar, da sie in den Geschwindigkeitsdreiecken verwendet werden.

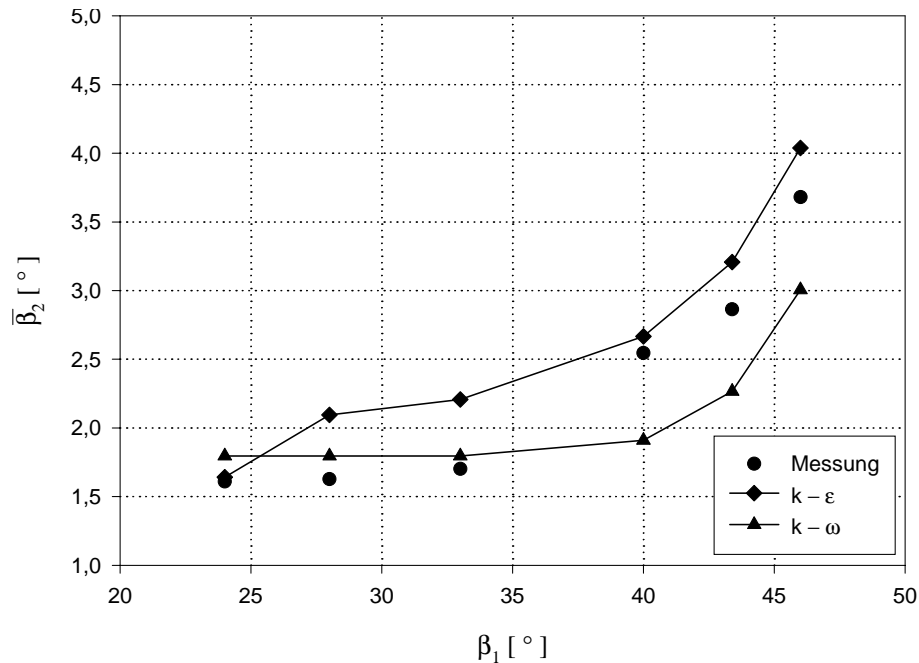


Abbildung 6.71: Der Abströmwinkel in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Mit zunehmendem Anströmwinkel nimmt der gemessene Abströmwinkel erwartungsgemäß leicht zu. Dieser Trend wird auch von den Berechnungen gut wiedergegeben. Dabei ist zu erkennen, daß das k - ϵ Modell bei positiver Inzidenz ($\beta_1 \geq 40^\circ$) und das k - ω Modell bei negativer Inzidenz ($\beta_1 < 40^\circ$) die besseren Ergebnisse liefert. Die größten Abweichungen zwischen Messung und Rechnung betragen etwa $\pm 0,7^\circ$.

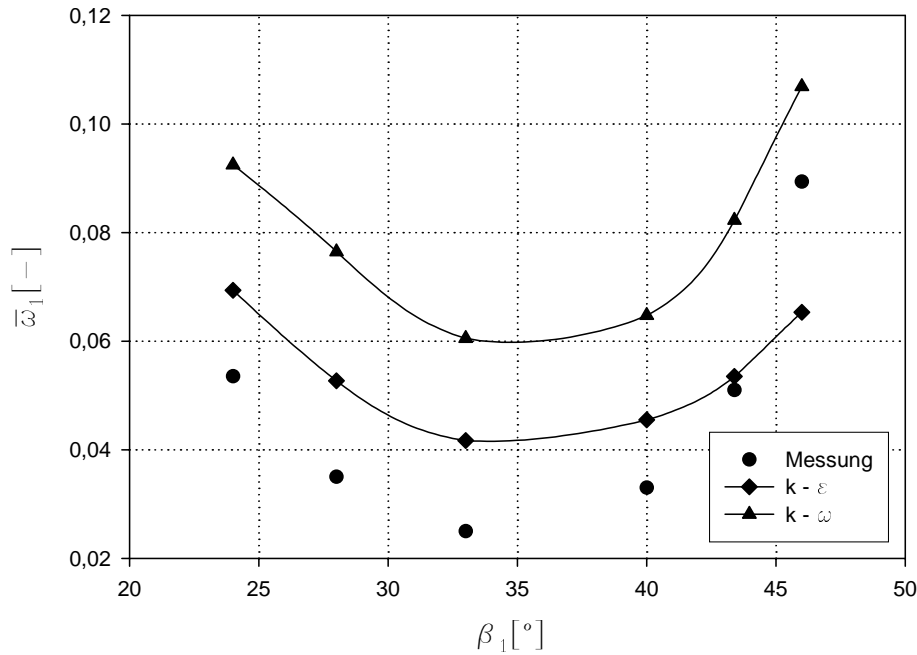


Abbildung 6.72: Der Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit vom Anströmwinkel

Abbildung 6.72 zeigt den Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit des Anströmwinkels β_1 . Der gemessene Totaldruckverlustbeiwert hat den kleinsten Wert bei $\beta_1 = 33^\circ$. Bei davon abweichenden Anströmwinkeln steigt der Totaldruckverlustbeiwert an, wobei der Anstieg bei positiver Inzidenz ($\beta_1 \geq 40^\circ$) stärker ausfällt.

Aufgrund der mangelhaften Beschreibung des laminar-turbulent Umschlages durch die beiden verwendeten Turbulenzmodelle ist eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung nicht zu erwarten. Bei qualitativer Übereinstimmung werden durchwegs deutlich zu hohe Totaldruckverlustbeiwerte berechnet. Dabei liefert das $k-\omega$ Modell gegenüber dem $k-\epsilon$ Modell die schlechteren Ergebnisse. Eine Ausnahme stellt der maximale Anströmwinkel ($\beta_1 = 46^\circ$) dar. Dort liefert das $k-\epsilon$ Modell gegenüber der Messung einen zu geringen Totaldruckverlustbeiwert.

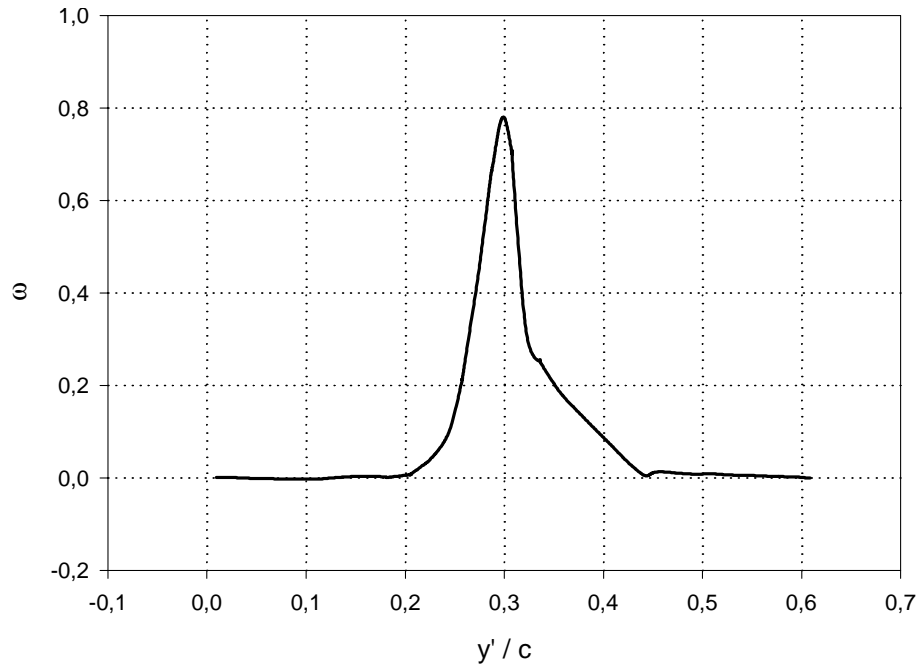


Abbildung 6.73: Der lokale Druckverlustbeiwert für $\beta_1 = 28^\circ$, Berechnungsebene d1, k - ϵ Turbulenzmodell

Die Ursache für den Unterschied zwischen Messung und Rechnung kann aus Abb. 6.73 abgelesen werden. Dort ist beispielhaft für den Anströmwinkel $\beta_1 = 28^\circ$ der Verlauf des lokalen Druckverlustbeiwertes dargestellt. Als Turbulenzmodell wurde das k - ϵ Modell gewählt. Aus Abb. 6.73 ist ersichtlich, daß in der ungestörten Strömung keine Druckverluste berechnet werden, was der Realität entspricht. Die zu hohen teilungsgemittelten Totaldruckverlustbeiwerte müssen ihre Ursache daher in zu hohen lokalen Druckverlustbeiwerten im Bereich der Nachlaufdüse haben. Dies ist wiederum auf die Schwächen der beiden Turbulenzmodelle bei der Beschreibung des laminar-turbulent Überganges zurückzuführen.

Kapitel 7

Inverse Auslegung

7.1 Einleitung

Im modernen Turbomaschinenbau versucht man durch den Einsatz neuer Technologien die Forderung nach Energieeinsparung und Leistungskonzentration zu erfüllen. In der Strömungsmechanik hat man überhaupt in den letzten Jahren versucht, numerische Feldberechnungsverfahren zu entwickeln, deren Anwendung durch die Ausweitung der Großrechnerkapazitäten ermöglicht wurde, auch wenn die Darstellung komplexer Strömungsvorgänge nur näherungsweise möglich ist. Die Berechnung und Beurteilung der Strömung ermöglicht damit, die Auslegung von verlustarmen Maschinen zu vereinfachen und die Anzahl der zeit- und kostenintensiven Experimente zu verringern.

Man weiß, daß die bei Verdichterschaufeln auftretende starke Verzögerung auf der Saugseite eine Ablösung der Strömung verursachen kann, die die Verluste des Gitters erhöhen würde. Diese verlustbehaftete Ablösung kann durch eine entsprechende Gestaltung der Profilform vermieden oder zumindest abgeschwächt werden. Diese verlustarme Profilform zu erreichen, ist das Ziel der inversen Auslegung.

Um eine genaue Analyse der Verluste zu erreichen, sollte man die Reibung und die Sekundärströmungen berücksichtigen, da diese zwei Faktoren die Verluste beeinflussen. Das würde zu einer dreidimensionalen Betrachtung des Problems führen. Aufgrund der noch sehr hohen Rechenzeiten für diese Berechnung, ist es während der Auslegungsphase sinnvoll, einige Vereinfachungen einzuführen: die Analyse beschränkt sich auf ebene Strömungen. Im Fall eines Gitters wird die Berechnung auf Umfangsflächen durchgeführt.

Es gibt zwei allgemeine Arten von theoretischen Problemen bei der Berechnung einer zweidimensionalen Strömung [7]:

1. das direkte Problem
2. das inverse Problem.

Im ersten Fall wird die Geschwindigkeitsverteilung für eine vorgeschriebene Gestalt der Schaufel berechnet; im zweiten Fall ermittelt man die Schaufel aus einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung auf der Profiloberfläche (Abb.7.1).

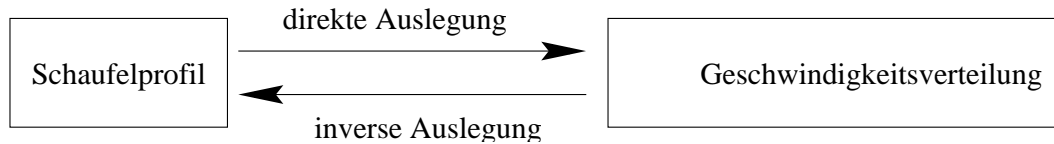


Abbildung 7.1: Direkte und inverse Auslegung

In diesem Kapitel wird das inverse Problem für eine zweidimensionale, rotationsfreie Strömung mit vorgeschriebenen Geschwindigkeiten analysiert. Notwendig für ein derartiges Entwurfsverfahren ist die Vorgabe der Geschwindigkeits- bzw. Druckverteilung auf der Profilkontur, weil diese für die entstehenden Verluste maßgebend ist. Zuerst wird die Theorie des inversen Auslegungsverfahrens, wie sie von *Stanitz* [14] beschrieben wurde, betrachtet. Ein Beispiel als Anwendung des inversen Auslegungsverfahrens wird präsentiert. Am Schluß dieses Kapitels werden einige Betrachtungen über jüngste Entwicklungen im Bereich der inversen Schaufelauslegung angestellt.

7.2 Theorie des inversen Auslegungsverfahrens

Die wichtigsten Eigenschaften eines Auslegungsverfahrens mit vorgegebenen Geschwindigkeiten sind:

1. Verluste durch Ablösung der Grenzschicht können vermieden werden durch eine vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung, bei der die Verzögerung nicht zu schnell geschieht.
2. Verluste durch Verdichtungsstoß in kompressiblen Strömungen und Kavitation bei inkompressiblen Strömungen können vermieden werden.

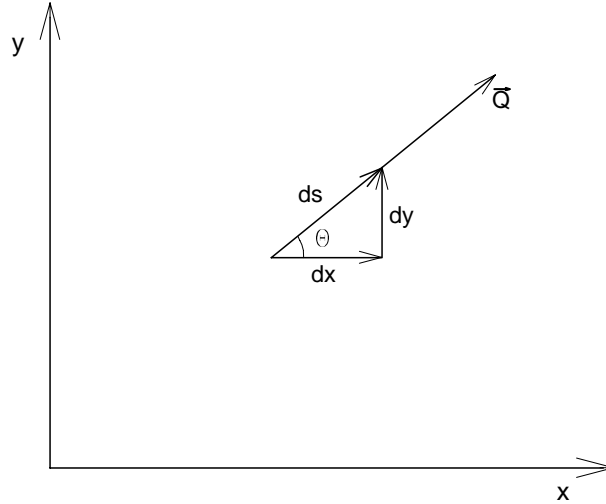
Im Allgemeinen kann man sagen daß, wenn die vorgegebene Geschwindigkeit einer Wand entlang (Druckseite) sich von der Geschwindigkeit auf der anderen Wand unterscheidet (Saugseite), dann ist der Abströmwinkel anders als der Anströmwinkel. Diese Richtungsänderung kann nicht frei gewählt werden, sondern hängt von der vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung der Wände entlang ab. Gleichungen wurden entwickelt, um diese Richtungsänderung zu berechnen, und zwei Lösungsmethoden wurden festgestellt, nämlich die Relaxations-Methode und die Lösung durch *Green*'sche Funktion. Man betrachtet nur inkompressible und nicht viskose Strömungen. Die Annahme von zweidimensionalen, nicht viskosen und rotationsfreien Strömungen begrenzt diese Methode auf die Berechnung von Kanälen mit dünner Grenzschicht und überhaupt auf Geschwindigkeitsverteilungen die keine so rasche Verzögerung besitzen, daß eine Ablösung der Grenzschicht auftritt. Eine Ablösung würde in der Tat die Berechnung der Gestalt des Schaufelprofils ändern und die Eigenschaften der Strömung völlig verfälschen. In Kanälen mit dicker laminarer Grenzschicht kann das inverse Auslegungsverfahren nicht benützt werden, weil die Rotation der Strömung wichtig wird und Sekundärströmungen auftreten, die nicht durch die zweidimensionale Berechnung berücksichtigt werden.

7.2.1 Strömungsfeld

Man nimmt an, dass das Strömungsfeld in der kartesischen x - y -Ebene liegt. In jedem Punkt des Strömungsfeldes wird der Geschwindigkeitsvektor durch Betrag und Richtung ausgedrückt. Der Betrag w wird auf den Wert der konstanten Abströmgeschwindigkeit w_2 bezogen:

$$Q = \frac{w}{w_2} \quad (7.1)$$

Die Strömungsrichtung Θ ist in jedem Punkt des Kanals von der x -Achse gemessen. Die Abbildung (7.2) zeigt das Koordinatensystem.

Abbildung 7.2: Betrag und Richtung der Geschwindigkeit in der x - y -Ebene

Der differentielle Abstand ds hat dieselbe Richtung wie \vec{Q} , das heißt, einer Stromlinie entlang. Durch den Winkel Θ kann man ihn mit den kartesischen Koordinaten x und y verbinden:

$$dx = ds \cos \Theta \quad (7.2)$$

$$dy = ds \sin \Theta \quad (7.3)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, daß sämtliche Längen mit der Kanalhöhe in der Abströmebene dimensionslos gemacht werden.

7.2.2 Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential

Es ist für die hier betrachteten stationären Strömungen sinnvoll, als Koordinaten die Stromlinien und deren Normalen zu verwenden. Wenn die Kontinuitätsbedingung erfüllt wird, kann man eine Stromfunktion ψ definieren

$$d\psi = \rho Q dn \quad (7.4)$$

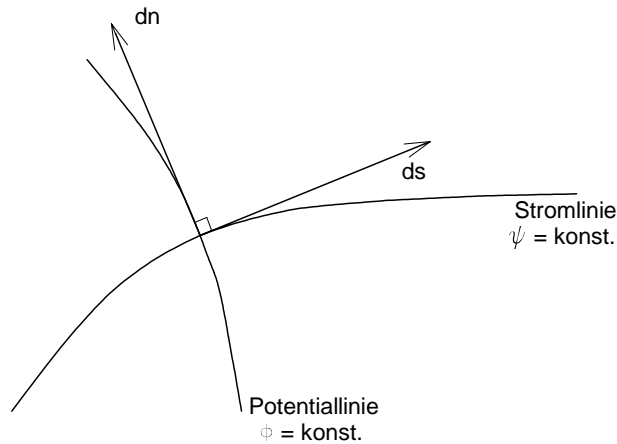
wobei dn ein differentieller Abstand senkrecht zu einer Stromlinie ist. Entlang einer Stromlinie ist $dn = 0$ und daher die Stromfunktion $\psi = \text{konst.}$ Die Dichte wird mit der Dichte im Ruhezustand dimensionslos gemacht. Daraus folgt, daß es sich auch bei der Stromfunktion ψ und der in weiterer Folge angegebenen Potentialfunktion ϕ ebenfalls um dimensionslose Größen handelt.

Wenn die Strömung auch rotationsfrei ist, kann man ein Geschwindigkeitspotential definieren

$$d\phi = Q ds \quad (7.5)$$

Senkrecht zu einer Stromlinie ist ds gleich Null, das heißt, das Geschwindigkeitspotential ist konstant. Die Abb. 7.3 faßt diese Begriffe zusammen.

Die Lösung einer zweidimensionalen Strömung hängt von den Randbedingungen ab. Die Einführung dieses neuen Koordinatensystems ist notwendig, weil die Geometrie der Schaufel in der physikalischen x - y -Ebene unbekannt ist. Deswegen kann man mit einem solchen System keine Randbedingungen bestimmen. Das ϕ - ψ Koordinatensystem erlaubt Randbedingungen festzustellen, weil man die Lage der Linien, bei denen die Geschwindigkeiten vorgegeben sind,

Abbildung 7.3: *Stromfunktion und Geschwindigkeitspotential*

in dieser Ebene kennt. Die Grenzen des Rechenbereiches fallen mit konstanten Werten der Stromfunktion ψ zusammen. Die Geschwindigkeitsverteilung als Funktion von ϕ ist bekannt, weil

$$Q = Q(s) \quad (7.6)$$

vorgegeben ist und die Funktion

$$\phi = \phi(s) \quad (7.7)$$

durch Integration der Glg. (7.5) erreichbar ist. Aus beiden Werten erhält man schließlich

$$Q = Q(\phi). \quad (7.8)$$

Durch die Technik des inversen Auslegungsverfahrens braucht man zuerst eine Differentialgleichung, die die Geschwindigkeitsverteilung in der ϕ - ψ Ebene beschreibt. Durch die Lösung dieser Differentialgleichung berechnet man die Geschwindigkeitsverteilung, die zur Ermittlung der Verteilung der Strömungsrichtung dient, aus der die Kanalwände in der x - y Ebene folgen. Dieses Verfahren wird in der Abb. 7.4 schematisiert.

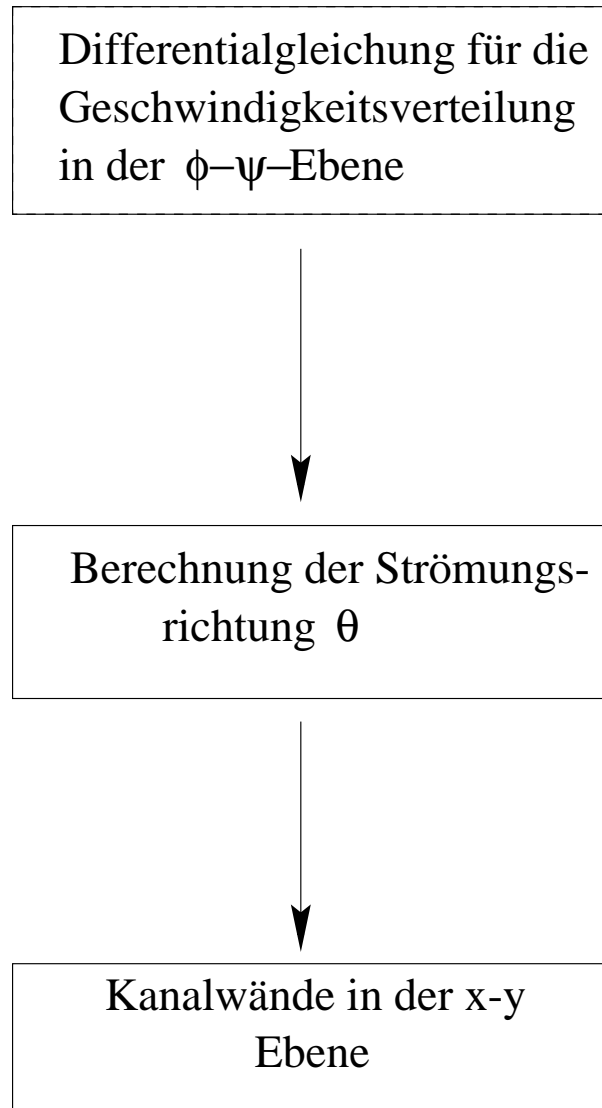


Abbildung 7.4: Darstellung des inversen Auslegungsverfahrens

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung in der ϕ - ψ Ebene ist nicht linear und wird durch numerische Methoden gelöst.

7.3 Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung in der ϕ - ψ Ebene erhält man durch die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung für rotationsfreie Strömung (siehe Abb.7.5):

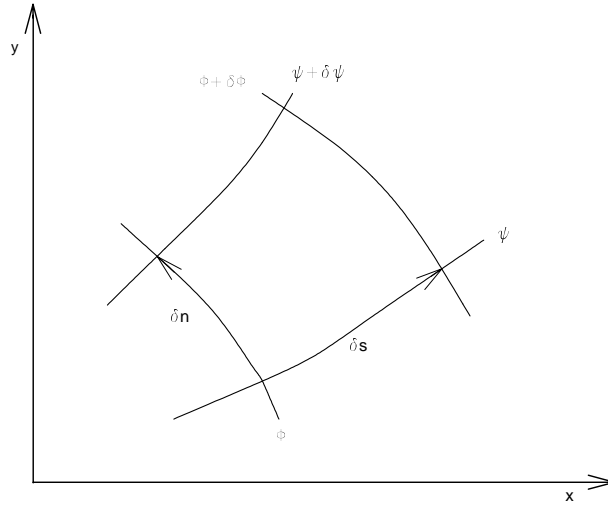


Abbildung 7.5: Stromfunktion- und Geschwindigkeitspotentiallinien in der x-y Ebene

1) Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho Q \delta n) = 0. \quad (7.9)$$

Wenn man jetzt eine Umrechnung auf logarithmische Größen einsetzt, erhält man (wegen der Eigenschaften des Logarithmus)

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial s} + \frac{\partial \ln Q}{\partial s} + \frac{1}{\delta n} \frac{\partial (\delta n)}{\partial s} = 0, \quad (7.10)$$

weil

$$\frac{\partial \ln \delta n}{\partial s} = \frac{1}{\delta n} \frac{\partial (\delta n)}{\partial s} \quad (7.11)$$

ist.

Für die angewendete Geometrie gelten die Gleichungen

$$\frac{1}{\delta n} \frac{\partial (\delta n)}{\partial s} = \frac{\partial \Theta}{\partial n} \quad (7.12)$$

und

$$\frac{1}{\delta s} \frac{\partial (\delta s)}{\partial n} = -\frac{\partial \Theta}{\partial s} \quad (7.13)$$

so daß die Gleichung (7.10)

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial \phi} \frac{d\phi}{ds} + \frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \frac{d\phi}{ds} + \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dn} = 0 \quad (7.14)$$

wird.

Wenn man jetzt die Glg.(7.4) und (7.5) in die Glg.(7.14) einsetzt, hat man schliesslich

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \phi} + \frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} = 0. \quad (7.15)$$

Diese letzte Gleichung stellt die Kontinuitätsgleichung in der ϕ - ψ Ebene dar.

2) Bewegungsgleichung

Unter Annahme rotationsfreier Strömung ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial n}(Q\delta s) = 0. \quad (7.16)$$

Wenn man jetzt auf logarithmische Größen umrechnet, erhält man:

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial n} + \frac{1}{\delta s} \frac{\partial (\delta s)}{\partial n} = 0. \quad (7.17)$$

Durch Anwendung der Glg.(7.13) erhält man

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial n} - \frac{\partial \Theta}{\partial s} = 0. \quad (7.18)$$

Wenn man jetzt die Glg.(7.4) und (7.5) in die Glg.(7.18) einsetzt, hat man schliesslich

$$\rho \frac{\partial \ln Q}{\partial \psi} - \frac{\partial \Theta}{\partial \phi} = 0. \quad (7.19)$$

Diese letzte Gleichung stellt die Bewegungsgleichung in der ϕ - ψ Ebene dar.

Wenn man nun die Kontinuitätsgleichung (7.15) nach ϕ und die Bewegungsgleichung (7.19) nach ψ differenziert und addiert, ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \ln \rho}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \phi^2} - \frac{\partial \ln \rho}{\partial \phi} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \phi} + \frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \right) + \rho^2 \frac{\partial \ln Q}{\partial \psi} \frac{\partial \ln \rho}{\partial \psi} + \rho^2 \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \psi^2} = 0 \quad (7.20)$$

Diese Gleichung ergibt die Verteilung von $\ln Q$ in der ϕ - ψ -Ebene; dadurch kann man die Geschwindigkeitsverteilung ermitteln.

7.4 Geometrie der Kanalwände

Nach der Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung aus der Glg.(7.20), kann die Gestalt der Wände des Kanals in der physikalischen x - y Ebene durch die Verteilung der Strömungsrichtung Θ bestimmt werden.

7.4.1 Strömungsrichtung Θ

Die Richtung der Strömung einer Stromlinie entlang (d.h., die Stromfunktion ist konstant) kann man durch die folgende Gleichung ermitteln:

$$\Theta = \int_{\psi} \rho \frac{\partial \ln Q}{\partial \psi} d\phi \quad (7.21)$$

Die Konstante der Integration wird gewählt, um einen bestimmten Wert von Θ bei einem Wert von ϕ jeder Stromlinie entlang zu erreichen.

Die Richtung der Strömung entlang einer Linie mit konstantem Geschwindigkeitspotential ϕ erhält man aus der Glg.(7.15), die durch Integration lautet:

$$\Theta = - \int_{\phi} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \phi} + \frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \right) d\psi \quad (7.22)$$

Nach der Berechnung dieser zwei Integrale kennt man die Verteilung der Strömungsrichtung in der ϕ - ψ Ebene. Jetzt bleibt es nur, durch diese berechnete Größe die Koordinaten des Kanals in der x - y Ebene zu bestimmen.

7.4.2 Koordinaten der Kanalwände

Entlang einer Linie mit konstanten ψ in der ϕ - ψ Ebene gilt

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \left(\frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\phi} \right)_{\psi}. \quad (7.23)$$

Wenn man nun diese Gleichung mit den Glg.(7.2) und (7.5) kombiniert, erhält man

$$x = \int_{\psi} \frac{\cos \Theta}{Q} d\phi. \quad (7.24)$$

In übereinstimmender Weise erreicht man

$$x = - \int_{\phi} \frac{\sin \Theta}{\rho Q} d\psi, \quad (7.25)$$

$$y = \int_{\psi} \frac{\sin \Theta}{Q} d\phi, \quad (7.26)$$

$$y = \int_{\phi} \frac{\cos \Theta}{\rho Q} d\psi. \quad (7.27)$$

Die Gleichungen (7.24) bis (7.27) bestimmen die Verteilung von x und y in der ϕ - ψ Ebene bzw. die Gestalt der Stromlinien und der Linien mit konstantem Geschwindigkeitspotential in der physikalischen x - y Ebene. Dabei sind die Glg.(7.24) und (7.26) von besonderer Bedeutung, weil sie entlang einer Linie $\psi = konst.$ die Konturen der Kanalwände ergeben.

7.4.3 Umlenkungswinkel

Gibt man an den beiden Kanalwänden unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen vor, so kommt es zu einer Umlenkung der Strömung. Dabei ist der Umlenkungswinkel $\Delta\Theta$ die Differenz zwischen Abström- und Anströmwinkel:

$$\Delta\Theta = \beta_2 - \beta_1 \quad (7.28)$$

Für inkompressible Strömungen gilt:

$$\Delta\Theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \left[\left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \right)_{\psi=1} - \left(\frac{\partial \ln Q}{\partial \phi} \right)_{\psi=0} \right] d\phi \quad (7.29)$$

7.5 Numerisches Beispiel

Um den Begriff des inversen Auslegungsverfahrens verständlicher zu machen, wird jetzt ein numerisches Beispiel präsentiert, das im NACA-Report 1115 [14] von *Stanitz* berechnet wurde. Das Profil eines Krümmers mit vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilungen wird bestimmt. Man nimmt an, daß die Strömung inkompressibel ist.

7.5.1 Vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeit Q muss gleich 0.5 am Eintritt und gleich 1 am Austritt des Kanals für beide Kanalwände sein. Der Übergang von $Q = 0.5$ bis $Q = 1$ wird als Funktion der Bogenlänge s vorgegeben (siehe Glg.(7.30) und Abb.7.6):

$$\begin{aligned} Q &= 0.5 & s &\leq 0 \\ Q &= \frac{1}{2} + \frac{s^2}{6} - \frac{s^3}{27} & 0 \leq s \leq 3.0 \\ Q &= 1.0 & s &\geq 3.0 \end{aligned} \quad (7.30)$$

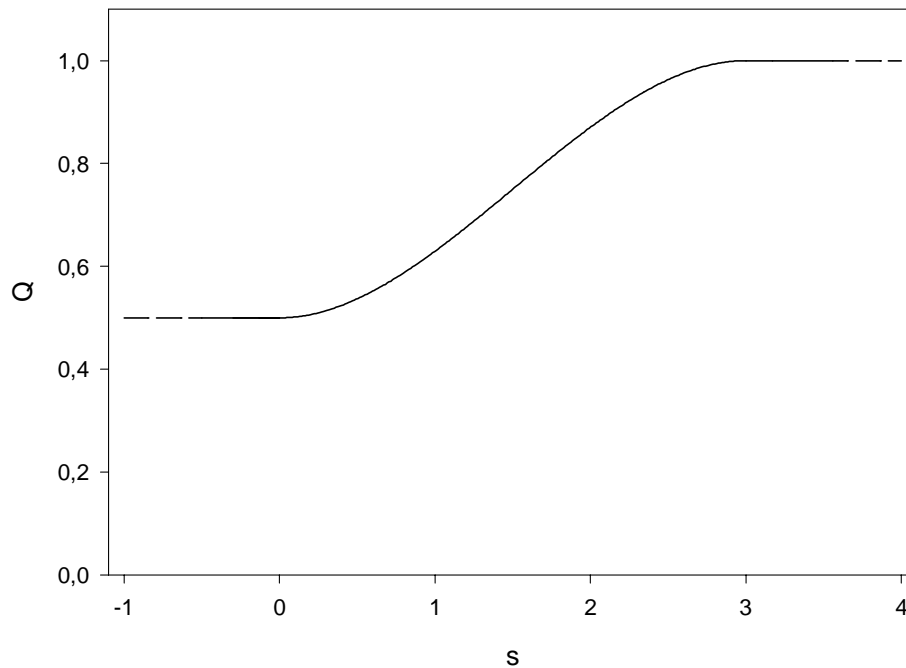


Abbildung 7.6: Vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung der Kanalwand entlang [14]

Wenn man jetzt $\phi = \phi(s)$ aus der Glg.(7.5) und (7.30) berechnet, erhält man Glg.(7.31).

$$\begin{aligned} \phi &= 0.5s & s &\leq 0 \\ \phi &= \frac{s}{2} + \frac{s^3}{18} - \frac{s^4}{108} & 0 \leq s \leq 3.0 \\ \phi &= -0.75 + s & s &\geq 3.0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Aus dieser letzten Gleichung kann man $\ln Q$ ermitteln, dessen Darstellung im Abb.7.7 gezeigt wird (innere Wand).

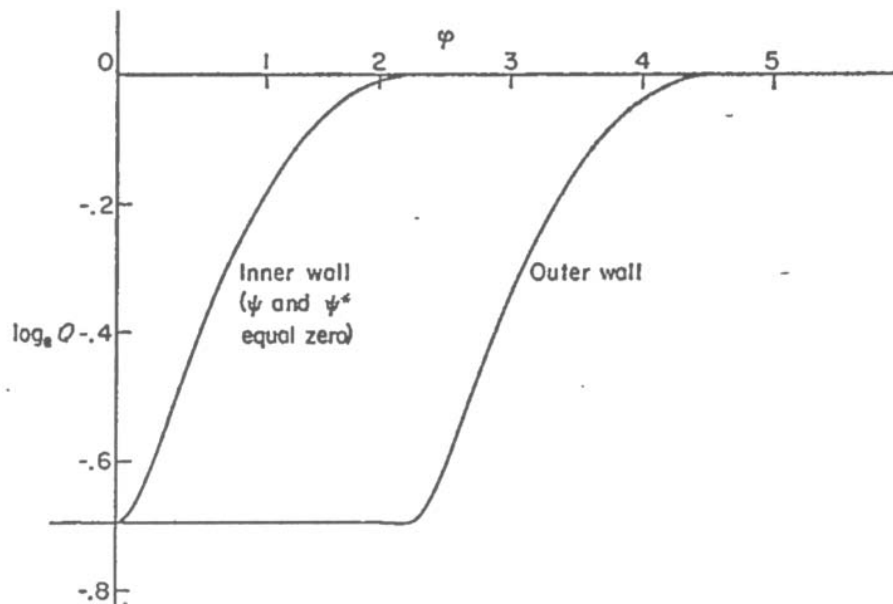


Abbildung 7.7: Vorgegebene Geschwindigkeitsverteilung als Funktion von ϕ [14]

Gegenüber der inneren Kanalwand ist die Geschwindigkeitsverteilung an der äußeren Kanalwand um $\phi = 2,25$ verschoben. Dadurch entsteht bei gleichem ϕ ein Geschwindigkeitsunterschied zwischen innerer und äußerer Kanalwand. Je größer dieser Geschwindigkeitsunterschied ist, desto stärker wird die Strömung umgelenkt.

7.5.2 Ergebnisse

Die Ergebnisse dieser Berechnung sind in Abb.7.8 bis 7.10 dargestellt.