

DIPLOMARBEIT

***Zeitlich harmonisch bewegte Platte
im Strom eines idealen Fluids. Untersuchung von
Kraft, Leistung und Wirkungsgrad***

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. DI Dr. Herbert Steinrück
E322
Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Markus Müllner
9925690
2120 Wolkersdorf, Am Stiegl 5

Wien, im Jänner 2008

Zusammenfassung

Die Strömung um eine zeitlich harmonisch bewegte ebene Platte in einem sich stromaufwärts gleichförmig bewegenden reibungslosen Fluid konstanter Dichte wird analytisch untersucht. Es wird zweidimensionale Strömung vorausgesetzt. Die durch die Bewegung der Platte verursachte Strömung ist klein im Vergleich zur Parallelströmung. Asymptotische Entwicklung und Potentialwirbelbelegung ergeben lineare Integralgleichungen für die kinematische Randbedingung. Die durch die an der Hinterkante abgehenden Wirbel verursachte Nachlaufströmung wird modelliert. Für Kombinationen von Hub- und Schwenkbewegung der Platte bei unterschiedlicher Frequenz werden die zeitlich gemittelten Größen von Vortriebskraft, Leistung und Vortriebswirkungsgrad berechnet. Wie für gleichförmig bewegte Körper kann auch im instationären Fall dem Fluidstrom Energie entzogen werden. Die Bewegungsformen mit maximaler Leistungsentnahme werden genannt. Vortrieb und Leistung verschwinden für Bewegungen, bei denen keine Wirbel in das Nachlaufgebiet abgegeben werden. Zur Erzeugung einer Vortriebskraft muss stets Leistung zugeführt werden. Bewegungen der Platte mit hohem Vortriebswirkungsgrad bei vorgegebener Vortriebskraft werden aufgezeigt.

Danksagungen

Herrn Ao. Prof. Dr. Herbert Steinrück danke ich besonders für die ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit. Er hatte stets ein offenes Ohr für Fragen und stand jederzeit für Besprechungen zur Verfügung.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern und meinen Großeltern. Sie waren es, die mir durch ihre finanzielle und persönliche Unterstützung das Studium und letztendlich auch diese Arbeit ermöglicht haben.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinem Bruder Thomas für die lebhaften Diskussionen auf dem Gebiet der Strömungsmechanik bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Gegenstand der Arbeit	4
1.2	Literaturübersicht	5
1.3	Zielsetzung	6
1.4	Dimensionslose Darstellung	6
1.5	Gliederung	6
2	Modellannahmen	8
2.1	Grundgleichungen	8
2.1.1	Potentialströmung	8
2.1.2	Abströmbedingung	9
2.1.3	Nachlauf	9
2.2	Bewegung mit kleiner Amplitude	10
2.2.1	Entwicklung der kinematischen Randbedingung	10
2.2.2	Nachlauf in Körperrnähe	11
2.3	Wirbelbelegung	12
2.3.1	Kinematische Randbedingung	12
2.3.2	Hinterkanten-Bedingung	13
2.3.3	Wirbel im Nachlauf	13
3	Zeitlich harmonische Bewegung	14
3.1	Zeitlich harmonischer Ansatz	14
3.2	Analytische Lösung	16
3.2.1	Lösung der Integralgleichung	16
3.2.2	Wirbeldichte an der Hinterkante	17
3.2.3	Nachlauffreie Bewegung	19
4	Vortrieb und Leistung	20
4.1	Impuls- und Leistungsbilanz	20
4.2	Bewegung mit kleiner Amplitude	21
4.2.1	Kräfte und Leistung durch Druck entlang der Oberfläche	21
4.2.2	Kraft aus Strömung um die Körper-Vorderkante	22
4.2.3	Zeitlich harmonische Bewegung	23

4.2.4	Vortriebswirkungsgrad	25
5	Zeitlich harmonisch bewegte Platte	26
5.1	Darstellung der Bewegung	26
5.2	Wirbeldichte an der Hinterkante	28
5.3	Nachlauffreie Bewegung	29
5.4	Leistung	31
5.5	Vortriebskraft	38
5.6	Vortriebswirkungsgrad	42
5.7	Nullstellen von Vortriebskraft und Leistung	46
5.8	Effiziente Vortriebserzeugung	51
6	Zusammenfassung	53
A	Einige Integrale	57

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Gegenstand der Arbeit

In dieser Arbeit werden Vortriebskraft und Leistung auf einen ungleichförmig bewegten schlanken Körper in einem als zweidimensional vorgegebenen Fluidstrom untersucht. Wir interessieren uns dabei besonders für den Fall der ebenen Platte in zeitlich harmonischer Bewegung mit kleinen Auslenkungen. Zur Beschreibung des Fluids wird die klassische Potentialtheorie herangezogen. Diese Annahmen ermöglichen eine weitgehend analytische Lösung der Aufgabenstellung. Es gelingt daher, Vortriebskraft und Leistung als einfache Funktionen der Körperbewegung zu beschreiben.

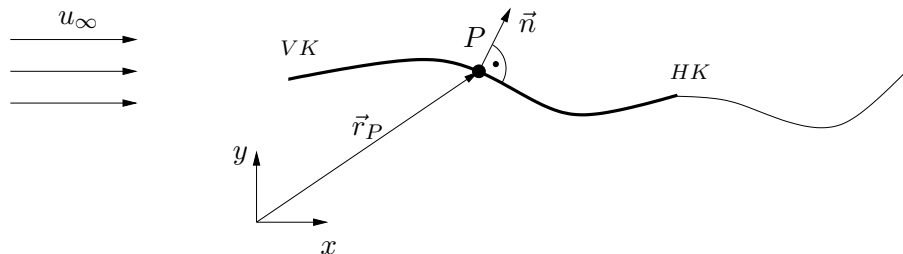


Abbildung 1.1: Schlanker Körper im Fluidstrom

In Abb. 1.1 ist die Problemstellung in allgemeiner Form dargestellt. Wir beschränken uns dabei auf zweidimensionale Strömung. Weit stromaufwärts des Körpers hat das Fluid die Geschwindigkeit u_∞ in x -Richtung des kartesischen Koordinatensystems. Die Körperlänge L ist die Bogenlänge von der Vorderkante VK bis zur Hinterkante HK . Der Körper ist schlank im Vergleich zu seiner Länge. Er ist biegeweich, jedoch in Längsrichtung undehnbar. Jeder Punkt P auf dem Körper ist durch den Ortsvektor \vec{r}_P beschrieben. Die momentane Richtung der Körperkontur im Punkt P ist durch den Normalenvektor \vec{n} festgelegt. Die Bewegung des Körpers ist zu jedem Zeitpunkt gegeben (Zwangsbewegung).

Diese noch sehr allgemeine Formulierung wird in den nächsten Kapiteln mithilfe weiterer Annahmen stark vereinfacht, sodass schließlich eine mit kleinen Auslenkungen zeitlich harmonisch

bewegte ebene Platte beschrieben werden kann. Im folgenden Abschnitt soll die zum Thema dieser Arbeit reichlich vorhandene Literatur kurz angeführt werden.

1.2 Literaturübersicht

Die Erzeugung von Vortrieb durch schlagende Bewegung des Körpers oder Teilen des Körpers kann häufig in der Tierwelt beobachtet werden, man denke an den Flügelschlag der Vögel oder die Bewegungen von Fischen. Die Kombination von Hub- und Schwenkbewegung beim Schwingenflug der Vögel wurde bereits von Lilienthal [19] beobachtet. Knoller [15] und Betz [2] erkannten unabhängig voneinander, dass ein schlagender Flügel effektive Anstellwinkel bewirkt und daraus Auftrieb und Vortrieb resultieren. Katzmayr [14] lieferte als erster den experimentellen Nachweis für den Knoller-Betz Effekt, indem er in einem periodisch die Richtung ändernden Luftstrom an einem stillstehenden Profil die Schubkraft maß.

Die erste theoretische Beschreibung der Schuberzeugung durch periodische Bewegung geht auf Birnbaum [3] zurück. Er untersucht in seiner Arbeit den 2D Grenzfall der ebenen Platte und löst die Gleichungen näherungsweise durch eine Reihenentwicklung nach kleinen Schlagfrequenzen. Die exakte analytische Lösung für die ebene Platte stammt von Küssner [16] und Theodorsen [25]. Das Modell von Theodorsen platziert die Nachlaufwirbel entlang einer ebenen Fläche. Mit diesem Modell berechnete Garrick [8] den Vortrieb einer schlagenden Platte. Er zeigt dass eine Platte in reiner Hubbewegung über den ganzen Schlagfrequenzbereich Vortrieb liefert, während dies für eine um einen Punkt schwenkende Platte nur oberhalb eines gewissen Frequenz-Schwellwerts der Fall ist. Bei kleinen Frequenzen kann daher Flattern auftreten. Von Kármán und Burgers [28] erkannten, dass das Auftreten von Vortriebs- oder Widerstandskraft mit der Position der Wirbel im Nachlauf zusammenhängt. Lighthill [18] beschrieb als erster die Vortriebserzeugung von schnell schwimmenden Fischen mit halbmondförmiger Rückenflosse mithilfe der instationären 2D Profiltheorie. Zur Beschreibung des Verhältnisses von Hub- und Schwenkbewegung der Platte schlägt er den proportionalen „feathering“ Parameter vor. In [17] gibt er dafür einen Wertebereich an, für den die Kombination aus Vortriebskraft und hydrodynamischem Vortriebswirkungsgrad optimal ist. Einen Rückblick auf wichtige Arbeiten zu den Vortriebsmechanismen bei Fischen gibt [24].

In neueren Arbeiten werden hauptsächlich numerische Methoden zur Berechnung verwendet. Triantafyllou *et al.* [26], [1] untersuchten für Plattenbewegungen mit großen Amplituden den Einfluss von Strouhal-Zahl und Anstellwinkel auf die Vortriebskraft und die Dynamik im Nachlauf. Jones und Platzler *et al.* [9], [10] modellierten die Nachlaufströmung hinter der Platte reibungsfrei mit diskreten Einzelwirbeln und fanden gute Übereinstimmung mit Experimenten. Dabei wurde auch die Möglichkeit der Leistungsentnahme aus dem Fluidstrom untersucht. DeLaurier und McKinney [6] führten Windkanaltests mit einem auf diesem Prinzip beruhenden Hubflügelkraftwerk durch.

1.3 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluss unterschiedlicher Bewegungen des umströmten Körpers auf dessen Vortriebskraft und Leistung zu untersuchen. Das Modell für Fluid und Körper ist dabei möglichst einfach gewählt, um viele verschiedene Bewegungsarten untersuchen zu können. Die mit kleiner Amplitude harmonisch bewegte Platte, umgeben von einem Strom idealen Fluids, scheint dafür am besten geeignet.

Wie die Literaturübersicht zeigt, wurde dieser Fragestellung bereits früh nachgegangen. Die Vorgangsweise ist daher im wesentlichen bekannt. Aufgrund der Linearisierung der Gleichungen erhält man weitgehend analytische Lösungen. Die zeitlich gemittelten Größen für Vortrieb und Leistung können direkt durch die Bewegungsparameter der Platte ausgedrückt werden. Dadurch ist die Rechenzeit kurz und man kann somit für jene Parameter, welche die Bewegung der Platte beschreiben, eine große Anzahl von Werten wählen.

Bei der Ergebnisauswertung wird besonderes Augenmerk auf zwei Aspekte gelegt:

- Für jene Bewegungsformen der Platte, bei denen Vortrieb erzeugt wird, sollte der Vortriebswirkungsgrad möglichst hoch sein (effizienter Antrieb)
- Falls die Platte aus dem Fluidstrom Leistung aufnimmt, sollte die entnommene Leistung möglichst groß sein (Einsatz als „Turbine“)

Die Arbeit gibt somit eine Antwort auf die Fragestellung, für welche Kombinationen von Hub- und Schwenkbewegung der Platte ein optimaler Antrieb bzw. maximale Leistungsentnahme vorliegt.

1.4 Dimensionslose Darstellung

Für die dimensionslose Darstellung werden folgende Referenzgrößen verwendet: Als Referenzlänge dient die Körperlänge L . Referenzgeschwindigkeit ist die Fluidgeschwindigkeit weit stromaufwärts des Körpers u_∞ , siehe Abb. 1.1. Die daraus gebildete Referenzzeit ist $t_s = \frac{L}{u_\infty}$. Als Referenzdruck wird der doppelte Staudruck ρu_∞^2 gewählt.

Hinweise zur Nomenklatur: Partielle Ableitungen werden durch tiefgestellte Zeichen dargestellt, Komponenten eines Vektors durch hochgestellte Zeichen in Klammern. Tiefgestellte Zeichen müssen aber nicht immer die Bedeutung einer partiellen Ableitung haben. So bezeichnet beispielsweise ϕ_t die partielle Zeitableitung des Geschwindigkeitspotentials und $r_P^{(x)}$ die x -Komponente des Ortsvektors \vec{r}_P .

1.5 Gliederung

In Kap. 2 sind die Modellannahmen zusammengefasst. Die Grundgleichungen werden für kleine Auslenkungen linearisiert und mit der Methode der Singularitätenbelegung behandelt. Das

Kap. 3 enthält die analytische Lösung der Gleichungen für zeitlich harmonische Bewegungen. Die daraus folgende Wirbeldichtefunktion wird in Kap. 4 zur Darstellung von Vortriebskraft, Leistung und Vortriebswirkungsgrad verwendet. In Kap. 5 werden diese Gleichungen für die ebene Platte weiter vereinfacht und die Ergebnisse der Rechnungen dargestellt. Diese Ergebnisse sind schließlich in Kap. 6 kurz zusammengefasst.

Kapitel 2

Modellannahmen

2.1 Grundgleichungen

2.1.1 Potentialströmung

Das Fluid wird als ideal angenommen (konstante Dichte, Reibungsterme vernachlässigbar). Aufgrund der Randbedingung stromaufwärts ist die Strömung drehungsfrei $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$. Wir führen daher ein Geschwindigkeitspotential ϕ ein

$$\vec{v} = \nabla \phi. \quad (2.1)$$

Wegen der ungleichförmigen Bewegung des Körpers ist die Problemstellung instationär. Die Erhaltungsgleichung für die Masse $u_x^{(x)}(x, y, t) + u_y^{(y)}(x, y, t) = 0$ ergibt zusammen mit Gl. (2.1) die Laplace-Gleichung

$$\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t) = 0. \quad (2.2)$$

Die kinematische Strömungsgleichung enthält also keine Zeitableitungen und entspricht daher zu jedem Zeitpunkt jener für stationäre Strömungen. Allerdings kommen Zeitableitungen in den Randbedingungen und im Druckterm vor.

Die Randbedingung weit stromaufwärts des Körpers kann mit den Referenzgrößen aus Abschn. 1.4 in dimensionsloser Form dargestellt werden als

$$\phi(x, y, t) \sim x + o(1) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

wobei hier vorausgesetzt wird, dass sich der Körper nicht weit vom Koordinatenursprung entfernt. Weil sich der Körper ungleichförmig bewegt, muss man bei Aussagen über die Strömung stromabwärts des Körpers vorsichtig sein. Es ist zu erwarten, dass Gl. (2.3) nicht für alle Stellen stromabwärts des Körpers gilt.

Unter der Annahme, dass die Strömung von der Körperoberfläche *nicht* ablöst (dies schränkt die möglichen Körperbewegungen vermutlich stark ein), ergibt sich die kinematische Randbedingung an der Körperoberfläche mit der Geschwindigkeit der Körperpunkte $\vec{v}_P = \frac{d}{dt} \vec{r}_P$ zu

$(\vec{v} - \vec{v}_P) \cdot \vec{n} = 0$, bzw. mit Gl. (2.1) zu

$$\left(\phi_x(r_P^{(x)}, r_P^{(y)}, t) - \frac{d}{dt} r_P^{(x)} \right) n^{(x)} + \left(\phi_y(r_P^{(x)}, r_P^{(y)}, t) - \frac{d}{dt} r_P^{(y)} \right) n^{(y)} = 0, \quad (2.4)$$

für alle Punkte P der Körperkontur. Das Fluid kann also entlang der Körperoberfläche gleiten. Mit Gl. (2.2)-(2.4) ist das Problem vollständig beschrieben.

Nun geben wir noch eine Gleichung für den Druck an. Durch Einsetzen von Gl. (2.1) in die dimensionslos gemachten Eulergleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \phi_{xt} + \phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy} &= -p_x, \\ \phi_{yt} + \phi_x \phi_{yx} + \phi_y \phi_{yy} &= -p_y. \end{aligned}$$

Integration der ersten Gleichung über x und Integration der zweiten Gleichung über y ergibt eine Gleichung für den Druck. Die bei der Integration auftretende Funktion der Zeit $C(t)$ wird wegen der Annahme konstanten Drucks weit stromaufwärts des Körpers zur Konstante C . Somit gilt die instationäre Bernoulli Gleichung

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{\phi_y^2}{2} = -p + C. \quad (2.5)$$

2.1.2 Abströmbedingung

Die Form des Körpers wird als schlank und mit scharfer Hinterkante angenommen. Als Abströmbedingung wird gewählt, dass der Druck an der Hinterkante stetig ist. Die Druckdifferenz an Ober- und Unterseite des Körpers verschwindet daher an der Hinterkante. Diese Bedingung gilt, solange die Vertikalgeschwindigkeit der Hinterkante im Vergleich zur Anströmgeschwindigkeit klein ist. In [20] wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung einer anliegenden Strömung um einen Flügel die Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen mit zugehöriger Haftbedingung für Reynolds-Zahlen $Re \rightarrow \infty$ gegen die Eulergleichungen und die hier verwendete Hinterkanten-Bedingung konvergieren. Für stationäre Strömung geht sie aufgrund der Bernoulli Gleichung über in die Hinterkanten-Bedingung von Kutta und Joukowski.

2.1.3 Nachlauf

Ein in Bewegung versetzter Tragflügel erzeugt aufgrund seiner scharfen Hinterkante Zirkulation um sich selbst. Aufgrund des Thomsonschen Satzes (Für eine reibungslose, isentrope Strömung ist die Zirkulation einer geschlossenen, massenfesten Kurve konstant) entsteht im Fluid ein Wirbel mit entgegengesetzt gleich großer Zirkulation - der sog. Startwirbel - der sich mit dem Fluid stromabwärts bewegt. Ebenso bildet sich hinter einem ungleichförmig bewegten Körper ein von der Parallelströmung abweichendes Strömungsbild aus, weil von diesem ständig Wirbel abschwimmen. Weil wir annehmen, dass die Strömung zu jeder Zeit am Körper anliegt, müssen die Wirbel den Körper an der Hinterkante verlassen.

Man denke sich nun alle freien Wirbel zu einem festen Zeitpunkt zu einer Linie verbunden.

Diese ist in Abb. 1.1 als dünne Linie rechts von der Hinterkante angedeutet. Diese Linie gemeinsam mit den sog. Wirbellinien (gemeint sind Linien in Richtung der Rotationsachse der Wirbel) bilden eine Fläche, die wir hier als Wirbelfläche bezeichnen. Das Gebiet, in dem sich diese Wirbelfläche aufhalten kann, ist der Nachlauf. Die Wirbelfläche bewegt sich - ebenso wie Einzelwirbel - frei mit der Strömung mit. Die Druckdifferenz in Richtung der Flächennormalen ist daher null.

2.2 Bewegung mit kleiner Amplitude

2.2.1 Entwicklung der kinematischen Randbedingung

Wir suchen eine Lösung mithilfe der asymptotischen Entwicklung für kleine Auslenkungen $w(x, t)$ im Vergleich zur Körperlänge, siehe Abb. 2.1. Wir beschreiben die Auslenkung des Körpers mit

$$w(x, t) = \epsilon w_1(x, t). \quad (2.6)$$

Wir setzen voraus, dass wenn der Entwicklungsparameter ϵ gegen null strebt, $w_1(x, t)$ eine Funktion der Ordnung eins ist.

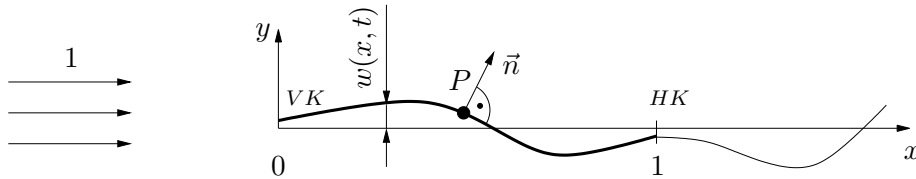


Abbildung 2.1: Bewegung mit kleiner Amplitude

Die Vorderkante VK des Körpers wird an die Stelle $x = 0$ gelegt, die Hinterkante HK befindet sich somit bei $x = 1$. Für das Potential wählen wir den Ansatz

$$\phi(x, y, t; \epsilon) \sim x + \epsilon \phi_1(x, y, t) + \epsilon^2 \phi_2(x, y, t) + \dots, \quad (2.7)$$

der die Anströmbedingung Gl. (2.3) erfüllt.

Die kinematische Randbedingung Gl. (2.4) wird mit $\frac{d}{dt}r_P^{(x)} \ll 1$ und $n^{(x)} \sim -w_x(x, t) + \dots$, $n^{(y)} \sim 1 + \dots$ zu

$$-\phi_x(x, w(x, t), t) w_x(x, t) + \phi_y(x, w(x, t), t) - w_t(x, t) = 0.$$

Mit Gl. (2.6) ergibt sich somit

$$\phi_y(x, \epsilon w_1(x, t), t) = \epsilon w_{1,t}(x, t) + \phi_x(x, \epsilon w_1(x, t), t) \epsilon w_{1,x}(x, t). \quad (2.8)$$

Ausgedrückt durch die Geschwindigkeiten gilt daher an der Körperoberfläche

$$u^{(y)} = w_t + u^{(x)} w_x.$$

Dort setzt sich die Vertikalgeschwindigkeit des Fluids zusammen aus der Vertikalgeschwindigkeit des Körperpunkts und dem von der stationären Strömung bekannten „steigungsabhängigen“ Anteil.

Nach der Theorie von Birnbaum [4] kann für schlanke Körper mit kleiner Auslenkung das Potential an der Körperoberfläche durch das Potential entlang der x -Achse beschrieben werden. Wir entwickeln daher die partielle Raumableitungen in eine Taylor-Reihe um $y = 0^\pm$

$$\begin{aligned}\phi_x(x, \epsilon w_1(x, t), t) &= \phi_x(x, 0^\pm, t) + \phi_{xy}(x, 0^\pm, t) \epsilon w_1(x, t) + \dots, \\ \phi_y(x, \epsilon w_1(x, t), t) &= \phi_y(x, 0^\pm, t) + \phi_{yy}(x, 0^\pm, t) \epsilon w_1(x, t) + \dots\end{aligned}$$

und setzen diese in Gl. (2.8) ein. Koeffizientenvergleich für die Ordnungen ϵ^i mit $i = 1, 2, \dots$ und Gl. (2.2) für die Terme zweiter Ordnung ergibt dann die linearisierte kinematische Randbedingung

$$\phi_{1,y}(x, 0^\pm, t) = w_{1,t}(x, t) + w_{1,x}(x, t) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.9)$$

$$\phi_{2,y}(x, 0^\pm, t) = (w_1(x, t) \phi_{1,x}(x, 0^\pm, t))_x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.10)$$

Setzt man Gl. (2.7) noch in Gl. (2.2) und Gl. (2.3) ein, so erhalten man

$$\phi_{1,xx}(x, y, t) + \phi_{1,yy}(x, y, t) = 0, \quad (2.11)$$

$$\phi_{2,xx}(x, y, t) + \phi_{2,yy}(x, y, t) = 0, \quad (2.12)$$

$$\phi_1(x, y, t) \sim o(1) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (2.13)$$

$$\phi_2(x, y, t) \sim o(1) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Mit der asymptotischen Reihe für den Druck $p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots$ wird Gl. (2.5) mithilfe von Gl. (2.7) zu

$$\begin{aligned}p_0 &= C - \frac{1}{2}, \\ p_1 &= -(\phi_{1,t} + \phi_{1,x}), \\ p_2 &= -\left(\phi_{2,t} + \phi_{2,x} + \frac{\phi_{1,x}^2}{2} + \frac{\phi_{1,y}^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Der Druckverlauf an der Körperoberfläche wird durch die Werte bei $y = 0^\pm$ ausgedrückt

$$\begin{aligned}p_0(x, 0^\pm, t) &= C - \frac{1}{2}, \\ p_1(x, 0^\pm, t) &= -(\phi_{1,t}(x, 0^\pm, t) + \phi_{1,x}(x, 0^\pm, t)).\end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Druckdifferenz an Ober- und Unterseite des Körpers wird mit Δp bezeichnet.

2.2.2 Nachlauf in Körnernähe

Wir nehmen an, dass sich die mit der Strömung frei mitbewegende Wirbelfläche (siehe die dünne Linie rechts der Hinterkante HK in Abb. 2.1) ihren Ursprung an der Körperhinterkante hat. Von der Hinterkante bis einige Körperlängen stromabwärts der Hinterkante ist die Parallelströmung nur schwach gestört $u^{(x)} \sim 1 + o(1)$, $u^{(y)} \sim o(1)$, sodass in diesem Gebiet die vertikale Position der Wirbelfläche von gleicher Ordnung wie die Körperauslenkung ist, also von der Ordnung ϵ . Es ist daher zulässig, ein vereinfachtes Nachlaufmodell zu verwenden, bei dem der Nachlauf in der Nähe der x -Achse bleibt.

2.3 Wirbelbelegung

2.3.1 Kinematische Randbedingung

Um $\phi_{i,x}(x, 0^\pm, t)$ und $\phi_{i,y}(x, 0^\pm, t)$ für jedes $i = 1, 2, \dots$ zu erhalten, verwenden wir die Methode der Singularitätenbelegung, siehe [13]. Da der Körper verschwindende Dicke hat, reicht eine Wirbelbelegung aus. Für kleine Amplituden kann man die Wirbelbelegung entlang der x -Achse vornehmen. Der Nachlauf wird ebenfalls mit der Wirbelbelegung modelliert. Das Potential eines differentiellen Einzelwirbels der Stärke $d\Gamma$ an der Stelle $(\xi, 0)$ ist

$$d\phi(x, y, t) = \frac{d\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x - \xi}. \quad (2.16)$$

Wir ersetzen $d\Gamma$ durch eine Wirbelbelegungsdichte $\gamma(\xi, t)$ und erhalten

$$d\Gamma(\xi, t) = \frac{d\Gamma(\xi, t)}{d\xi} d\xi = \gamma(\xi, t) d\xi.$$

Damit können wir das Potential durch eine an der Körpervorderkante $\xi = 0$ beginnende Wirbelbelegung entlang der x -Achse

$$\phi_i(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \gamma_i(\xi, t) \arctan \frac{y}{x - \xi} d\xi \quad \text{für } i = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

beschreiben. Die Singularitätenbelegung erfüllt bereits Gl. (2.11)-(2.14). Partielles Differenzieren nach den Raumableitungen und einsetzen der Stelle $y = 0^\pm$ liefert das bekannte Ergebnis

$$\phi_{i,x}(x, 0^\pm, t) = \mp \frac{\gamma_i(x, t)}{2}, \quad (2.18)$$

$$\phi_{i,y}(x, 0^\pm, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma_i(\xi, t)}{x - \xi} d\xi. \quad (2.19)$$

Das Symbol f wird für den Cauchyschen Hauptwert verwendet. Mit Gl. (2.19) für $i = 1$ lässt sich die linearisierte kinematische Randbedingung Gl. (2.9) schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\gamma_1(\xi, t)}{x - \xi} d\xi + \int_1^\infty \frac{\gamma_1(\xi, t)}{x - \xi} d\xi \right) = w_{1,t}(x, t) + w_{1,x}(x, t). \quad (2.20)$$

Dabei wurde das Integral in einen Bereich am Körper und einen Abschnitt im Nachlauf aufgeteilt.

Ersetzt man in Gl. (2.18) x durch ξ und integriert in Grenzen von 0 bis x , erhält man

$$\phi_i(x, 0^\pm, t) = \mp \frac{1}{2} \int_0^x \gamma_i(\xi, t) d\xi + D(t).$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.17) ergibt $D(t) = D$. Damit ist die partielle Ableitung nach der Zeit

$$\phi_{i,t}(x, 0^\pm, t) = \mp \frac{1}{2} \int_0^x \gamma_{i,t}(\xi, t) d\xi. \quad (2.21)$$

Die Druckdifferenz an Ober- und Unterseite des Körpers erhält man durch Einsetzen von Gl. (2.18) und Gl. (2.21) in Gl. (2.15)

$$\Delta p_0(x, t) = 0, \quad \Delta p_1(x, t) = \int_0^x \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi + \gamma_1(x, t). \quad (2.22)$$

2.3.2 Hinterkanten-Bedingung

Die Abströmbedingung $\Delta p(1, t) = 0$ aus Abschn. 2.1.2 kann mithilfe von Gl. (2.22) durch die Wirbeldichte ausgedrückt werden

$$\int_0^1 \gamma_{1,t}(x, t) dx + \gamma_1(1, t) = 0. \quad (2.23)$$

Mit der Definition der Zirkulation um den Körper $\Gamma_1(t) = \int_0^1 \gamma_1(x, t) dx$ kann diese Gleichung auch $\Gamma_{1,t}(t) = -\gamma_1(1, t)$ geschrieben werden. Man erkennt, dass die Wirbeldichte an der Hinterkante dem negativen Wert der zeitlichen Änderung der Zirkulation um den Körper entspricht.

2.3.3 Wirbel im Nachlauf

Das Strömungsfeld im Nachlauf wird - wie das Strömungsfeld entlang des Körpers - näherungsweise durch Wirbel entlang der x -Achse beschrieben. Auf der Wirbelfläche tritt somit eine Unstetigkeit der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit auf, siehe Gl. (2.18). Unter Annahme einer schwach gestörten Parallelströmung $u^{(x)} \sim 1 + o(1)$ ergibt sich die Transportgleichung für die Wirbel erster Ordnung zu

$$\gamma_{1,t}(x, t) + \gamma_{1,x}(x, t) = 0 \quad \text{für} \quad x \geq 1,$$

mit der Lösung

$$\gamma_1(\xi, t) = \gamma_1(1, t - (\xi - 1)) \quad \text{für} \quad \xi \geq 1. \quad (2.24)$$

Die Wirbelbelegung im Nachlauf wird also durch die Wirbeldichte an der Körper-Hinterkante ausgedrückt.

Mit Gl. (2.20), Gl. (2.23) und Gl. (2.24) liegt das linearisierte System vollständig vor. Das Problem wird ausschließlich durch die Wirbelbelegungsfunktion γ_1 beschrieben.

Kapitel 3

Zeitlich harmonische Bewegung

3.1 Zeitlich harmonischer Ansatz

Der Spezialfall einer zeitlich harmonischen Bewegung soll in diesem Kapitel behandelt werden. Für periodische Bewegungen können dimensionslose Kennzahlen eingeführt werden. Verwendet man die Periodendauer T als charakteristische Zeit (bzw. die Kreisfrequenz ω als charakteristische Frequenz), so kann man damit zwei dimensionslose Kennzahlen bilden

$$\Omega = \frac{\omega L}{u_\infty} = \omega t_s \quad Sr = \frac{\omega A}{u_\infty} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (3.1)$$

Hierin bezeichnet Ω die reduzierte Frequenz und Sr die Strouhal-Zahl. Letztere spielt nur bei größeren Auslenkungen A eine entscheidende Rolle. Als einzige dimensionslose Kennzahl für das linearisierte Problem verbleibt daher die reduzierte Frequenz Ω . Für periodische Bewegung wird aus Gründen der Übersichtlichkeit die Referenzzeit $\frac{1}{\omega}$ eingeführt. Die so dimensionslos gemachte Zeit wird mit τ bezeichnet und berechnet sich zu $\tau = \Omega t$. Die in Kap. 2 ermittelten Gleichungen sind hier nochmals zusammengefasst dargestellt:

Die kinematische Randbedingung aus Gl. (2.20), für $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \frac{\gamma_1(\xi, \tau)}{x - \xi} d\xi + \int_1^\infty \frac{\gamma_1(\xi, \tau)}{x - \xi} d\xi = 2\pi(w_{1,x}(x, \tau) + \Omega w_{1,\tau}(x, \tau)). \quad (3.2)$$

Die Transportgleichung für die Wirbel im Nachlauf aus Gl. (2.24), für $\xi \geq 1$

$$\gamma_1(\xi, \tau) = \gamma_1(1, \tau - \Omega(\xi - 1)). \quad (3.3)$$

Die Hinterkanten-Bedingung aus Gl. (2.23)

$$\int_0^1 \gamma_{1,\tau}(\xi, \tau) d\xi + \frac{1}{\Omega} \gamma_1(1, \tau) = 0. \quad (3.4)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit sollen zeitlich harmonische Bewegungen betrachtet werden. Nur in Kap. 4 werden Vortriebskraft und Leistung zunächst für allgemeine, nicht periodische Bewegungen hergeleitet.

Mit dem zeitlich harmonischen Ansatz

$$\begin{aligned} w_1(x, \tau) &= w_c(x) \cos \tau + w_s(x) \sin \tau, \\ \gamma_1(x, \tau) &= \gamma_c(x) \cos \tau + \gamma_s(x) \sin \tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

erhält man für Gl. (3.3)

$$\gamma_1(\xi, \tau) = \gamma_c(1) \cos(\tau - \Omega(\xi - 1)) + \gamma_s(1) \sin(\tau - \Omega(\xi - 1)) \quad \text{für } \xi \geq 1. \quad (3.6)$$

Mit $1 - \xi = 1 - x + x - \xi$ und $\eta = \Omega(\xi - x)$ ergibt sich für die vom Nachlauf auf der Platte induzierte Vertikalgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\gamma_1(\xi, \tau)}{x - \xi} d\xi &= \left(-\gamma_c(1) \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta + \gamma_s(1) \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \right) \cos(\tau + \Omega(1-x)) \\ &+ \left(-\gamma_c(1) \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta - \gamma_s(1) \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \right) \sin(\tau + \Omega(1-x)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wir haben damit das Integral über die Wirbeldichte im Nachlauf durch die Werte der Wirbeldichte an der Körperhinterkante ausgedrückt. Wir setzen Gl. (3.7) nun gemeinsam mit dem Ansatz Gl. (3.5) in die kinematische Randbedingung (3.2) ein. Nach Koeffizientenvergleich für $\cos \tau$ und $\sin \tau$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\gamma_c(\xi)}{x - \xi} d\xi - \left(\int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-x)) + \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-x)) \right) \gamma_c(1) \\ + \left(\int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-x)) - \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-x)) \right) \gamma_s(1) = \\ 2\pi \left(\Omega w_s(x) + \frac{d}{dx} w_c(x) \right), \\ \int_0^1 \frac{\gamma_s(\xi)}{x - \xi} d\xi - \left(\int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-x)) - \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-x)) \right) \gamma_c(1) \\ - \left(\int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-x)) + \int_{\Omega(1-x)}^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-x)) \right) \gamma_s(1) = \\ 2\pi \left(-\Omega w_c(x) + \frac{d}{dx} w_s(x) \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

jeweils für $0 \leq x \leq 1$. Für die Hinterkanten-Bedingung Gl. (3.4) verwenden wir ebenfalls Gl. (3.5) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^1 \gamma_s(\xi) d\xi + \frac{1}{\Omega} \gamma_c(1) &= 0, \\ \int_0^1 \gamma_c(\xi) d\xi - \frac{1}{\Omega} \gamma_s(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das zeitlich harmonische Problem ist mit Gl. (3.8) und Gl. (3.9) vollständig beschrieben.

3.2 Analytische Lösung

3.2.1 Lösung der Integralgleichung

Wir suchen nun eine analytische Lösung der Integralgleichung Gl. (3.8) für $\gamma_c(\xi)$ und $\gamma_s(\xi)$. Dazu verwenden wir die Betzsche Integralgleichung

$$g(x) = -\int_0^1 \frac{f(\xi)}{x-\xi} d\xi,$$

die für bekanntes $g(\xi)$ folgende Lösung hat

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \int_0^1 g(\xi) \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi. \quad (3.10)$$

Die Herleitung findet man in [23].

Analog zu Gl. (3.10) erhalten wir für Gl. (3.8) die Lösungen

$$\begin{aligned} \gamma_c(x) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}} \left(\pi^2 C_c + \int_0^1 \frac{-a_{1h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{2h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{1h}(\xi)}{\xi-x} d\xi \right), \\ \gamma_s(x) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}} \left(\pi^2 C_s + \int_0^1 \frac{a_{2h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{1h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{2h}(\xi)}{\xi-x} d\xi \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit den Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} a_{1h}(\xi) &= - \left(\int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-\xi)) + \int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-\xi)) \right) \sqrt{\xi(1-\xi)}, \\ a_{2h}(\xi) &= \left(\int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-\xi)) - \int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-\xi)) \right) \sqrt{\xi(1-\xi)}, \\ f_{1h}(\xi) &= 2\pi \left(\Omega w_s(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_c(\xi) \right) \sqrt{\xi(1-\xi)}, \\ f_{2h}(\xi) &= 2\pi \left(-\Omega w_c(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_s(\xi) \right) \sqrt{\xi(1-\xi)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

die wir in Kap. 5 benötigen. Mit der Darstellung

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \int_0^1 \frac{a_{1h}(\xi)}{\xi-x} d\xi, & a_2(x) &= \int_0^1 \frac{a_{2h}(\xi)}{\xi-x} d\xi, \\ f_1(x) &= \int_0^1 \frac{f_{1h}(\xi)}{\xi-x} d\xi = \int_0^1 2\pi \left(\Omega w_s(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_c(\xi) \right) \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi, \\ f_2(x) &= \int_0^1 \frac{f_{2h}(\xi)}{\xi-x} d\xi = \int_0^1 2\pi \left(-\Omega w_c(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_s(\xi) \right) \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi-x} d\xi \end{aligned} \quad (3.13)$$

ergibt sich eine kompaktere Schreibweise

$$\begin{aligned} \gamma_c(x) &= \frac{\pi^2 C_c - a_1(x) \gamma_c(1) - a_2(x) \gamma_s(1) + f_1(x)}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}}, \\ \gamma_s(x) &= \frac{\pi^2 C_s + a_2(x) \gamma_c(1) - a_1(x) \gamma_s(1) + f_2(x)}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Funktionen $a_1(x)$ und $a_2(x)$ hängen nur von der reduzierten Frequenz Ω ab. Die Bewegungsparameter für die Auslenkung sind in $f_1(x)$ und $f_2(x)$ enthalten.

3.2.2 Wirbeldichte an der Hinterkante

Wir wollen nun die Wirbeldichte an der Hinterkante des Körpers bestimmen. Der Grenzübergang $x \rightarrow 1$ für Gl. (3.14) ergibt

$$\begin{aligned}\pi^2 C_c - a_1(1) \gamma_c(1) - a_2(1) \gamma_s(1) + f_1(1) &= 0, \\ \pi^2 C_s - a_1(1) \gamma_s(1) + a_2(1) \gamma_c(1) + f_2(1) &= 0,\end{aligned}\tag{3.15}$$

mit

$$\begin{aligned}a_1(1) &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-\xi)) + \int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-\xi)) \right) \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi, \\ a_2(1) &= - \int_0^1 \left(\int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \cos(\Omega(1-\xi)) - \int_{\Omega(1-\xi)}^{\infty} \frac{\cos \eta}{\eta} d\eta \sin(\Omega(1-\xi)) \right) \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi,\end{aligned}\tag{3.16}$$

wobei $a_1(1)$ und $a_2(1)$ nur von Ω abhängen. Um zu überprüfen, dass $a_1(1) \neq 0$ und $a_2(1) \neq 0$ sind, werten wir diese an einigen Stellen Ω aus, siehe Tab. 3.1.

Ω	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	0.01	0.1	1	10
$a_1(1)$	20.9262	17.3093	13.693	10.0816	6.51653	3.28875	1.21526
$a_2(1)$	-2.46735	-2.46699	-2.46417	-2.44416	-2.32411	-1.83752	-0.963086

Tabelle 3.1: Koeffizienten für die Wirbeldichte an der Hinterkante

Die Lösung der Integralgleichungen ist nicht eindeutig. In den beiden gekoppelten Gleichungen Gl. (3.15) sind $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ noch Funktionen der unbekanntenen Konstanten C_c und C_s . Wir verwenden - wie im stationären Fall - die Hinterkanten-Bedingung um $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ eindeutig festzulegen. Dafür setzen wir Gl. (3.14) in Gl. (3.9) ein. Es werden daher folgende Integrale ausgewertet

$$\begin{aligned}\int_0^1 \gamma_c(x) dx &= \underbrace{\int_0^1 \frac{C_c}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_{\pi C_c} + \underbrace{\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{-a_1(x) \gamma_c(1) - a_2(x) \gamma_s(1) + f_1(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_0 = \pi C_c, \\ \int_0^1 \gamma_s(x) dx &= \underbrace{\int_0^1 \frac{C_s}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_{\pi C_s} + \underbrace{\frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{a_2(x) \gamma_c(1) - a_1(x) \gamma_s(1) + f_2(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_0 = \pi C_s.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Für die Auswertung der Integrale im jeweils zweiten Ausdruck von Gl. (3.17) wird Anh. A mit $k = 0$ verwendet. Mit dieser Vereinfachung wird die Hinterkanten-Bedingung Gl. (3.9) zu

$$\begin{aligned}\gamma_s(1) - \Omega \pi C_c &= 0, \\ \gamma_c(1) + \Omega \pi C_s &= 0.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Wir setzen Gl. (3.18) in Gl. (3.15) ein und erhalten damit ein lineares Gleichungssystem für $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ mit der Lösung

$$\begin{aligned}\gamma_c(1) &= \Omega \frac{a_1(1) \Omega f_1(1) + (\pi - a_2(1) \Omega) f_2(1)}{N}, \\ \gamma_s(1) &= \Omega \frac{-(\pi - a_2(1) \Omega) f_1(1) + a_1(1) \Omega f_2(1)}{N}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dabei ist $N = (\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2 > 0$ für alle Ω . Für die Amplitude der Wirbel im Nachlauf folgt

$$\hat{\gamma}(1) = \sqrt{\gamma_c(1)^2 + \gamma_s(1)^2} = \Omega \sqrt{\frac{f_1(1)^2 + f_2(1)^2}{N}}.\quad (3.20)$$

Mit den Werten an der Hinterkante $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ aus Gl. (3.19) können nun mit Gl. (3.18) C_c und C_s bestimmt werden. Der Verlauf der Wirbeldichte entlang des Körpers ist dann mit Gl. (3.14) eindeutig bestimmt

$$\begin{aligned}\gamma_c(x) &= \frac{f_1(x) - a_1(x) \gamma_c(1) + \left(\frac{\pi}{\Omega} - a_2(x)\right) \gamma_s(1)}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}}, \\ \gamma_s(x) &= \frac{f_2(x) - \left(\frac{\pi}{\Omega} - a_2(x)\right) \gamma_c(1) - a_1(x) \gamma_s(1)}{\pi^2 \sqrt{x(1-x)}}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Die Vorgehensweise zur Berechnung der Wirbeldichte an der Hinterkante soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel: Um die Vorderkante schwenkenden Platte $w_c(x) = 0$, $w_s(x) = x$. Mit Gl. (3.13) wird

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2\pi \Omega \int_0^1 \xi \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi - x} d\xi = \Omega \frac{\pi^2}{4} (1 + 4x - 8x^2), \\ f_2(x) &= 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\xi - x} d\xi = \pi^2(1 - 2x).\end{aligned}\quad (3.22)$$

Somit sind $f_1(1) = -\frac{3}{4} \pi^2 \Omega$, $f_2(1) = -\pi^2$. Eingesetzt in Gl. (3.19) ergibt das

$$\begin{aligned}\gamma_c(1) &= -\Omega \frac{\pi^2}{4} \frac{4\pi + \Omega(-4a_2(1) + 3a_1(1)\Omega)}{(\pi - a_2(1)\Omega)^2 + (a_1(1)\Omega)^2}, \\ \gamma_s(1) &= \Omega^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{3\pi - 4a_1(1) - 3a_2(1)\Omega}{(\pi - a_2(1)\Omega)^2 + (a_1(1)\Omega)^2},\end{aligned}\quad (3.23)$$

mit den nur von Ω abhängigen Koeffizienten $a_1(1)$ und $a_2(1)$ aus Tab. 3.1. Ergebnisse für $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ können Tab. 3.2 entnommen werden.

Ω	10^{-3}	0.01	0.1	1	10
$\gamma_c(1)$	-0.00313908	-0.0311493	-0.286085	-2.06378	-32.9971
$\gamma_s(1)$	-0.000011317	-0.000758084	-0.0333153	0.123507	26.5586

Tabelle 3.2: Wirbeldichte an der Hinterkante für eine um die Vorderkante schwenkende Platte

3.2.3 Nachlauffreie Bewegung

Wir überlegen uns an dieser Stelle, wie die Bewegung des Körpers aussehen muss, dass er keine Wirbel im Nachlaufgebiet verursacht. Wir setzen $\gamma_c(1) = \gamma_s(1) = 0$. Mit Gl. (3.18) ist somit auch $C_c = C_s = 0$. Eingesetzt in Gl. (3.15) ergibt das sofort $f_1(1) = f_2(1) = 0$. Somit folgt aus Gl. (3.13)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\Omega w_s(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_c(\xi) \right) \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi &= 0, \\ \int_0^1 \left(-\Omega w_c(\xi) + \frac{d}{d\xi} w_s(\xi) \right) \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} d\xi &= 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Die Wirbel im Nachlauf verschwinden somit für alle zeitlich harmonischen Bewegungen, die diese beiden Bedingungen erfüllen.

Kapitel 4

Vortrieb und Leistung

4.1 Impuls- und Leistungsbilanz

Die Ergebnisse aus Kap. 3 - für mit kleinen Auslenkungen zeitlich harmonisch bewegte schlanke Körper - können nun verwendet werden, um die zeitlich gemittelten Größen von Vortriebskraft, Leistung und Vortriebswirkungsgrad zu berechnen. Diese Größen werden in Kap. 5 verwendet. In diesem Kapitel gehen wir zunächst von den Erhaltungsgleichungen aus und betrachten dann die Besonderheiten für schlanke Körper.

Wir beginnen mit der Erhaltungsgleichung für den Impuls und der Erhaltungsgleichung für die Energie in Form einer Leistungsbilanz. In dieser Arbeit wird das Fluid reibungsfrei angenommen. Wärmeströme und der Einfluss der Schwerkraft auf die Strömung werden nicht berücksichtigt. Somit lauten die Erhaltungsgleichungen

$$\vec{K} = \frac{d}{dt} \int_{KV} \rho \vec{v} dV + \oint_{\partial KV} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_R) \cdot \vec{n} dO + \oint_{\partial KV} p \vec{n} dO, \quad (4.1)$$

$$P = \frac{d}{dt} \int_{KV} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} dV + \oint_{\partial KV} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} (\vec{v} - \vec{v}_R) \cdot \vec{n} dO + \oint_{\partial KV} p \vec{v} \cdot \vec{n} dO. \quad (4.2)$$

Darin bezeichnet \vec{K} jene Kraft, die von einem im Kontrollvolumen KV eingeschlossenen Körper auf das Fluid ausgeübt wird. Die Kraft auf den vom Fluid eingeschlossenen Körper ist somit $\vec{F} = -\vec{K}$. \vec{v}_R bezeichnet die Geschwindigkeit mit der sich die jeweilige Systemgrenze des KV - der Rand - bewegt. P bezeichnet die vom eingeschlossenen Körper in das Fluid eingebrachte Leistung.

Wir wählen nun für die Impuls- und Leistungsbilanz das Kontrollvolumen KV um den Körper. Als Rand des KV wird eine geschlossene Kontur um die Körperoberfläche gelegt, sodass kein Fluid im KV eingeschlossen ist. Wegen $V = 0$ und der kinematischen Randbedingung an der Körperoberfläche $(\vec{v} - \vec{v}_R) \cdot \vec{n} = 0$ vereinfachen sich Gl. (4.1) und Gl. (4.2) stark. Für die von der Zeit abhängigen Größen Kraft pro Tiefeneinheit $\vec{F}(t)$ und Leistung pro Tiefeneinheit $P(t)$ verbleiben nur

$$\vec{F}(t) = - \oint_{\partial KV} p \vec{n} ds, \quad (4.3)$$

$$P(t) = \oint_{\partial KV} p \vec{v} \cdot \vec{n} ds. \quad (4.4)$$

Darin ist s die Bogenlänge der um den Körper herum verlaufenden Kurve.

4.2 Bewegung mit kleiner Amplitude

4.2.1 Kräfte und Leistung durch Druck entlang der Oberfläche

Wir wollen in dieser Arbeit die Strömung um schlanke Körper mit kleinen Auslenkungen untersuchen, siehe Abb. 2.1. Wir haben dazu für das Potential den Ansatz mit geringfügiger Störung Gl. (2.7) gewählt. An einer spitzen Vorderkante ist das Strömungsfeld singulär, daher versagt dort die asymptotische Entwicklung Gl. (2.7). Die Kraft auf das Profil in der Nähe der Vorderkante muss daher mithilfe einer lokalen asymptotischen Entwicklung bestimmt werden. Als Ergebnis erhält man eine zu Gl. (4.3) zusätzliche Kraft in x -Richtung, den Nasensog.

Bezeichnet man die Oberseite des Körpers mit dem Symbol $+$ und die Unterseite mit $-$, so ist $\vec{n}^- = -\vec{n}^+$. Mit $n^{(x)} \sim -w_x(x, t) + \dots$, $n^{(y)} \sim 1 + \dots$ und $ds \sim dx + \dots$ folgt für Gl. (4.3) und Gl. (4.4)

$$\begin{pmatrix} F^{(x)}(t) \\ F^{(y)}(t) \end{pmatrix} = - \int_0^1 \Delta p(x, t) \begin{pmatrix} -w_x(x, t) \\ 1 \end{pmatrix} dx, \quad (4.5)$$

$$P(t) = \int_0^1 \Delta p(x, t) w_t(x, t) dx. \quad (4.6)$$

Wir setzen nun Gl. (2.6) und Gl. (2.22) in die rechte Seite ein und verwenden für die linke Seite die asymptotischen Reihen

$$\begin{aligned} F^{(x)} &\sim F_0^{(x)} + \epsilon F_1^{(x)} + \epsilon^2 F_2^{(x)} + \dots, \\ F^{(y)} &\sim F_0^{(y)} + \epsilon F_1^{(y)} + \epsilon^2 F_2^{(y)} + \dots, \\ P &\sim P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dies ergibt für die x -Komponenten der Kraft $F_0^{(x)}, F_1^{(x)} = 0$,

$$F_2^{(x)}(t) = \int_0^1 \left(\int_0^x \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi + \gamma_1(x, t) \right) w_{1,x}(x, t) dx, \quad (4.8)$$

für die y -Komponenten der Kraft $F_0^{(y)} = 0$,

$$F_1^{(y)}(t) = - \int_0^1 \left(\int_0^x \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi + \gamma_1(x, t) \right) dx, \quad (4.9)$$

sowie für die Leistung $P_0 = 0, P_1 = 0$,

$$P_2(t) = \int_0^1 \left(\int_0^x \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi + \gamma_1(x, t) \right) w_{1,t}(x, t) dx. \quad (4.10)$$

Die Vertikalkraft - sie entspricht der Auftriebskraft - ist von der Ordnung eins, während die Vortriebskraft und die Leistung von zweiter Ordnung sind.

Gl. (4.8) und Gl. (4.10) werden noch etwas umgeformt. Dazu wird zunächst folgende Rechnung durchgeführt. Mit $F(x) = \int f(x)dx$ ergibt partielle Integration für den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(f(x) \int_0^x g(\xi) d\xi \right) dx = \\ & \left(F(x) \int_0^x g(\xi) d\xi \right) \Big|_{x=0}^1 - \int_0^1 \left(F(x) \frac{d}{dx} \int_0^x g(\xi) d\xi \right) dx = \\ & F(1) \int_0^1 g(\xi) d\xi - \int_0^1 F(x) g(x) dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Damit folgt für Gl. (4.8)

$$F_2^{(x)}(t) = w_1(1, t) \int_0^1 \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi - \int_0^1 w_1(x, t) \gamma_{1,t}(x, t) dx + \int_0^1 w_{1,x}(x, t) \gamma_1(x, t) dx. \quad (4.12)$$

In gleicher Weise folgt für Gl. (4.10) mit Gl. (4.11) und $W(x, t) = \int w(x, t) dx$

$$P_2(t) = W_{1,t}(1, t) \int_0^1 \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi - \int_0^1 W_{1,t}(x, t) \gamma_{1,t}(x, t) dx + \int_0^1 w_{1,t}(x, t) \gamma_1(x, t) dx. \quad (4.13)$$

Schließlich erhält man mit der Hinterkanten-Bedingung Gl. (2.23) $\int_0^1 \gamma_{1,t}(\xi, t) d\xi = -\gamma_1(1, t)$

$$F_2^{(x)}(t) = -w_1(1, t) \gamma_1(1, t) - \int_0^1 w_1(x, t) \gamma_{1,t}(x, t) dx + \int_0^1 w_{1,x}(x, t) \gamma_1(x, t) dx, \quad (4.14)$$

$$P_2(t) = -W_{1,t}(1, t) \gamma_1(1, t) - \int_0^1 W_{1,t}(x, t) \gamma_{1,t}(x, t) dx + \int_0^1 w_{1,t}(x, t) \gamma_1(x, t) dx. \quad (4.15)$$

4.2.2 Kraft aus Strömung um die Körper-Vorderkante

Zur Berechnung der Kraft an der Vorderkante VK führen wir das komplexwertige Geschwindigkeitspotential $\Phi(z, t)$ ein. Wie in Abschn. 2.3 verwenden wir eine Wirbelbelegung und erhalten

$$\Phi'(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma(z, t)}{z - \xi} d\xi,$$

mit $\gamma(\xi, t) = \frac{iK_\gamma(t)}{\sqrt{\xi}} g(z, t)$ in der Nähe der spitzen Vorderkante, $g(0, t) = 1$ und g regulär in $z = 0$. $K_\gamma(t)$ ist eine reelle Funktion. Mit der Substitution $\xi = z s^2$ erhalten wir das lokale Verhalten

$$\Phi'(z, t) \sim \frac{iK_\gamma(t)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}(z - \xi)} \sim \frac{iK_\gamma(t)}{2\pi\sqrt{z}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{2 ds}{1 - s^2}}_{i\pi} \sim -\frac{K_\gamma(t)}{2\sqrt{z}}.$$

Zur Berechnung der x -Komponente der Kraft wählen wir einen Kreis um die Vorderkante mit Radius R und erhalten mithilfe des Residuensatzes für den Nasensog

$$F_{2,VK}^{(x)} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{i}{2} \int_C \overline{\Phi'(z, t)^2} dz = -\frac{\pi}{4} K_\gamma(t)^2. \quad (4.16)$$

$K_\gamma(t)$ können wir aus der „äußeren“ Lösung bestimmen mit

$$\gamma_1(0, t) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K_\gamma(t)}{\sqrt{x}}. \quad (4.17)$$

In Abschn. 3.2 haben wir diese Lösung für zeitlich harmonische Bewegungen bestimmt.

4.2.3 Zeitlich harmonische Bewegung

Für die zeitlich harmonische Bewegung werden Gl. (4.14) und Gl. (4.15) mithilfe der auf die Periode bezogenen Zeit τ angeschrieben, siehe Abschn. 3.1

$$F_2^{(x)}(\tau) = -w_1(1, \tau) \gamma_1(1, \tau) - \Omega \int_0^1 w_1(x, \tau) \gamma_{1,\tau}(x, t) dx + \int_0^1 w_{1,x}(x, \tau) \gamma_1(x, \tau) dx \quad (4.18)$$

$$P_2(\tau) = -\Omega W_{1,\tau}(1, \tau) \gamma_1(1, \tau) - \Omega^2 \int_0^1 W_{1,\tau}(x, \tau) \gamma_{1,t}(x, \tau) dx + \Omega \int_0^1 w_{1,\tau}(x, \tau) \gamma_1(x, \tau) dx. \quad (4.19)$$

Wir setzen nun den harmonischen Ansatz Gl. (3.5) ein

$$\begin{aligned} F_2^{(x)}(\tau) &= -(w_c(1) \cos \tau + w_s(1) \sin \tau) (\gamma_c(1) \cos \tau + \gamma_s(1) \sin \tau) \\ &\quad - \Omega \int_0^1 (w_c(x) \cos \tau + w_s(x) \sin \tau) (-\gamma_c(x) \sin \tau + \gamma_s(x) \cos \tau) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} w_c(x) \cos \tau + \frac{d}{dx} w_s(x) \sin \tau \right) (\gamma_c(x) \cos \tau + \gamma_s(x) \sin \tau) dx \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} P_2(\tau) &= -\Omega (-W_c(1) \sin \tau + W_s(1) \cos \tau) (\gamma_c(1) \cos \tau + \gamma_s(1) \sin \tau) \\ &\quad - \Omega^2 \int_0^1 (-W_c(x) \sin \tau + W_s(x) \cos \tau) (-\gamma_c(x) \sin \tau + \gamma_s(x) \cos \tau) dx \\ &\quad + \Omega \int_0^1 (-w_c(x) \sin \tau + w_s(x) \cos \tau) (\gamma_c(x) \cos \tau + \gamma_s(x) \sin \tau) dx. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit interessieren wir uns für die zeitlichen Mittelwerte über eine Periodendauer. Mit der Definition

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= \overline{F_2^{(x)}(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2^{(x)}(\tau) d\tau, \\ \overline{P_2} &= \overline{P_2(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_2(\tau) d\tau \end{aligned}$$

und mit $\overline{\cos^2 \tau} = \overline{\sin^2 \tau} = \frac{1}{2}$, $\overline{\sin \tau \cos \tau} = 0$ ergeben sich die Mittelwerte zu

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} w_s(x) \gamma_s(x) dx - \frac{\gamma_s(1)}{2} w_s(1) + \frac{\Omega}{2} \int_0^1 w_s(x) \gamma_c(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} w_c(x) \gamma_c(x) dx - \frac{\gamma_c(1)}{2} w_c(1) - \frac{\Omega}{2} \int_0^1 w_c(x) \gamma_s(x) dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{P_2} &= \frac{\Omega}{2} \left(-\gamma_c(1) W_s(1) + \int_0^1 w_s(x) \gamma_c(x) dx - \Omega \int_0^1 W_s(x) \gamma_s(x) dx \right) \\ &\quad - \frac{\Omega}{2} \left(-\gamma_s(1) W_c(1) + \int_0^1 w_c(x) \gamma_s(x) dx + \Omega \int_0^1 W_c(x) \gamma_c(x) dx \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Zur Veranschaulichung sei hier das in Abschn. 3.2.2 angegebene Beispiel angeführt.

Beispiel: Um die Vorderkante schwenkende Platte $w_c(x) = 0$, $w_s(x) = x$. Die zeitlich gemittelte Leistung ist

$$\overline{P_2} = \frac{\Omega}{2} \left(-\frac{\gamma_c(1)}{2} + \int_0^1 x \gamma_c(x) dx - \frac{\Omega}{2} \int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx \right). \quad (4.22)$$

Zur Bestimmung des Nasensogs setzen wir den zeitlich harmonischen Ansatz Gl. (3.5) in Gl. (4.17) ein

$$\gamma_c(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K_{\gamma,c}}{\sqrt{x}}, \quad \gamma_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K_{\gamma,s}}{\sqrt{x}}$$

und vergleichen mit Gl. (3.21). Der zeitliche Verlauf der Kraft ist mit Gl. (4.16)

$$F_{2,VK}^{(x)} = -\frac{\pi}{4} \left(K_{\gamma,c}^2 \cos^2 t + 2 K_{\gamma,c} K_{\gamma,s} \sin t \cos t + K_{\gamma,s}^2 \sin^2 t \right). \quad (4.23)$$

Somit ergibt sich der zeitliche Mittelwert über eine Periodendauer zu

$$\overline{F_{2,VK}^{(x)}} = -\frac{\pi}{8} \left(K_{\gamma,c}^2 + K_{\gamma,s}^2 \right), \quad (4.24)$$

mit

$$\begin{aligned} K_{\gamma,c} &= \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^1 \frac{\frac{d}{d\xi} w_c(\xi) + \Omega w_s(\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi + CI \gamma_c(1) - SI \gamma_s(1) \right), \\ K_{\gamma,s} &= \frac{1}{\pi} \left(2 \int_0^1 \frac{\frac{d}{d\xi} w_s(\xi) - \Omega w_c(\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi + SI \gamma_c(1) + CI \gamma_s(1) \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

und

$$CI = \int_1^\infty \frac{\cos(\Omega(\xi-1))}{\sqrt{\xi(\xi-1)}} d\xi, \quad SI = \int_1^\infty \frac{\sin(\Omega(\xi-1))}{\sqrt{\xi(\xi-1)}} d\xi. \quad (4.26)$$

Die gesamte zeitlich gemittelte Vortriebskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}}$ ergibt sich als die Summe der Kraft an der Oberfläche und dem Nasensog

$$\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = \overline{F_2^{(x)}} + \overline{F_{2,VK}^{(x)}}.$$

4.2.4 Vortriebswirkungsgrad

Die Definition des Vortriebswirkungsgrads oder Froude-Wirkungsgrads lautet in dimensionsloser Darstellung

$$\eta_V = -\frac{\overline{F_{Ges}^{(x)}}}{\overline{P}}. \quad (4.27)$$

Das Minuszeichen ist notwendig, weil $\overline{F_{Ges}^{(x)}}$ in Richtung der x -Achse zeigt. Positive Werte von $\overline{F_{Ges}^{(x)}}$ entsprechen einer Widerstandskraft. Für Körper mit kleiner Amplitude folgt für den Vortriebswirkungsgrad

$$\eta_V = -\frac{\overline{F_2^{(x)}} + \overline{F_{2,VK}^{(x)}}}{\overline{P_2}} = -\frac{\int_0^1 \Delta p_1 w_{1,x} dx + \overline{F_{2,VK}^{(x)}}}{\int_0^1 \Delta p_1 w_{1,t} dx}. \quad (4.28)$$

Kapitel 5

Zeitlich harmonisch bewegte Platte

5.1 Darstellung der Bewegung

Wir wählen nun als Körperform eine ebene Platte und diskutieren ausführlich den Einfluss zeitlich harmonischer Bewegungen dieser Platte auf die gemittelten Größen von Leistung, Kraft und Vortriebswirkungsgrad. Zu Beginn dieses Kapitels stellen wir die Bewegung durch geeignete Parameter dar und beschreiben damit die Wirbeldichte an der Hinterkante. Anschließend berechnen wir, wie die zeitlich gemittelten Größen von Leistung und Kraft in x -Richtung von den Bewegungsparametern abhängen und stellen die jeweiligen Ergebnisse dar. Schließlich zeigen wir jene Bewegungsformen auf, bei denen für eine vorgegebene Vortriebskraft ein hoher Vortriebswirkungsgrad erreicht wird.

Aus [8] ist bekannt, dass eine reine Schlagbewegung der Platte immer zu Vortrieb führt. Zur Untersuchung einer Leistungsentnahme aus dem Fluidstrom muss auch die Schwenkbewegung um einen Punkt berücksichtigt werden. Die Plattenbewegung setzt sich daher zusammen aus einer Hubbewegung und einer Schwenkbewegung, für die eine gemeinsame reduzierte Frequenz angenommen wird. Wir können die Auslenkung der Platte somit dimensionslos darstellen als

$$w_1(x, t) = B \sin \tau - A(1 - x) \sin(\tau + \varphi), \quad (5.1)$$

wobei B und A nicht negative Konstanten sind. Der Bezugspunkt für die Schwenkbewegung wird an der Hinterkante angenommen. Die Auslenkung hängt somit von drei Parametern ab:

- Amplitude der Hubbewegung B
- Amplitude der Schwenkbewegung A (max. Auslenkung der Vorderkante bei reiner Schwenkbewegung)
- Phasenverschiebung φ der Schwenkbewegung zur Hubbewegung

Dargestellt in der Form von Gl. (3.5) ergibt sich für die Bewegung

$$w_1(x, t) = w_s(x) \sin \tau + w_c(x) \cos \tau, \quad (5.2)$$

mit

$$w_s(x) = (B - A(1 - x) \cos \varphi), \quad w_c(x) = -A(1 - x) \sin \varphi. \quad (5.3)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dx} w_s(x) = A \cos \varphi, \quad \frac{d}{dx} w_c(x) = A \sin \varphi, \quad w_s(1) = B, \quad w_c(1) = 0. \quad (5.4)$$

Wir setzen Gl. (5.4) in die von den Auslenkungsparametern abhängigen Funktionen von Gl. (3.12) ein und erhalten

$$\begin{aligned} f_{1h}(\xi) &= 2\pi B \left(\Omega + (\sin \varphi - \Omega(1 - \xi) \cos \varphi) \frac{A}{B} \right) \sqrt{\xi(1 - \xi)}, \\ f_{2h}(\xi) &= 2\pi A (\cos \varphi + \Omega(1 - \xi) \sin \varphi) \sqrt{\xi(1 - \xi)}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Funktionen in Gl. (3.13) an der Stelle $x = 1$ sind

$$\begin{aligned} f_1(1) &= -2\pi \int_0^1 (\Omega(B - A(1 - \xi) \cos \varphi) + A \sin \varphi) \sqrt{\frac{\xi}{1 - \xi}} d\xi, \\ f_2(1) &= 2\pi \int_0^1 (-\Omega A(1 - \xi) \sin \varphi - A \cos \varphi) \sqrt{\frac{\xi}{1 - \xi}} d\xi. \end{aligned}$$

Nach Auswertung der Integrale erhalten wir

$$f_1(1) = -\pi^2 B \left(\Omega + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{4} \cos \varphi \right) \frac{A}{B} \right), \quad f_2(1) = -\pi^2 A \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{4} \sin \varphi \right). \quad (5.6)$$

Die Bewegungsparameter B , A , φ und Ω sind voneinander unabhängig und wir können sie daher frei wählen. Wir müssen dabei nur beachten, dass $w_1(x, t)$ in Gl. (5.2) im Sinne der linearen Theorie eine Funktion der Ordnung eins ist und wir daher B und A nicht groß gegen eins wählen dürfen.

Damit wir unterschiedliche Bewegungen der Platte miteinander vergleichen können, stellen wir gewisse Bedingungen an die Auslenkung der Platte. Wir fordern, dass während einer Periode die Auslenkung jedes Plattenpunkts innerhalb $|w_1(x, t)| \leq 1$ bleibt und dass zumindest ein Plattenpunkt während der Periode den Wert $w_1 = 1$ erreicht. Die Amplitude der Auslenkung an einer Stelle x erhalten wir mit Gl. (5.3) zu

$$\sqrt{w_s(x)^2 + w_c(x)^2} = \sqrt{B^2 - 2AB(1 - x) \cos \varphi + A^2(1 - x)^2}. \quad (5.7)$$

Weil die Platte einer geraden Strecke entspricht, tritt die maximale Auslenkung entweder an der Vorderkante oder an der Hinterkante auf:

- Amplitude an der Vorderkante $x = 0$: $\sqrt{B^2 - 2AB \cos \varphi + A^2}$
- Amplitude an der Hinterkante $x = 1$: B

Wir definieren nun einen Verhältnisparameter R als Verhältnis der Amplituden von Schwenk- und Hubbewegung

$$R = \frac{A}{B}, \quad (5.8)$$

mit $R \geq 0$. Die max. Auslenkung an der Vorderkante ist größer als die max. Auslenkung an der Hinterkante, wenn $R - 2 \cos \varphi > 0$ ist. Mit der Forderung, dass die max. Auslenkung der Platte auf eins normiert ist, können wir für R und φ folgende Aussagen machen:

- Wenn $R \leq 2$ und $-\varphi_{max} \leq \varphi \leq \varphi_{max}$ ist, mit $\varphi_{max} = \arccos \frac{R}{2}$, so ist die max. Auslenkung an der Vorderkante kleiner als die max. Auslenkung an der Hinterkante. Dann ist

$$B = 1, \quad A = R.$$

- Für $R \leq 2$ mit φ außerhalb des Bereichs $-\varphi_{max}$ bis φ_{max} und für $R \geq 2$ mit φ beliebig, tritt die größte Plattenauslenkung an der Vorderkante auf. Wir fordern $B\sqrt{1 - 2R \cos \varphi + R^2} = 1$, daher ist

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 - 2R \cos \varphi + R^2}}, \quad A = \frac{R}{\sqrt{1 - 2R \cos \varphi + R^2}}.$$

Mit diesen Bedingungen normieren wir alle Plattenbewegungen auf die Amplitude eins. Im weiteren Verlauf der Arbeit geben wir R und φ und die reduzierte Frequenz Ω als Bewegungsparameter vor. Wir stellen Leistung und Kraft aber weiterhin durch B und A dar, damit wir in den Gleichungen nicht mit obigen Bedingungen hantieren müssen. In Abb. 5.1 sind B und A als Funktionen von R für einige Werte von φ aufgetragen.

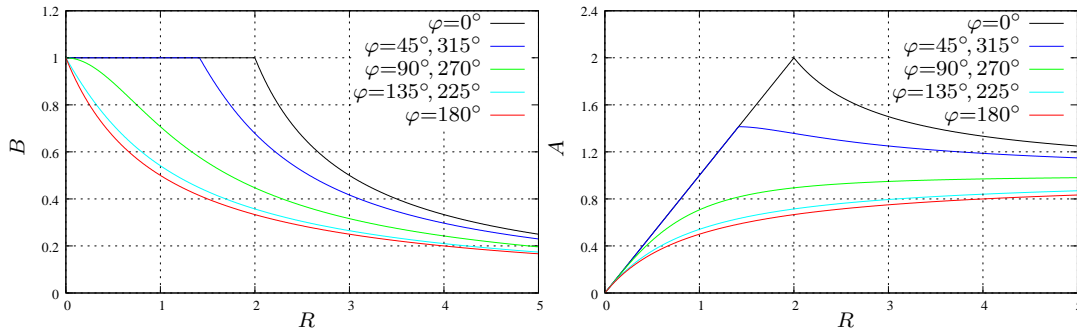


Abbildung 5.1: B und A als Funktionen von R und φ

Für $\varphi = 270^\circ \dots 450^\circ (90^\circ)$ erkennt man den Bereich $R \leq 2 \cos \varphi$, in dem $B = 1$ und $A = R$ ist. Für die reine Hubbewegung $R = 0$ ist φ beliebig.

5.2 Wirbeldichte an der Hinterkante

Für die nun vorgegebene Bewegung können wir die Wirbeldichte an der Hinterkante berechnen. Wir erhalten eine direkte Darstellung von den Bewegungsparameter, wenn wir Gl. (5.6) in

Gl. (3.19) einsetzen. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\gamma_c(1) &= -\pi^2 \Omega \frac{a_1(1) \Omega \left(\Omega B + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{4} \cos \varphi \right) A \right) + (\pi - a_2(1) \Omega) \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{4} \sin \varphi \right) A}{(\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2}, \\ \gamma_s(1) &= \pi^2 \Omega \frac{(\pi - a_2(1) \Omega) \left(\Omega B + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{4} \cos \varphi \right) A \right) - a_1(1) \Omega \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{4} \sin \varphi \right) A}{(\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Wir verwenden diese Darstellung weiter unten, um Leistung und Vortriebskraft direkt durch die Bewegungsparameter zu beschreiben. Die Amplitude der Wirbeldichte an der Hinterkante bzw. im Nachlauf erhalten wir durch Einsetzen von Gl. (5.6) in Gl. (3.20) zu

$$\hat{\gamma}(1) = \pi^2 \Omega \sqrt{\frac{\Omega^2 B^2 + \left(-\frac{\Omega^2}{2} \cos \varphi + 2 \Omega \sin \varphi \right) A B + \left(1 + \frac{\Omega^2}{16} \right) A^2}{(\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2}}.\tag{5.10}$$

Die von der reduzierten Frequenz Ω abhängigen Funktionen $a_1(1)$ und $a_2(1)$ müssen numerisch ausgewertet werden. In Tab. 3.1 sind die Werte für einige Stellen von Ω angegeben.

5.3 Nachlauffreie Bewegung

Wir interessieren uns für Bewegungen bei denen die Wirbeldichte an der Hinterkante (und damit auch im stromabwärts liegenden Gebiet) verschwindet. Aus Abschn. 3.2.3 wissen wir, dass wir dazu $f_1(1) = f_2(1) = 0$ setzen müssen. Aus Gl. (5.6) erhalten wir daher mit Gl. (5.8)

$$\sin \varphi + \Omega \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4} \cos \varphi \right) = 0, \quad 4 \cos \varphi + \Omega \sin \varphi = 0.\tag{5.11}$$

Aus der rechten Gleichung erhalten wir $\Omega = -4 \cot \varphi$. Eingesetzt in die linke Gleichung ergibt das $R = 4 \cos \varphi$. Wegen $\Omega \geq 0$ und $R \geq 0$ muss für verschwindende Wirbeldichte an der Hinterkante die Phasenverschiebung im Intervall $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$ liegen. Ist einer der drei Parameter bekannt, so können die anderen beiden daraus berechnet werden. Die endgültigen Ergebnisse sind in Tab. 5.1 dargestellt.

	R	φ	Ω
R	R	$4 \cos \varphi$	$\frac{4 \Omega}{\sqrt{16 + \Omega^2}}$
φ	$2\pi - \arccos \frac{R}{4}$	φ	$2\pi - \arccos \frac{\Omega}{\sqrt{16 + \Omega^2}}$
Ω	$\frac{4R}{\sqrt{16 - R^2}}$	$-4 \cot \varphi$	Ω

Tabelle 5.1: Wahl der Parameter für verschwindende Wirbeldichte an der Hinterkante

Man erhält zwei wichtige Ergebnisse:

- Die Wirbeldichte verschwindet für eine durch die Parameter $R = 4$, $\varphi = 360^\circ$, $\Omega \rightarrow \infty$ beschriebene Bewegung. Dies entspricht einer sehr schnellen Schwenkbewegung um einen

Drehpunkt, der bei $\frac{3}{4}$ der Plattenlänge liegt. Allerdings bleibt die lineare Theorie nur gültig, wenn auch für hohe Werte von Ω Ablösung ausgeschlossen wird. Für $R > 4$ gibt es keine Lösung mit verschwindender Wirbeldichte an der Hinterkante.

- Bei kleinen reduzierten Frequenzen $\Omega \rightarrow 0$ verschwindet die Wirbeldichte an der Hinterkante, wenn $R \approx \Omega$, $\varphi \approx \frac{3\pi}{2} + \frac{\Omega}{4}$ ist. Dies erreicht man, indem man der Hubbewegung eine Schwenkbewegung mit kleiner Amplitude und Phasenlage $\varphi \approx 270^\circ$ überlagert.

Aus Abschn. 5.1 wissen wir, dass für $R - 2 \cos \varphi > 0$ die max. Auslenkung an der Vorderkante größer ist als die max. Auslenkung an der Hinterkante. Dies ist der Fall für alle Bewegungen bei denen die Wirbeldichte an der Hinterkante verschwindet.

In Abschn. 5.4 und Abschn. 5.5 zeigen wir, dass für verschwindende Wirbeldichte an der Hinterkante $\gamma_c(1) = \gamma_s(1) = 0$ auch die zeitlichen Mittelwerte von Leistung und Vortriebskraft verschwinden $\overline{P_2} = \overline{F_{2, Ges}^{(x)}} = 0$. Dies ist einsichtig, weil aufgrund des wirbelfreien Nachlaufgebiets die Strömung weit weg von der Platte als ungestört betrachtet werden kann. Für kleine Frequenzen $\Omega \rightarrow 0$ wollen wir hierfür eine einfache lokale Erklärung geben. Wir zeigen, dass für die Lösung aus Tab. 5.1 mit kleinen Ω zu jeder Zeit der effektive Anstellwinkel verschwindet. Die Platte bewegt sich im Ruhesystem des anströmenden Fluids von rechts nach links. Dies ist in Abb. 5.2 b) durch den Pfeil angedeutet.

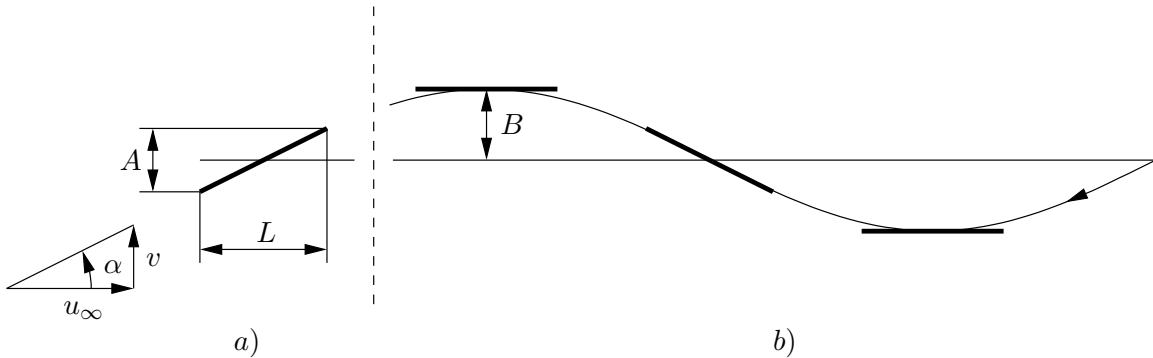


Abbildung 5.2: Erklärung des Verschwindens der Wirbeldichte an der Hinterkante durch das Verschwinden des effektiven Anstellwinkels. a) Lokale Betrachtung im System der Platte. b) Bewegung der Platte im Ruhesystem des anströmenden Fluids

Wegen $\varphi = 270^\circ$ ist die Auslenkung der Schwenkbewegung maximal, wenn die Hubbewegung den Nulldurchgang hat. Wir betrachten die Platte nun genauer beim Nulldurchgang während der Abwärtsbewegung. Dazu begeben wir uns in das lokale System, siehe Abb. 5.2 a). Dabei seien alle Größen zunächst dimensionsbehaftet. Der Winkel α des Geschwindigkeitsvektors ist wegen der linearen Theorie und wegen $R \rightarrow 0$ (A klein gegenüber B) sehr klein. Die Amplitude der Hubbewegung ist B , die Schlagfrequenz ist ω . Die Geschwindigkeit der Hubbewegung beim Nulldurchgang ist daher ωB . Diese entspricht wegen $A \ll B$ etwa der Vertikalgeschwindigkeit v der Platte beim betrachteten Nulldurchgang. Somit gilt $\alpha \approx \frac{v}{u_\infty} \approx \frac{\omega B}{u_\infty}$. Damit der effektive Anstellwinkel null wird, muss $\alpha \approx \frac{A}{L}$ sein. Umformen der Gleichung für α ergibt $\frac{A}{B} \approx \frac{\omega L}{u_\infty}$,

und in dimensionsloser Darstellung $R \approx \Omega$. Diese Lösung ist gleich mit der Lösung, die wir aus Tab. 5.1 für $\Omega \rightarrow 0$ erhalten.

5.4 Leistung

Die allgemeinen Formulierungen für Kraft und Leistung aus Kap. 4 werden für die Bewegung der ebenen Platte weiter spezialisiert. Dabei werden schrittweise immer mehr Ausdrücke eingesetzt. Im ersten Schritt wird für die Auslenkungen eingesetzt und die Integrale über die Wirbeldichte nicht verändert. Im zweiten Schritt werden die Integrale durch die Wirbeldichte an der Hinterkante ersetzt und so weit wie möglich analytisch gelöst. Im dritten Schritt werden schließlich die Werte an der Hinterkante direkt durch die Bewegung beschrieben.

Wir berechnen die in Abschn. 4.2.3 eingeführten Stammfunktionen der Bewegung

$$\begin{aligned} W_s(x) &= \int w_s(x) dx = (B - A \cos \varphi) x + \frac{A}{2} \cos \varphi x^2, \\ W_c(x) &= \int w_c(x) dx = -A \sin \varphi \left(x - \frac{x^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$W_s(1) = B - \frac{A}{2} \cos \varphi, \quad W_c(1) = -\frac{A}{2} \sin \varphi. \quad (5.13)$$

Wir setzen Gl. (5.12), Gl. (5.13) und Gl. (5.3) in Gl. (4.21) ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \overline{P}_2 &= \frac{\Omega}{2} \left(-\gamma_c(1) \left(B - \frac{A}{2} \cos \varphi \right) + (B - A \cos \varphi) \int_0^1 \gamma_c(x) dx + A \cos \varphi \int_0^1 x \gamma_c(x) dx \right. \\ &\quad - \Omega (B - A \cos \varphi) \int_0^1 x \gamma_s(x) dx - \Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx - \gamma_s(1) \frac{A}{2} \sin \varphi \\ &\quad + A \sin \varphi \int_0^1 \gamma_s(x) dx - A \sin \varphi \int_0^1 x \gamma_s(x) dx + \Omega A \sin \varphi \int_0^1 x \gamma_c(x) dx \\ &\quad \left. - \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \int_0^1 x^2 \gamma_c(x) dx \right). \end{aligned}$$

Mit der Hinterkanten-Bedingung Gl. (3.9) und sortiert nach Termen von γ_c und γ_s

$$\begin{aligned} \overline{P}_2 &= \frac{\Omega}{2} \left(- \left(B - \frac{A}{2} \cos \varphi + \frac{1}{\Omega} A \sin \varphi \right) \gamma_c(1) - \left(\frac{A}{2} \sin \varphi - \frac{1}{\Omega} (B - A \cos \varphi) \right) \gamma_s(1) \right. \\ &\quad + A (\cos \varphi + \Omega \sin \varphi) \int_0^1 x \gamma_c(x) dx - (A \sin \varphi + \Omega (B - A \cos \varphi)) \int_0^1 x \gamma_s(x) dx \\ &\quad \left. - \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \int_0^1 x^2 \gamma_c(x) dx - \Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Ausdruck enthält die Bewegungsparameter als Faktoren für die Wirbeldichte bzw. für Integrale über die Wirbeldichte.

Im zweiten Schritt wollen wir die in Gl. (5.14) enthaltenen Integrale vereinfachen. Die verwendete Vorgangsweise ist gleich mit der für Gl. (3.17) und wird hier für zwei der vier Integrale beschrieben. Einsetzen von $\gamma_c(x)$ und $\gamma_s(x)$ aus Gl. (3.14) ergibt

$$\int_0^1 x \gamma_c(x) dx = C_c \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}} (-a_1(x) \gamma_c(1) - a_2(x) \gamma_s(1) + f_1(x)) dx,$$

$$\int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx = C_s \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}} dx}_{\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x(1-x)}} (a_2(x) \gamma_c(1) - a_1(x) \gamma_s(1) + f_2(x)) dx.$$

Für die Auswertung der Integrale im jeweils zweiten Ausdruck auf der rechten Seite wird Anh. A verwendet. Für das erste Integral ist $k = 1$, für das zweite $k = 2$ zu nehmen. Die Vorgangsweise für die anderen beiden Integrale in Gl. (5.14) ist gleich. Somit ergibt sich für alle vier Ausdrücke

$$\int_0^1 x \gamma_c(x) dx = C_c \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (-a_{1h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{2h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{1h}(\xi)) d\xi, \quad (5.15)$$

$$\int_0^1 x \gamma_s(x) dx = C_s \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (a_{2h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{1h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{2h}(\xi)) d\xi, \quad (5.16)$$

$$\int_0^1 x^2 \gamma_c(x) dx = C_c \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1 + 2\xi) (-a_{1h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{2h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{1h}(\xi)) d\xi, \quad (5.17)$$

$$\int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx = C_s \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1 + 2\xi) (a_{2h}(\xi) \gamma_c(1) - a_{1h}(\xi) \gamma_s(1) + f_{2h}(\xi)) d\xi. \quad (5.18)$$

C_c und C_s werden mithilfe der Hinterkanten-Bedingung Gl. (3.18) ersetzt. Für f_{1h} und f_{2h} wird Gl. (5.5) eingesetzt und die Integrale ausgewertet. Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \gamma_c(x) dx = & \\ & \frac{1}{2} \frac{\gamma_s(1)}{\Omega} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi \gamma_c(1) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi \gamma_s(1) \\ & - \frac{\pi}{4} B \left(\Omega + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{2} \cos \varphi \right) \frac{A}{B} \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \gamma_s(x) dx = & \\ & -\frac{1}{2} \frac{\gamma_c(1)}{\Omega} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi \gamma_c(1) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi \gamma_s(1) \\ & - \frac{\pi}{4} B \frac{A}{B} \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{2} \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x^2 \gamma_c(x) dx = \\
& \frac{3}{8} \frac{\gamma_s(1)}{\Omega} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1+2\xi) a_{1h}(\xi) d\xi \gamma_c(1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1+2\xi) a_{2h}(\xi) d\xi \gamma_s(1) \\
& - \frac{\pi}{4} B \left(\Omega + \left(\sin \varphi - \frac{7}{16} \Omega \cos \varphi \right) \frac{A}{B} \right), \tag{5.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x^2 \gamma_s(x) dx = \\
& - \frac{3}{8} \frac{\gamma_c(1)}{\Omega} - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1+2\xi) a_{2h}(\xi) d\xi \gamma_c(1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1+2\xi) a_{1h}(\xi) d\xi \gamma_s(1) \\
& - \frac{\pi}{4} B \frac{A}{B} \left(\cos \varphi + \frac{7}{16} \Omega \sin \varphi \right). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Die Integrale auf der linken Seite sind somit durch die Hinterkantenwerte der Wirbeldichte $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ dargestellt. Die restlichen Ausdrücke sind Funktionen der Bewegungsparameter. Die Funktionen $a_{1h}(\xi)$ und $a_{2h}(\xi)$ sind nur von der reduzierten Frequenz Ω abhängig, siehe Gl. (3.12). Durch Einsetzen der Integrale Gl. (5.19)-(5.22) kann die zeitlich gemittelte Leistung in Gl. (5.14) dargestellt werden als

$$\begin{aligned}
\overline{P_2} = & \left(-B \left(\frac{\Omega}{4} - \frac{1}{2\pi} \Omega^2 \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{3}{32} \Omega + \frac{1}{2\pi} \left(\Omega \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi - \Omega^2 \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi + \frac{\Omega^2}{4} \int_0^1 (1+2\xi) a_{2h}(\xi) d\xi \right) \right) A \cos \varphi \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(\Omega^2 \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi + \Omega \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi - \frac{\Omega^2}{4} \int_0^1 (1+2\xi) a_{1h}(\xi) d\xi \right) \right) A \sin \varphi \right) \gamma_c(1) \\
& + \left(B \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \Omega^2 \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(\Omega^2 \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi + \Omega \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi - \frac{\Omega^2}{4} \int_0^1 (1+2\xi) a_{1h}(\xi) d\xi \right) \right) A \cos \varphi \right. \\
& - \left. \left(\frac{3}{32} \Omega + \frac{1}{2\pi} \left(\Omega \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi - \Omega^2 \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi + \frac{\Omega^2}{4} \int_0^1 (1+2\xi) a_{2h}(\xi) d\xi \right) \right) A \sin \varphi \right) \gamma_s(1).
\end{aligned}$$

Wir führen Abkürzungen ein, um die Darstellung kürzer und damit übersichtlicher zu gestalten

$$\overline{P_2} = B \left(-k_4 + k_2 \frac{A}{B} \cos \varphi - k_1 \frac{A}{B} \sin \varphi \right) \gamma_c(1) + B \left(k_3 - k_1 \frac{A}{B} \cos \varphi - k_2 \frac{A}{B} \sin \varphi \right) \gamma_s(1), \tag{5.23}$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 a_{1h}(\xi) d\xi, & I_2 &= \int_0^1 a_{2h}(\xi) d\xi, \\
I_3 &= \int_0^1 \xi a_{1h}(\xi) d\xi, & I_4 &= \int_0^1 \xi a_{2h}(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \left(I_2 \Omega + \frac{3}{4} I_1 \Omega^2 - \frac{1}{2} I_3 \Omega^2 \right), & k_2 &= \frac{3}{32} \Omega + \frac{1}{2\pi} \left(I_1 \Omega - \frac{3}{4} I_2 \Omega^2 + \frac{1}{2} I_4 \Omega^2 \right), \\
k_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} I_1 \Omega^2, & k_4 &= \frac{\Omega}{4} - \frac{1}{2\pi} I_2 \Omega^2.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Die Ausdrücke I_1 bis I_4 und k_1 bis k_4 hängen ausschließlich von Ω ab. Ein interessantes Ergebnis von Gl. (5.23) ist, dass jene Terme verschwinden, die kein $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ enthalten. Das bedeutet, dass für zeitlich harmonische Bewegungen der Platte, bei denen die Wirbeldichte an der Hinterkante zu jeder Zeit null ist (siehe Abschn. 5.3), auch die zeitlich gemittelte Leistung null ist.

Im dritten Schritt können wir nun die Leistung direkt durch die Bewegungsparameter beschreiben. Dazu setzen wir Gl. (5.9) in Gl. (5.23) ein. Wir führen Abkürzungen ein und erhalten

$$\overline{P}_2 = \frac{K_{B,1} B^2 + (K_{C,1} \cos \varphi + K_{S,1} \sin \varphi) A B + K_{A,1} A^2}{N}, \tag{5.26}$$

mit

$$\begin{aligned}
N &= (\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2, \\
K_{B,1} &= \pi^2 \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) k_3 + \pi^2 \Omega^3 a_1(1) k_4, \\
K_{C,1} &= \left(-\pi^2 \Omega^2 a_1(1) - \frac{\pi^2}{4} \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_3 - \left(\frac{\pi^2}{4} \Omega^3 a_1(1) - \pi^2 \Omega (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_4 \\
&\quad - \pi^2 \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) k_1 - \pi^2 \Omega^3 a_1(1) k_2, \\
K_{S,1} &= \left(-\frac{\pi^2}{4} \Omega^3 a_1(1) + \pi^2 \Omega (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_3 + \left(\pi^2 \Omega^2 a_1(1) + \frac{\pi^2}{4} \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_4 \\
&\quad + \pi^2 \Omega^3 a_1(1) k_1 - \pi^2 \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) k_2, \\
K_{A,1} &= \left(\pi^2 \Omega^2 a_1(1) + \frac{\pi^2}{4} \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_1 + \left(\frac{\pi^2}{4} \Omega^3 a_1(1) - \pi^2 \Omega (\pi - a_2(1) \Omega) \right) k_2.
\end{aligned}$$

Somit ist die zeitlich gemittelte Leistung direkt beschrieben durch B , A und φ und durch restliche Ausdrücke, die Funktionen ausschließlich von Ω sind. Eine vollständig analytische Auswertung dieser Funktionen ist nicht möglich, sie werden daher teilweise numerisch ausgewertet. Die Funktionen haben die Eigenschaften $N > 0$, $K_{B,1} > 0$, $K_{C,1} < 0$, $K_{S,1} > 0$, $K_{A,1} > 0$ für alle Ω . Aufgrund dieser Eigenschaften erhält man zwei wichtige Ergebnisse:

- Für eine reine Hubbewegung $B \neq 0$, $A = 0$ ($R = 0$) wird wegen $N > 0$, $K_{B,1} > 0$ die zeitlich gemittelte Leistung $\overline{P}_2 > 0$ für alle Ω .
- Für eine reine Schwenkbewegung um die Hinterkante $B = 0$, $A \neq 0$ ($R \rightarrow \infty$) folgt wegen $N > 0$, $K_{A,1} > 0$ ebenfalls $\overline{P}_2 > 0$ für alle Ω .

Beide Bewegungen sind somit für alle reduzierten Frequenzen mit Leistungszufuhr verbunden.

Mit Gl. (5.26) können wir nun die zeitlich gemittelte Leistung für jede Plattenbewegung berechnen. B und A können wir aus R und φ bestimmen, siehe Abschn. 5.1. Wir legen Zahlenwerte

für die Parameter R , φ und Ω fest und führen damit die Berechnung der Leistung durch. Diese Werte verwenden wir auch zur Berechnung von Kraft und Vortriebswirkungsgrad. Wir wählen $R = 0, 0.5, 1, 2, 4$ und kombinieren dies jeweils mit in 30° Schritten abgestuften Werten für den Phasenwinkel $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 330^\circ$ und einer großen Anzahl von Werten für Ω . Für Ω wählen wir einen Bereich von 0.001 bis 10 mit je 20 Werten pro Dekade, insgesamt daher 81 Werte.

In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse jeweils für festgehaltenen Verhältnisparameter R dargestellt. Für die gewählten Werte von φ ist die zeitlich gemittelte Leistung \overline{P}_2 über der reduzierten Frequenz Ω aufgetragen. Die punktuellen Ergebnisse sind durch Geraden verbunden. Die Leistungskurve für die reine Hubbewegung $R = 0$ ist in Abb. 5.3 dargestellt.

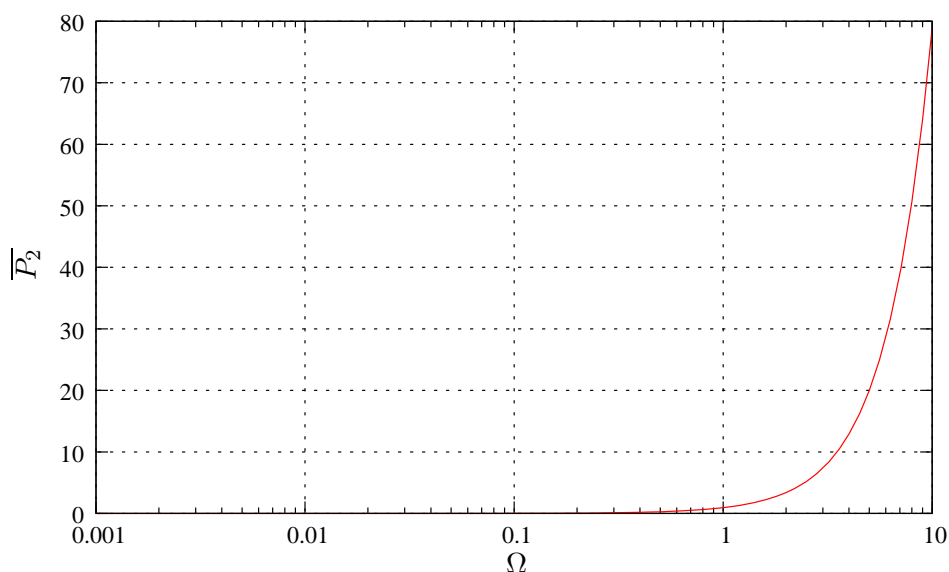


Abbildung 5.3: Leistung als Funktion von Ω für $R = 0$ und beliebigem φ

Bei $R = 0$ verliert die Phasenverschiebung φ ihre Bedeutung und kann daher beliebig gewählt werden. Der Platte muss für alle Ω Leistung zugeführt werden. Die Leistungskurve steigt über der reduzierten Frequenz stark an. Dieser „Trend“ zu großen Leistungen bei hoher Frequenz existiert für alle berechneten Bewegungsformen, allerdings kann bei manchen Bewegungen für kleine Ω das Vorzeichen der Leistung negativ werden. In Abb. 5.3-5.7 wollen wir diese Leistungsentnahme betrachten.

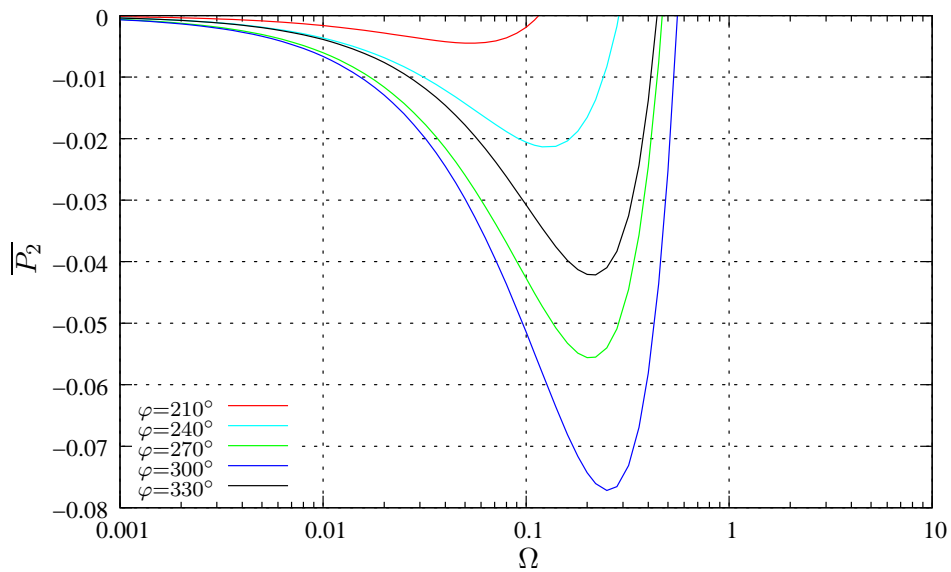


Abbildung 5.4: Leistung als Funktion von Ω für $R = 0.5$ und unterschiedliche φ

Die größte Leistungsentnahme tritt für $R = 0.5$ (siehe Abb. 5.4) bei etwa $\varphi = 300^\circ$ auf und beträgt bei $\Omega = 0.25$ $\overline{P}_2 = -0.0772$. Für $\varphi = 360^\circ$ gibt es bei kleinen Ω Bereiche mit Leistungsentnahme $\overline{P}_2 < 0$, jedoch sind die Zahlenwerte zu klein um sie in der Abbildung erkennen zu können. Für $\varphi = 180^\circ$ ergibt sich für alle gewählten Werte von Ω Leistungszufuhr. Diese beiden Kurven sind daher nicht eingezeichnet. Die Nullstellen der Leistung sind auch in Abb. 5.14 dargestellt.

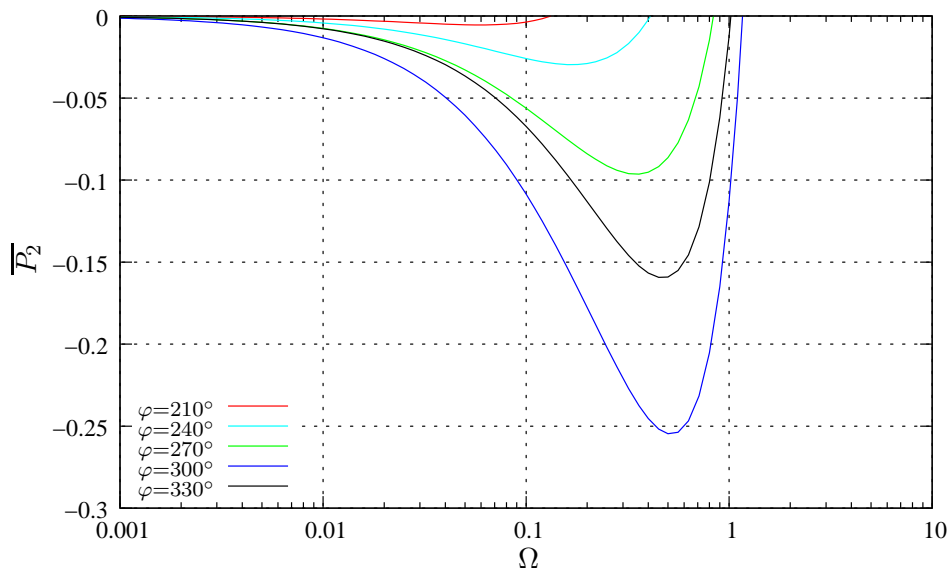


Abbildung 5.5: Leistung als Funktion von Ω für $R = 1$ und unterschiedliche φ

Für $R = 1$, siehe Abb. 5.5, kann mit dem Wert $\overline{P}_2 = -0.255$ die größte Leistungsentnahme bei etwa $\varphi = 300^\circ$ und $\Omega = 0.5$ entnommen werden.

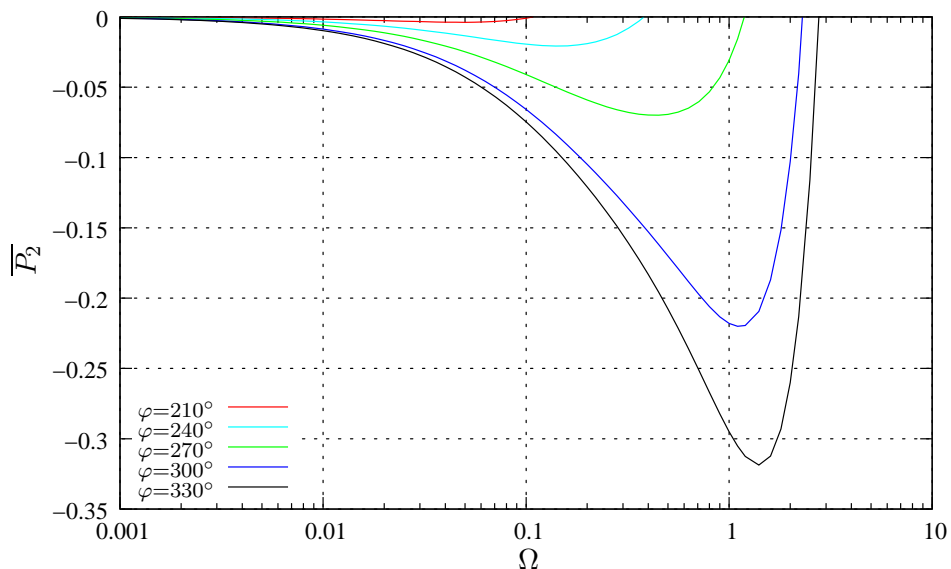


Abbildung 5.6: Leistung als Funktion von Ω für $R = 2$ und unterschiedliche φ

Die größte Leistungsentnahme tritt für $R = 2$ (siehe Abb. 5.6) bei etwa $\varphi = 330^\circ$ auf und beträgt $\overline{P}_2 = -0.319$ bei $\Omega = 1.4$. Dies ist der größte Wert für die Leistungsentnahme der bei den durchgeführten Berechnungen aufgetreten ist.

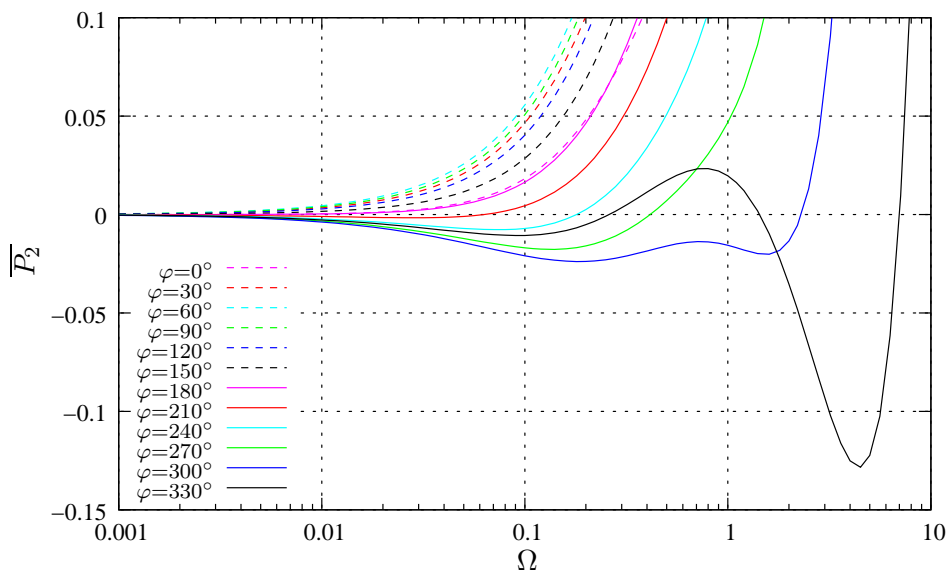


Abbildung 5.7: Leistung als Funktion von Ω für $R = 4$ und unterschiedliche φ

Abb. 5.7 zeigt den Verlauf der Leistung für $R = 4$. Die Linie $\varphi = 330^\circ$ ist interessant weil die Leistung im Verlauf über Ω drei Nulldurchgänge aufweist. Gut erkennbar ist dies auch in Abb. 5.14. Die größte Leistung mit dem Wert $\overline{P}_2 = -0.128$ kann bei etwa $\varphi = 330^\circ$ und $\Omega = 4.5$ entnommen werden. Man erkennt dass der Wert der Leistung empfindlich auf eine Änderung des Phasenwinkels φ reagiert. Bei festgehaltener reduzierter Frequenz $\Omega = 4.5$ muss für $\varphi = 300^\circ$ und $\varphi = 0^\circ$ bereits Leistung zugeführt werden.

5.5 Vortriebskraft

Wir berechnen zunächst die zeitlich gemittelte Kraft in x -Richtung zufolge der Druckverteilung entlang der Oberfläche. Anschließend berechnen wir den Mittelwert der Kraft aufgrund der Umströmung der Vorderkante. Wie bei der Leistung gehen wir auch hier wieder schrittweise vor. Schließlich addieren wir beide Anteile zur gesamten Vortriebskraft.

Wir setzen Gl. (5.3) in Gl. (4.20) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= \frac{A}{2} \cos \varphi \int_0^1 \gamma_s(x) dx - \frac{\gamma_s(1)}{2} B + \frac{\Omega}{2} \int_0^1 (B - A(1-x) \cos \varphi) \gamma_c(x) dx \\ &\quad + \frac{A}{2} \sin \varphi \int_0^1 \gamma_c(x) dx + \frac{\Omega}{2} \int_0^1 A(1-x) \sin \varphi \gamma_s(x) dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mit der Hinterkanten-Bedingung Gl. (3.9) und sortiert nach Termen von γ_c und γ_s

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= - \left(\frac{A}{2} \sin \varphi + \frac{1}{\Omega} \frac{A}{2} \cos \varphi \right) \gamma_c(1) - \left(\frac{A}{2} \cos \varphi - \frac{1}{\Omega} \frac{A}{2} \sin \varphi \right) \gamma_s(1) \\ &\quad + \Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \int_0^1 x \gamma_c(x) dx - \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \int_0^1 x \gamma_s(x) dx. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Im zweiten Schritt verwenden wir die bereits von der Leistungsberechnung bekannten Integrale. Wir setzen Gl. (5.19) und Gl. (5.20) in Gl. (5.28) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= \left(\Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \frac{1}{\pi} I_1 + \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{\pi} I_2 \right) - \left(\frac{A}{2} \sin \varphi + \frac{1}{\Omega} \frac{A}{2} \cos \varphi \right) \right) \gamma_c(1) \\ &\quad + \left(\Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \left(\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{\pi} I_2 \right) - \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \frac{1}{\pi} I_1 - \left(\frac{A}{2} \cos \varphi - \frac{1}{\Omega} \frac{A}{2} \sin \varphi \right) \right) \gamma_s(1) \\ &\quad + \Omega \frac{A}{2} \cos \varphi \frac{\pi}{4} B \left(\Omega + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{2} \cos \varphi \right) \frac{A}{B} \right) + \Omega \frac{A}{2} \sin \varphi \frac{\pi}{4} A \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{2} \sin \varphi \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

bzw. vereinfacht und mit Abkürzungen

$$\begin{aligned} \overline{F_2^{(x)}} &= -A \left(\frac{k_3}{\Omega} \cos \varphi + \frac{k_4}{\Omega} \sin \varphi \right) \gamma_c(1) - A \left(\frac{k_4}{\Omega} \cos \varphi - \frac{k_3}{\Omega} \sin \varphi \right) \gamma_s(1) \\ &\quad + \frac{\pi}{16} A \Omega^2 (A - 2B \cos \varphi), \end{aligned} \quad (5.30)$$

mit k_3 und k_4 von Gl. (5.25).

Wie bei der Leistung beschreiben wir auch die Kraft direkt durch die Bewegungsparameter. Wir setzen Gl. (5.9) in Gl. (5.30) ein und erhalten durch Einführen von neuen Abkürzungen

$$\overline{F_2^{(x)}} = \frac{K_{B,2} B^2 + (K_{C,2} \cos \varphi + K_{S,2} \sin \varphi) A B + K_{A,2} A^2}{N}, \quad (5.31)$$

mit

$$\begin{aligned} N &= (\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2, \\ K_{B,2} &= 0, \\ K_{C,2} &= \pi^2 \Omega^3 a_1(1) \frac{k_3}{\Omega} - \pi^2 \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \frac{k_4}{\Omega} - \frac{\pi}{8} \Omega^2 N, \\ K_{S,2} &= \pi^2 \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \frac{k_3}{\Omega} + \pi^2 \Omega^3 a_1(1) \frac{k_4}{\Omega}, \\ K_{A,2} &= - \left(\frac{\pi^2}{4} \Omega^3 a_1(1) - \pi^2 \Omega (\pi - a_2(1) \Omega) \right) \frac{k_3}{\Omega} \\ &\quad + \left(\pi^2 \Omega^2 a_1(1) + \frac{\pi^2}{4} \Omega^2 (\pi - a_2(1) \Omega) \right) \frac{k_4}{\Omega} + \frac{\pi}{16} \Omega^2 N. \end{aligned}$$

Für eine reine Hubbewegung $B \neq 0, A = 0$ ($R = 0$) ist wegen $K_{B,2} = 0$ die x -Komponente der Kraft $\overline{F_2^{(x)}} = 0$. Dieses Ergebnis ist leicht einsichtig, weil die Platte bei einer reinen Hubbewegung zu keiner Zeit zur x -Achse geneigt ist. Allerdings weist die Gesamtkraft eine x -Komponente aufgrund des Nasensogs auf.

Nun berechnen wir die Vortriebskraft aus dem Nasensog. Mit Gl. (5.3) und Gl. (5.4) folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\frac{d}{d\xi} w_c(\xi) + \Omega w_s(\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi &= (A \sin \varphi + \Omega (B - A \cos \varphi)) \underbrace{\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}}_{\pi} + \Omega A \cos \varphi \underbrace{\int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}}_{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^1 \frac{\frac{d}{d\xi} w_s(\xi) - \Omega w_c(\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi &= (A \cos \varphi + \Omega A \sin \varphi) \pi - \Omega A \sin \varphi \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. (4.25) ergibt das

$$\begin{aligned} K_{\gamma,c} &= 2 B \left(\Omega + \left(\sin \varphi - \frac{\Omega}{2} \cos \varphi \right) \frac{A}{B} \right) + \frac{1}{\pi} (CI \gamma_c(1) - SI \gamma_s(1)), \\ K_{\gamma,s} &= 2 A \left(\cos \varphi + \frac{\Omega}{2} \sin \varphi \right) + \frac{1}{\pi} (SI \gamma_c(1) + CI \gamma_s(1)). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Der zeitliche Mittelwert der x -Komponenten der Kraft um die Vorderkante kann daraus mit Gl. (4.24) berechnet werden.

Schließlich ersetzen wir noch die Wirbeldichte an der Hinterkante durch die Bewegung. Dafür setzen wir Gl. (5.9) in Gl. (5.32) ein und erhalten für Gl. (4.24) mit neuen Abkürzungen

$$\overline{F_{2,VK}^{(x)}} = -\frac{\pi}{8} \frac{K_{B,3} B^2 + (K_{C,3} \cos \varphi + K_{S,3} \sin \varphi) A B + K_{A,3} A^2}{N}, \quad (5.33)$$

mit

$$\begin{aligned}
N &= (\pi - a_2(1)\Omega)^2 + (a_1(1)\Omega)^2, \\
K_{B,3} &= -4\pi\Omega^4 a_1(1)CI - 4\pi\Omega^3(\pi - a_2(1)\Omega)SI \\
&\quad + \pi^2\Omega^4(CI^2 + SI^2) + 4\Omega^2 N, \\
K_{C,3} &= 3\pi\Omega^4 a_1(1)CI + 3\pi\Omega^3(\pi - a_2(1)\Omega)SI \\
&\quad - \frac{\pi^2}{2}\Omega^4(CI^2 + SI^2) - 4\Omega^2 N, \\
K_{S,3} &= -\pi(8\Omega^3 a_1(1) - \Omega^3(\pi - a_2(1)\Omega))CI \\
&\quad - (8\pi\Omega^2(\pi - a_2(1)\Omega) + \pi\Omega^4 a_1(1))SI + 2\pi^2\Omega^3(CI^2 + SI^2) + 8\Omega N, \\
K_{A,3} &= \pi\left(-4\Omega^2 a_1(1) + \Omega^2(\pi - a_2(1)\Omega) - \frac{1}{2}a_1(1)\Omega^4\right)CI \\
&\quad - \pi\left(4\Omega(\pi - a_2(1)\Omega) + \frac{\Omega^3}{2}(\pi - a_2(1)\Omega) + \Omega^3 a_1(1)\right)SI \\
&\quad + \pi^2\Omega^2\left(1 + \frac{\Omega^2}{16}\right)(CI^2 + SI^2) + (4 + \Omega^2)N.
\end{aligned}$$

Aus den beiden Anteilen können wir nun den Mittelwert der Gesamtkraft in x -Richtung $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}}$ berechnen. Formuliert mit der Wirbeldichte an der Hinterkante wird die Gesamtkraft

$$\begin{aligned}
\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} &= \overline{F_2^{(x)}} + \overline{F_{2,VK}^{(x)}} = \\
&\quad -\pi\left(\frac{\Omega^2}{2}B^2 + \Omega\left(\sin\varphi - \frac{3}{8}\Omega\cos\varphi\right)AB + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega^2}{8}\right)A^2\right) \\
&\quad - \left(\frac{CI}{2}\Omega B + \left(\frac{k_3}{\Omega} + \frac{SI}{2} - \frac{CI}{4}\Omega\right)A\cos\varphi + \left(\frac{k_4}{\Omega} + \frac{CI}{2} + \frac{SI}{4}\Omega\right)A\sin\varphi\right)\gamma_c(1) \\
&\quad + \left(\frac{SI}{2}\Omega B - \left(\frac{k_4}{\Omega} + \frac{CI}{2} + \frac{SI}{4}\Omega\right)A\cos\varphi + \left(\frac{k_3}{\Omega} + \frac{SI}{2} - \frac{CI}{4}\Omega\right)A\sin\varphi\right)\gamma_s(1) \\
&\quad - \frac{1}{8\pi}(CI^2 + SI^2)(\gamma_c(1)^2 + \gamma_s(1)^2). \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Die Gesamtkraft ist auch abhängig von den Quadraten der Wirbeldichte an der Hinterkante. Ein nicht von $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ abhängiger Anteil ist ebenfalls enthalten. Wir wollen nun überprüfen, ob die x -Komponente der zeitlich gemittelte Gesamtkraft null wird, wenn wir die Wirbeldichte an der Hinterkante null setzen. Dass für nachlaufreife Bewegungen die zeitlich gemittelte Leistung null wird, haben wir bereits in Abschn. 5.4 gezeigt. Wir setzen dafür $\gamma_c(1) = \gamma_s(1) = 0$ und Gl. (5.8) in Gl. (5.34) ein und erhalten

$$\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = -\pi B^2\left(\frac{\Omega^2}{2} + \Omega\left(\sin\varphi - \frac{3}{8}\Omega\cos\varphi\right)R + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega^2}{8}\right)R^2\right).$$

Weil wir voraussetzen, dass die Wirbeldichte an der Hinterkante verschwindet, müssen auch die Beziehungen aus Tab. 5.1 erfüllt sein. Wählt man daraus beispielsweise $\Omega = -4\cot\varphi$, $R =$

4 $\cos \varphi$, so erhält man

$$\begin{aligned} \overline{F_{2,Ges}^{(x)}} &= \\ -\pi B^2 \left(8 \cot^2 \varphi + 4 \left(-4 \cot \varphi \sin \varphi - 6 \cot^2 \varphi \cos \varphi \right) \cos \varphi + 8 \left(1 + 2 \cot^2 \varphi \right) \cos^2 \varphi \right) &= \\ -\pi B^2 \left(8 \cot^2 \varphi - 16 \cos^2 \varphi - 24 \cot^2 \varphi \cos^2 \varphi + 8 \cos^2 \varphi + 16 \cot^2 \varphi \cos^2 \varphi \right) &= \\ -\pi B^2 \left(8 \left(1 - \cos^2 \varphi \right) \cot^2 \varphi - 8 \cos^2 \varphi \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Damit ist gezeigt, dass bei verschwindender Wirbeldichte an der Hinterkante auch die Gesamtkraft in x -Richtung verschwindet. Dies bedeutet allerdings nicht, dass die Gesamtkraft ausschließlich bei nachlauffreien Bewegungen null ist.

Wir stellen die Gesamtkraft noch direkt durch die Bewegungsparameter dar. Dafür können wir einfach Gl. (5.31) und Gl. (5.33) summieren. Mit neuen Abkürzungen erhalten wir

$$\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = \frac{K_{B,4} B^2 + (K_{C,4} \cos \varphi + K_{S,4} \sin \varphi) A B + K_{A,4} A^2}{N}, \quad (5.36)$$

mit

$$\begin{aligned} N &= (\pi - a_2(1) \Omega)^2 + (a_1(1) \Omega)^2, \\ K_{B,4} &= -\frac{\pi}{8} K_{B,3}, \quad K_{C,4} = K_{C,2} - \frac{\pi}{8} K_{C,3}, \\ K_{S,4} &= K_{S,2} - \frac{\pi}{8} K_{S,3}, \quad K_{A,4} = K_{A,2} - \frac{\pi}{8} K_{A,3}. \end{aligned}$$

Numerische Auswertung ergibt folgende Eigenschaften der Funktionen. Es sind $N > 0$, $K_{B,4} < 0$, $K_{C,4} > 0$, $K_{S,4} < 0$ für alle Ω . Weiters ist $K_{A,4} > 0$ für etwa $\Omega < 2$ und $K_{A,4} < 0$ sonst. Aufgrund dieser Eigenschaften erhält man folgende Ergebnisse:

- Für eine reine Hubbewegung $B \neq 0$, $A = 0$ ($R = 0$) bekommt die zeitlich gemittelte Gesamtkraft wegen $N > 0$, $K_{B,4} < 0$ negatives Vorzeichen. Weil wir die Kraft in Richtung der x -Achse definiert haben, bedeutet dies, dass für reine Hubbewegung bei allen reduzierten Frequenzen Ω Vortrieb erzeugt wird. Damit erhalten wir das aus [8] bekannte Ergebnis.
- Interessanter ist der Fall der reinen Schwenkbewegung um die Hinterkante $B = 0$, $A \neq 0$ ($R \rightarrow \infty$). Für $\Omega < 2$ ist $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} > 0$, man erhält also eine Widerstandskraft, während für höhere Frequenzen Vortrieb auftritt.

Trägt man die Gesamtkraft für gewählte Werte von R und φ über der reduzierten Frequenz Ω auf, so ergeben sich - wie beim Verlauf der Leistung - für hohe Frequenzen große Absolutwerte für die Kraft. Bei ausreichend großen Frequenzen tritt immer eine Vortriebskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ auf. Für geringe Frequenzen kann bei manchen Bewegungsformen auch eine Widerstandskraft auftreten.

Ein wichtiges Ergebnis aus den Kraft-Berechnungen ist, dass die Gesamtkraft im Verlauf über

der reduzierten Frequenz max. eine Nullstelle aufweist. Die Leistung kann im Verlauf über Ω mehrmals das Vorzeichen wechseln, siehe Abb. 5.7. Die Nullstelle der Gesamtkraft tritt immer bei höherer oder gleich hoher Frequenz auf wie die Nullstelle(n) der Leistung. Dies lässt sich gut in Abb. 5.16 erkennen. Für die Nutzung der bewegten Platte als Antrieb scheinen Bewegungen mit hoher Vortriebskraft geeignet zu sein. Wir erachten es aber als sinnvoller, die Vortriebskraft in Relation zur zugeführten Leistung zu betrachten und beschäftigen uns daher ausführlich mit dem Vortriebswirkungsgrad.

5.6 Vortriebswirkungsgrad

Mit den Ergebnissen für Leistung und Gesamtkraft können wir den Vortriebswirkungsgrad einfach berechnen. Dazu setzen wir Gl. (5.36) und Gl. (5.26) in die Definitionsgleichung für den Vortriebswirkungsgrad Gl. (4.28) ein.

Für den Vortriebswirkungsgrad ergeben sich je nach Wahl der Bewegungsparameter qualitativ unterschiedliche Verläufe, siehe Abb. 5.8.

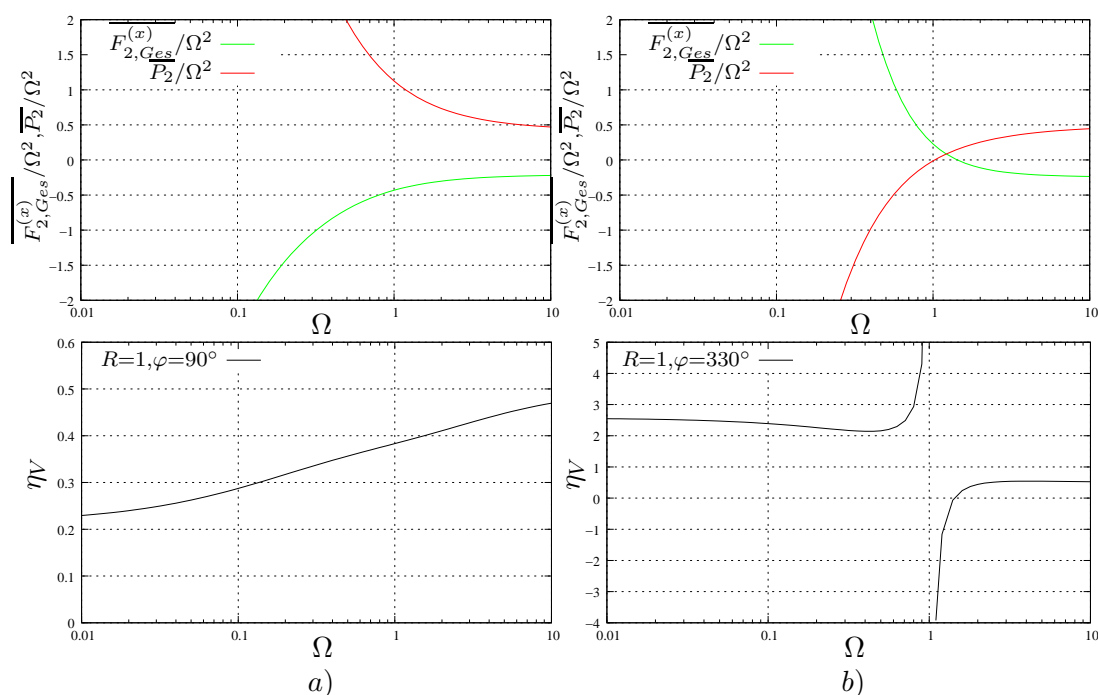


Abbildung 5.8: Beispiele mit und ohne Polstelle für den Verlauf des Vortriebswirkungsgrads η_V .
a) $R = 1, \varphi = 90^\circ$. b) $R = 1, \varphi = 330^\circ$

In den oberen beiden Bildern von Abb. 5.8 sind die Gesamtkraft in x -Richtung und die Leistung aufgetragen. Weil Kraft und Leistung mit der reduzierten Frequenz stark zunehmen, kann man deren Verläufe besser erkennen, wenn man sie auf Ω^2 bezieht. In Beispiel a) wechseln Kraft und Leistung nicht das Vorzeichen, sodass sich für den Wirkungsgrad η_V eine glatte Kurve ergibt. In

Beispiel *b*) weisen Kraft und Leistung jeweils Nullstellen auf. Der Wirkungsgrad wird daher null bei der Kraft-Nullstelle und weist bei der Leistungs-Nullstelle eine Polstelle auf. Die Nullstelle der Kraft tritt bei höheren Ω auf als die Leistungs-Nullstelle.

Aus den Berechnungen für den Vortriebswirkungsgrad erhält man folgendes Ergebnis:

- $\eta_V < 0$ wenn eine Widerstandskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} > 0$ und Leistungszufuhr $\overline{P_2} > 0$ auftritt,
- $0 < \eta_V < 1$ bei einer Vortriebskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ und Leistungszufuhr $\overline{P_2} > 0$,
- $\eta_V > 1$ für Widerstandskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} > 0$ und Leistungsentnahme $\overline{P_2} < 0$.

Vortriebskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ und Leistungsentnahme $\overline{P_2} < 0$ treten nicht gemeinsam auf.

Die Definition eines Vortriebswirkungsgrad ist nur sinnvoll für Bewegungen bei denen im zeitlichen Mittel auch tatsächlich Vortrieb auftritt. Für diese Bewegungsformen ist immer $0 < \eta_V < 1$. In Abb. 5.9-5.13 ist der Vortriebswirkungsgrad für die bereits bei der Berechnung der Leistung verwendeten Parameter dargestellt. Die Ergebnisse für die reine Hubbewegung $R = 0$ sind in Abb. 5.9 dargestellt.

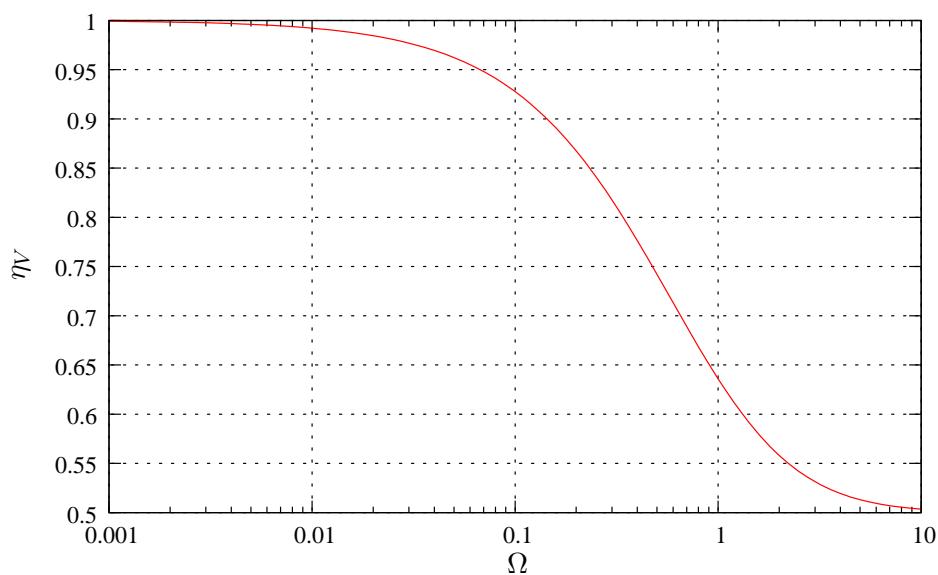


Abbildung 5.9: Vortriebswirkungsgrad als Funktion von Ω für $R = 0$ und beliebige φ

Für $R = 0$ vollführt die Platte keine Schwenkbewegung. Die Phasenlage φ kann daher beliebig gewählt werden. Für kleine reduzierte Frequenz strebt der Vortriebswirkungsgrad gegen eins und für $\Omega \rightarrow \infty$ wird $\eta_V \rightarrow \frac{1}{2}$.

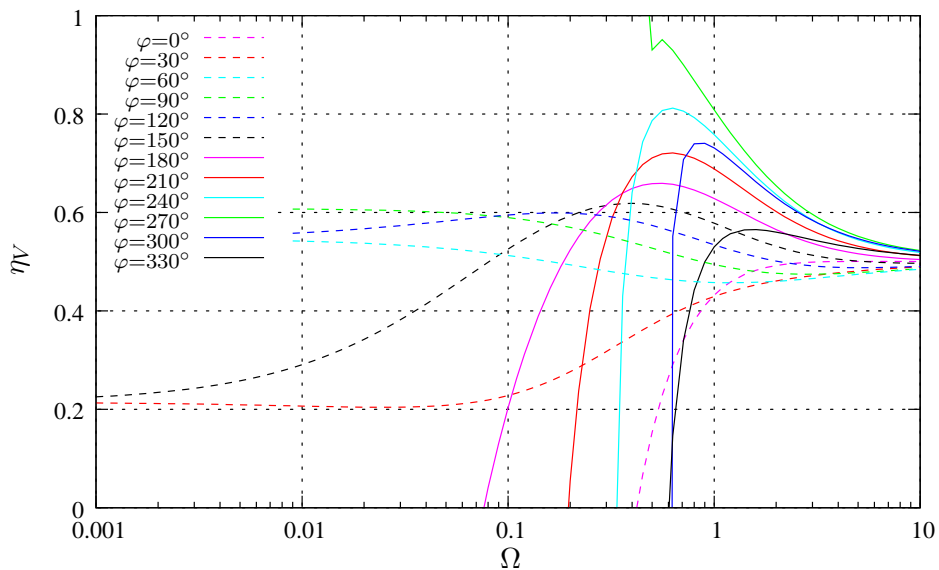


Abbildung 5.10: Vortriebswirkungsgrad als Funktion von Ω für $R = 0.5$ und unterschiedliche φ

Abb. 5.10 zeigt die Ergebnisse für $R = 0.5$. Man erkennt dass der Frequenz-Bereich mit hohem Wirkungsgrad deutlich schmaler ist als für $R = 0$. Bei $\varphi = 240^\circ$ und $\Omega = 0.63$ wird $\eta_V = 0.812$. Für $\varphi = 270^\circ$ wird $\eta_V = 0.951$ bei $\Omega = 0.56$.

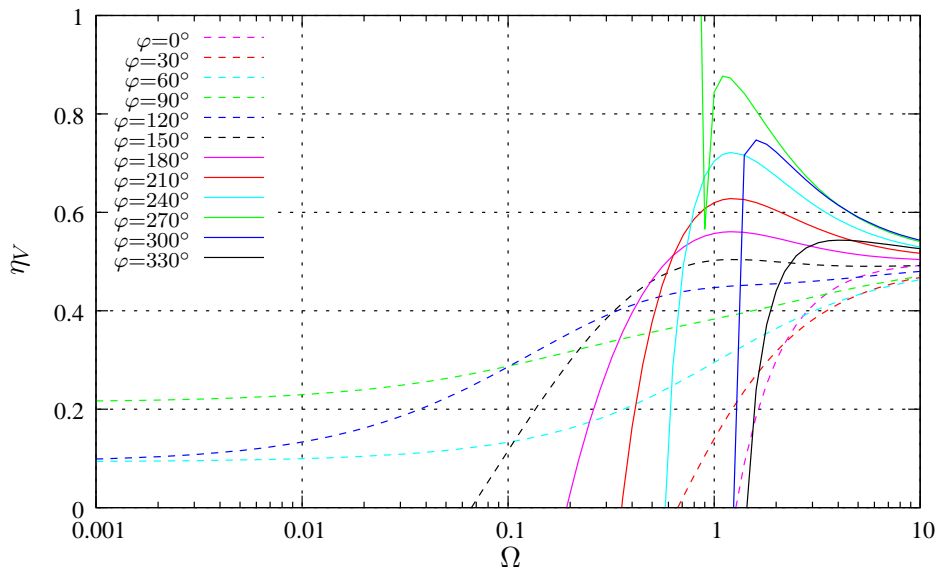


Abbildung 5.11: Vortriebswirkungsgrad als Funktion von Ω für $R = 1$ und unterschiedliche φ

Die Ergebnisse für $R = 1$ sind in Abb. 5.11 dargestellt. Für $\varphi = 270^\circ$ ist die Polstelle bei etwa $\Omega = 0.9$ zu erkennen. Das relative Maximum des Wirkungsgrads tritt bei einer reduzierten Frequenz auf die sich nur geringfügig unterscheidet von der Frequenz an der die Polstelle auftritt.

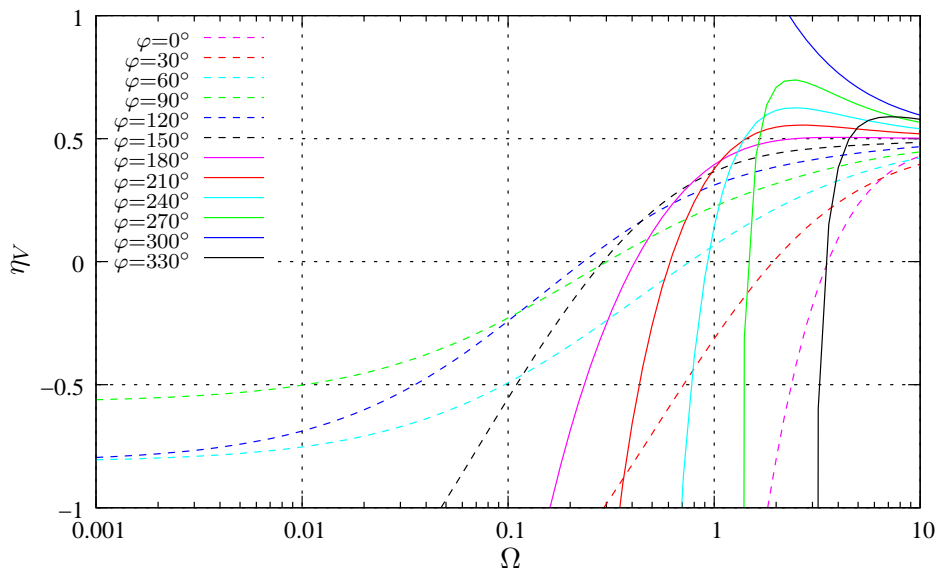


Abbildung 5.12: Vortriebswirkungsgrad als Funktion von Ω für $R = 2$ und unterschiedliche φ

Der Fall $R = 2$, $\varphi = 300^\circ$ in Abb. 5.12 ist interessant, weil beim Vorzeichenwechsel der Leistung \overline{P}_2 bei $\Omega \approx 2.3$ die Polstelle in der Abbildung nicht erkennbar ist. Dies liegt daran, dass der Vorzeichenwechsel der Gesamtkraft in x -Richtung $F_{2, Ges}^{(x)}$ an der selben Stelle (innerhalb der gewählten Auflösung für Ω) stattfindet. Eine Auswertung der Ergebnisse zeigt, dass auch $\gamma_c(1)$ und $\gamma_s(1)$ das Vorzeichen wechseln und daher eine Stelle mit verschwindender Wirbeldichte vorliegt. Dass für diese Bewegungsformen die Nullstellen von Leistung und Kraft zusammenfallen haben wir bereits in Kap. 5.4 und Kap. 5.5 gezeigt. Bei Annäherung der Bewegungsparameter an diese Stelle wird offenbar $\eta_V = 1$. Eine Abweichung der Phasenlage φ von 300° führt zu einer starken Reduktion des Vortriebswirkungsgrads, siehe Kurven mit $\varphi = 270^\circ$ und $\varphi = 330^\circ$. Bei letzterer wird bei unveränderter reduzierter Frequenz sogar $\eta_V < 0$. Dies ist besonders ungünstig, weil bei Leistungszufuhr eine Widerstandskraft auftritt.

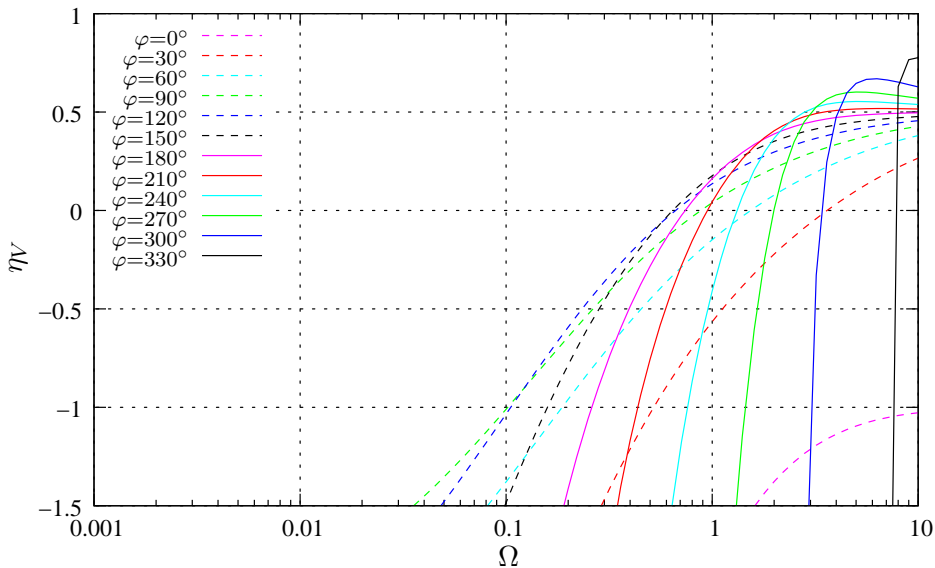


Abbildung 5.13: Vortriebswirkungsgrad als Funktion von Ω für $R = 4$ und unterschiedliche φ

Für $R = 4$, siehe Abb. 5.12, werden hohe Werte von η_V nur noch für hohe Ω erreicht. Bei hohen Frequenzen tritt vermutlich Ablösung auf, die in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt ist. Diese würde die Vortriebskraft und die Leistung und somit den Vortriebswirkungsgrad vermutlich stark beeinflussen.

5.7 Nullstellen von Vortriebskraft und Leistung

Wir untersuchen nun ob die Parameterkombinationen, für welche die Wirbeldichte an der Hinterkante null ist, die einzigen Stellen sind an denen die Werte von Vortriebskraft und Leistung zugleich das Vorzeichen wechseln. Dafür suchen wir Kombination der Bewegungsparameter R , φ und Ω , für welche die zeitlich gemittelte Vortriebskraft bzw. die zeitlich gemittelte Leistung verschwindet. Weil wir nahezu analytische Lösungen vorliegen haben können wir das sehr leicht bewerkstelligen. Für verschwindende Leistung erhalten wir mit Gl. (5.26) und Gl. (5.8) wegen $N > 0$ eine quadratische Gleichung für R

$$\frac{K_{B,1}}{K_{A,1}} + \left(\frac{K_{C,1}}{K_{A,1}} \cos \varphi + \frac{K_{S,1}}{K_{A,1}} \sin \varphi \right) R + R^2 = 0,$$

mit der Lösung

$$R = -\frac{1}{2K_{A,1}} \left(K_{C,1} \cos \varphi + K_{S,1} \sin \varphi \pm \sqrt{(K_{C,1} \cos \varphi + K_{S,1} \sin \varphi)^2 - 4K_{A,1}K_{B,1}} \right).$$

Sowohl für das + als auch für das – Vorzeichen existieren reelle Lösungen für R . Wir ziehen nur $R \geq 0$ in Betracht.

Für die zeitlich gemittelte Vortriebskraft erhalten wir mit Gl. (5.36) analog

$$\frac{K_{B,4}}{K_{A,4}} + \left(\frac{K_{C,4}}{K_{A,4}} \cos \varphi + \frac{K_{S,4}}{K_{A,4}} \sin \varphi \right) R + R^2 = 0,$$

mit der Lösung

$$R = -\frac{1}{2K_{A,4}} \left(K_{C,4} \cos \varphi + K_{S,4} \sin \varphi \pm \sqrt{(K_{C,4} \cos \varphi + K_{S,4} \sin \varphi)^2 - 4K_{A,4}K_{B,4}} \right).$$

Die Funktionen mit der Bezeichnung K hängen nur von Ω ab. Wir geben Ω und φ vor und berechnen daraus R . Die Ergebnisse sind in Abb. 5.14-5.19 dargestellt.

In Abb. 5.14 sind Lösungen verschwindender zeitlich gemittelter Leistung $\overline{P}_2 = 0$ als Linien $\varphi = const$ eingezeichnet. Die Zahlen zu den Linien repräsentieren den Phasenwinkel φ in $^\circ$.

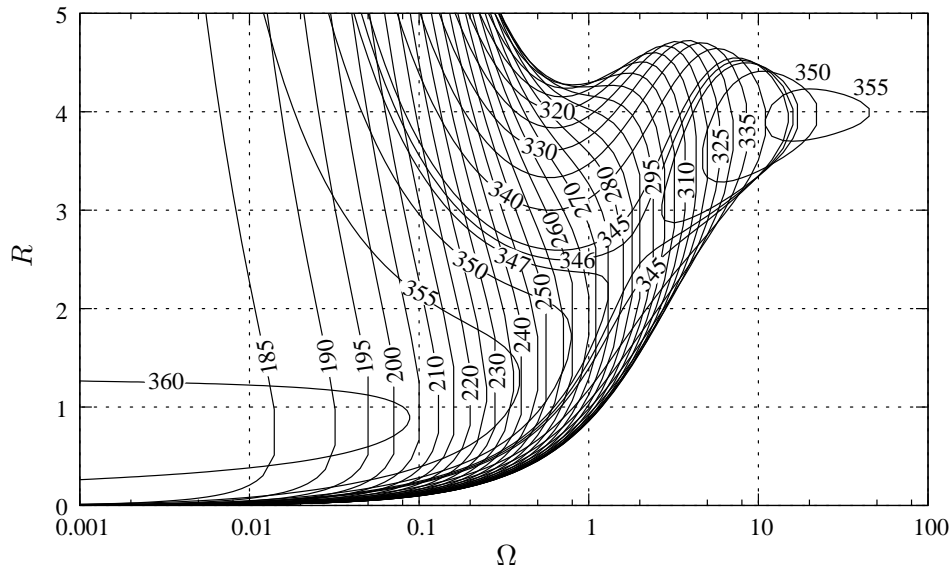


Abbildung 5.14: Linien bei denen $\overline{P}_2 = 0$, als Funktion von Ω und $R = 0$ für unterschiedliche φ

Im Bereich links der jeweiligen Linie - bei kleinen Werten von Ω - wird dem Fluidstrom Leistung entnommen $\overline{P}_2 < 0$, während rechts der jeweiligen Linie Leistungszufuhr auftritt. Für Werte von $\varphi > 346^\circ$ bildet sich ein zweiter Bereich mit Leistungsentnahme aus.

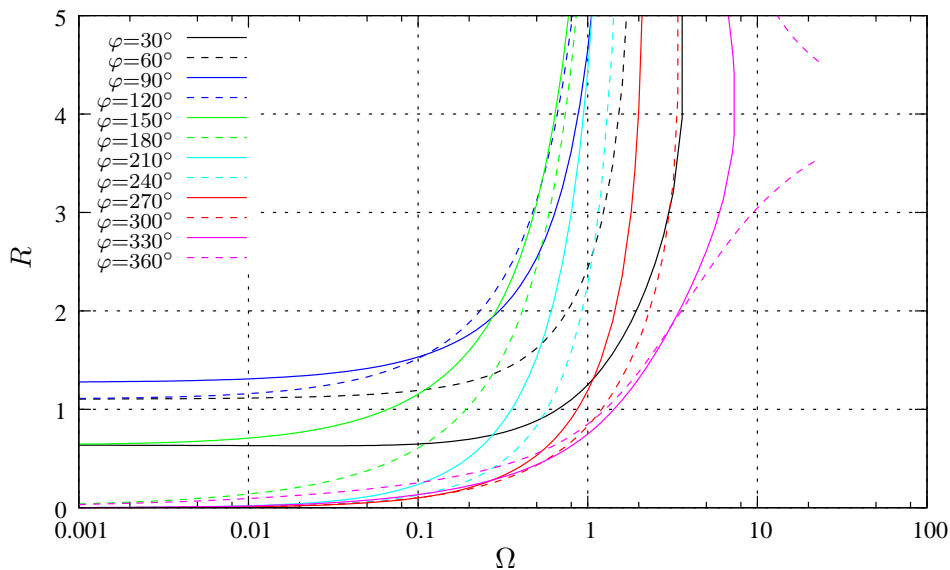


Abbildung 5.15: Linien bei denen $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$, R als Funktion von Ω für unterschiedliche φ

Abb. 5.15 zeigt Linien auf denen jeweils die zeitlich gemittelte Gesamtkraft in x -Richtung verschwindet. Im Bereich links oben der jeweiligen Linie tritt eine Widerstandskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} > 0$ auf und im Bereich rechts der Linie wird Vortrieb $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ generiert. Die Linie mit $\varphi = 360^\circ$ wird für $\Omega > 23$ nicht weiterverfolgt.

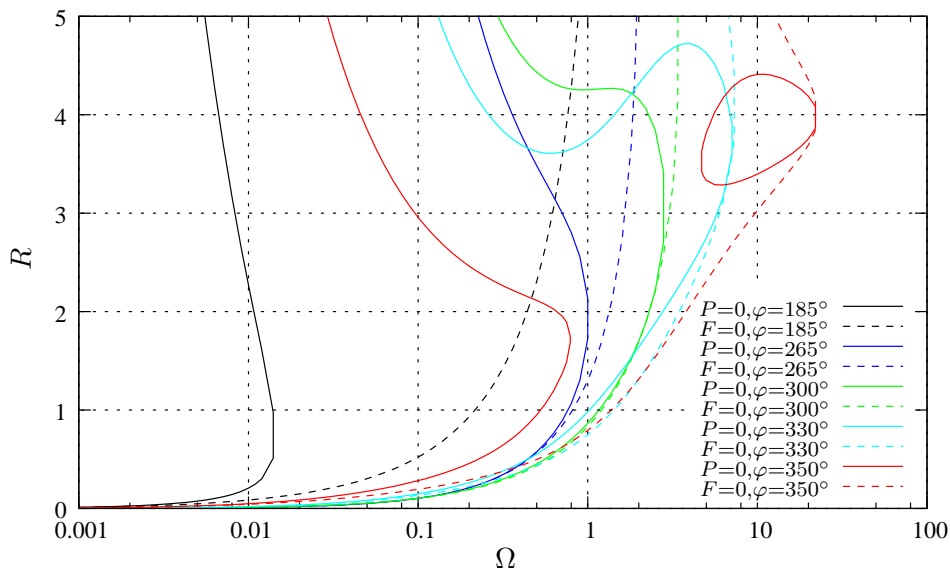


Abbildung 5.16: Linien $\overline{P_2} = 0$ bzw. $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$, R als Funktion von Ω für ausgewählte φ

In Abb. 5.16 sind ausgewählte Kurven verschwindender Leistung und Kraft miteinander vergli-

chen. Durchgezogene Linien kennzeichnen jeweils verschwindende Leistung und die strichlierten Linien gleicher Farbe kennzeichnen zugehörige Ergebnisse mit verschwindender Gesamtkraft. Für $\varphi = 185^\circ$ sind die Nullstellenkurven von Leistung und Kraft relativ weit voneinander entfernt. Im Bereich zwischen den beiden Kurven tritt bei Leistungszufuhr eine Widerstandskraft auf und daher wird dort der Vortriebswirkungsgrad negativ $\eta_V < 0$. Für $\varphi = 300^\circ$ ist dieser Bereich relativ klein (für nicht zu große R) und für $\varphi = 350^\circ$ ist er wieder deutlich größer.

Die Nullstellenkurve der Leistung für $\varphi = 330^\circ$ schneidet eine gedachte Linie $R = 4$ an drei Stellen Ω . Daher hat die in Abb. 5.7 dargestellte Leistungskurve für $\varphi = 330^\circ$ drei Nulldurchgänge.

Eine Auswertung der Ergebnisse zeigt, dass die Nullstellenkurven von Leistung und Kraft einander jeweils an einer Stelle berühren und weiters, dass an all diesen Stellen auch die Wirbeldichte an der Hinterkante verschwindet. Weil im Gegenzug für alle Bewegungsformen, bei denen die Wirbeldichte an der Hinterkante null ist, auch Leistung und Kraft verschwinden (siehe Kap. 5.4 und Kap. 5.5), erhält man mit der Forderung $\gamma_s(1) = \gamma_c(1) = 0$ alle Bewegungsformen, bei denen die zeitlich gemittelte Gesamtkraft zugleich mit der zeitlich gemittelten Leistung null ist.

Im Raum der drei Bewegungsparameter R , φ und Ω können die Nullstellen von Leistung und Kraft jeweils als Fläche dargestellt werden. In Abb. 5.17-5.19 kann man sich diese Fläche als von den Linien $\varphi = \text{const}$ erzeugt vorstellen.

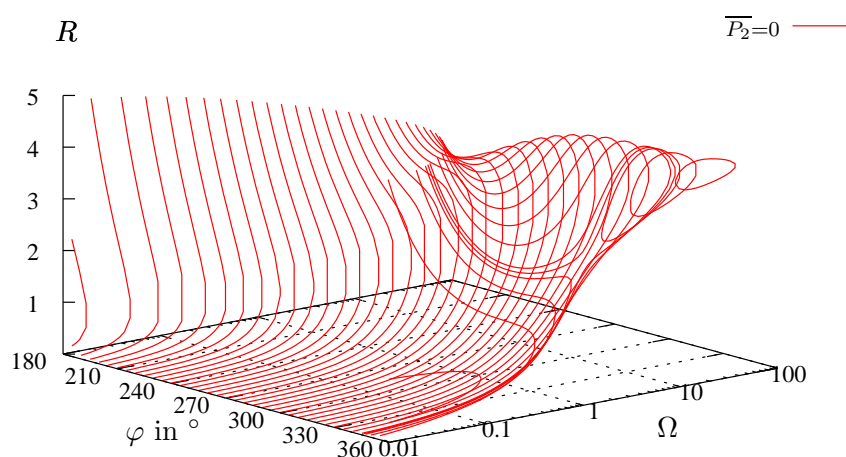


Abbildung 5.17: Fläche bei der $\overline{P_2} = 0$ ist, dargestellt durch Linien $\varphi = \text{const}$ im Parameterraum R, φ, Ω

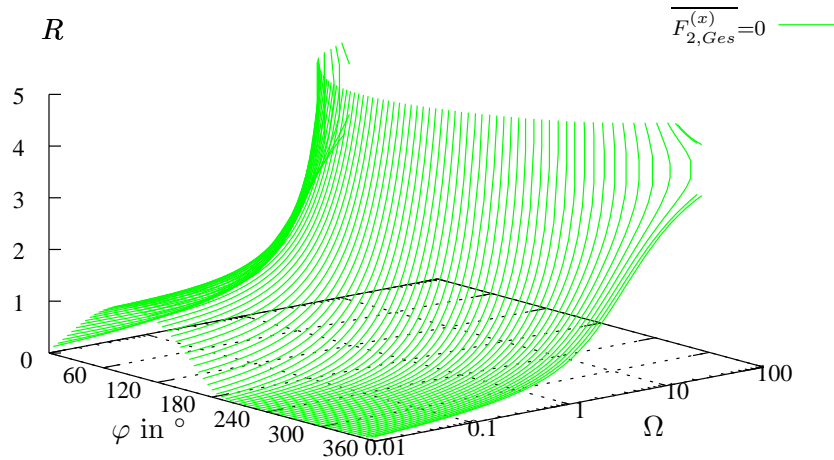


Abbildung 5.18: Fläche bei der $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$ ist, dargestellt durch Linien $\varphi = const$ im Parameterraum R, φ, Ω

In Abb. 5.18 ist die bei kleinen Ω und im Intervall $0^\circ < \varphi < 180^\circ$ auftretende „Erhöhung“ der die Nullstellen der Kraft beschreibenden Fläche gut zu erkennen, unterhalb der (für kleine R) stets eine Vortriebskraft auftritt.

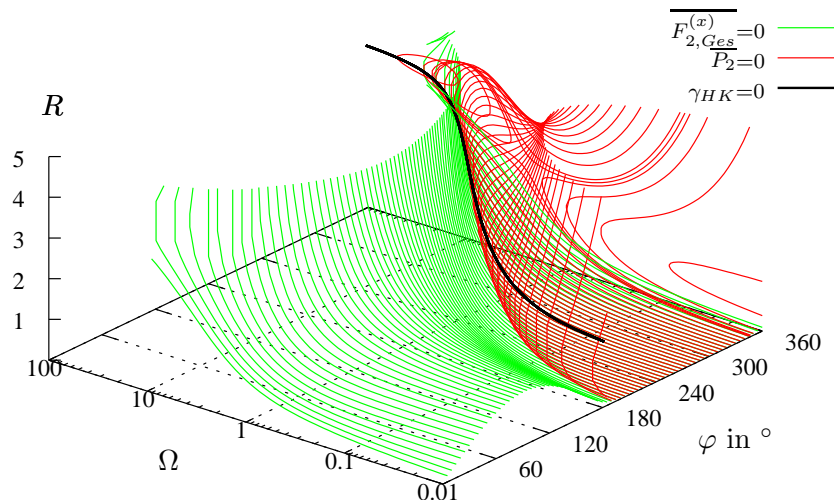


Abbildung 5.19: Flächen $\overline{P_2} = 0$ und $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$ im Parameterraum R, φ, Ω , dargestellt durch Linien $\varphi = const$

In Abb. 5.19 sind die Lösungen für verschwindende Vortriebskraft und Leistung gemeinsam dargestellt. Die aus den grünen Linien erzeugte Fläche $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$ und die aus den roten Linien erzeugte Fläche $\overline{P_2} = 0$ berühren einander entlang der schwarz eingezeichneten Linie, an der die Wirbeldichte an der Hinterkante verschwindet $\hat{\gamma}(1) = 0$.

5.8 Effiziente Vortriebserzeugung

Am Ende dieses Kapitels wollen wir den Zusammenhang von Vortriebswirkungsgrad η_V und Vortriebskraft darstellen. Voraussetzung für einen Antrieb ist, dass tatsächlich Vortrieb $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ vorhanden ist. Aus Abschn. 5.6 und Abschn. 5.7 wissen wir, dass bei hohen reduzierten Frequenzen Ω eine hohe Vortriebskraft auftritt und der Vortriebswirkungsgrad gegen den Wert $1/2$ strebt. Weiters wissen wir, dass der höchste erzielbare Vortriebswirkungsgrad für einen Antrieb $\eta_V = 1$ ist, allerdings ist bei diesen Lösungen $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} = 0$. Ein Optimierungsziel könnte daher sein, jene Parameterkombination zu ermitteln, bei der für eine bestimmte Vortriebskraft $\overline{F_{2,Ges}^{(x)}} < 0$ der Vortriebswirkungsgrad η_V am höchsten ist.

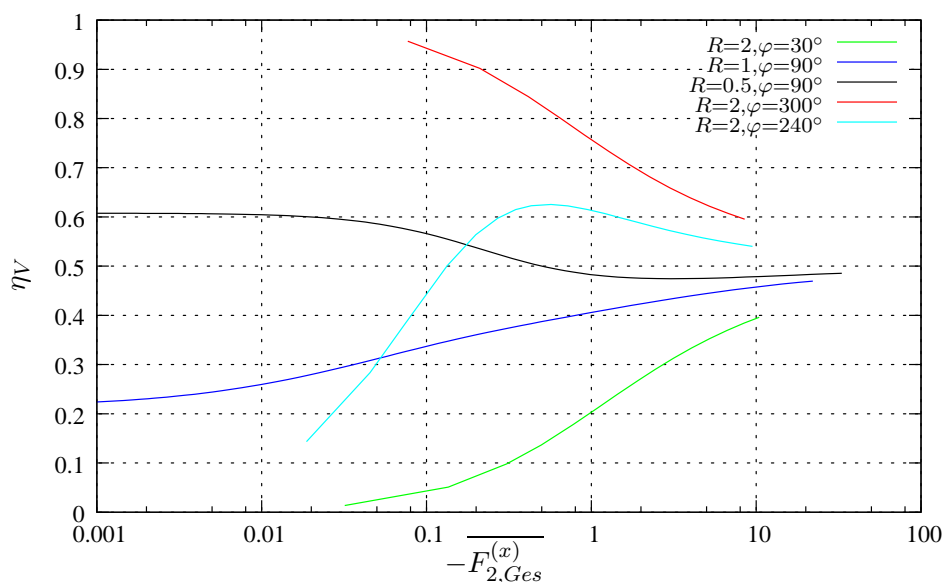


Abbildung 5.20: Vortriebswirkungsgrad über Vortriebskraft für ausgewählte Fälle

In Abb. 5.20 ist der Verlauf des Vortriebswirkungsgrads η_V für festgehaltene Parameter R und φ über der Vortriebskraft dargestellt. Entlang der Kurven wird jeweils die reduzierte Frequenz Ω variiert. Man erkennt die großen Unterschiede im Wirkungsgrad der einzelnen Bewegungsformen.

$R = 2, \varphi = 30^\circ$ gibt über weite Bereiche von $-F_{2,Ges}^{(x)}$ den geringsten Wirkungsgrad, während die durch $R = 2, \varphi = 300^\circ$ beschriebene Bewegung den höchsten Wirkungsgrad aufweist. Somit stellt sich der Phasenwinkel φ zwischen Hub- und Schwenkbewegung als entscheidender Parameter für hohen Wirkungsgrad heraus. Das Beispiel $R = 2, \varphi = 240^\circ$ macht deutlich, dass die Wirkungsgradkurve nicht unbedingt monoton über der Vortriebskraft verlaufen muss. Für $-F_{2,Ges}^{(x)} \rightarrow \infty$ streben alle Kurven gegen $\eta_V \rightarrow \frac{1}{2}$.

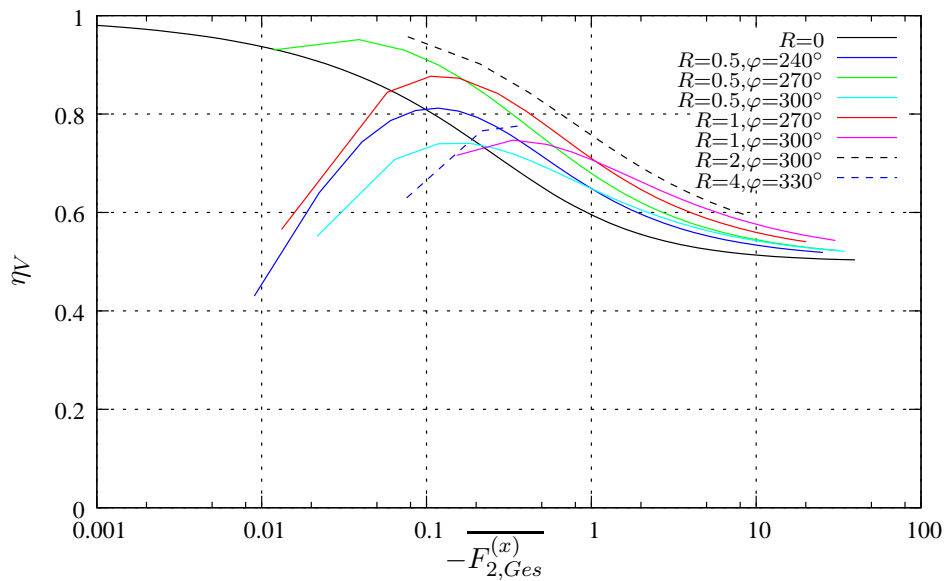


Abbildung 5.21: Ausgewählte Beispiele für die Vortriebskraftherzeugung bei hohem Vortriebswirkungsgrad

Bewegungsformen mit hohem Vortriebswirkungsgrad sind in Abb. 5.21 dargestellt. Die reine Hubbewegung $R = 0$ weist bei geringer Vortriebskraft den höchsten Wirkungsgrad auf. Von allen berechneten Bewegungsformen ergibt die durch $R = 2, \varphi = 300^\circ$ beschriebene Plattenbewegung über einen weiten Bereich der Vortriebskraft den höchsten Vortriebswirkungsgrad.

Ein hoher Wirkungsgrad wird erreicht, wenn $\Omega > \Omega_0, R = R_0$ und $\varphi = \varphi_0$ gewählt wird, wobei Ω_0, R_0 und φ_0 Lösungen der in Tab. 5.1 angegebenen Beziehungen sind (In diesem Fall verschwinden Vortrieb und Leistung und es gilt $\eta_V(R_0, \varphi_0, \Omega_0) = 1$).

Kapitel 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Strömung um eine zeitlich harmonisch bewegte ebene Platte in einem Fluidstrom berechnet. Das Fluid wird reibungsfrei und mit konstanter Dichte angenommen. Weiters wird zweidimensionale Strömung vorausgesetzt. Für die Platte werden kleine Auslenkungen angenommen. Dadurch ist es möglich, die Aufgabenstellung weitgehend analytisch zu behandeln.

Die Bewegung der Platte setzt sich aus einer Hubbewegung und einer Schwenkbewegung um einen Bezugspunkt zusammen. Zum Vergleich unterschiedlicher Plattenbewegungen wurde die Auslenkung jeweils geeignet normiert. Für diese allgemeinen Bewegungen wurden die zeitlich gemittelten Größen von Leistung, Vortriebskraft und dem daraus gebildeten Vortriebswirkungsgrad berechnet. Dabei wurden folgende Schritte durchgeführt:

- Darstellung der Potentialströmung und der Randbedingungen mithilfe einer Wirbeldichtebelegung.
- Erfüllen der Hinterkanten-Bedingung durch Abschwimmen von Wirbeln in den Nachlauf.
- Lösung der Integralgleichungen, um das Strömungsfeld zu erhalten.
- Bestimmen der Druckverteilung mithilfe der instationären Bernoulli-Gleichung.

Aus der Druckverteilung wurden Leistung, Vortriebskraft und Wirkungsgrad berechnet. Für die Berechnung der Kraft muss zusätzlich die Umströmung der spitzen Plattenvorderkante berücksichtigt werden.

Bei der Untersuchung der Bewegungsformen der Platte hat sich heraus gestellt, dass Lösungen existieren, für welche die Wirbeldichte an der Hinterkante verschwindet. Dabei gibt es keine Wirbel im stromabwärts der Platte liegenden Gebiet. Für kleine reduzierte Frequenzen wurde dafür eine einfache Erklärung gegeben.

Die Berechnungen zeigen, dass die zeitlich gemittelte Leistung linear von der Wirbeldichte an der Hinterkante abhängt. Die zeitlich gemittelte Vortriebskraft lässt sich aus drei Anteilen zusammensetzen, wobei der erste nicht, der zweite linear und der dritte quadratisch von der

Wirbeldichte an der Hinterkante abhängt. Für nachlaufreie Bewegungen verschwinden sowohl Leistung als auch Vortriebskraft.

Es stellt sich heraus, dass für Bewegungen bei hoher Frequenz immer eine Vortriebskraft auftritt und Leistungszufuhr notwendig ist. Für geringere Frequenzen kann auch eine Widerstandskraft auftreten. Die Kraft als Funktion der reduzierten Frequenz weist maximal eine Nullstelle auf. Als einfache Beispiele mit und ohne Nullstelle wurden die reine Hubbewegung und die um die Hinterkante schwenkende Platte genannt. Ist die Bewegung mit dem Auftreten einer Widerstandskraft verbunden, so wird in den meisten Fällen dem Fluidstrom Energie entzogen. Die Bewegungen mit maximaler Leistungsentnahme wurden aufgezeigt.

Ferner wurde in der vorliegenden Arbeit auf den Einsatz der bewegten Platte als Antrieb eingegangen. Dabei wurde besonderes Augenmerk auf einen hohen Vortriebswirkungsgrad bei vorgegebener Vortriebskraft gelegt. Es stellt sich heraus, dass der Phasenwinkel zwischen Hub- und Schwenkbewegung wesentlichen Einfluss auf den Vortriebswirkungsgrad hat.

Literaturverzeichnis

- [1] Anderson J. M., Streilien K., Barrett D. S., Triantafyllou M. S., *Oscillating foils of high propulsive efficiency*, J. Fluid Mech., Vol. 360, pp. 41-72, 1998
- [2] Betz A., *Ein Beitrag zur Erklärung des Segelfluges*. Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 3, 1912, pp. 269-272
- [3] Birnbaum W., *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*, Dissertation Universität Göttingen, 1922
- [4] Birnbaum W., *Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie*, ZAMM 3, 1923, S. 290-297
- [5] Birnbaum W., *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*, ZAMM 4, 1924, S. 277-292
- [6] DeLaurier J. D., McKinney W., *Wingmill - An oscillating-wing Windmill*, J. of Energy 5(2), 1981, S. 109-115
- [7] DeLaurier J. D., Harris J. M., *Oscillating-Wing Propulsion*, J. Aircraft, 1982
- [8] Garrick I. E., *Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil*, N.A.C.A. Report No. 567, 1936
- [9] Jones K. D., Dohring C. M., Platzer M. F., *Wake Structures behind Plunging Airfoils: A Comparison of Numerical and Experimental Results*, AIAA Paper 96-0078, 34th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 1996
- [10] Jones K. D., Platzer M. F., *Numerical Computation of flapping-wing Propulsion and Power Extraction*, 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 6-10 Jänner 1997, Reno, NV
- [11] Jones K. D., Platzer M. F., *Flapping-wing propulsion for a micro air vehicle*, AIAA Paper 2000-0897, 2000
- [12] Jones K. D., Bradshaw C. J., Papadopoulos J., Platzer M. F., *Development and Flight Testing of Flapping-Wing Propelled Micro Air Vehicles*, AIAA Paper 2003-6549, 2003
- [13] Katz J., Plotkin A., *Low-Speed Aerodynamics*, Second Edition, 2001
- [14] Katzmayer R., *Über das Verhalten der Flügelflächen bei periodischen Änderungen der Geschwindigkeitsrichtung*, Z. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, 1922

- [15] Knoller R., *Die Gesetze des Luftwiderstandes. Flug- und Motortechnik*, Wien, 3, No. 21, 1909, pp. 1-7
- [16] Küssner H. G., *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*, Luftfahrtforschung 13, 1936, 410-424
- [17] Lighthill M. J., *Mathematical Biofluidynamics*, Philadelphia, PA: Soc. Industrial and Applied Math., 1975
- [18] Lighthill M. J., *Aquatic Animal Propulsion of High Hydromechanical Efficiency*, J. Fluid Mech., Vol. 44, pp. 265-301, 1970
- [19] Lilienthal O., *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst*, R. Gaertners Verlagsbuchhandlung, Berlin 1889
- [20] Morino L., *Helmholtz decomposition revisited: vorticity generation and trailing edge condition*, Computational Mechanics, 1986, 1, 65-90
- [21] Neef M. F., *Analyse des Schlagfluges durch numerische Strömungsberechnung*, Dissertation TU Braunschweig, ZLR-Forschungsbericht 2002-02
- [22] Schmidt W., *Der Wellpropeller, ein neuer Antrieb für Wasser-, Land- und Luftfahrzeuge*, Z.Flugwiss.13, 1965, Heft 12
- [23] Schneider W., *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*, Vieweg, 1978
- [24] Sfakiotakis M., Lane D. M., Davies B. C. *Review of Fish Swimming Modes for Aquatic Locomotion*, IEEE J. of Oceanic Eng., Vol. 24, No. 2, 1999
- [25] Theodorsen Th., *General Theory of Aeodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*, N.A.C.A. Tech. Report No. 496, Washington D. C., 1935
- [26] Triantafayllou G. S., Triantafayllou M. S., *Optimal Thrust Development in Oscillating Foils with Application to Fish Propulsion*, J. Fluids Struct., Vol. 7, pp. 205-224, 1993
- [27] Von Kármán Th., *Airfoil Theory for Non-Uniform Motion*, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 5, No. 10, August 1938
- [28] Von Kármán Th., Burgers J. M. *General Aerodynamic Theory - Perfect Fluids*, Division E, Vol II, Aerodynamic Theory, Ed. Durand, W.F., 1943

Anhang A

Einige Integrale

In Abschn. 3.2 und Abschn. 5.4 sind Integrale der Form

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}} g(x) dx, \quad g(x) = \int_0^1 \frac{h(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad (\text{A.1})$$

zu berechnen. Wobei $g(x)$ ein Platzhalter für $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f_1(x)$ oder $f_2(x)$ aus Gl. (3.13) ist. Vertauschen der Integrationsreihenfolge ergibt

$$\int_0^1 \left(\frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}} \int_0^1 \frac{h(\xi)}{\xi-x} d\xi \right) dx = \int_0^1 \left(h(\xi) \int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}(\xi-x)} dx \right) d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Mit Mathematica:

$$\int \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}(\xi-x)} dx = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \ln \left| \frac{2x\xi-x-\xi-2\sqrt{x(1-x)}\sqrt{\xi(1-\xi)}}{x-\xi} \right| + C \\ -2 \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \ln \left| \frac{\sqrt{\xi+\sqrt{x}}}{\sqrt{\xi-\sqrt{x}}} \frac{1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-\xi}-\sqrt{\xi x}}{1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-\xi}+\sqrt{\xi x}} \right| + C \\ \sqrt{x(1-x)} - (1+2\xi) \arcsin \sqrt{x} + \xi \sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} \ln \left| \frac{\sqrt{\xi+\sqrt{x}}}{\sqrt{\xi-\sqrt{x}}} \frac{1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-\xi}-\sqrt{\xi x}}{1+\sqrt{1-x}\sqrt{1-\xi}+\sqrt{\xi x}} \right| + C \end{array} \right] \text{ für } k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Der Betrag wird nur für $x > \xi$ benötigt. Somit wird

$$\int_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}(\xi-x)} dx = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\pi \\ -\frac{\pi}{2}(1+2\xi) \end{array} \right] \text{ für } k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

Damit folgt für jedes $h(\xi)$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}} \int_0^1 \frac{h(\xi)}{\xi-x} d\xi \right) dx = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\pi \int_0^1 h(\xi) d\xi \\ -\frac{\pi}{2} \int_0^1 (1+2\xi) h(\xi) d\xi \end{array} \right] \text{ für } k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$