DIPLOMARBEIT

Kavitationsmodelle für Stoß-Struktur-Wechselwirkungen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Mag.rer.nat. Dr.techn. Herbert Steinrück
E322
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Christian Schmidrathner
Matrikelnummer 1127487
3443 Röhrenbach, Ringstraße 39

Wien, im April 2016

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird das Verhalten eines Feldes von Kavitationsblasen in einem vorgegebenen Druckfeld diskutiert. Anlass dazu gab die Interaktion einer Zylinderschale mit einer sphärischen Stoßwelle, bei deren Reflexion ein starkes Unterdruckgebiet entsteht, in welchem es zu Kavitation kommen kann. Der Kollaps dieser Kavitationsblasen kann sich als eine Sekundärstoßwelle bemerkbar machen.
Nach der Diskussion von verschiedenen Modellen wie Rayleigh-Plesset, Gilmore und dem akustischen Modell für eine Einzelblase sowie des von ihr abgestrahlten Druck- und Geschwindigkeitsfeldes, wird die Kopplung von einem Paar von Blasen untersucht. Abschließend werden die Erkenntnisse aus den vorhergehenden Analysen genutzt, um ein Feld von Blasen zu beschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Blasenmodelle **3**
2.1 Das Rayleigh-Plesset-Modell 4
2.2 Das akustische Modell 5
2.3 Das Gilmore-Modell 5

3 Schwingungen einer Einzelblase **8**
3.1 Kleine Amplituden 8
3.2 Darstellung im Phasenraum 9
3.2.1 Phasendiagramm für Blasenschwingungen in einem inkompressiblen Fluid 9
3.2.2 Phasendiagramm für die Blasenschwingungen nach dem akustischen Modell 11
3.3 Verhalten der Modelle am Beispiel einer kollabierenden Blase . 13
3.4 Reaktion auf kurzzeitige Druckabsenkung 14
3.4.1 Die dimensionslose Rayleigh-Plesset-Gleichung 14
3.4.2 Das dimensionslose Gilmore-Modell 18
3.4.3 Andere Form der Anregung 20

4 Abstrahlung **21**
4.1 Abstrahlungsmodelle 21
4.1.1 Inkompressibel 21
4.1.2 Akustisch 21
4.1.3 Gilmore-Modell 22
4.2 Vergleich der Abstrahlungsmodelle 24
4.3 Wechsel zwischen den Modellen 24

5 Interaktion zweier Blasen **27**
5.1 Translationsschwingungen einer Blase 27
5.2 Einzelblase im akustischen Feld 28
5.3 Kopplung zweier Blasen 29
5.3.1 Inkompressible Flüssigkeit 29
5.3.2 Kompressible Flüssigkeit 31
5.4 Aufteilung einer Gasmenge 33

6 Blasenfeld **35**
6.1 Das eindimensionale Blasenfeld 35
6.2 Das dreidimensionale Blasenfeld 38
6.3 Abschätzung der Gasmenge im Wasser 39
6.4 Quellverteilung 40
6.5 Ergebnisse des 3D-Blasenfeldes 41
6.5.1 Druck an der Struktur 42
6.5.2 Druck in Entfernung $10R_S$ 43

7 Ein Versuch, die große Druckabsenkung zu reproduzieren **45**

8 Schlussfolgerungen **48**

Literaturverzeichnis **50**

Abbildungsverzeichnis

1 Aufbau Iakovlev 1
2 Blase in Flüssigkeit 3
3 Trajektorien 10
4 Phasenraum kompressibel 12
5 Phasenraum kompressibel 2 13
6 Vergleich der Modelle 14
7 Testdruck 1 15
8 Maximaldruck RP 16
9 Blasenradien 1 17
10 Auslöschung 18
11 Druckmaximum Gilmore 19
12 Testdruck 2 20
13 Druckmaximum Sinus 20
14 Abstrahlungsmodelle 24
15 Umschalten zwischen Modellen 25
16 Schallgeschwindigkeit 26
17 Abstrahlung nahe Schallgeschwindigkeit 26
18 Korrelation 30
19 Bewegung der Blasen 31
20 Korrelation 2 32
21 Bewegung der Blasen 3 32

22 Aufteilung Gasmasse 33
23 Druckmaximum für kleine Π_2 34
24 Anordnung 35
25 Cosinussatz 36
26 Anordnung in 3D 39
27 p_{max} bei $\Pi_2 = 0.75$ 42
28 Druck an Struktur 43
29 Cosinussatz für fernen Punkt 44
30 Druckstörung Fernfeld 44
31 Maximaler Innendruck bei negativen Außendruck 45
32 Druck an Struktur bei negativen p_∞ 46

1 Einleitung

Die Motivation für diese Arbeit ist ein im Artikel von Iakovlev [1] auftauchendes Problem. In der Nähe einer Zylinderschale kommt es zu einer Explosion, welche eine sphärisch symmetrische Stoßwelle emittiert (Abbildung 1). Iakov-

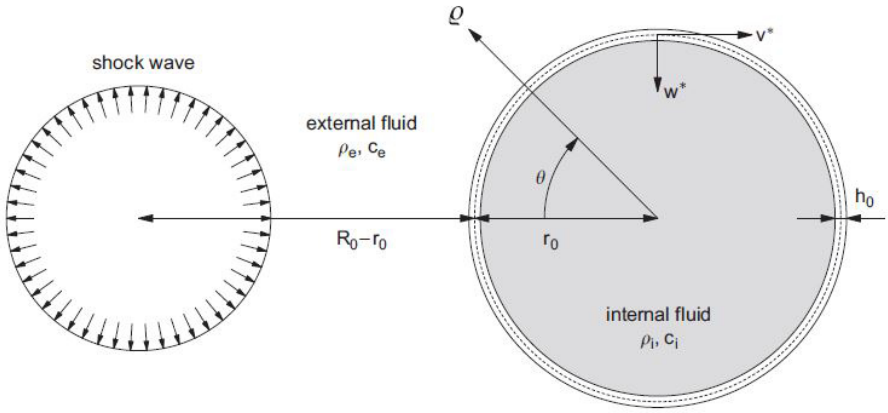

Abbildung 1: Geometrie des Problems - Fig.1 aus Iakovlev [1]

lev hat in seinem Artikel eine Möglichkeit präsentiert, das dreidimensionale Problem derart zu beschreiben, dass die Ausbreitung der Stoßwelle lediglich in der Ebene des Schnitts durch den Kugelmittelpunkt der Stoßwelle mit Hilfe einer numerischen Berechnung ermittelt werden muss. In dieser Ebene ist an der Schale auch die größte Auswirkung zu erwarten. Der Druckanstieg an der Schale konnte dadurch abgebildet werden, allerdings hat sich gezeigt, dass es im Experiment (Wardlaw & Luton [2]) zu einem zweiten Druckmaximum kommt. In seinem Artikel macht Iakovlev darauf aufmerksam, dass Kavitation die Ursache dafür sein könnte, da bei der Reflexion der einfallenden Stoßwelle es an der zur Explosion zugewandten Seite des Zylinders zur Bildung eines Gebietes mit großer Druckabsenkung kommt. In diesem Gebiet können Kavitationsblasen wachsen bis sie - zum Beispiel durch sich wieder erhöhenden Druck - kollabieren. Im Kollaps können beträchtliche Druckwellen entstehen. Es wird versucht, diese Effekte mittels einem Feld von Blasen darzustellen.
Es gibt verschiedene Arten von Kavitation (Young [9]). Einerseits die klassische, bei welcher durch Druckabsenkung Dampfblasen entstehen. Andererseits gibt es auch Gaskavitation. Hierbei sind bereits Gasblasen eines nicht-

kondensierenden Gases in der Flüssigkeit vorhanden, welche auf Druckunterschiede reagieren können. Beide Arten der Kavitation können mit oder ohne Massentransfer über die Oberfläche behandelt werden. Bei Gaskavitation spricht man dann von einem Entgasen der Flüssigkeit. Diese Arbeit beschränkt sich auf Gaskavitation ohne Entgasen der Flüssigkeit.

2 Blasenmodelle

Für die Herleitung der Bewegungsgleichung einer Einzelblase betrachtet man diese in einem unendlich ausgedehnten Fluid (Abbildung 2). Weit entfernt von der Blase herrsche der Druck p_∞. Es wird weiters angenommen, dass die Blase während der Kollaps- und Wachstumsphasen kugelförmig bleibt. Mit dieser Annahme ist das Problem radialsymmetrisch, wodurch die Beschreibung deutlich vereinfacht wird. Die Blase sei mit einem idealen Gas gefüllt.

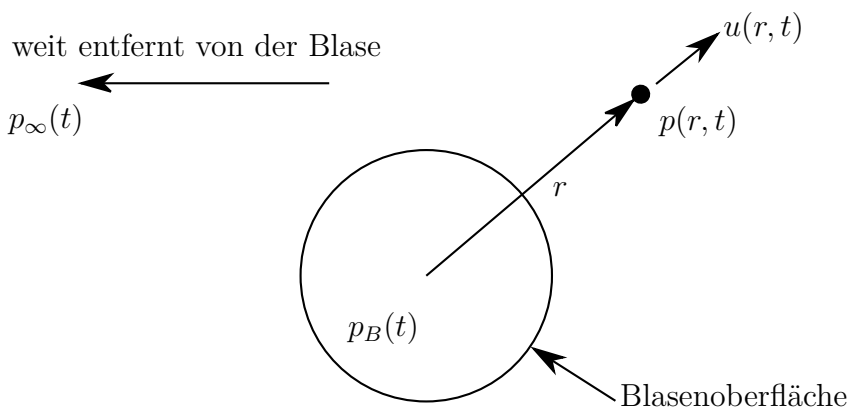

Abbildung 2: Kugelförmige Blase in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit

Unter Voraussetzung isentroper Zustandsänderung sowie der Vernachlässigung von Druckwellen innerhalb der Blase gilt

$$p_B(t) = p_{G0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa},$$

mit

$p_\infty(t)$:	Druck weit entfernt von der Blase
p_{G0} :	Ruhedruck der Blase
R_0 :	Ruheradius der Blase
$R(t)$:	aktueller Radius der Blase
$P(R)$:	Druck in der Blase
κ :	Polytropenexponent

Für zweiatomige Gase, wie Sauerstoff und Stickstoff, gilt $\kappa = 1.4$. Der Druck p_{G0} setzt sich aus dem Ruhedruck des Fluids und des Druckunterschieds

aus der Oberflächenspannung zusammen. Um die Blasenschwingungen zu berechnen gibt es einige Modelle für die Blasendynamik, welche sich durch die unterschiedliche Behandlung der Ausbreitung von Druckstörungen in der Flüssigkeit unterscheiden. Als Einstieg in die Thematik sei der Artikel von Lauterborn und Kurz [7] genannt, welcher nicht nur Modelle für Blasenschwingungen beinhaltet, sondern auch Abstrahlung, Interaktionen von Blasen sowie experimentelle Ergebnisse wiedergibt.

2.1 Das Rayleigh-Plesset-Modell

Das Rayleigh-Plesset-Modell stellt ein sehr einfaches Modell für die Blasenschwingung dar, da es die Flüssigkeit als inkompressibel voraussetzt. Somit ergibt sich aufgrund der Massenerhaltung sofort eine Beziehung zwischen Blasenradius R, Blasenwandgeschwindigkeit $U = \dot{R}$ und dem Geschwindigkeitsfeld $u(r,t)$ im Fluid. Sie lautet

$$u(r,t) = \frac{R^2 \dot{R}}{r^2}, \tag{2.1}$$

wobei mit $u(r,t)$ die Radialgeschwindigkeit gemeint ist. Setzt man diese Beziehung in die Eulergleichung ein, integriert diese nach r und setzt die Randbedingungen an den Stellen $r = R$ und $r \to \infty$ ein, so erhält man die Rayleigh-Plesset-Gleichung für die Schwingungen der Blasenwand. Unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung S, den viskosen Normalspannungen in der Flüssigkeit mit kinematischer Viskosität ν_L und der Dichte ρ_L lautet sie nach Brennen [8]

$$-\frac{p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{Go}}{\rho_L}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} = R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_L}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}$$

mit

$$p_{Go} = p_\infty(0) + \frac{2S}{R_0}.$$

Vernachlässigung der eben genannten Effekte führt zu

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_\infty(0)}{\rho_L}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} - \frac{p_\infty(t)}{\rho_L}. \tag{2.2}$$

ρ_L bezeichnet hierbei die konstante Dichte der Flüssigkeit. Es könnte zusätzlich der Dampfdruck der Flüssigkeit in das Modell eingebracht werden. Dies hätte einen geringeren (Partial-)Druck des Gases zur Folge. Für Wasser beträgt der Dampfdruck lediglich $pV = 0.023$ bar und wird vernachlässigt.

2.2 Das akustische Modell

Dieses Modell beschreibt die Ausbreitung von Druckstörungen mittels der akustischen Theorie. Voraussetzung dafür sind kleine Störungen des Drucks, der Dichte und der Geschwindigkeit, was eine Linearisierung der Eulergleichung ermöglicht. Druckstörungen, welche von der Blase ausgehen, sind nun nicht mehr instantan im gesamten Raum vorhanden, sondern breiten sich mit der konstanten Schallgeschwindigkeit c in der Flüssigkeit aus. Das bewirkt ein Abstrahlen von Energie von der Blase und somit ein Abklingen der Blasenschwingung. Die Bewegungsgleichung für die Blase lautet somit

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho}\left[P(R) + \frac{R}{c}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{dP(R)}{dt} - p_\infty(t)\right]. \tag{2.3}$$

2.3 Das Gilmore-Modell

Das Gilmore-Modell ist abgesehen von der direkten Lösung der Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichungen die wohl komplexeste Beschreibung für eine Einzelblase, dafür ist sie allerdings auch die genaueste. Sie berücksichtigt nicht nur die Kompressibilität der Flüssigkeit, sondern auch die Änderung der Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Zustandsgrößen Druck und Dichte. Für ihre Herleitung wird die Kirkwood-Bethe-Hypothese verwendet, wonach sich die Größe $r(h + u^2/2)$ in der Flüssigkeit mit $c + u$ fortbewegt. Hierbei bezeichnet h die Enthalpie[1] der Flüssigkeit.

Da bei Gilmore [6] von $p_\infty = konst.$ ausgegangen wurde, wodurch es keine einlaufenden Charakteristiken gibt, ist es notwendig, $p_\infty(t)$ nur langsam zu verändern, sodass die einlaufenden Charakteristiken weiterhin ignoriert werden können. Die nichtlineare Bewegungsgleichung für die Blasenwand ergibt sich zu

$$R\ddot{R}\left(1 - \frac{U}{C}\right) + \frac{3}{2}U^2\left(1 - \frac{U}{3C}\right) = H\left(1 + \frac{U}{C}\right) + \frac{R}{C}\left(1 - \frac{U}{C}\right)\frac{dH}{dt}. \tag{2.4}$$

Mit Großbuchstaben sind Größen bezeichnet, welche an der Blasenwand ausgewertet werden. Um die Schallgeschwindigkeit C sowie die Enthalpie H

[1] In der Thermodynamik ist die Enthalpie durch $h = \int \frac{dp}{\rho} + \int T ds$ definiert. Die von Gilmore verwendete Form $h = \int \frac{dp}{\rho}$ entspricht einer isentropen Zustandsänderung der Flüssigkeit.

auszudrücken, ist eine Zustandsgleichung für die umgebende Flüssigkeit erforderlich. Gilmore hat hierfür die Tait-Gleichung

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \tag{2.5}$$

verwendet. Für Wasser sind die Tait-Koeffizienten $n \approx 7$ und $B \approx 321.4\,\mathrm{MPa}$ (siehe auch Lindau [5]). Die Schallgeschwindigkeit C an der Blasenwand ergibt sich zu

$$C^2 = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_R = c_\infty \left(\frac{p(R)+B}{p_0+B}\right)^{\frac{n-1}{2n}}. \tag{2.6}$$

Für H (Auswertung der Enthalpie h bei $r = R$) erhält man

$$\begin{aligned} H &= \int_{p_\infty}^{P=p(R)} \left(\frac{p+B}{p_0+B}\right)^{-1/n} \frac{dp}{\rho_0} = \\ &= \frac{n(p_0+B)}{(n-1)\rho_0}\left[\left(\frac{P+B}{p_0+B}\right)^{\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{p_\infty+B}{p_0+B}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right], \end{aligned} \tag{2.7}$$

was nicht Glg (24) von Gilmore entspricht, da sich der Druck p_∞ ja ändert, also kein Bezugsdruck sein kann. Es stellt sich die Frage, wie der Term dH/dt behandelt werden soll, da er von P und $p_\infty(t)$ abhängt. Es wäre prinzipiell notwendig, ihn mit

$$\frac{dH(P,p_\infty)}{dt} = \frac{d(H_1(p_\infty)+H_2(P))}{dt} = \frac{dH_1}{dp_\infty}\dot{p}_\infty + \frac{dH_2}{dP}\frac{dP}{dR}\dot{R},$$

und

$$\begin{aligned} H_1(p_\infty) &= -\frac{n(p_0+B)}{(n-1)\rho_0}\left(\frac{p_\infty+B}{p_0+B}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \\ H_2(P) &= +\frac{n(p_0+B)}{(n-1)\rho_0}\left(\frac{P+B}{p_0+B}\right)^{\frac{n-1}{n}}, \end{aligned}$$

zu ermitteln. Es stellt sich allerdings heraus, dass der Term mit $\dot{p}_\infty$ für die in den späteren Kapiteln untersuchten Verläufe von p_∞ vernachlässigbar klein

ist. Somit wird dH/dt mit der Kettenregel als U·dH/dP·dP/dR ausgedrückt, wobei

$$\frac{dH}{dP} = \left(\frac{P+B}{p_0+B}\right)^{-1/m} \frac{1}{\rho_0} \tag{2.8}$$

gilt. Unter Verwendung der Zustandsgleichung für ideale Gase und Annahme von $P_i \approx P$ gilt

$$\begin{aligned} P &= p_{Go}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa}, \\ \frac{dP}{dR} &= 3\kappa\, p_{Go}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa-1}\left(-\frac{R_o}{R^2}\right). \end{aligned}$$

3 Schwingungen einer Einzelblase

3.1 Kleine Amplituden

Setzt man kleine Störungen des Ruheradius der Blase, sowie kleine Geschwindigkeiten voraus, so kann die RP-Gleichung linearisiert werden. Sei also

$$R(t) = R_0(1 + \xi(t))$$

und somit

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R_0\dot{\xi}, \\ \ddot{R} &= R_0\ddot{\xi}, \end{aligned}$$

wobei ξ und dessen Ableitungen klein gegen Eins seien. Der Term der rechten Seite von (2.2), welcher den Druck im Gas repräsentiert, wird in eine Taylorreihe entwickelt und lautet

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\kappa} \approx 1 - 3\kappa\frac{R - R_0}{R_0} + \ldots \approx 1 - 3\kappa\xi.$$

Schließlich erhält man die linearisierte RP-Gleichung für eine im konstanten Druckfeld schwingende Blase zu

$$R_0^2\ddot{\xi} = \frac{p_\infty}{\rho}\left(1 - 3\kappa\xi - 1\right),$$

welche nach Umformen eine Schwingungsgleichung

$$\ddot{\xi} + \frac{3\kappa p_\infty}{\rho_L R_0^2}\xi = 0$$

mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\kappa p_\infty}{\rho_L R_0^2}} \tag{3.1}$$

ergibt. Diese Eigenfrequenz wird im Folgenden dazu verwendet, um die Gleichungen dimensionslos zu betrachten.

3.2 Darstellung im Phasenraum

Um das Schwingverhalten der Blasen zu diskutieren, werden zunächst die Eigenschwingungen, das heißt Schwingungen ohne aufgeprägter Druckdifferenz betrachtet. Dabei wird von der akustischen Approximation (2.3) ausgegangen.

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L}\left(P_L + \frac{R}{c}\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{dP_L}{dt} - p_\infty\right)$$

Entdimensionalisieren durch $R = R_0 R'$, $t = t'\sqrt{p_\infty/\rho_L}/R_0$ und $p = p'/p_\infty$ liefert

$$R'\ddot{R}' + \frac{3}{2}\dot{R}' = \frac{1}{R'^{3\kappa}}\left(1 - 3\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}\dot{R}'\right) - 1.$$

Weglassen der ' führt zu

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R} = \frac{1}{2R^2\dot{R}}\frac{d}{dt}(R^3\dot{R}^2) = \frac{1}{R^{3\kappa}}\left(1 - 3\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}\dot{R}\right) - 1. \tag{3.2}$$

Durch weiteres Auflösen ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\left(R^3\dot{R}^2 + \frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3(1-\kappa)}R^{3(1-\kappa)}\right) = -6\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}R^{2-3\kappa}\dot{R}^2. \tag{3.3}$$

Die Terme der linken Seite stellen die RP-Gleichung dar. Für $\sqrt{p_\infty/\rho_L}/c \to 0$, d.h. für ein inkompressibles Fluid ist diese Gleichung energieerhaltend. In dieser Form gilt die Gleichung natürlich nur für $\kappa \neq 1$.

3.2.1 Phasendiagramm für Blasenschwingungen in einem inkompressiblen Fluid

Im inkompressiblen Fall verschwindet die rechte Seite und (3.3) kann integriert werden

$$\left(R^3\dot{R}^2 + \frac{2}{3}R^3 - \frac{2}{3(1-\kappa)}R^{3(1-\kappa)}\right) = K. \tag{3.4}$$

Wird eine Blase in einem inkompressiblen Fluid aus ihrem Ruhevolumen mit Radius R_0 gestört, so wird sie periodische Schwingungen ausführen. Die Störung wurde so angesetzt, dass die Blase von R_0 auf R_{max} vergrößert wurde. Somit besitzt die Blase im Inneren einen geringeren Druck als die sie umgebende Flüssigkeit. Das Ergebnis könnte also auch durch eine Störung des Flüssigkeitsdruck bewirkt werden. Die Konstante K ergibt sich zu

$$K = 2/3R_{max}^3 - \frac{2}{3(1-\kappa)}R_{max}^{3(1-\kappa)} \qquad \kappa \neq 1,$$
$$K = 2/3R_{max}^3 - 2\ln R_{max} \qquad \kappa = 1.$$

Mit $U = \dot{R}$ sind die Trajektorien im Phasenraum durch

$$U_{\kappa=1.4} = \sqrt{K/R^3 - 2/3 + \frac{2}{3(1-\kappa)R^{3\kappa}}} \tag{3.5}$$
$$U_{\kappa=1} = \sqrt{K/R^3 - 2/3 + 2\ln R} \tag{3.6}$$

gegeben (siehe Abbildung 3).

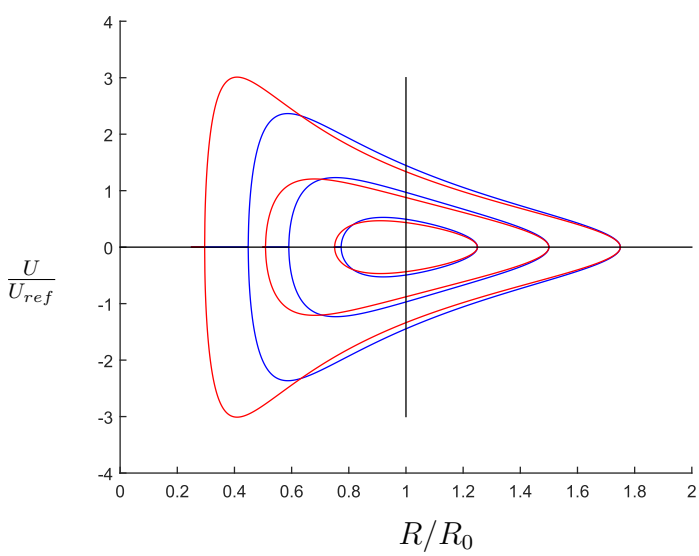

Abbildung 3: Trajektorien im Phasenraum für das RP-Modell: rot–isotherme Blase, blau–isentrop

3.2.2 Phasendiagramm für die Blasenschwingungen nach dem akustischen Modell

Wir linearisieren (3.2). Mit $R = 1 + \xi$, wobei ξ und dessen Ableitungen klein sein sollen ergibt sich

$$\ddot{\xi} = -3\kappa\xi - 3\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}\dot{\xi},$$

oder umgeschrieben

$$\ddot{\xi} + 3\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}\dot{\xi} + 3\kappa\xi = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 3\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c}\lambda + 3\kappa = 0,$$

womit sich

$$\lambda = -\frac{3}{2}\kappa\frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{3\kappa\sqrt{p_\infty/\rho_L}}{2c}\right)^2 - 3\kappa} \tag{3.7}$$

ergibt. Der Wurzelausdruck verschwindet für $M_{ref} = \sqrt{p_\infty/\rho_L}/c = 2/\sqrt{3\kappa}$. Falls M_{ref} größer als dieser Wert ist, wird die Wurzel reell und es ergeben sich keine Schwingungen der Blase. Für $\rho_L = 1000$ kg/m^3, $p_\infty = 1$ bar und $c = 1400$ m/s ergibt sich M_{ref} zu

$$M_{ref} = 7.143 \cdot 10^{-3} < \frac{2}{\sqrt{3\kappa}}$$

Somit sollte die Blase für realistische Werte schwingfähig sein. Zum Vergleich mit der ungedämpften Schwingung werden die Anfangsbedingungen $R = R_{max}$ und $\dot{R} = 0$ gewählt. Wenn man die Schwingung mit der Standard-Schwingung

$$\ddot{\xi} + 2D\omega_0\dot{\xi} + \omega_0^2 = 0 \tag{3.8}$$

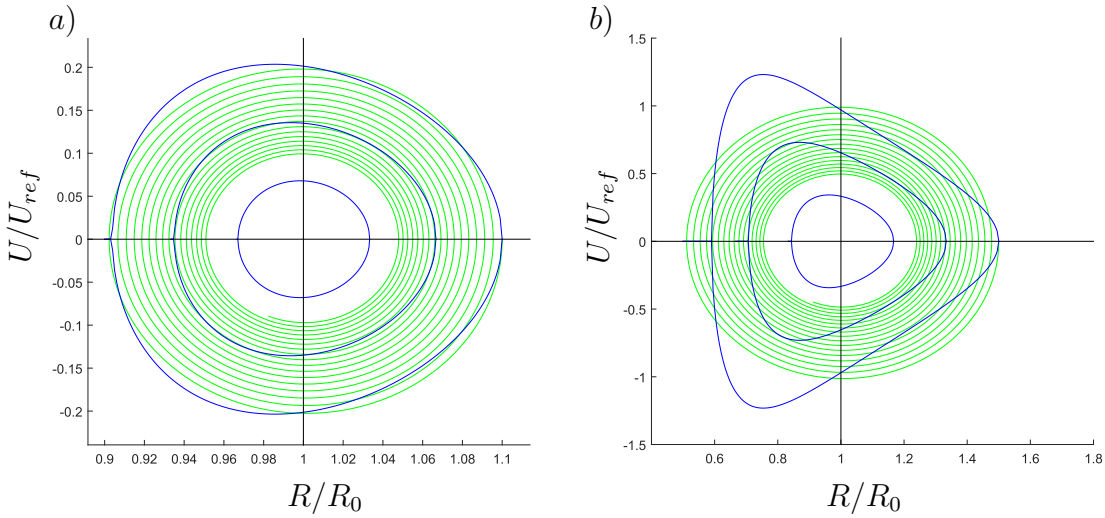

Abbildung 4: Trajektorien der Einzelblase: linearisiert kompressibel–grün, Rayleigh-Plesset (isentrop)–blau für verschiedene R_{max}

vergleicht, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{3\kappa}, \\
D &= \frac{\sqrt{3\kappa}}{2} M_{ref}, \\
\alpha &= \omega_0 D = \frac{3\kappa}{2} M_{ref}, \\
\omega &= \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \\
c_1 &= \xi_0 = R_{max} - 1, \\
c_2 &= \frac{\dot{\xi}_0 + \alpha \xi_0}{\omega},
\end{aligned}
$$

wobei die Lösung die Form

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= e^{-\alpha t}(c_1\, cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \\
\dot{\xi}(t) &= e^{-\alpha t}((\omega c_2 - \alpha c_1)\cos(\omega t) - (\omega c_1 + \alpha c_2)\sin(\omega t))
\end{aligned}
$$

hat. D bezeichnet das Lehrsche Dämpfungsmaß. Damit lassen sich nun die Phasendiagramme für die gedämpfte Schwingung berechnen. Im Folgenden sind die Phasenlinien der gedämpften linearisierten Blasenschwingungen und

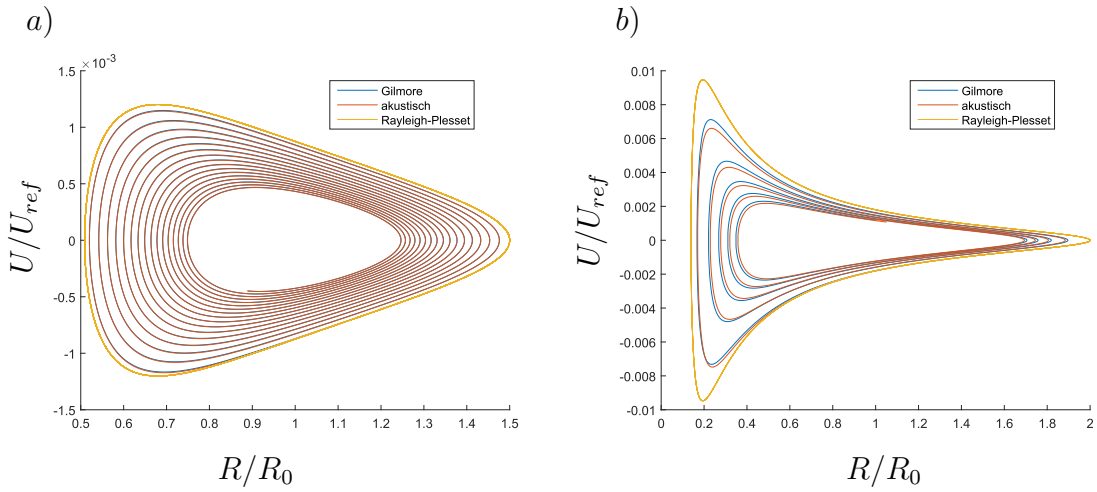

Abbildung 5: Trajektorien im Phasenraum für die verschiedenen Modelle: a) $R_{max} = 1.5R_0$; b) $R_{max} = 2R_0$

zum Vergleich die der nichtlinearen ungedämpften Blasenschwingungen dargestellt. Anhand der Diagramme erkennt man, dass bis zu $\xi_{max} = 0.1$ die linearisierte Gleichung die Blasenschwingung gut darstellt (Abbildung 4 a)). Bei einer Erhöhung von ξ auf $\xi_{max} = 0.5$ wächst die Abweichung allerdings beträchtlich (Abbildung 4 b)).
Weiters kann man betrachten, wie sich das Gilmore- und das akustische Modell für die freie Schwingung verhalten. Für kleine Abweichungen (Abbildung 5 a)) von der Ruheposition, was auch in kleinen Geschwindigkeiten resultiert, sind die beiden Modelle nicht zu unterscheiden. Vergrößert man die Blasenschwingung jedoch, so driften die beiden Modelle weiter auseinander (Abbildung 5 b)).

3.3 Verhalten der Modelle am Beispiel einer kollabierenden Blase

Hier soll kurz anhand einer Blase, welche zu $t = 0$ den Radius $R = 3R_0 = 3$ mm hat, also deutlich größer ist als im Ruhezustand, der grundsätzliche Verlauf einer Blasenschwingung diskutiert werden. Der Druck bleibt auf Urspungsniveau $p_\infty = 10^5$ Pa. Die Werte für das die Blase umgebende Wasser sind: $\rho = 1000$ kg/m^3 und $c_\infty = 1470$ m/s. Man erkennt in Abbildung 6 deutlich, dass die Lösung nach Rayleigh-Plesset energieerhaltend ist, wäh-

rend sich bei den anderen Modellen die Abstrahlung als Dämpfung der Radialschwingung bemerkbar macht. Weiters ist ersichtlich, dass in den Bereichen des Blasenkollaps($R < R_0$) hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen stattfinden. Hier sind deutlich kleinere Zeitschritte erforderlich. Wie schon bei linearen Schwingern bekannt, erhöht die Dämpfung die Frequenz der Schwingungen. Auf den ersten Blick erscheint es widersprüchlich, dass das akustische

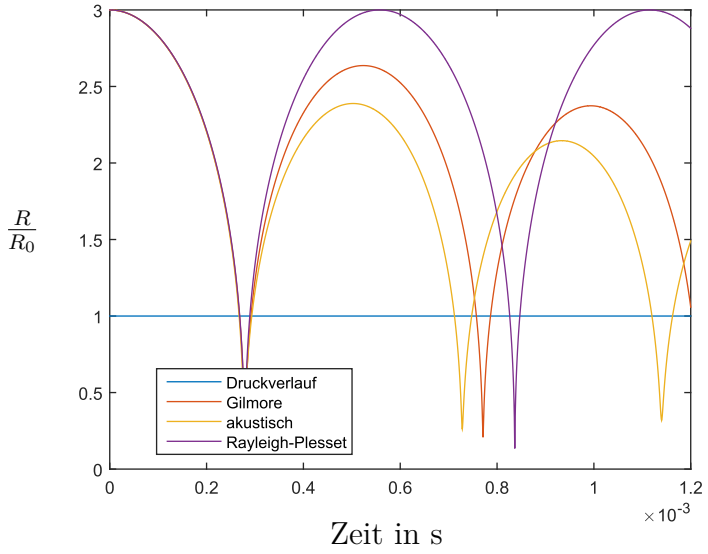

Abbildung 6: Vergleich der verschiedenen Blasenmodelle

Modell eine stärkere Dämpfung verursacht, als das Gilmore-Modell, welches die Kompressibilität stärker berücksichtigt. Dies ist dadurch begründet, dass die Schallgeschwindigkeit an der Blasenwand C im Verlauf der Rechnung sowohl größer als auch kleiner als die akustische Schallgeschwindigkeit wird und somit einmal mehr und einmal weniger stark Energie abgestrahlt wird.

3.4 Reaktion auf kurzzeitige Druckabsenkung

3.4.1 Die dimensionslose Rayleigh-Plesset-Gleichung

Es soll nun die angeregte Schwingung einer Einzelblase untersucht werden. Es wird wieder mit einer Blase in einer inkompressiblen Flüssigkeit begonnen, welche einem Druckfeld $p_\infty(t)$ ausgesetzt wird (siehe Abbildung 7). Im Vergleich zur frei schwingenden Blase gibt es nun zusätzliche Parameter durch

die Anregung. Die Parameter, welche das Verhalten der Blase beschreiben,

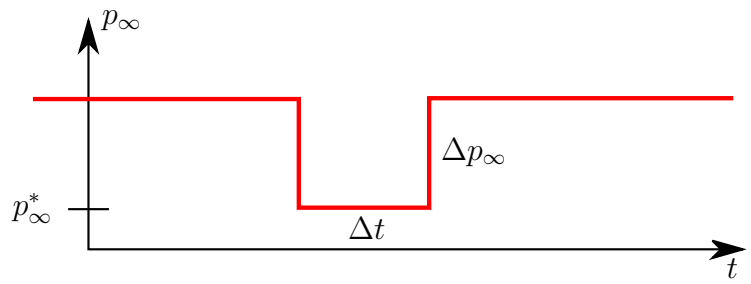

Abbildung 7: Verlauf des aufgeprägten Testdrucks

sind

Stoffwerte:	$\rho_L, \kappa,$
Anfangswerte:	$R_0, p_\infty(0),$
Anregung :	$\Delta p_\infty, \Delta t.$

Da von isentroper Zustandsänderung der Blase ausgegangen wird, ist $\kappa \equiv 1.4$ und fällt somit als Parameter weg. Aus den restlichen Variablen lassen sich in unseren M,L,T-System zwei unabhängige dimensionslose Kennzahlen bilden

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}\Delta t}{R_0},$$
$$\Pi_2 = \frac{\Delta p_\infty}{p_\infty}, \text{bzw. } \Pi_2 = \frac{p_\infty^*}{p_\infty}.$$

p_∞^* bezeichnet das zweite Druckniveau, dass der aufgeprägte Druck annimmt. Es soll nun untersucht werden, wie diese beiden Parameter $R(t)/R_0$, p_{max}/p_∞ und p_{min}/p_∞ beeinflussen. Die Rayleigh-Plessetgleichung in dimensionsloser Form lautet nun

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^{3\kappa} - p(\Pi_1, \Pi_2, t). \tag{3.9}$$

Der maximale Druck, der sich in der Blase aufgrund der Schwingung ergibt, kann als Funktion der beiden Kennzahlen Π_1 und Π_2 dargestellt werden. Im folgenden Diagramm ist dazu der maximale Druck in der Blase über die Kennzahl Π_1 aufgetragen. Es wurde von einer Druckabsenkung von 90%, also

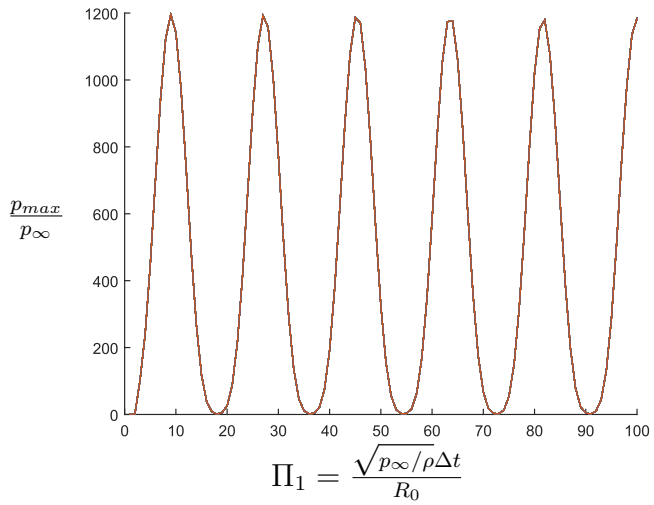

Abbildung 8: Maximaler relativer Blasendruck in Abhängigkeit von Π_1, Π_2=0.1

$\Pi_2 = 0.1$ ausgegangen. Man erkennt einen periodischen Verlauf der Maximaldrücke für verschiedene Werte von Π_1. Es soll nochmals hervorgehoben werden, dass eine Druckabsenkung von 90% einen Maximaldruck von bis zu 1200 mal den Ausgangsdruck zur Folge hat. Weiters gibt es bestimmte Werte von Π_1, bei denen es zu keinem Druckanstieg kommt. Zur Erklärung dieser Phänomene werden die Zeitverläufe der Blasenradien betrachtet. In Abbildung 9 sind Radienverläufe aufgrund unterschiedlicher Π_1 aufgetragen. Wird der Druck wieder erhöht, bevor die Blase ihr Maximum erreicht hat oder wenn sie sich bereits wieder im Kollaps befindet, so ist der daraus resultierende Maximaldruck nicht der größtmögliche. Nur wenn der Blasenrand seine maximale Ausdehnung erreicht, hat der Druckanstieg in p_∞ seine größtmögliche Wirkung. Auch die Periodizität des Maximaldruckes kann durch die Radialschwingung erklärt werden. Bis auf den ersten Aufschwingvorgang schwingt eine Blase immer exakt gleich wie in der Periode davor. Deshalb macht es auch für den Maximaldruck keinen Unterschied, ob p_∞ zum Zeitpunkt t oder zum Zeitpunkt $t + \tau$ erhöht wurde. Eine schwingende Blase hat zwangsläufig einen maximalen und minimalen Radius. Bei diesen ist die Blasenwandgeschwindigkeit gleich Null. Erfolgt der Rückgang des Druckes gerade beim minimalen Radius der Blase, so ist die treibende Kraft der Rayleigh-Plesset-Gleichung, der Druckunterschied $P_L - p_\infty$ gerade Null. Dies gilt aber ebenfalls

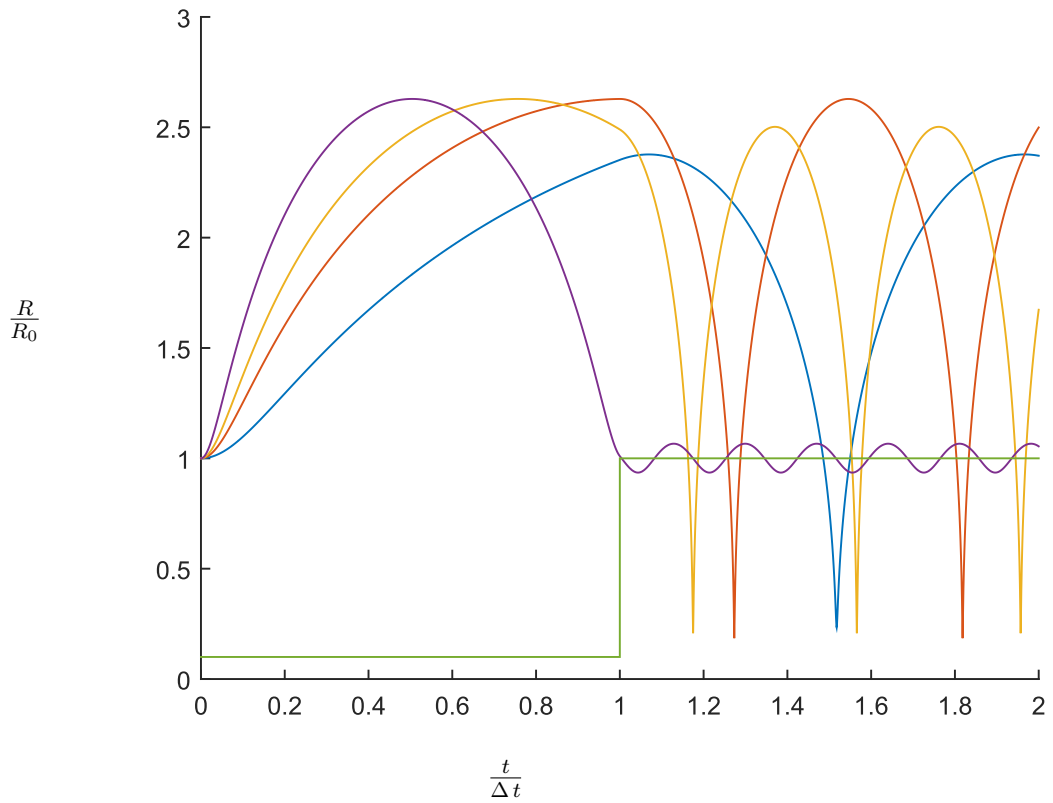

Abbildung 9: Blasenradien als Funktion der Zeit: blau–$\Pi_1 = 5$, orange–$\Pi_1 = 9$, gelb–$\Pi_1 = 12$, violett–$\Pi_1 = 18$

für die Geschwindigkeit und als Folge daraus auch für die Beschleunigung. Das bedeutet, dass die Blase dann in Ruhe bleibt, die Anregung sich selbst ausgelöscht hat (Abbildung 10). Der erste Wert für Π_1, für den dies gilt, ist $\Pi_1 = 18.1495$. Ein mechanisches Analogon zu diesem Effekt, ist eine an ihrem Fußpunkt bewegte Feder mit Masse. Verschiebt man den Fußpunkt um Δx, so beginnt die Feder um die beiden Totpunkte $x = 0$ und $x = 2\Delta x$ zu schwingen. Macht man die Verschiebung genau bei Erreichen des unteren Totpunktes rückgängig, so ist die Masse in Ruhe und die Feder wieder entspannt, das System also wieder im Gleichgewicht. Der Vollständigkeit halber sei noch darauf hingewiesen, dass die Ausgabe eines Diagramms p_{min}/p_∞ we-

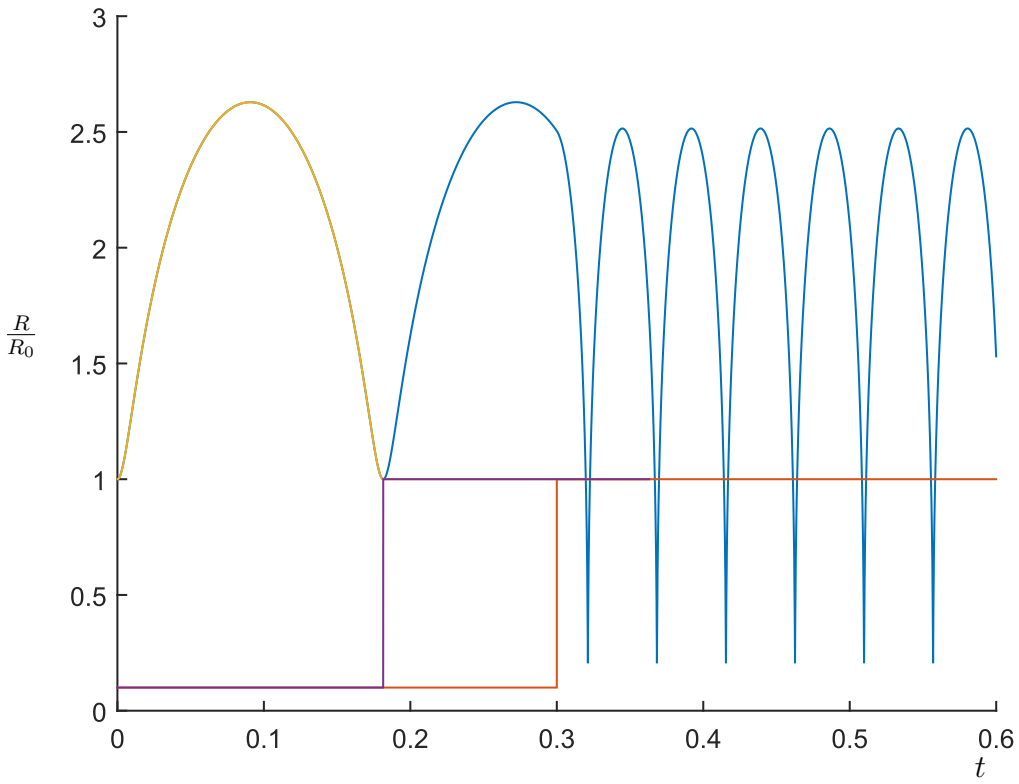

Abbildung 10: Blasenradien als Funktion der Zeit: gelb, blau – Blasenradien, violett, rot Drucksprünge jeweils für $\Pi_1 = 18.1495$ sowie $\Pi_1 = 30$.

nig interessant ist, da nach dem ersten Erreichen des maximalen Radius das Zurückspringen des aufgeprägten Druckes keinen Einfluss auf p_{min} mehr hat.

3.4.2 Das dimensionslose Gilmore-Modell

Die dimensionslosen Parameter Π_1 und Π_2 werden hier weiterverwendet. Allerdings gibt es nun eine weiter Einflussgröße, die Schallgeschwindigkeit der Flüssigkeit, im speziellen diejenige der ruhenden Flüssigkeit bei p_∞. Als wei-

tere dimensionslose Größe erhält man also

$$\Pi_3 = \frac{p_\infty}{\rho_L c_\infty^2},$$

welche, wie für $c_\infty \to \infty$ gegen Null geht. Somit beschreibt $\Pi_3 = 0$ den inkompressiblen Fall. Weiters erkennt man, dass Π_3 lediglich aus Stoff- und Anfangsgrößen besteht und daher für die untersuchten Fälle eine Konstante ist. Somit kann der maximale Druck wieder als Diagramm von Π_1 und Π_2 dargestellt werden (Abbildung 11). Aufgrund der Dämpfung geht bei zuneh-

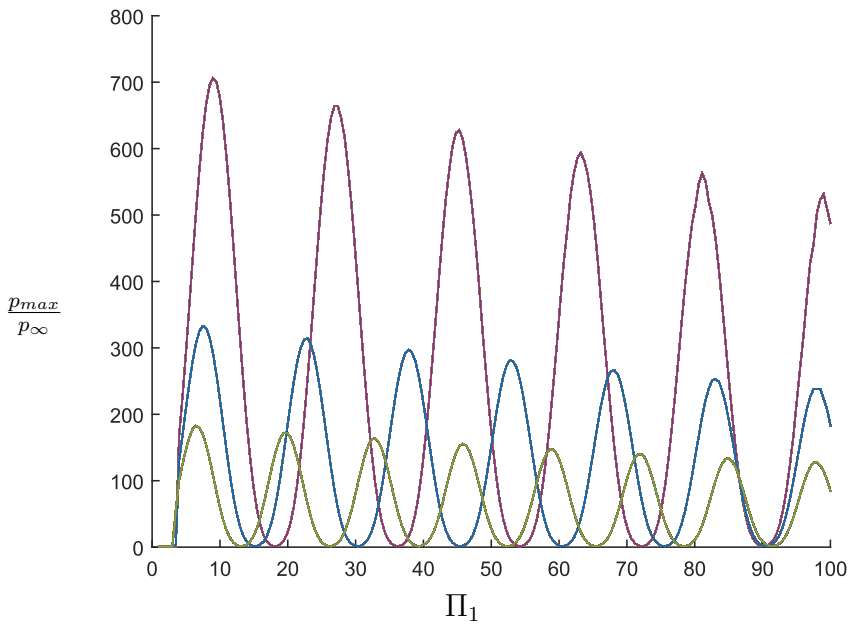

Abbildung 11: Maximaldruck in der Blase nach Gilmore;violett–$\Pi_2 = 0.1$, blau–$\Pi = 0.2$, grün–$\Pi_2 = 0.3$

mender Dauer des Impulses Energie verloren. Dadurch nimmt der maximale Druck mit zunehmenden Π_1 ab. Allerdings gilt keinesfalls $\lim_{\Pi_1 \to \infty} p_{\max} = 0$, da für große Zeiten die Blase unter dem neuen Druck wieder in Ruhe ist. Ein dann erfolgender Anstieg von p_∞ ist somit nicht mehr als ein Zurückspringen des Drucks, sondern vielmehr wie ein drastischer Anstieg aus der Ruhelage heraus zu betrachten. Auf eine solche Störung reagieren Blasen deutlich empfindlicher als auf ein Absenken des Drucks. Der maximale Druck kann dadurch mehrere Größenordnungen stärker sein.

3.4.3 Andere Form der Anregung

Aus der Problemstellung von Iakovlev ist allerdings kein Rechteckimpuls zu erwarten. Vielmehr nimmt der Druck etwa sinusförmig ab, erreicht sein Minimum und steigt wieder an, wie in Abbildung 12 zu sehen. Dies hat zur Folge,

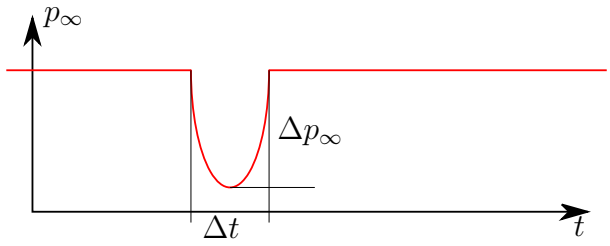

Abbildung 12: Sinusförmiger Druckverlauf als Testfunktion

dass nun kein periodisches Verhalten auf dem unteren Niveau zu erwarten ist (Abbildung 13), da der Druck nie konstant ist. Erst wenn der Druckabfall wieder vollständig rückgängig gemacht wurde, kann die Blase periodisch weiterschwingen. Interessant ist, dass es nun nur ein Maximum für den maximalen Druck gibt. Für $\Pi_1 \to \infty$ verschwindet die Drucksteigerung, da die Blase quasistatisch belastet wird.

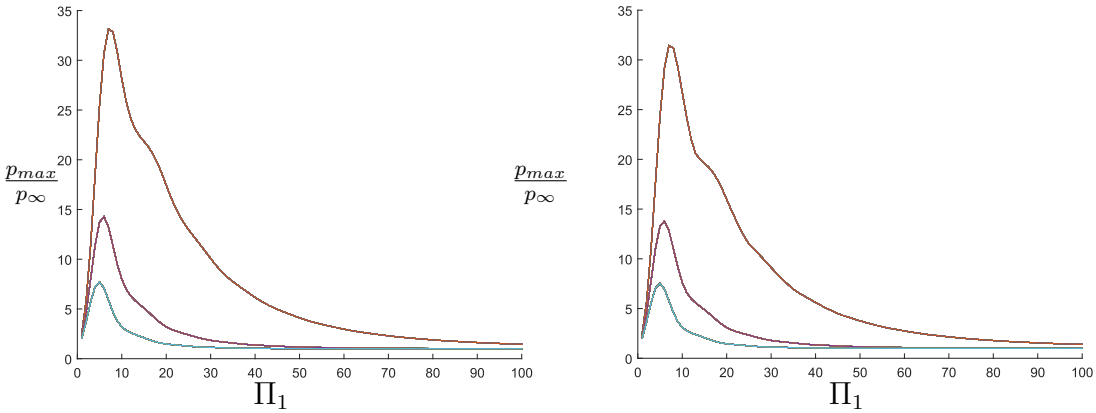

Abbildung 13: Maximaldruck in der Blase für sinusförmige Anregung: a) RP, b) Gilmore; orange–$\Pi_2 = 0.1$, violett–$\Pi = 0.2$, blau–$\Pi_2 = 0.3$

4 Abstrahlung

4.1 Abstrahlungsmodelle

Nachdem die Folgen verschiedenartiger Anregung auf die Blase untersucht wurden, soll nun betrachtet werden, wie sich die Schwingung der Blase auf das umgebende Medium auswirkt. Es sollen verglichen werden, inwiefern Kompressibilität einen Einfluss hat, und wie weit dieser Einfluss in die Flüssigkeit reicht.
Folgende Approximationen werden verglichen

- inkompressibel
  instantane Änderung des Geschwindigkeitsfeldes
- akustische Abstrahlung
  Ausbreitung der Störung mit c_∞
- numerische Integration entlang Charakteristik (Gilmore)
  Ausbreitung der Störung mit $u + c$ mit variabler Schallgeschwindigkeit

Die Herleitung dieser Approximationen ist in Gilmore [6] beschrieben. Formelmäßig seien hier nur drei von ihnen angeführt.

4.1.1 Inkompressibel

Wie schon bei Herleitung der Rayleigh-Plesset-Gleichung gilt

$$u(r) = \frac{R_B^2 \dot{R}_B}{r^2}. \tag{4.1}$$

4.1.2 Akustisch

Im akustischen Modell wird die sphärische Wellengleichung gelöst. Da die Störung drehungsfrei ist, kann ein Geschwindigkeitspotential ϕ eingeführt werden. Im akustischen Fall ist das Potential für ausgehende Kugelwellen von der Form

$$\phi = \frac{f(t - r/c_\infty)}{r}.$$

Das bedeutet, dass $f(t-r/c_\infty)$ entlang einer Charakteristik $t-r/c_\infty = konst.$ konstant bleibt. Der Gradient des Potentials ergibt die Geschwindigkeit

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{f}{r^2} + \frac{f'}{rc_\infty}. \tag{4.2}$$

Integration der Eulergleichung ergibt

$$h + \frac{u^2}{2} = -\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

woraus man mit $h \approx (p - p_\infty)/\rho_\infty$ schließlich

$$p = p_\infty + \frac{\rho_\infty f'}{r} - \frac{\rho_\infty u^2}{2} \tag{4.3}$$

erhält. Löst man (4.3) nach f' auf und setzt das Ergebnis in (4.2) ein, so erhält man zwei Gleichungen für f und f'. Wichtig für die Größen

$$f = r^2 \left(u - \frac{u^2}{2c_\infty} - \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty c_\infty} \right), \tag{4.4}$$

$$f' = r \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty} \right), \tag{4.5}$$

ist, dass sie entlang einer auslaufenden Charakteristik konstant sind. Sofern man sie am Blasenrand mit $r = R$ und $u = \dot{R}$ bestimmt hat, kann das Geschwindigkeits- und Druckfeld in der gesamten Flüssigkeit berechnet werden. Dazu werden die Formeln (4.3) und (4.2) verwendet.

4.1.3 Gilmore-Modell

Hierbei werden keinerlei zusätzliche Approximationen(wie das Wegfallen höherer Potenzen der Machzahl) außer der Kirkwood-Bethe-Hypothese gemacht. Die Größe $y = r(h + u^2/2)$ bleibt demnach konstant entlang einer Charakteristik. Beschrieben wird dieser Umstand mit

$$\frac{dy}{dr} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{c+u} \frac{\partial}{\partial t} \right) y.$$

Die darin vorkommende lokale Schallgeschwindigkeit c kann mit dem bisherigen Wissen mit den Gleichungen (2.6) und (2.7) bei Verwendung von $p(r)$ anstelle von $p(R)$ ermitttelt werden und lautet

$$c = \sqrt{c_\infty^2 + (n-1)h}.$$

Nimmt man weiters die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = -\frac{1}{c^2}\frac{Dh}{Dt},$$

multipliziert sie mit c und addiert sie mit der Impulsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial h}{\partial r},$$

so erhält man

$$(c+u)\frac{du}{dr} = -\frac{2cu}{r} - \frac{c+u}{c}\frac{dh}{dr}.$$

Setzt man nun $h(r,u,y)$ ein, ergibt sich

$$\frac{du}{dr} = -\frac{2c^2u}{(c^2-u^2)r} + \frac{y}{(c-u)r^2},$$

welches nach Einsetzen von c eine differentielle Gleichung für die Geschwindigkeit entlang einer Charakteristiak liefert. Die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} =& -\frac{2u}{r} - \frac{2u^3}{c_\infty^2 r - (n+1)ru^2/2 + (n-1)y} \\ &+ \frac{y}{r(\sqrt{c_\infty^2 r^2 - (n-1)r^2u^2/2 + (n-1)ry} - ur)}, \\ y =& R(H + \dot{R}^2/2)\end{aligned} \tag{4.6}$$

muss numerisch für die Anfangsbedingung $u(R) = \dot{R}$ gelöst werden. Da entlang einer Charakteristik r und t nicht unabhängig voneinander sind, steht hierfür die Gleichung

$$t = t_R + \int_R^r \frac{dr}{\sqrt{c_\infty^2 + (n-1)h} + u} \tag{4.7}$$

zur Verfügung.

4.2 Vergleich der Abstrahlungsmodelle

Zu Beginn wird für eine moderate Machzahl von $M = \dot{R}/c_\infty = 0.5$ ein Vergleich zwischen den verschiedenen Modellen hergestellt (Abbildung 14). Man erkennt, dass das akustische und das Gilmore-Modell vor allem in einiger Entfernung zu Blase sehr gut übereinstimmen.

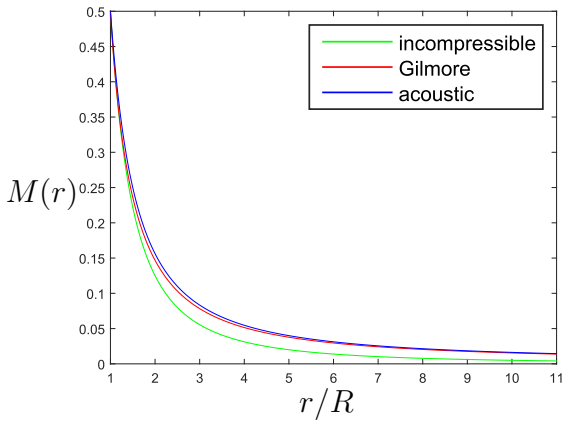

Abbildung 14: Abstrahlungsmodelle: Machzahl über dimensionsloser Radialkoordinate

4.3 Wechsel zwischen den Modellen

Der Grundgedanke hinter der Diskussion der verschiedenen Modelle für die Abstrahlung ist, nur so weit wie notwendig die schrittweise Integration zu verwenden. Beim Unterschreiten einer gewissen Machzahl (z.B. $M < 0.1$) soll es möglich sein, die akustische Lösung zu verwenden. Es ist dabei aufgefallen, dass es beim Wechsel von exakter Lösung zur akustischen durchaus einen Unterschied macht, welche Schallgeschwindigkeit verwendet wird. Die beiden Diagramme in Abbildung 15 zeigen beide den Fall einer Blase mit dem aktuellen Radius $R = 0.1\,R_0$ mit einer Blasenwandgeschwindigkeit von $M = 100/1400 = 0.071$. Zu Anfangs wird die Geschwindigkeit numerisch integriert bis sie beim Sinken $M = 0.1$ unterschreitet. Danach wird verglichen, wie gut das akustische Modell sowie das taylorentwickelte akustische Modell die exakte Lösung beschreiben. Man erkennt in a), dass das akustische Modell starke Abweichungen liefert, falls für die Schallgeschwindigkeit c_∞ verwendet

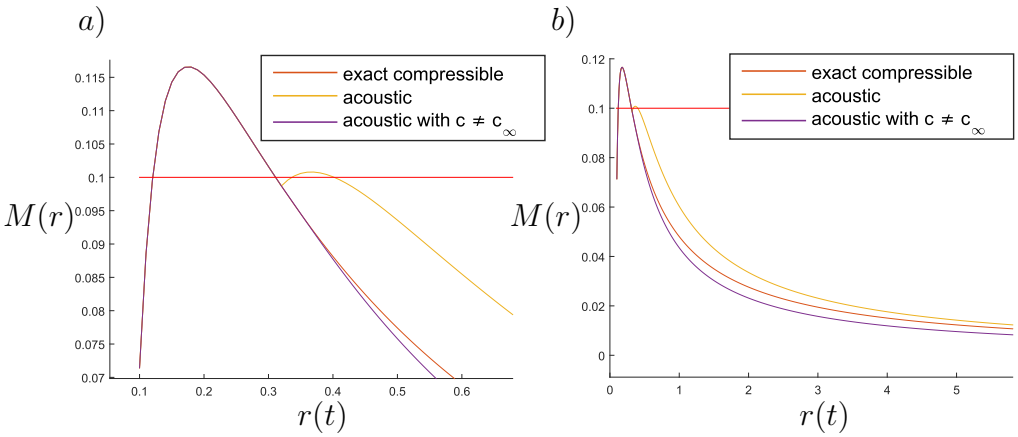

Abbildung 15: Umschalten zwischen Gilmore und akustischen Modell der Abstrahlung für verschiedene Schallgeschwindigkeiten, rot – Umschaltkriterium $M < 0.1$

wird(gelbe Linie). Verwendet man jedoch die aktuelle Schallgeschwindigkeit am Punkt des Modellwechsels

$$c^* = \sqrt{c_\infty^2 + (n-1)h^*},$$

wobei

$$h^* = \frac{R}{r^*}\left(H + \frac{U^2}{2}\right) - \frac{(u^*)^2}{2}$$

ist, so liefert das akustische Modell deutlich besserer Werte in der Nähe dieses Umschlagspunktes. In Abbildung 15 b) erkennt man jedoch, dass für größere Abstände $c = c_\infty$ die besseren Ergebnisse liefert.
Betrachtet man in Abbildung 16, wie sich die Schallgeschwindigkeit entlang einer Charakteristik entwickelt, so erkennt man, dass sie zum Zeitpunkt des Modellwechsels circa $c = 1.5\, c_\infty$ beträgt. Danach nimmt sie rapide ab. Dies ist die Erklärung für die verschieden gute Approximation der akustischen Lösung mit $c = c^*$ und $c = c_\infty$. Als Folge daraus macht es Sinn, als Umschaltkriterium

$$\frac{c - c_\infty}{c_\infty} < 0.1$$

zu verwenden. Ein weiteres Problem stellt die Abstrahlung einer Blase dar, deren Blasenrand mit Schallgeschwindigkeit bewegt. Die Störungen reichen

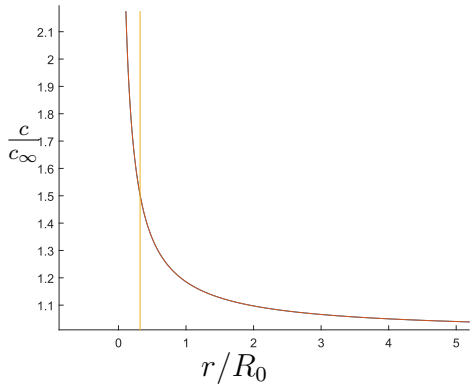

Abbildung 16: Verlauf der Schallgeschwindigkeit entlang einer Charakteristik

dann weit in das Fluid. Wie in Abbildung 17 zu sehen, ist für eine Blase mit $\dot{R}$ knapp über der Schallgeschwindigkeit bei einem Abstand von 100 mal den Radius noch immer eine Störung von knapp über 60% der Schallgeschwindigkeit vorhanden, während die Störung für eine Blase knapp unter der Schallgeschwindigkeit verschwindet. da dann die Störungen nicht abklingen. Somit muss der gesamte Weg bis zu einem entfernten Punkt von Interesse numerisch integriert werden.

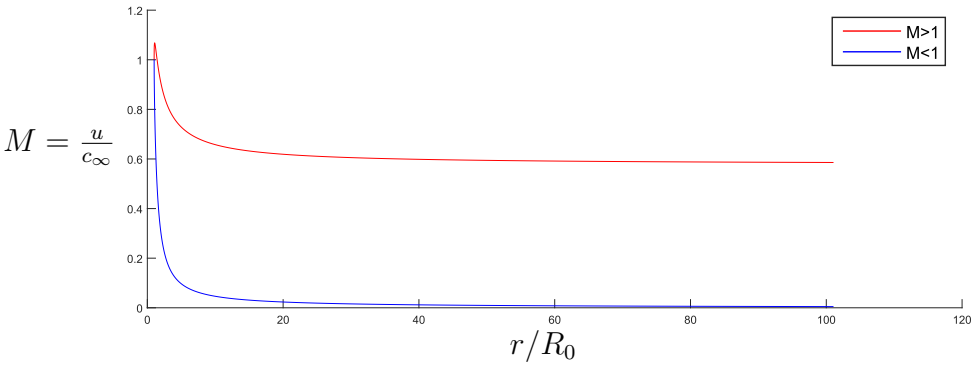

Abbildung 17: Verlauf der Machzahl entlang einer Charakteristik: blau–$\dot{R} = 1399$ m/s, rot–$\dot{R} = 1401$ m/s, ($c_\infty = 1400$ m/s), für beide gilt $R = R_0$

5 Interaktion zweier Blasen

Nach Diskussion des Verhaltens einer einzelnen Blase soll nun untersucht werden, inwiefern zwei Blasen einander gegenseitig beeinflussen. Sofern es sich um ein kompressibles Medium handelt, sind auch die Schalllaufzeiten zu berücksichtigen. Dabei stellt sich die Frage, ob die Beweglichkeit der Blasen einen Einfluss auf ihr Verhalten hat.

5.1 Translationsschwingungen einer Blase

Um die Translationschwingungen einer Blase zu berechnen, wird die Änderung des Impulses der Blase aufgrund von Druckschwankungen betrachtet. Die Herleitung der Bewegungsgleichung orientiert sich an der Dissertation von Krefting [3]. Der Impuls einer Blase ist unter Vernachlässigung der Gasmasse nur durch die „added mass “bestimmt.

$$P_B = \frac{1}{2}\rho_L V_B \dot{x}_B \tag{5.1}$$

Hierbei bezeichnet $\dot{x}_B$ die Relativgeschwindigkeit der Blase zur Geschwindigkeit der Flüssigkeit u. Dieser Impuls muss die Bedingung

$$\frac{d}{dt}P_B = \rho_L V_B \frac{\partial u}{\partial t}$$

erfüllen. Aus der Eulergleichung in x-Richtung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial x},$$

ergibt sich bei Streichung des nichtlinearen Terms $\rho_L \dot{u} = -\partial p/\partial x$. Eingesetzt lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}_B + \frac{\dot{V}_B}{V_B}\dot{x}_B = -\frac{2}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Man erkennt, dass ein Wachstum der Blase dämpfend und ein Schrumpfen der Blase beschleunigend wirkt. Durch Einsetzen von $V = \frac{4}{3}R^3\pi$ erhält man

$$\ddot{x}_B + \frac{3\dot{R}_B}{R_B}\dot{x}_B = -\frac{2}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Diese Bewegungsgleichung wird nun mit einer der Schwingungsgleichungen für die Radialbewegung gekoppelt. Nun soll untersucht werden, inwiefern es einen Unterschied macht, ob die Blase am Ort x_B fixiert ist, oder sich im Feld bewegen darf. In der Literatur werden in erster Linie harmonisch angeregte Blasen untersucht, was eine Mittelung der Gleichungen über die Periodendauer ermöglicht. Hier soll nun untersucht werden, was bei einem einmaligen Druckpuls passiert. Die Wellenlänge des Druckpulses soll größer als der Blasenradius sein, sodass an der Blase ein eindeutiger Druck anliegt. Er trifft bei $t = t_0 = 0$ bei der Blase ein und bewegt sich mit Schallgeschwindigkeit fort.

5.2 Einzelblase im akustischen Feld

Zuerst wird eine Einzelblase im akustischen Feld untersucht. Die Gleichungen als System 1.Ordnung lauten

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \, (= \dot{x}_B) \\
\dot{x}_2 &= \ddot{x}_B = -\frac{3\dot{R}_B}{R_B} x_1 - \frac{2}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial x}.
\end{aligned}$$

dimensionslose Kennzahlen Aus den Parametern p_∞, $p_{\infty,min}$, Δt, R_0, ρ_L, c_∞ lassen sich folgende dimensionslose Kennzahlen bilden

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{\sqrt{p_\infty/\rho_L}\Delta t}{R_0}, \\
\Pi_2 &= \frac{p_{\infty,min}}{p_\infty}, \\
\Pi_3 &= \frac{R_0}{c_\infty \Delta t} \ll 1.
\end{aligned}$$

Π_3 sollte kleiner 1 sein, da vorausgesetzt wurde, dass der Radius kleiner als die Wellenlänge ist, da ansonsten ein großer Druckunterschied über die Blasenwand die Voraussetzung einer kugelförmigen Blase verletzen würde. Desweiteren könnte man nicht mehr von *einem* aufgeprägten Druck auf die Blase sprechen. Eine alternative Kennzahl, welche nur von Stoffeigenschaften abhängt, wäre

$$\Pi_4 = \frac{p_\infty}{\rho_L c_\infty^2}.$$

Eine so angeregte Einzelblase bewegt sich in Richtung der Druckwelle, wobei sie wegen ihrer Radialschwingung ständig beschleunigt und verzögert, was in einem Zeit-Weg-Diagramm einen treppenförmigen Verlauf zur Folge hat (siehe Luther [4] fig. 4.9c and fig. 4.11c). In einer reibungsfreien Flüssigkeit würde sich die Blase ständig weiterbewegen. Deswegen wird in den folgenden Analysen die (kleine) Viskosität von Wasser in die Berechnungen miteinbezogen. Die Bewegungsgleichung der Blase lautet somit

$$\ddot{x}_B + \frac{3\dot{R}_B}{R_B}\dot{x}_B = -\frac{2}{\rho_L}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{18\eta}{\rho}\frac{\dot{x}_B}{R^2}.$$

Dabei wurde ein Reibgesetz für große Reynoldszahlen verwendet. Statt

$$D = 12\pi\eta R\dot{x}_B$$

könnte für kleine Reynoldszahlen der Stokesche Wert mit $D = 6\pi\eta R\dot{x}_B$ besser sein.

5.3 Kopplung zweier Blasen

Im Folgenden werden zwei Fälle miteinander verglichen, jener einer Einzelblase mit sinusförmiger Druckabsenkung und der Fall, dass zwei Blasen gleicher Größe wie der Einzelblase miteinander wechselwirken. Der Abstand zwischen den beiden Blasen sei $L = 10R_0$.

5.3.1 Inkompressible Flüssigkeit

Zuerst wird jener Fall betrachtet, bei dem die Flüssigkeit inkompressibel angesehen wird. Bei Kopplung der Blasen wird die Druckänderung sofort im ganzen Gebiet wirksam, weshalb die Gleichungen für die beiden Blasen gleichzeitig gelöst werden müssen. Aufgrund der Inkompressibilität ergeben sich Druck sowie Druckgradient bewirkt von der Blase i auf die jeweils andere Blase j zu

$$\nabla_r p_i = -\frac{\rho}{r^2}\frac{d}{dt}(R_i^2\dot{R}_i), \tag{5.3}$$

$$p_i = \frac{\rho}{r}\frac{d}{dt}(R_i^2\dot{R}_i). \tag{5.4}$$

Bei Verwendung in der Bewegungsgleichung muss natürlich der Gradient ∇_r entsprechend dem Koordinatensystem transformiert werden. Da für $\rho =$

const desweiteren auch $c \to \infty$ gilt, müssen keine Schalllaufzeiten berücksichtigt werden, wodurch die Beschreibung deutlich vereinfacht wird. Im Folgenden soll verglichen werden, ob es Sinn macht, die Beweglichkeit der Blasen zu berücksichtigen. Man erkennt in Abbildung 18, dass die Druckstörung für

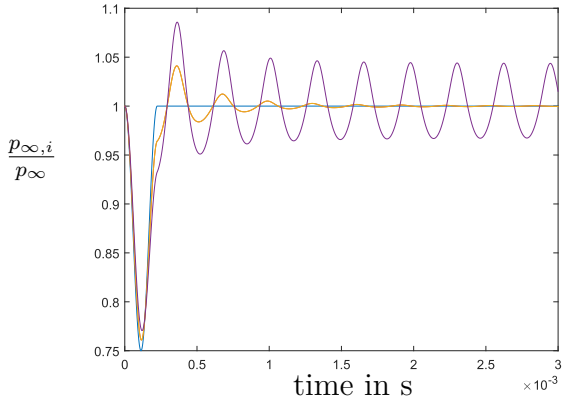

Abbildung 18: Vergleich von aufgeprägtem Druck und dessen Veränderung aufgrund Interaktion zweier Blasen: blau–ursprünglich aufgeprägter Druck, violett–Interaktion zweier am Ort fixierter Blasen, orange–Interaktion zweier beweglicher Blasen

die festgehaltenen Blasen deutlich größer als bei den frei beweglichen ist. Der Grund ist, dass die Blasen sich abstoßen, was den Abstand vergrößert und somit die Wechselwirkung verringert.
Löst man die RP-Gleichung für weit mehr Zeitschritte, so lässt sich ein Ruheabstand von $L \approx L_0 + 4R_0$ für die beweglichen Blasen ausmachen, was sehr groß ist, da $L/L_0 \approx 1.4$ ist. Würde man die Kräfte, welche auf zwei fixierte Blasen wirken, auf zwei bewegliche aufprägen, so ergeben sich die blauen Blasenwege (Abbildung 19 a)). Für sie ist ein Ruhezustand bei $L/L_0 \approx 60$ noch nicht erreicht. Wird der Abstand L der Blasen vergrößert, so verringert sich auch die Beeinflussung, z.B. bewegen sich die Blasen für $L_0 = 100R_0$ weniger als einen halben Radius auseinander. Dies macht sich vor allem bei der Gegenüberstellung zwischen fix und beweglich bemerkbar (Abbildung 19 b)).

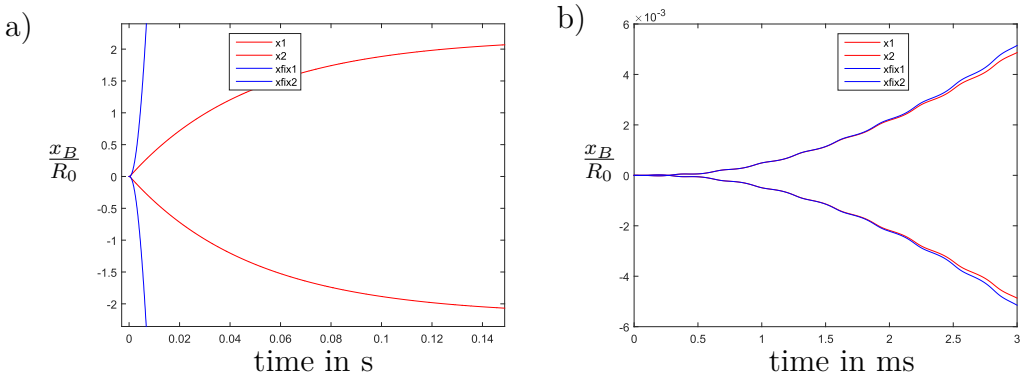

Abbildung 19: a) Wege der Blasen mit RP: blau– aufgrund Druckinteraktion der fixierten Blase, rot–aufgund Druckinteraktion der beweglichen Blasen, b) Bewegung der Blasen mit Abstand $L = 100R_0$

5.3.2 Kompressible Flüssigkeit

Im Vergleich zum inkompressiblen Fall sind nun Schalllaufzeiten und die Kompressibilität des Mediums zu berücksichtigen. Es ist weiterhin interessant, ob es bei geeignet gewähltem Abstand zum Aufschwingen oder Auslöschen kommen kann. Während die Schalllaufzeiten das Problem ungleich interessanter machen, so verkomplizieren sie es auch stark. Sofern man die Blasen beweglich machen möchte, bedeutet dies, dass sie zum Zeitpunkt t eine Welle aussenden, die zu einem Zeitpunkt $t + \Delta t_L$, wobei Δt_L die Laufzeit bezeichnet, bei der jeweils anderen Blase ankommt und auf diese wirkt. Allerdings muss darauf geachtet werden, dass sich der Blasenabstand $L(t)$ während der Bewegung der Schallwelle geändert hat. Für das nächste Beispiel werden zwei fixierte Blasen betrachtet. Die Druckstörung aufgrund der Abstrahlung wird zwei beweglichen Blasen aufgeprägt, wobei gehofft wird, dass sich die Bewegung und somit der gemachte Fehler in Grenzen hält. Man erkennt an Abbildung 20, dass der Druck $p_{\infty i}$, der auf die beiden Blasen wirkt, aufgrund der Wechselwirkung statt eines einmaligen Absenkens zu einer schwingenden Anregung wird. In den Blasengleichungen wurde trotz der Abstrahlungseffekte die RP-Gleichung verwendet, was die Dämpfung in den Schwingungen des Zwei-Blasen-Problems umso interessanter erscheinen lässt. Aufgrund der Symmetrie des Problems sind die zwei interagierenden Blasenradien deckungsgleich. Für die Berechnung wurden die Blasen an ihrem Ort fixiert, weswegen die Schalllauflänge gleich blieb. Nun sollen die Translati-

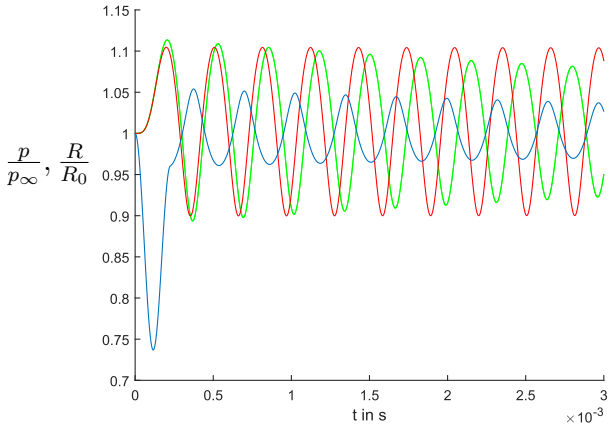

Abbildung 20: Vergleich der Blasenschwingungen von Einzelblase und zwei Blasen: blau– $p_{\infty,i}$ bei Interaktion; rot– Einzelblase; grün– Blasenpaar

onsbewegungen der Blasen erfasst werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Ausschläge deutlich kleiner als der Blasenabstand bleiben, die Länge L also für die Berechnung konstant bleibt. Man erkennt in Abbildung 21,

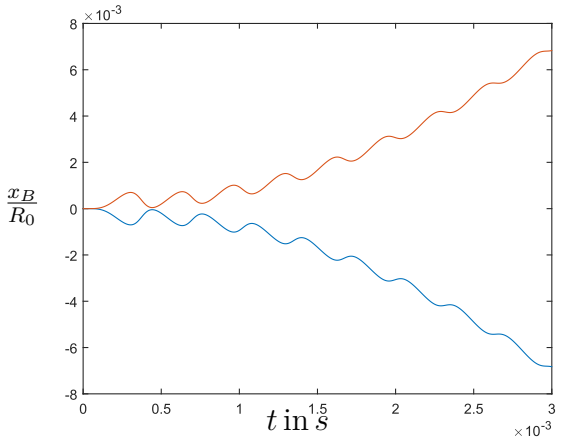

Abbildung 21: Bewegung der Blasen im kompressiblen Fluid

dass in dem betrachteten Zeitbereich der Mittelpunkt der Blasen gerade mal um 0.7% vom Radius verschoben wird, sich also praktisch an derselben Stelle befindet. Die Differenz der beiden Kurven ergibt den zusätzlichen Abstand

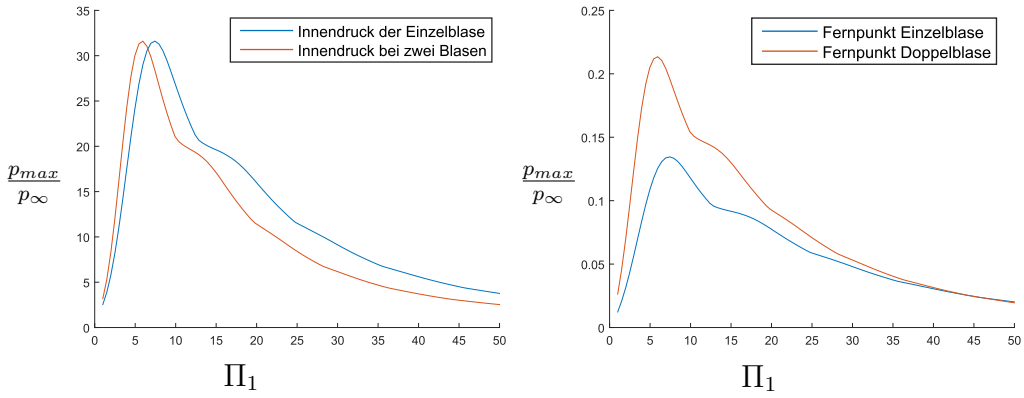

Abbildung 22: Vergleich eine Blase und zwei Blasen mit gleicher Gesamtgasmasse

der beiden Blasen. Lässt man die Analyse weiterlaufen, so bleiben die Blasen ungefähr einmal den Radius weiter voneinander stehen. Das mag bei einem Abstand von $L = 10R_0$ viel erscheinen, allerdings muss beachtet werden, dass für die weitere Anwendung im Blasenfeld nur das Zeitfenster, in dem sich die zweite Druckspitze darstellt, beachtet wird. Für diese Art der Betrachtung können die fixierten Blasen durchaus eine geeignete Beschreibung darstellen.

5.4 Aufteilung einer Gasmenge

Es soll nun von einer konstanten Gasmenge V_G ausgegangen werden, welche auf unterschiedlich viele Blasen (hier: eine oder zwei) aufgeteilt wird. Es soll der Einfluss dieser unterschiedlichen Beschreibung auf einen Punkt, der sich in einiger Entfernung befindet, untersucht werden. Hierbei gelangt man zu einer interessanten Feststellung. Wenn die Gasmenge derart gewählt wird, dass Π_1 links vom Maximum von p_{max} liegt, so führt eine Verringerung der Blasengröße durch Aufspaltung in zwei Blasen zu einem Anwachsen der Drücke für jede Einzelblase. Somit ergibt sich schließlich ein Gesamtdruck am Fernpunkt, welcher größer ist, als wenn man zwei Blasen mit Gesamtmasse $2V_G$ verwendet. In Abbildung 22 wird Π_1 mit dem Ruheradius der gesamten Gasmasse gebildet, nicht mit dem der Einzelblase. Andernfalls würden die Kurven in Abbildung 22 übereinander liegen. Der Abstand L der Blasen zueinander, sowie der Abstand D der Blasen zum „Messpunkt “betragen $L = 10R_0$ bzw. $D = 100R_0$. Wie im Kapitel vorher gesehen, beeinflussen sich

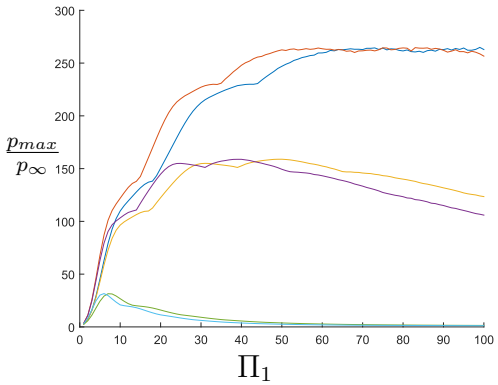

Abbildung 23: Maximaldruck in der Blase für sinusförmige Anregung: orange/blau–$\Pi_2 = 0.001$, gelb/violett–$\Pi_2 = 0.01$, grün/cyan–$\Pi_2 = 0.1$, die jeweils weiter links gelegene Kurve beschreibt den Fall von zwei Blasen

die beiden Blasen wenig, was den maximalen Druck im Inneren betrifft. Für den in einiger Entfernung befindlichen Messpunkt gilt dies allerdings nicht. Wie in Abbildung 22 b) ersichtlich, liegt die Wirkung des Blasenpaars auf diesen Punkt stets höher als bei der Einzelblase. Lediglich bei großen Werten von Π_1 scheint dieser Effekt nicht aufzutreten.
Es stellt sich weiters die Frage, was passiert, wenn $\Pi_2 \to 0$. An Abbildung 23 erkennt man, dass sich eine Reihe flacher Maxima ausbilden, was zur Folge hat, dass bei einer Aufteilung der Gasmenge beide entstehenden Blasen in etwa den gleichen maximalen Innendruck wie die massengleiche Einzelblase haben. Der Druck im Fernfeld ist für zwei Blasen aufgrund deren Superposition allerdings doppelt so hoch. Für große Werte von Π_1 sinkt der Maximaldruck wieder ab.

6 Blasenfeld

Um nun die Kavitationseffekte auf die Unterwasserstruktur wirken zu lassen, wird ein Feld von Blasen verwendet. Diese Blasen sind schon vor der Druckabsenkung vorhanden, reagieren auf die einfallende Druckwelle und emittieren ihrerseits eine Druckstörung.

6.1 Das eindimensionale Blasenfeld

Aufgrund der Form des Unterdruckgebietes wird das Blasenfeld bogenförmig um die Zylinderstruktur angenommen (Abbildung 24). Zwischen den Blasen sei der gleiche Abstand. Zu beachten ist, dass die Blasen direkt aufeinander abstrahlen können, da sonst die Struktur ebenfalls miteinbezogen werden müsste. Somit darf der Winkel, den die äußersten Blasen einschließen, nicht zu groß werden. Um die Auswirkung der Blasen untereinander und auf die

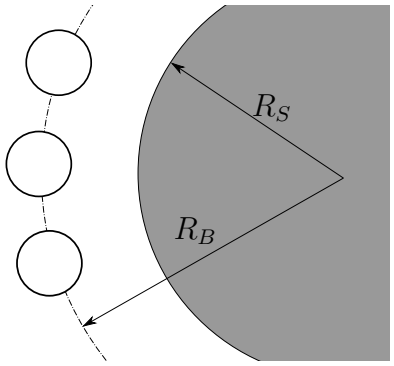

Abbildung 24: Eindimensionale Anordnung der Blasen

Struktur zu berechnen, werden die geometrischen Abstände benötigt. Mit R_S als Radius des Zylinders, R_B als Radius, auf dem sich die Blasen befinden, und ϕ_i als den Winkel, den die i-te Blase auf dem von R_B aufgespannten Kreis einnimmt, ergibt sich für die Abstände mittels Cosinussatz

Abstand zur Struktur $$d_{S,i}^2 = R_B^2 + R_S^2 - 2\,R_B\,R_S\,\cos(\phi_i), \quad (6.1)$$

Abstand zwischen den Blasen $$d_{B,ij}^2 = R_B^2(2 - 2\,\cos(\phi_i - \phi_j)). \quad (6.2)$$

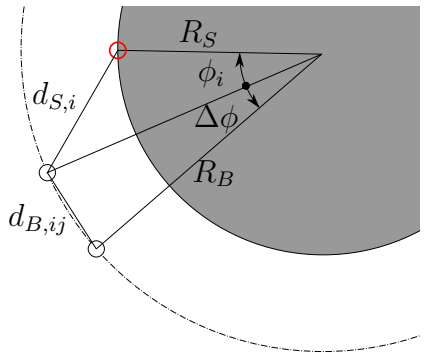

Abbildung 25: Cosinussatz

Grenzen des linienförmigen Blasenfeldes Bei einem linienförmigen Blasenfeld mit gegebener Gasmenge V_0, welche mit R_0, dem dazugehörigen Radius einer volumsgleichen Kugel charakterisiert wird, ergibt sich bei gleicher Aufteilung dieses Volumens auf alle Blasen

$$R_i = \frac{R_0}{\sqrt[3]{N}},$$

wobei N die Anzahl an Blasen ist. Nun ergibt sich das Problem, dass dieser Ausdruck nicht so schnell kleiner wird wie der Abstand zwischen den Blasen. Für $N \gg 1$ sind Bogenlänge und die Sekante d_i (also der Abstand zwischen zwei benachbarten Blasen) ungefähr gleich und betragen

$$d_i \approx \frac{\Theta\, R_B}{N},$$

wobei Θ der Winkel ist, den das Blasenfeld einschließt. Man sieht, dass der Abstand mit N sinkt, der Radius allerdings nur mit $\sqrt[3]{N}$. Dies hat zur Folge, dass sich bei einer kritischen Anzahl N^* die Blasen berühren. Spätestens dann werden unsere Annahmen zusammenbrechen(wahrscheinlich aber bereits früher). Es stellt sich also die Frage, wann $d_i = 2\, R_i$ wird. Die Bedingung

$$\frac{2\, R_0}{\sqrt[3]{N}} = \frac{\Theta\, R_B}{N}$$

führt zur kubischen Gleichung

$$N^3 - N \left(\frac{\Theta\, R_B}{2\, R_0} \right)^3 = 0,$$

welche zur quadratischen Gleichung

$$N^2 - \left(\frac{\Theta\, R_B}{2\, R_0}\right)^3 = 0$$

vereinfacht werden kann, da $N = 0$ selbstverständlich keine Lösung darstellen darf. Die Lösung lautet

$$N = \left(\frac{\Theta\, R_B}{2\, R_0}\right)^{3/2}. \tag{6.3}$$

Für $\Theta = 45°$, $R_0 = 1$ mm und $R_B = 1.1$ m ergibt die Gleichung $N^* = 8976.3$. Man hat somit gesehen, dass bei Erhöhung der Blasenzahl das Modell spätestens bei $N \approx 9000$ zusammenbricht. Somit macht es auch keinen Sinn einen Limes $\lim_{N\to\infty}$ zu suchen. Mit der gleichen Begründung kann auch ein 2D-Blasenfeld für $N \gg 1$ verworfen werden. Für kleine N könnte es möglicherweise brauchbare Werte liefern.

Für dreidimensionale Blasenfelder ergibt sich dieses Problem nicht, da dann d_i und R_i gleich stark gegen Null gehen. Das lässt sich leicht zeigen. Seien die Blasen in einen quaderförmigen Gebiet angeordnet, das nur in der Ebene wegen der Krümmung der Schale verzerrt ist. Man kann dieses Feld in allen drei Raumrichtungen in N_r, N_ϕ und N_z Teile zerlegen. Insgesamt gibt es also $N = N_r N_\phi N_r$ Blasen. Für die Gleichung der Radien und Abstände gilt nun

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{R_0}{\sqrt[3]{N}}, \\ d_i &= \min(d_r, d_\phi, d_z) = \min\left(\frac{\Delta r}{N_r}, \frac{\Theta R_B}{N_\phi}, \frac{h}{N_z}\right). \end{aligned}$$

Die N_i werden im Normalfall (sofern N groß genug dafür ist) so gewählt sein, dass sich schöne gleichseitige Würfel ergeben. Somit muss gelten

$$\frac{\Delta r}{N_r} = \frac{\Theta R_B}{N_\phi} = \frac{h}{N_z},$$

womit die Bedingung

$$\frac{2\, R_0}{\sqrt[3]{N}} \leq \frac{\Theta R_B}{N_\phi}$$

umgeformt werden kann auf

$$\left(\frac{2\,R_0}{\Theta\,R_B}\right)^3 \leq \frac{N}{N_\phi} = \frac{N_r N_z}{N_\phi^2} = \frac{N_\phi \frac{h}{R_B\Theta}\, N_\phi \frac{\Delta r}{R_B\Theta}}{N_\phi^2} = \frac{h\Delta r}{(R_B\Theta)^2}.$$

Die Bedingung, dass sich die Blasen nicht berühren, hängt nun nicht mehr von N ab und lautet

$$8R_0^3 \leq \Theta R_B h \Delta r.$$

Sie kann interpretiert werden als

$$\approx \frac{6}{\pi} V_{Gas} \approx 2V_{Gas} \leq V_{Gebiet}.$$

Das bedeutet, dass die Erhöhung der Blasenzahl funktioniert solange nicht zu viel Gasvolumen in der Flüssigkeit ist.

6.2 Das dreidimensionale Blasenfeld

Als logische Konsequenz des vorherigen Kapitels wird nun ein Feld untersucht, in dem die Blasen in allen drei Raumrichtungen vertreten sind. Damit sind allerdings neue Probleme verbunden. Es stellt sich zum Beispiel die Frage, ob das Blasenfeld seine gekrümmte Form behalten soll, oder ob es besser wäre, auf ein kubisches Grundgitter zurückzugreifen. Der Nachteil des Beibehaltens der ursprünglichen Form wird in Abbildung 26 ersichtlich. Aufgrund des mit dem Radius größer werdenden Umfangs müssen die äußeren Teilstücke immer dünner werden, damit sie dasselbe Volumen und somit eine gleich große Blase beinhalten wie die Volumina in der Nähe der Struktur. Für die ungekrümmte z-Richtung gelten diese Überlegungen nicht. Sie kann einfach bei der Berechnung der Abstände hinzugeschlagen werden, wodurch sich wenig Änderung zum eindimensionalen Blasenfeld ergibt. Eine Blase ist im dreidimensionalen Feld durch drei Koordinaten bestimmt. In Zylinderkoordinaten sind diese

$$\boldsymbol{r_i} = \begin{pmatrix} R_{B,i} \\ \phi_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

Die Abstände zur Struktur und zu den anderen Blasen ergeben sich zu

$$d_{S,i}^2 = R_{B,i}^2 + R_S^2 - 2\,R_{B,i}\,R_S\,\cos(\phi_i) + z_i^2, \tag{6.4}$$

$$d_{B,ij}^2 = R_{B,i}^2 + R_{B,j}^2 - 2R_{B,i}R_{B,j}\cos(\phi_i - \phi_j) + (z_i - z_j)^2, \tag{6.5}$$

mit $z_S = 0$.

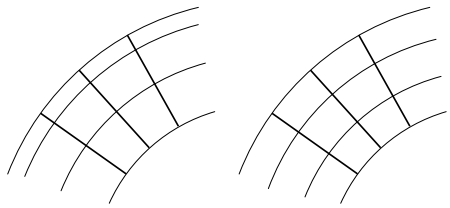

Abbildung 26: Unterschied zwischen gleichen Volumen der Zellen und gleicher radialer Kantenlänge

Aus dem Artikel von Iakovlev [1] werden die benötigten Parameter für die Größe des Kavitationsgebietes sowie dessen Anregung ermittelt. Anhand der Abbildungen 3(a)-(f) ergeben sich für das Kavitationsgebiet

$$\begin{aligned} R_S &= 1 \text{ m}, \\ R_B &= 1.1 \text{ m}, \\ \Delta R = h &= 0.2 \text{ m}, \\ \Theta &= 45^\circ, \end{aligned}$$

und für die sinusförmige Druckabsenkung

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= 0.25 \ldots 0.75, \\ \Delta t &= 2.245 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \end{aligned}$$

Um die Blasen ungefähr gleich zu verteilen, errechnet man das Verhältnis von der Länge des Gebietes zu dessen Breite und erhält

$$\frac{N_\phi}{N_r} = \frac{\Theta\, R_B}{h} = \frac{1.1}{0.2}\frac{\pi}{4} = \frac{11}{8}\pi = 4.32,$$

d.h. die Anzahl der Blasen in Umfangsrichtung muss etwa 4.3-mal so groß sein wie in radialer oder z-Richtung.

6.3 Abschätzung der Gasmenge im Wasser

Die Löslichkeit von Sauerstoff und Stickstoff in Wasser betragen bei 1 bar und 20° C 9 mg/l bzw. 15 mg/l. Obwohl Luft zu 80% aus Stickstoff besteht,

ist das Volumen-Verhältnis im Wasser gelöst O:N=1:1.8. Dieses Verhältnis gilt, wenn beide Stoffe gelöst sind. Für eine Abschätzung der Gasmenge werden Sauerstoff und Stickstoff nun wie ein Gas behandelt. Somit beträgt die Löslichkeit der „Luft“ 15 mg/l. Dies entspricht einer Luftblase mit einem Radius von etwa 1.4 Zentimeter pro Liter Wasser. Diese Gasmenge, sofern man davon ausgeht, dass keine Luft im Kavitationsgebiet gelöst bleibt, muss noch auf eine geeignete Anzahl an Blasen aufgeteilt werden. Allerdings stellt man fest, dass mit obigen Angaben sich ein Radius von $R_0 = \sqrt[3]{34.5} \cdot 1.4$ cm ergibt. Dies hat ein Verhältnis $d_{B,ij}/R_i \approx 7.5$ zur Folge, welches sehr niedrig ist, wenn man die Berechnung von Translationsbewegungen vermeiden möchte. Die maximale Löslichkeit ist also als Abschätzung nicht gut zu gebrauchen, womit die Gasmenge als zu bestimmender Parameter verbleibt.

6.4 Quellverteilung

Für die Interaktion zweier Blasen oder die Betrachtung eines speziellen Punktes fern der Blasen ist es ausreichend, entlang der Charakteristiken bis zu dem speziellen Punkt, bzw. zur jeweils anderen Blase zu rechnen. Ist man allerdings am gesamten von den Blasen verursachten Druckfeld interessiert, so ist es zweckmäßig, das Druckfeld aus einem Potential zu berechnen. Dies ist möglich, sofern die Abstrahlung der Blasen in einiger Entfernung in die akustische Lösung übergeht. Für jede Blase lässt sich ein akustisches Potential ϕ_i bestimmen, welches

$$p_i(r) - p_\infty = -\rho_0 \frac{\partial \phi_i}{\partial t}$$

erfüllt. Diese Potentiale mit der Form

$$\phi_i = \frac{f_i(t - r/c_\infty)}{r}$$

werden für jeden Zeitschritt bei $r = R_{0.1}$, also dem Radius, an dem die Machzahl $M < 0.1$ unterschreitet, ausgewertet. Mit diesem Radius und den an der Stelle herrschenden Druck, kann der zeitliche Verlauf des Potentials ermittelt werden. Aufgrund der Schalllaufzeiten kann es passieren, dass sich negative retardierte Zeiten $t_{ret} = t - R/c_\infty$ ergeben. Für die Superposition der akustischen Potentiale sollte noch erwähnt werden, dass der Radius mit

dem Abstand $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i}|$ ersetzt wird, wobei $\boldsymbol{x_i}$ der Ort der Blase und $\boldsymbol{x}$ ein betrachteter Punkt ist.

6.5 Ergebnisse des 3D-Blasenfeldes

Das Feld von Blasen, dessen Blasen auch untereinander wechselwirken, wird mit dem Gilmore-Modell berechnet. Für jeden Zeitschritt wird der Abstand von den Blasen, ab dem akustisch gerechnet werden kann ermittelt, und ab diesem mittels akustischer Näherung die Auswirkung auf die anderen Blasen ermittelt. Aus dem Artikel von Iakovlev ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} c &= 1470 \text{ m/s}, \\ R_S &= 1.1 \text{ m}, \\ \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

Weiters ergeben sich aus den Abbildungen des Kavitationsgebietes und der dazugehörigen Zeitwerte:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.3\frac{R_S}{c} = 2.245\,10^{-4} \text{ s}, \\ p_\infty &= 10^5 \text{ Pa}, \\ \Pi_2 &= 0.25...0.75\,. \end{aligned}$$

Die Druckabsenkung mit Π_2 wird dahingehend auf das Feld aufgebracht, dass sie in der Mitte des Gebietes, also bei $(r, \phi, z) = (R_B, 0, 0)$ maximal ist und am Rand des Gebietes auf Null absinkt. Die Gleichung hierzu lautet

$$p_{\infty i} = p_\infty \left[1 - (1 - \Pi_2)\sin^2\left(\frac{t}{\Delta t}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{R_{Bi} - R_S}{h}\pi\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_i}{\Theta/2}\pi\right)\right] \tag{6.6}$$

für $t < \Delta t$
und $p_{\infty i} = p_\infty$ für $t > \Delta t$.

Die Gasmasse und die Anzahl der Blasen verbleiben als Modellparameter. Um die Ergebnisse mit den in den vorherigen Kapiteln angestellten Überlegungen zu vereinbaren, wird außerdem die dimensionslose Kennzahl Π_1

betrachtet. Ihre Abhängigkeit von der Blasenanzahl lautet

$$\Pi_{1,i} = \frac{\sqrt{p_\infty/\rho}\Delta t}{R_{0i}} = \frac{\sqrt{p_\infty/\rho}\Delta t}{R_{0,ges}}\sqrt[3]{N} = \Pi_{1,ges}\sqrt[3]{N}. \tag{6.7}$$

Während für größere Druckabsenkungen ein deutliches Maximum für den maximal auftretenden Druck zu beobachten war, so gilt dies für $\Pi_2 = 0.75$ nicht mehr (Abbildung 27). Stattdessen treten eine Vielzahl von Maxima auf, welche für $\Pi_2 < 0.3$ lediglich Ausbeulungen dargestellt hatten (siehe Abbildung 13). Bei Erhöhung der Blasenzahl befindet sich jede Blase für sich an der Stelle $\Pi_{1,i}$ in diesem Diagramm, sofern man vernachlässigt, dass die Druckabsenkung für Blasen am Gebietsrand niedriger ist. Somit hängt es von der Wahl der Gesamtgasmasse ab, ob sich der Druck in den Blasen bei Erhöhung der Blasenzahl ebenfalls erhöht oder ob er sinkt.

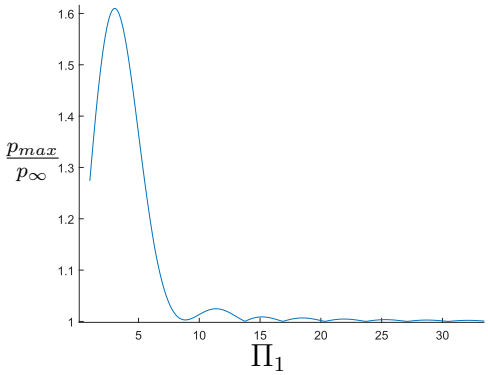

Abbildung 27: Abhängigkeit des maximalen Blaseninnendrucks von Π_1, $\Pi_2 = 0.75$

6.5.1 Druck an der Struktur

Die Absenkung auf $\Pi_2 = 0.75$ wird mit einer Anzahl von Blasen $N = 1, 4, 32, 108, ...$ gerechnet. Es wird eine Gesamtvolumen an Gas mit $R_0 = 1$ mm angenommen. Der Druck an der Struktur ist in Abbildung 28 zu sehen. Mit den gewählten Parametern ergibt sich $\Pi_{1,ges} = 2.245$, was bei Vergleich mit Abbildung 27 nahe des absoluten Maximums (bei $\Pi_1 \approx 3$) liegt. Bei vier Blasen befindet man sich mit $\Pi_{1,4}$ zwar auch in der Nähe von des

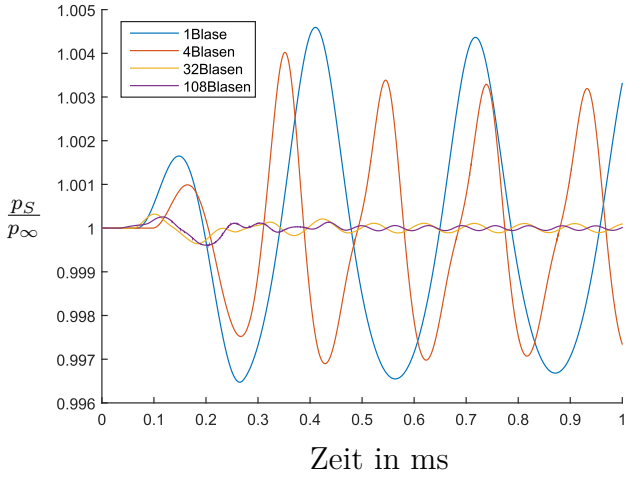

Abbildung 28: Druck an der Struktur für N=1, 4, 32, 108; $\Pi_2 = 0.75$ und $R_0 = 1$ mm

Maximums, jedoch aufgrund des nach außen schwächer werdenden Unterdrucks nicht mehr auf der Kurve $\Pi_2 = 0.75$. Als generelle Erklärung, warum die Ausschläge für 32 und 108 Blasen deutlich unter den Werten für weniger Blasen liegen, reicht Abbildung 27 allerdings aus. Auch ist zu beachten, dass bei kleineren Blasen zwar ein paar Blasen näher der Struktur sind als eine Einzelblase, viele allerdings deutlich weiter entfernt. Die erhaltenen Werte entsprechen bei weiten nicht der gewünschten Stärke, welche ein Vielfaches des Ursprungsdruckes sein sollte.

6.5.2 Druck in Entfernung $10R_S$

Neben dem Druck an der Struktur ist man auch an dem Druckverlauf in einiger Entfernung des Blasenfeld interessiert. Vor allem die Frage, welchen Unterschied eine unterschiedliche Anzahl von Blasen bewirkt. Dazu wird zwecks besserer Vergleichbarkeit das gesamte Gebiet mit derselben Druckabsenkung beaufschlagt. Die Zylinderschale entfällt, stattdessen wird von ihren Ursprung zehn Zylinderradien in entgegengesetzte Richtung zum Feld der Verlauf der Druckstörung berechnet. Die Abstände ergeben sich wieder mittels des Cosinussatzes zu

$$d_{Fi}^2 = R_{Bi}^2 + (10R_S)^2 - 2R_{Bi}(10R_S)\cos(\pi - \phi_i) + z_i^2. \tag{6.8}$$

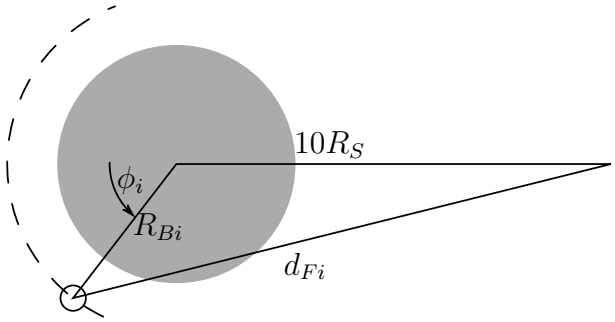

Abbildung 29: Abstand der Blasen zu dem weit entfernten Messpunkt in der Ebene $z = 0$

Man erkennt an Abbildung 30 a), dass bei gleicher Absenkung und des wegen $10R_S \gg |\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_j}|$ ungefähr gleichen Abstandes zum betrachteten fernen Punkt, die Druckstörung zu anfangs mit steigender Anzahl an Blasen anwächst. Dies ist das Verhalten, dass aufgrund von Abbildung 27 auch zu vermuten war. Beit weiterer Steigerung der Blasenanzahl nimmt die Störung wieder ab (Abbildung 30 b)).

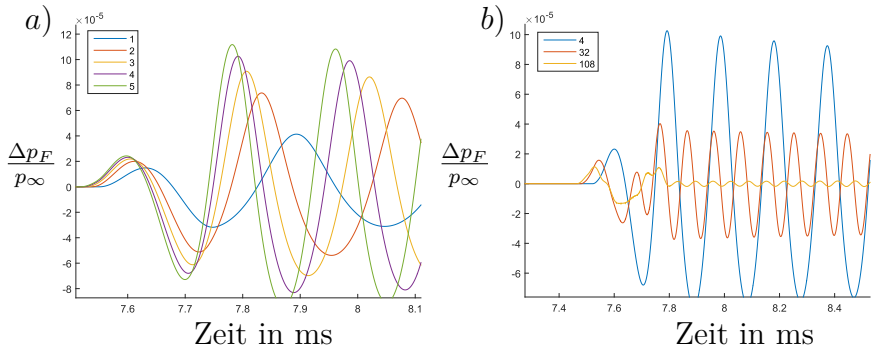

Abbildung 30: Druckstörung weit entfernt vom Blasenfeld: a) $N = 1 \ldots 5$, b) $N = 4$, 32, 108

7 Ein Versuch, die große Druckabsenkung zu reproduzieren

Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Einerseits wäre es möglich, die Gasmenge gleichzeitig mit der Anzahl der Blasen zu erhöhen, sodass jede Blase maximal auf die Druckabsenkung reagiert. Es werden einfach so viele Blasen verwendet, bis der geforderte Druckanstieg an der Struktur erreicht wird. Dies ist allerdings nicht praktikabel, da dadurch die Blasen immer näher zusammenrücken. Andererseits kann man argumentieren, dass der Dampfdruck zu

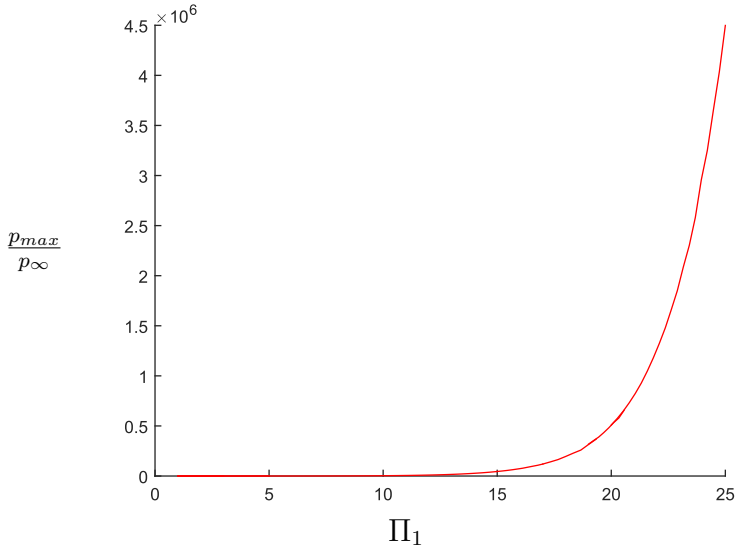

Abbildung 31: Maximaler Innendruck einer Einzelblase für einen negativen aufgeprägten Druck mit $\Pi_2 = 0.5$ und als Funktion von Π_1

null gesetzt wurde(vernachlässigt) und man deshalb mit (absolut) negativen Drücken anregen muss, um spürbare Auswirkungen zu sehen. Bei Anregung mit negativen Drücken (z.B. mit $\Pi_2 = -0.5$) ergibt sich bei $\Pi_1 \to \infty$ das Problem, dass eine quasistatische Druckabsenkung unter $p = 0$ ein unendliches Blasenwachstum bewirkt und infolgedessen beim Wiederanstieg des Druckes einen extremen Kollaps verursacht.
Man erkennt in Abbildung 31 den starken Anstieg des Maximaldruckes in der Blase als Funktion von Π_1. Da bedeutet, dass mit sinkenden Radius, die

Kollapse immer stärker werden.
Da die Druckanstiege beliebig groß werden können, könnte es möglich sein, mit wenigen genügend klein gewählten Blasen, entsprechend hohe Druckstörungen an der Struktur zu erzeugen. Aufgrund der sehr klein zu wählenden Zeitschritte war es nur möglich, den Druck an der Struktur für mäßig große Blasen zu ermitteln. Die davon verursachten Schwankungen sind etwa von der Größenordnung des Ruhedruckes. Bei Verwendung mehrerer Blasen kann es passieren, dass einige Blasen sich in einem Teil des Kavitationsgebietes befinden, in dem kein negativer Druck vorherrscht. Ein Beispiel ist eine radiale Anzahl von zwei Blasen. Der maximale Druckabfall für diese Blasen ist

$$p_{min} = p_\infty \left[1 - 1.5 \sin^2\left(\frac{R_{Bi} - R_S}{h}\pi\right)\right] = p_\infty[1 - 1.5\sin^2(\pi/4)],$$
$$\Pi_2 = 1 - 0.75 = 0.25,$$

was zwar stark ist, aber nicht negativ. Diese Blasen tragen im Vergleich kaum etwas zum Druck an der Struktur bei. Da diese Blasen vernachläs-

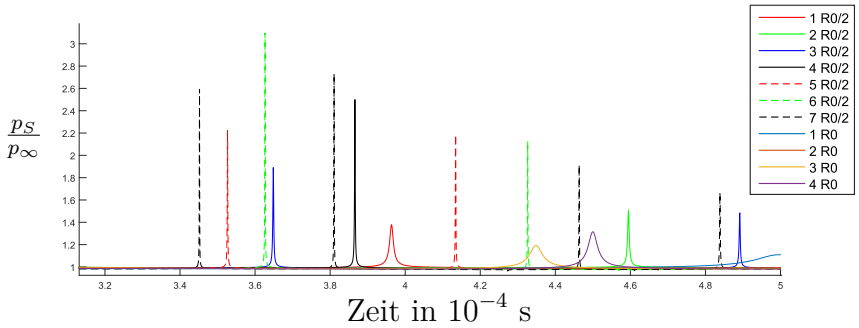

Abbildung 32: Druck an der Struktur für verschiedene Anzahl von Blasen und unterschiedlichen Gasmengen, $\Pi_2 = -0.5$

sigt werden können, kann man mit wenigen „wichtigen“ Blasen eine große Blasenanzahl durchaus berechnen. In Abbildung 32 sind Druckverläufe am kritischen Punkt der Struktur dargestellt. Die Gesamtgasmasse beträgt einerseits $R_0 = 1$ mm, andererseits $R_0/2$ und die maximale Absenkung beträgt $\Pi_2 = -0.5$. Man erkennt, dass eine Verringerung der Blasengrößen durch die Anzahl der Blasen oder durch die Verringerung der Gesamtgasmenge großen Effekt auf die Druckspitze an der Struktur hat. Die Druckspitzen der Gasmenge R_0 für eine und zwei Blasen sind nicht mehr im Diagramm enthalten, da sie aufgrund der geringeren Frequenz der Blasen länger brauchen, um

sich auszubilden.Ein direkter Vergleich zwischen diesen Ergebnissen und anschließender Anpassung an die Experimente von Wardlaw und Luton ist nicht möglich, da diese einen gefüllten Zylinder mit einer im Inneren befindlichen Stoßwelle betrachtet haben.

8 Schlussfolgerungen

Ausgehend von verschiedenen Modellen zur Beschreibung der Radialschwingungen einzelner Blasen, dem Rayleigh-Plesset, dem akustischen und dem Gilmore-Model und dem Untersuchen ihrer Unterschiede, wurde zunächst die Reaktion einer Einzelblase auf ein vorgegebenes Druckfeld ermittelt. Unter Ausnutzung der Eigenfrequenz einer Blase aus der linearisierten Bewegungsgleichung sowie den der Dauer und Stärke der aufgeprägten Druckabsenkung konnten dimensionslose Kennzahlen gebildet werden, welche das Verhalten der Blase beschreiben. Eine bedeutsame Erkenntnis daraus war, dass der maximale Innendruck der schwingenden Blase ein oder mehrere Extremwerte aufweist. Um Druckstörung der Blasen untereinander und im speziellen auch auf die Zylinderschale berechnen zu können, wurde die Abstrahlung einer Blase untersucht. Die Verwendung der Kirkwood-Bethe-Hypothese lieferte hier eine differentielle Beschreibung um die Geschwindigkeit entlang einer Charakteristik auszuwerten. Da die numerische Integration dieser Bedingung bis zu einem entfernten Punkt mitunter viele Rechenschritte benötigt, wurde versucht, ab dem Unterschreiten einer gewissen Machzahl die akustische Lösung zu verwenden. Dabei wurde beobachtet, dass nicht nur die Machzahl sondern auch die Abweichung der lokalen Schallgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit des ruhenden Fluids den Zeitpunkt dieses Modellwechsels beeinflusst. Mit dem abgestrahlten Druckfeld war es nun möglich, die Translation zweier Blasen aufgrund ihrer Interaktion zu berechnen. Es wurde festgestellt, dass, sofern die Flüssigkeit eine (geringe) Viskosität besitzt, und die Blasen nicht zu nah beieinander sind, es nur wenig Unterschied macht, ob sie beweglich oder am Ort fixiert betrachtet werden. Diese Bedingung war äußerst wichtig für die weitere Anwendung auf ein Feld von Blasen, da es den Berechnungsaufwand stark limitiert.

Nach einigen grundsätzlichen geometrischen Überlegungen und dem Nachweis, dass ein eindimensionales Blasenfeld für große Mengen an Blasen nicht funktioniert, wurde schließlich die Antwort eines Blasenfeldes auf die Druckabsenkung nach Iakovlev berechnet. Als zu bestimmende Parameter blieben die Gesamtmasse des in der Flüssigkeit befindlichen Gases und die Anzahl an Blasen, auf die sich diese aufteilt. Es ergab sich, dass für die gegebene Druckabsenkung und Gasmasse eine Steigerung der Blasenmenge den Effekt auf die Struktur verringerte.

Senkt man den Druck jedoch auf negative Werte ab, so ist es möglich auch mit wenigen Blasen große Druckunterschiede an der Struktur zu verursachen.

Somit wurde gezeigt, dass Kavitation eine Sekundärstoßwelle an der Struktur bewirken kann. Für eine Abstimmung mit den vorhandenen experimentellen Ergebnissen ist allerdings die Berechnung eines Kaviationsgebietes innerhalb eines Zylinders notwendig.

Literatur

[1] Iakovlev, S.: On the possibility of shock-induced cavitation in submerged cylindrical shell systems, *Journal of Fluids and Structures*, **50**, 437-460, 2014

[2] Wardlaw, A., Luton, A.: Fluid-structure interaction mechanisms for close-in explosions, *Shock and Vibration 7*, 265-275, 2000

[3] Krefting, D.: Untersuchung von Einzel- und Mehrblasensystemen in akustischen Resonatoren, *Dissertation, Göttingen*, 2003.

[4] Luther, S.: Theoretische Beschreibung und experimentelle Untersuchung raum-zeitlicher Strukturbildung in akustischen Kavitationsblasenfeldern, *Dissertation, Göttingen*, 2000.

[5] Lindau, O.: Dynamik und Lumineszenz lasererzeugter Kavitationsblasen, *Masterarbeit, Göttingen*, 1998.

[6] Gilmore, F.R.: The collapse and growth of a spherical bubble in a viscous compressible liquid, *Calif. Inst. of Tech. Hydrodynamics Lab. Rep. No. 26-4*, 1952.

[7] Lauterborn, W., Kurz, T.:Physics of bubble oscillations, *Reports on Progress in Physics*, **73**, 2010.

[8] Brennen, C.: Cavitation and bubble dynamics, Oxford University Press, 1995.

[9] Young, F.R.: Cavitation, *McGraw Hill*, 1989