



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

EXPERIMENTELLE UND NUMERISCHE UNTERSUCHUNG DES ENERGIETRANSFERS IN PARAMETERERREGTEN SYSTEMEN

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker
(E325 - Institut für Mechanik und Mechatronik)

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Andreas Fichtinger

e0827299 (033 245)

Hartriegelstraße 42

3550 Langenlois

Wien, am 21. SEPTEMBER 2015

Andreas Fichtinger



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

Ich habe zur Kenntnis genommen, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

Diplomarbeit

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Ich erkläre weiters an Eides statt, dass ich meine Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen selbstständig ausgeführt habe und alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, genannt habe. Weiters erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch Ausland (einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Kurzfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen und numerischen Untersuchung eines nicht-linearen, parametererregten Systems mit zwei Freiheitsgraden. Aufbauend auf vorhergegangenen Untersuchungen, welche das Thema Parametererregung aus überwiegend theoretischer Sicht betrachten, insbesondere die Stabilität und die mögliche Verstärkung der Dämpfung, wird hier im speziellen auf den experimentellen Nachweis dieser Eigenschaften eingegangen. Zu den entscheidenden Größen der hier verwendeten Betrachtungsweise gehören die Gesamtenergie und die quasimodalen Energien des 2-Freiheitsgradsystems.

Sowohl die numerischen als auch die experimentellen Untersuchungen beschränken sich dabei ausschließlich auf freie, parametererregte Schwingungen translatorisch bewegter Massen ohne zusätzliche, kontinuierliche Anregungen von außen. Die Anfangsbedingung für das freie Abklingen der Schwingungen werden durch Auslenken der Massen aus ihrer Ruhelage und gleichzeitiges Loslassen erreicht. Während der Schwingung wird im Zuge der Parametererregung lediglich eine Steifigkeit variiert. Die übrigen Systemparameter gelten als konstant (z.B. die Massen und verbleibenden Steifigkeiten) bzw. werden näherungsweise als konstant angesehen (z.B. die Dämpfungen).

Die qualitative Übereinstimmung der gemessenen und simulierten Schwingungen wird immer durch direkten Vergleich der einzelnen Auswertungen gezeigt. Es werden die Frequenzen der Schwingung jeder Masse anhand von Frequenzkarten dargestellt bei welchen die PE^1 -Frequenz variiert wird. Den Kern der Auswertung stellt die Messung der Abklingdauer bis zu einem auf die Anfangsenergie bezogenen Energieniveau dar. Weiters werden für ausgewählte Frequenzen sowohl die Gesamtenergie als auch die quasimodalen Energien berechnet und dargestellt.

Am Ende wird noch kurz auf besondere Effekte eingegangen, die bei dem hier untersuchten System mit Parametererregung beobachtet und simuliert werden konnten.

¹Parametererregung

Abstract

This master-thesis analyses the behaviour of nonlinear parametric excited 2-DOF-Systems by a comparison of numerical and experimental tests. There has been already a lot of research done concerning parametric excitation from the analytic point of view, especially with the focus on stability. The objective of this work is to show the positive effects on damping due to parametric excitation. Important quantities are the total and modal energies of the system.

All tests are done without external force excitation, only by variation of one stiffness parameter. The other parameters like masses, damping constants and remaining stiffnesses are constant.

The results of the numerical simulations and of the experiments are shown side-by-side or in the same diagrams. There are frequency maps for each DOF with varying frequency of the parametric excitation. The decay time diagrams show which cases of the parametric excitation frequencies, initial conditions and system parameters improve the damping characteristics the most. Furthermore there are investigations of the energies over time and of the quasi-modal energies in energy maps for particular parametric frequencies. Finally some special effects of parametric excitation are described.

Danksagung

Ich möchte mich mit diesen Zeilen bei allen Personen, welche mich sowohl fachlich als auch menschlich bei der Verfassung dieser Arbeit unterstützt haben, bedanken.

Zu besonderem Dank bin ich Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst ECKER, welcher Betreuer dieser Arbeit war, verpflichtet. Durch sein besonderes Interesse und seine Erfahrungen im Themengebiet der parametererregten Schwingungen konnte ich immer auf umfangreiche Unterstützung zählen, welche sich in viele lehrreiche und interessante Fachgespräche entwickelte. Dabei wurde mir auch diese Begeisterung für die Schwingungstechnik vermittelt aus welcher ich immer neue Ideen schöpfen konnte.

Ebenfalls möchte ich Herrn Ing. Manfred NEUMANN danken, welcher mir bei Fragen bezüglich des Prüfstandes und dessen Ansteuerung immer weiterhelfen konnte.

Weiters möchte ich mich noch bei Herrn Georg CANEK für die Unterstützung in allen EDV-Fragen bedanken.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern, Aniela und Gerhard, die mich auf dem langen Weg bis hierher immer Unterstützt und mein Studium überhaupt erst ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	6
1.1	Einleitung	6
2	Grundlagen parametererregter Schwingungen	7
2.1	Parametererregte Schwingungen des 1-FG-Systems	7
2.2	Parametererregte Schwingungen des 2-FG-Systems	9
3	Zwei-Massen PE-Prüfstand	10
3.1	Aufbau	10
3.2	Ansteuerung	12
4	Numerisches Modell des parametererregten Schwingers	15
4.1	Ideales, lineares 2-FG Modell	15
4.1.1	Pendelsteifigkeit	16
4.2	Nichtlineares Modell des physischen Prüfstandes	17
4.2.1	Nichtlineare Steifigkeit des magnetischen Aktuators	17
4.2.2	Nichtlineare, parametererregte Bewegungsgleichungen des 2-FG-Systems	17
4.3	Ideales, lineares 1-FG-Modell der großen Masse	19
4.4	Ideales, nichtlineares 1-FG-Modell der kleinen Masse	19
4.5	Berechnung der Schwingungsenergie	19
5	Parameter und Parameteridentifikation	22
5.1	Prozess und Methoden der Parameteridentifikation	22
5.2	Gemessene Parameter	24
5.3	Parameteridentifikation an den 1-FG-Systemen	27
5.3.1	Analytische Abschätzungen der Dämpfung und Masse	27
5.3.2	Numerische 1-FG-Parameteridentifikation	29
5.4	Parameteridentifikation am 2-FG-System	42
5.4.1	Numerische 2-FG-Parameteridentifikation	42
5.4.2	Identifizierte Parameter und Verifikation	42
5.5	Alternatives System mit reduzierter Masse	42

6	Auswertung der simulierten und gemessenen PE-Schwingungen	48
6.1	Vergleich der Simulationen und Messungen über Spektralkarten des Ausschlags . .	48
6.2	Vergleich der Abklingdauer	52
6.3	Gesamtenergie und modale Energien bei ausgewählten Parametererregungsfrequenzen	58
6.3.1	Allgemeine PE-Frequenz ohne spezielle Effekte der Parametererregung . . .	59
6.3.2	Erste Eigenfrequenz	64
6.3.3	Zweite Eigenfrequenz	69
6.3.4	Erste Kombinationsfrequenz vom Differenztyp - verstärkte Dämpfung . . .	74
6.3.5	Halbe Kombinationsfrequenz vom Summentyp - Resonanz	79
6.4	Weitere Effekte durch die Parametererregung	84
6.4.1	Temporäre Auslöschung des zweiten Quasimodes	84
6.4.2	Verschwinden des Signalanteils der 2. Eigenfrequenz und höherer Ordnungen im Amplitudenspektrum	88
6.4.3	Zusammenfallen der zweiten Eigenfrequenz mit der Parametererregungsfre- quenz	90
7	Zusammenfassung	93
8	Ausblick	95
	Literaturverzeichnis	96

Kapitel 1

Aufgabenstellung

1.1 Einleitung

Neben den in der Praxis überwiegend verwendeten zeitinvarianten, linearen, schwingungsfähigen System (LTI - Linear Time Invariant) gibt es Spezialfälle wie z.B. selbsterregte oder parametererregte Systeme deren Parameter selbst über Differentialgleichungen beschrieben werden oder diese durch Vorgabe eines zeitlichen Verlaufs variiert werden. Selbsterregte Schwingungen treten insbesondere bei der Interaktion von elastischen Strukturen und Strömungen von Gasen oder Flüssigkeiten auf, welche in der Praxis neben diversen Bauteilen von Maschinen auch ganze Brücken oder Gebäude sein können. Aber auch rein mechanische Strukturen wie Pendeluhren gelten als selbsterregte Systeme. Bei parametererregten Systemen ist hingegen der zeitliche Verlauf eines oder mehrerer ihrer Parameter von außen vorgegeben.

Im Zuge dieser Diplomarbeit wird neben der experimentellen Verifikation bestehender Erkenntnisse die Energie und der intermodale Energietransfer in den Mittelpunkt gestellt. Aufgrund der Nichtlinearitäten und der Parametererregung ist strenggenommen eine Transformation in modale Koordinaten nicht mehr möglich. Unter der Annahme, dass die Einflüsse auf die Eigenmoden bzw. Eigenfrequenzen klein sind, wird eine Transformation mittels aus konstanten Anteilen der Parameter gewonnenen Moden durchgeführt. Hier wird in weiterer Folge von Quasi-Moden bzw. quasi-modaler Transformation gesprochen.

Das wichtigste Ziel dieser Arbeit besteht im Nachweis und der Untersuchung der verbesserten Dämpfungseigenschaften, welche mit den entsprechend gewählten PE-Frequenzen erzielt werden können. Zur Darstellung der Effekte wird neben Diagrammen der Abklingzeiten auch die Darstellung der modalen Energien über die Zeit oder übereinander gewählt.

Ebenfalls wird in einem Kapitel dieser Arbeit ausführlich die Identifikation der Systemparameter beschrieben. Die korrekte Bestimmung der Parameter ist erstens für die Vergleichbarkeit zwischen simulierten und experimentell Versuchen unabdingbar und weiters noch Voraussetzung für die Berechnung modaler Größen und Energien.

Kapitel 2

Grundlagen parametererregter Schwingungen

Erklärungen und Beschreibungen von allgemeinen parametererregten Systemen, bzw. im allgemeinen auch Differentialgleichungen mit zeitvarianten Koeffizienten, sind bereits sehr lange ausführlich in diverser Fachliteratur zu Schwingungen und Differentialgleichungen beschrieben: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] usw. Um die in dieser Arbeit verwendeten Methoden und durchgeführten Simulationen und Versuche zu erklären, werden in diesem Kapitel die Grundlagen dieser Schwingungen und deren Behandlung überblicksmäßig erklärt.

2.1 Parametererregte Schwingungen des 1-FG-Systems

Die Differentialgleichung (2.1) eines linearen, parametererregten 1-FG¹-Schwingers unterscheidet sich von der Differentialgleichung eines gewöhnlichen 1-FG-Schwingers durch die Zeitabhängigkeit ihrer Parameter.

$$m(t)\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k(t)x = f(t) \quad (2.1)$$

In dem hier allgemeinen Fall sind alle Parameter variabel. Beispiele für die physische Realisierung dieser variablen Größen sind z.B.:

- Masse $m(t)$: Massenträgheitsmoment bei Drehschwingern durch radiale Verschiebung von Massen wie z.B.: Änderung der Pendellänge
- Dämpfung $c(t)$: regelbare Ventile oder von Aussen beeinflussbare Viskosität der Flüssigkeit in hydraulischen Stoßdämpfern, veränderbares magnetisches Feld in Wirbelstrombremsen
- Steifigkeit $k(t)$: Elektromagnetische Aktuatoren, welche als Steifigkeiten im System dienen [8] oder Federelemente welche durch variable Vorspannung oder Länge quer zur Bewegungsrichtung ihre Steifigkeit ändern [9]

¹Freiheitsgrad

Aufgrund des Aufbaus des Prüfstandes wird im weiteren jedoch nur auf Fälle eingegangen bei welchen die Steifigkeit harmonisch variiert wird. Die durchgeführten experimentellen Versuche in dieser Arbeit beschränken sich weiters nur auf Ausschwingversuche mit variablen Parametern, jedoch ohne äußere Kraftanregung. Für diesen Fall vereinfacht sich Gleichung (2.1) zur folgenden Form (2.2):

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k(t) x = 0 \quad (2.2)$$

Mit einer rein harmonischen Variation der Steifigkeit $k(t) = k_0 + k_v \sin(\omega_{PE} t)$ und ohne Dämpfung lässt sich nach einigen Umformungen die Gleichung auf die Mathieu-Gleichung (2.3) bringen. Diese ist bereits umfangreich beschrieben, wobei speziell die Stabilität der Lösung ausführlich untersucht ist, z.B.: [10].

$$\ddot{x} + (k_0 + k_v \sin(\Omega_{PE} t)) / m x = 0 \quad (2.3)$$

In unserem Fall ist jedoch Dämpfung im System vorhanden und die Schwingungsgleichung für ein Ein-Massen-System nimmt folgende Form an:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + (k_0 + k_v \sin(\Omega_{PE} t)) x = 0 \quad (2.4)$$

Der in dieser Arbeit beschriebene und verwendete Prüfstand hat zur Variation der Steifigkeit an einer der beiden Massen einen magnetischen Aktuator. Dieser besteht aus zwei Permanentmagneten und einer Spule welche von außen bestromt werden kann. Diese variable, magnetische Steifigkeit des Prüfstandes ist nicht nur vom Strom der Spule $i(t)$ abhängig, sondern auch nicht-linear von der Auslenkung der kleinen Masse x_2 . Die Mathieu-Gleichung kann dieses Verhalten jedenfalls nicht mehr beschreiben. In [8] wird der Aufbau des magnetischen Aktuators und die Ermittlung seiner Steifigkeitsparameter beschrieben. Der dort gewählte Ansatz (2.5) für die Steifigkeit ist quadratisch von der Auslenkung x_2 der kleinen Masse und linear vom Spulenstrom $i(t)$ abhängig:

$$k(i, x) = c_i i(t) (1 + c_x x^2(t)) \quad (2.5)$$

Sowohl durch Simulation als auch durch statische Versuche sind dabei Parameter in Abhängigkeit von Strom und Auslenkung ermittelt worden. Es zeigt sich, dass der gewählte Ansatz (2.5) mit den Parametern $c_i = 220/3 \frac{\text{N}}{\text{Am}}$ und $c_x = 872 \text{m}^{-2}$ eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen, statischen Versuchen liefert. Das dynamische Verhalten des Aktuators bei Bewegung der Masse oder Änderung des Spulenstroms wird dabei nicht näher modelliert.

Für die Parameteridentifikation, Kapitel (5.3.2), der kleinen Masse (Masse m_2 , Steifigkeiten k_{12}, k_{02}, c_i, c_x und Dämpfung c_{02}) als 1-FG-Schwinger wird die Bewegungsgleichung (2.2) mit einem leicht modifizierten Ansatz (2.5) verwendet. Bei der Identifikation der Parameter der großen Masse bzw. der kleinen Masse ohne Parametererregung bedient man sich der analytischen Lösung der Gleichung (2.2) mit konstanter Steifigkeit $k(t) = \text{const.}$ Nachdem die Versuchsdaten eine Verschiebung der Ruhelage aus dem Nullpunkt der Messeinrichtung beinhalten wird die Lagekoordinate x noch um den Wert dieser Ruhelage korrigiert.

2.2 Parametererregte Schwingungen des 2-FG-Systems

Für parametererregte Systeme mit mehreren Freiheitsgraden, hier für den einfachsten Fall von zwei Freiheitsgraden, treten Besonderheiten auf, welche in zeitinvarianten Systemen nicht vorhanden sind. Zusätzlich zu den maximal N Eigenfrequenzen des N -Freiheitsgrad-Systems treten dabei weitere Parameter(-anti-)resonanzen auf, bei welchen mit besonderem Verhalten zu rechnen ist.

Eigenfrequenzen	Ω_j	$j = 1, \dots, N$
Parameterresonanzfrequenzen	$\Omega_{j,n} = \frac{2\Omega_j}{n}$	$j = 1, \dots, N, n = 1, 2, 3, \dots$
Kombinationsfrequenzen		
vom Summentyp	$\Omega_{jk,n+} = \frac{\Omega_j + \Omega_k}{n}$	$j, k = 1, \dots, N, j \neq k, n = 1, 2, 3, \dots$
vom Differenztyp	$\Omega_{jk,n-} = \frac{\Omega_j - \Omega_k}{n}$	

Tabelle 2.1: Frequenzen des parametererregten MFG-Schwingers

Bei der Variation der Parameter mit den Parameterresonanzfrequenzen $\Omega_{j,n}$ und Kombinationsfrequenzen vom Summentyp $\Omega_{jk,n+}$ kann es zu instabilem Systemverhalten kommen. Hingegen wird bei der Parametererregung von gedämpften Systemen mit einer Kombinationsfrequenz vom Differenztyp $\Omega_{jk,n-}$ eine Verbesserung der Dämpfungseigenschaften bewirkt. Dabei wird, solange die Parametererregung erfolgt, Energie zwischen den Schwingungsmoden der Frequenzen ω_j und ω_k verschoben. Es erfolgt hierbei auch eine Änderung der gesamten Schwingungsenergie. Wird Energie von einem höheren Schwingungsmode in einen niedrigeren verschoben, so nimmt die Gesamtenergie ab und umgekehrt. Dieser Effekt lässt sich besonders deutlich bei ungedämpften Systemen erkennen, [5]. In [2] gibt es weitere ausführliche Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten derartiger und ähnlicher parametererregter Systeme.

Verglichen mit linearen, zeitinvarianten Systemen lässt sich feststellen, dass es bei parametererregten Systemen mehrere Frequenzen gibt, bei welchen Resonanz auftritt. Zusätzlich können aber aufgrund der Kombinationsfrequenzen vom Differenztyp auch verbesserte Dämpfungseigenschaften erzielt werden.

Kapitel 3

Zwei-Massen PE-Prüfstand

3.1 Aufbau

Der Zwei-Massen-Prüfstand wurde im Hinblick auf eine möglichst gute Realisierung eines 2-FG¹-Systems im Zuge vorangegangener Arbeiten, [9], entwickelt. Beim aktuellen Zustand des Versuchsaufbaus handelt es sich bereits um eine verbesserte Variante des ursprünglichen Aufbaus. Der Vollständigkeit halber wird der Prüfstand hier noch einmal kurz erklärt.

Die beiden diskreten Massen sind an der Labordecke durch dünne Drähte mit einer Pendellänge von $L = 1,99$ m aufgehängt. Ohne weitere Elemente wie den relativ zwischen den Massen wirkenden Federn oder den Federn zu den inertialfesten Halterungen bzw. der magnetischen PE-Steifigkeit würden sich diese näherungsweise wie mathematische Pendel verhalten. Beide Massen sind unterschiedlich groß gewählt und unterscheiden sich durch ihren Aufbau.

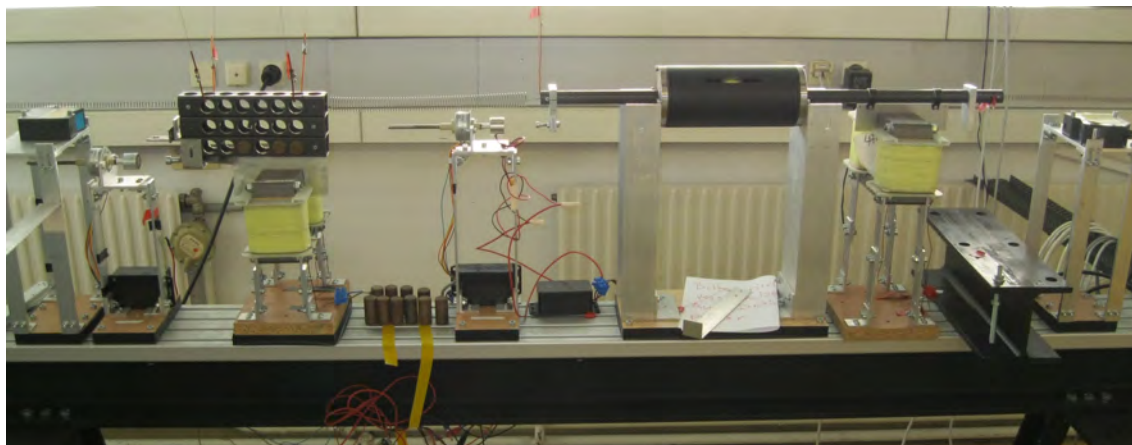


Abbildung 3.1: Parametererregungsprüfstand mit zwei Pendelmassen und Schraubfedern

- **Masse 1**, Abb. 3.2, in weiterer Folge auch als große Masse bezeichnet, besteht aus einem Grundgerüst aus verbundenen Profilen in denen Bohrungen vorhanden sind, in welche zylind-

¹Freiheitsgrad

derförmige Massen aus Stahl eingesetzt werden können, um die Gesamtmasse zu variieren. Zusätzlich dazu ist an der Unterseite noch ein Blech angebracht welches beim Abbremsen der Massen als Wirbelstrombremse verwendet wird.

- **Masse 2**, Abb. 3.3, in weiterer Folge auch kleine Masse oder parametererregte Masse, besteht aus einem CFK-Rohr an dem alle weiteren Elemente angebracht sind. Den Hauptteil dieser Masse stellt eine Drahtspule auf einem Kunststoffkern dar, welche über die Drähte der Aufhängung bestromt werden kann. Diese wird innerhalb eines ferromagnetischen Zylinders bewegt an dessen Enden NdFeB-Permanentmagneten angebracht sind, [8]. An den Rändern der Stange befinden sich zusätzlich noch kleine Aluminiumblöcke welche zur anfänglichen Auslenkung und Messung der Position verwendet werden.

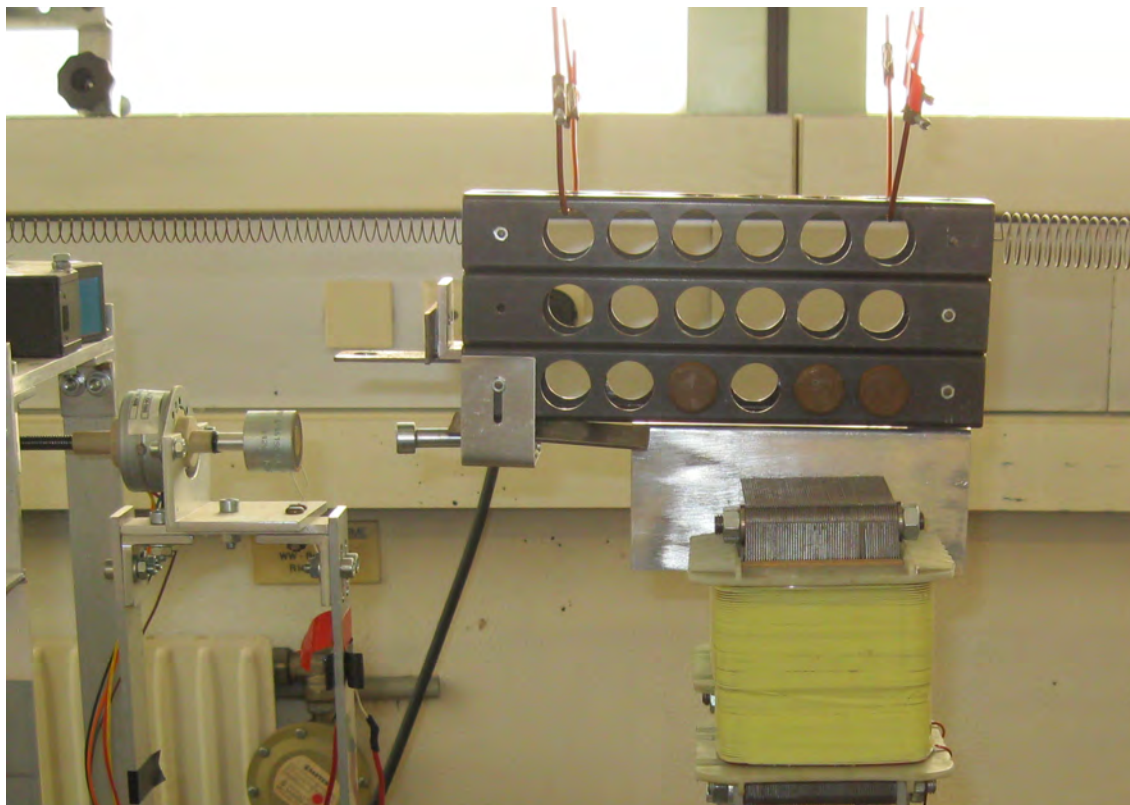


Abbildung 3.2: Große Masse mit Stahlzylindern zur Veränderung der Masse, Lasermesseinrichtung, Wirbelstrombremse und Schrittmotor zur Auslenkung

Die beiden Massen sind jeweils mit dem Rahmen des Prüfstandes bzw. mit der jeweils anderen Masse über gewöhnliche, lineare Schraubenfedernfedern verschiedener Steifigkeiten verbunden. Die Lage der Massen zueinander ist dabei so gewählt, dass in der Ruhelage des Systems und unter Vorspannung der Federn beide Massen möglichst senkrecht hängen.

An beiden Massen sind Bleche angebracht, welche in Verbindung mit Elektromagneten am Rahmen als Wirbelstrombremsen verwendet werden können. Die beiden zugehörigen Spulen zur Erzeugung des Magnetfeldes werden gemeinsam durch einen Leistungsverstärker mit Strom ver-



Abbildung 3.3: Kleine Masse im Zylinder zur Parametererregung mit Wirbelstrombremse, Laser-messeinrichtung und Schrittmotor zur Auslenkung

sorgt und gemeinsam gesteuert. In dieser Arbeit werden dabei nur Versuche beschrieben, bei welchen während des Ausschlagens die Wirbelstrombremsen deaktiviert sind.

An weiteren, fest am Rahmen des Prüfstands befestigten Profilen, befinden sich Schrittmotoren mit Spindeln, an welchen an jeweils einem Ende einen Elektromagnet befestigt ist. Diese lenken die Massen aus ihrer Ruhelage aus und bringen sie in eine über die Steuerung wählbare Anfangsauslenkung. Die Messung der Lagen erfolgt über Lasersensoren getrennt für beide Massen.

3.2 Ansteuerung

Die gesamte Steuerung des Prüfstands erfolgt über einen Labor-PC auf welchem in LabVIEWTM ein VI, Abb. 3.4, mit allen Ein- und Ausgabeelementen betrieben wird. Der Computer ist über USB mit einer Datenerfassungsplattform (NI cDAQ-9172) von National InstrumentsTM verbunden. Zur Erfassung der Daten und Generierung von Steuersignalen sind im cDAQ (compact Data Acquisition) folgende Module installiert.

- NI 9205 „Analog Input“: Dieses Modul liest analoge Werte wie z.B. die Auslenkungen der Massen, den Strom und die Spannung an der Spule ein.
- NI 9263 „Analog Output“: Für die Generierung der harmonischen Parametererregung oder der Aktivierung der Wirbelstrombremsen wird den entsprechenden Verstärkern die Spannung bzw. der Strom über dieses Modul vorgegeben.
- NI 9401 „Digital IO und Frequenzgenerator“: Sowohl die Schrittmotoren als auch die Haltemagnete werden über dieses Modul angesteuert.

Das VI ermöglicht die Konfiguration und die Beobachtung der durchzuführenden Versuchsreihe (siehe Abb. 3.4). Im Mittelpunkt steht der Graph in welchem die aktuellen Verläufe der Massenausschläge, wie auch des Stroms und der Spannung abgelesen werden können. Die jeweiligen Verläufe werden dabei in Volt angezeigt. Die tatsächlichen Werte der gemessenen Größen lassen sich über die Empfindlichkeiten in Tabelle (3.1) berechnen.

	Variable	Empfindlichkeit
Auslenkung x_1	H_{xv1}	0.004 m/V
Auslenkung x_2	H_{xv2}	0.004 m/V
Strom I_{pe}	H_{av}	0.5 A/V
Spannung V_{pe}	H_{vv}	1.0 V/V

Tabelle 3.1: Empfindlichkeiten der Messkette

Darunter befindet sich das Statusfeld in welchem die derzeit durchgeführte Aktion des Versuchs angezeigt wird. Ebenfalls unter dem Graphen befinden sich folgende Elemente zur Konfiguration der Versuchsreihe:

- **Amplitude:** relative Amplitude des Stroms der kleinen Masse zur Parametererregung. Die relative Amplitude bezieht sich hierbei auf den Gleichanteil des Stroms. Der maximale Wert beträgt theoretisch 1, da es nicht möglich ist die Spule mit negativen Strom zu versorgen. Eine mögliche Umkehr des Stroms würde die Polarität des Spulenmagnetfeldes ändern, und somit eine negative Steifigkeit erzeugen.
- **Anfangsfrequenz:** die PE-Frequenz in rad/s ab welcher die Parametererregung durchgeführt wird.
- **Schrittweite:** Wert um den die PE-Frequenz bei jedem Versuch erhöht wird in rad/s.
- **Endfrequenz:** maximale PE-Frequenz in rad/s bis zu welcher Versuche in der Versuchsreihe durchgeführt werden sollen.

Weiters befindet sich noch neben diesen vier Input-Boxen ein Anzeigefeld welches die PE-Frequenz des aktuellen Versuchs anzeigt. Links oben über dem Graphen befinden sich weitere Kontrollelemente zur Versuchssteuerung:

- **Dauer der Messung in Min:** Über dieses Feld kann eingestellt werden wie lange die Messung bei einer PE-Frequenz durchgeführt wird.
- **Signal 2 invertieren:** Aufgrund der Anbringung des Lasersensors der Masse 2 wird die Auslenkung negativ gemessen. Dieses Kontrollfeld ermöglicht die automatische Invertierung des Signals während der Messung und für die Aufzeichnung. Standardmäßig ist diese Schaltfläche aktiviert.
- **Position große Masse/Position kleine Masse:** diese beiden Felder geben an wie weit (in Volt, siehe Tabelle 3.1 oben) die Massen bei der Kontaktherstellung mit den Haltemagneten ausgelenkt werden. Es ist dabei zu beachten, dass die einzustellende Lage der Masse 2 hier durch die zuvor genannte Schaltfläche nicht invertiert wird. Um einen sicheren Kontakt zwischen Magneten und Massen zu garantieren, sollten die Werte für die große Masse negativ (< -3) und für die kleine Masse positiv (> 3) gewählt werden, da es andernfalls vorkommen kann, dass die Magneten die Massen nicht festhalten können.
- **große Masse bis/kleine Masse bis:** über diese beiden Werte wird definiert wie weit die Massen in ihre Anfangslagen für die Schwingung ausgelenkt werden sollen. Dabei ist

wiedermum zu beachten, dass die zuvor genannte Schaltfläche die Werte der Masse 2 hier noch nicht invertiert und alle Werte in Volt angegeben werden.

- **Sample Rate (Hz):** gibt die Samplingfrequenz in Hz an mit welcher die Daten gemessen werden.

Eine ausführlichere Dokumentation des Aufbaus und der Funktionen des VI ist den Arbeiten [11] und [12] zu entnehmen.

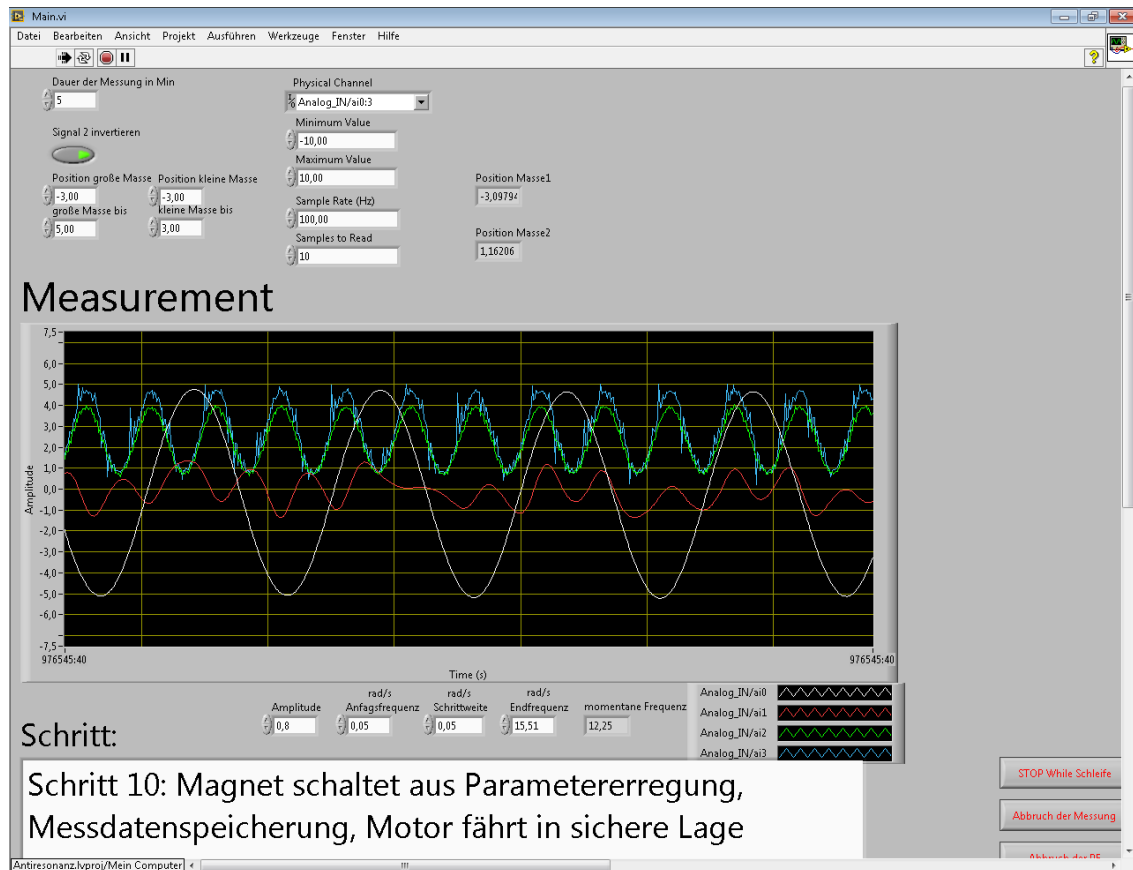


Abbildung 3.4: Bedienoberfläche des Prüfstands erstellt in LabVIEW™

Kapitel 4

Numerisches Modell des parametererregten Schwingers

In diesem Kapitel wird das numerische Modell des Prüfstandes ausgehend von einem linearen Modell aus beschrieben. Es werden dabei die Nichtlinearität und deren Modellierung beschrieben und schrittweise das Gesamtmodell aufgebaut. Es wird dabei auch besonders auf die Methoden und Modelle eingegangen welche bei der Parameteridentifikation verwendet werden, da sich herausgestellt hat, dass die korrekte Bestimmung der Parameter ausgesprochen hohen Einfluss auf die Vergleichbarkeit der Simulation und der Versuche hat. Die für die Identifikation besonders wichtigen 1-FG-Modelle werden erst nach dem 2-FG-Modell erklärt, da sie sich direkt aus diesem ableiten lassen.

4.1 Ideales, lineares 2-FG Modell

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, wurde der Prüfstand darauf ausgelegt, möglichst gut einen schwach gedämpften, linearen 2-FG-Schwinger abzubilden. Das Modell eines derart idealen Prüfstandes ist in Abb. 4.1 dargestellt.

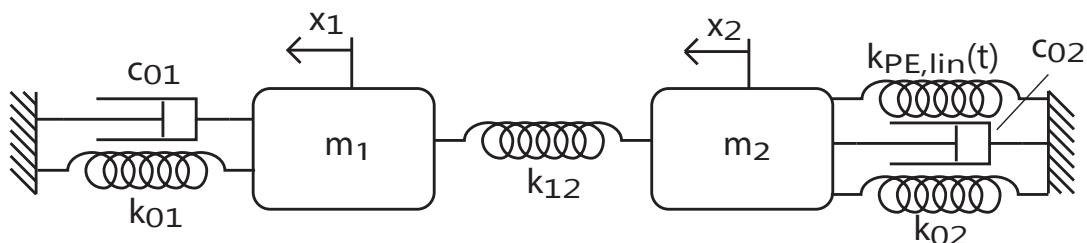


Abbildung 4.1: Modell eines idealen 2-FG-Schwingers mit Parametererregung

Die zugehörige Bewegungsgleichung des über die Steifigkeit parametererregten Schwingers lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\text{lin}}(t)\mathbf{x} = 0 \quad (4.1)$$

mit

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{01} & 0 \\ 0 & c_{02} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{K}_{\text{lin}}(t) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\text{PE,lin}}(t) = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{PE,lin}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Die Massenmatrix \mathbf{M} ist eine Diagonalmatrix mit m_1 und m_2 als reinen Punktmassen denen alle Anteile aus kontinuierlichen Verbindungselementen wie z.B. Federn zugeschlagen werden.

Für die Dämpfung des Systems werden nur Absolutdämpfer gegen das ruhende Inertialsystem angenommen, wodurch die Matrix \mathbf{C} ebenfalls diagonal ist. Auf einen Proportionalansatz ($\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$) welcher bei der modalen Behandlung der Bewegungsgleichung Erleichterungen mit sich bringen würde, ist hier zu Gunsten der besseren Anpassung der Parameter an die reale Dämpfung verzichtet worden.

Die Steifigkeitsmatrix ist in zwei Matrizen getrennt, wobei die erste Matrix \mathbf{K}_0 die Steifigkeit aufgrund der zeitinvarianten Federn beschreibt und die zweite $\mathbf{K}_{\text{PE,lin}}(t)$ ¹ den variablen, linearen Teil aufgrund des magnetischen Aktuators beschreibt.

4.1.1 Pendelsteifigkeit

Um die Dämpfung durch Reibung möglichst gering zu halten, sind die Massen durch Drähte an der Decke befestigt. Die Bewegung der Massen erfolgt somit nicht mehr rein translatorisch entlang einer horizontalen Geraden, sondern auf einer Kreisbahn mit Radius L . Nachdem die maximalen Auslenkungen klein gegenüber der Pendellänge sind, ergeben sich für den linearisierten Fall dieser Bewegung zusätzliche, lineare Steifigkeitsanteile in der entsprechenden Matrix K_{Pendel} (4.5). Diese sind nicht nur wie bereits erwähnt von der Pendellänge sondern auch von der Erdbeschleunigung und der Masse abhängig. Während der Parameteridentifikation durchgeführte Vergleiche zwischen dem linearen und nichtlinearen Pendelsteifigkeitsansatz haben die Gültigkeit dieser Vereinfachung bestätigt. Das linearisierte Modell der Pendelsteifigkeit mit translatorischen Koordinaten lautet somit:

$$\mathbf{K}_{\text{Pendel}} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 g}{L} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 g}{L} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \frac{g}{L} \quad (4.5)$$

mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und der Pendellänge $L = 1,99 \text{ m}$.

Die resultierende Steifigkeitsmatrix setzt sich nun aus den Federanteilen, den Pendelanteilen und der Parametererregung zusammen.

¹inklusive eines konstanten Anteils der magnetischen Steifigkeit

$$\mathbf{K}_{\text{ges,lin}} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\text{Pendel}} + \mathbf{K}_{\text{PE}}(t) = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} + \frac{m_1 g}{L} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{01} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + k_{\text{PE}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

4.2 Nichtlineares Modell des physischen Prüfstandes

Zur ausreichenden Beschreibung der Bewegungsgleichung wurde eine Formulierung gewählt, deren Nichtlinearität sich auf die Beschreibung der magnetischen Steifigkeit beschränkt. Das strenggenommen nichtlineare Verhalten der Pendelbewegung und der damit verbundenen Steifigkeit wurde hier vernachlässigt. Die Einflüsse dieser Terme sind verhältnismäßig gering wie bereits im vorherigen Abschnitt 4.1.1 beschrieben wurde.

4.2.1 Nichtlineare Steifigkeit des magnetischen Aktuators

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, handelt es sich bei dem magnetischen Aktuator um eine Steifigkeit die nichtlinear von der Auslenkung der kleinen Masse abhängt. Das gewählte Modell (4.7) der Steifigkeit sei hier nochmal erwähnt, wobei auch die abweichende Definition (4.8), welche für die Simulation implementiert wurde, mit dargestellt ist:

$$k_{\text{PE}}(i, x) = c_i i(t) (1 + c_x x^2(t)) \quad (4.7)$$

$$= k_{I0} i(t) + k_{I2} i(t) x^2 \quad (4.8)$$

mit $k_{I0} = c_i$ und $k_{I2} = c_x c_i$. Werte für c_i und c_x und deren Berechnung findet man in [8]. Die Matrix der magnetischen Steifigkeiten für das Gesamtsystem nimmt somit folgende Form an:

$$\mathbf{K}_{\text{mag,nl}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{PE}}(i, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i(t)(k_{I0} + k_{I2} x_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Die daraus resultierende Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Summe der Steifigkeitsmatrizen der Federn \mathbf{K}_0 (4.3), der Pendelbewegung $\mathbf{K}_{\text{Pendel}}$ (4.5) und der magnetischen Steifigkeit $\mathbf{K}_{\text{mag,nl}}$ (4.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(i, x) &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\text{Pendel}} + \mathbf{K}_{\text{mag,nl}}(i, x) \\ &= \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} + \frac{m_1 g}{L} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + i(t)(k_{I0} + k_{I2} x_2^2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.2 Nichtlineare, parametererregte Bewegungsgleichungen des 2-FG-Systems

Die Bewegungsgleichung (4.11) des nichtlinearen, parametererregten 2-Freiheitsgrad-Systems, Abb. 4.2, ergibt sich aus der Zusammensetzung der konstanten Matrizen der Masse \mathbf{M} und Dämpfung \mathbf{C} aus Gleichung (4.3) und aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}(i, x)$, Gleichung (4.10).

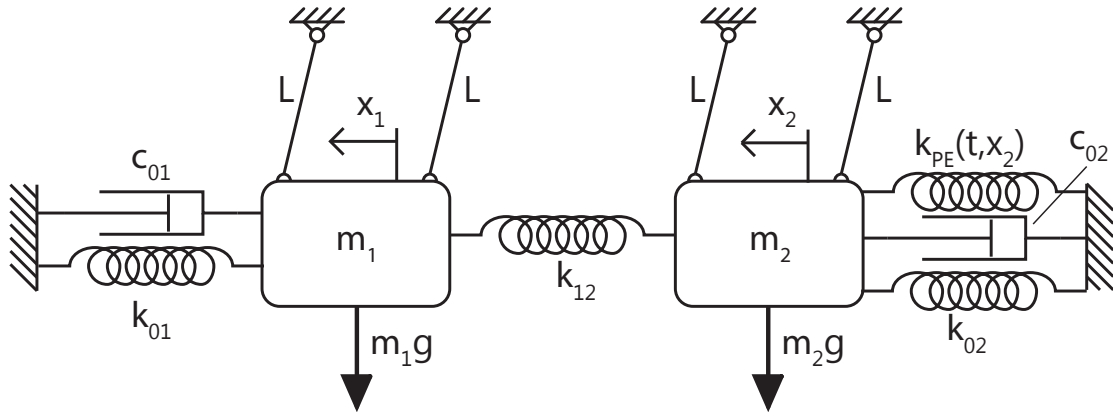


Abbildung 4.2: Modell des nichtlinearen, parametererregten 2-FG-Modells mit Pendelsteifigkeit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t, \mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} c_{01} & 0 \\ 0 & c_{02} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} + \frac{m_1 g}{L} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + i(t)(k_{I0} + k_{I2} x_2^2) \end{bmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{vs0}) = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

mit dem Vektor $\mathbf{x}_{vs0} = [x_{vs0,1}, x_{vs0,2}]'$ der Verschiebungen der Ruhelagen.

Die gesamte Bewegungsdifferentialgleichung setzt sich damit aus insgesamt 11 einzelnen, physikalischen Parametern zusammen welche in folgender Tabelle (4.1) beschrieben sind.

Variable	Einheit	Beschreibung
m_1	kg	große Masse mit Freiheitsgrad x_1
m_2	kg	kleine Masse mit Freiheitsgrad x_2
k_{01}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Steifigkeit der Feder zwischen Rahmen und großer Masse
k_{12}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Steifigkeit der Feder zwischen den beiden Massen
k_{02}	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Steifigkeit der Feder zwischen Rahmen und kleiner Masse
c_{01}	$\frac{\text{N}}{\text{m/s}^2}$	Dämpfungskonstante der großen Masse gegenüber dem Absolutsystem
c_{02}	$\frac{\text{N}}{\text{m/s}^2}$	Dämpfungskonstante der kleinen Masse gegenüber dem Absolutsystem
k_{I0}	$\frac{\text{N/m}}{\text{A}}$	Steifigkeitskonstante des mag. Aktuators - prop. $i(t)$
k_{I2}	$\frac{\text{N/m}^3}{\text{A}}$	Steifigkeitskonstante des mag. Aktuators - prop. $i(t)x^2$
$x_{vs0,1}$	m	Offset der Lagemessung - große Masse
$x_{vs0,2}$	m	Offset der Lagemessung - kleine Masse

Tabelle 4.1: Parameter des numerischen Modells

4.3 Ideales, lineares 1-FG-Modell der großen Masse

Ausgehend aus Gleichung (4.11) lässt sich auf einfache Art und Weise die Bewegungsgleichung der großen Masse als 1-FG-System, siehe Abb. 4.3, herleiten. Durch Sperren der Lagekoordinate x_2 und Streichen der dazugehörigen, nicht mehr benötigten Zeilen und Spalten der Systemmatrizen kommt man auf Gleichung (4.12). Das hier mathematisch durchgeführte Festhalten der Lagekoordinate der zweiten Masse entspricht dem realen Vorgehen bei der Ermittlung der Testdaten für den 1-FG-Schwinger. Dabei wird die zweite Masse ebenfalls an ihrer Bewegung gehindert in dem sie durch einen Keil fixiert wird. Es ist zu beachten, dass sowohl bei der Bewegungsgleichung der kleinen als auch der großen Masse die Steifigkeit der Feder k_{12} in den Gesamtsteifigkeiten vorhanden ist.

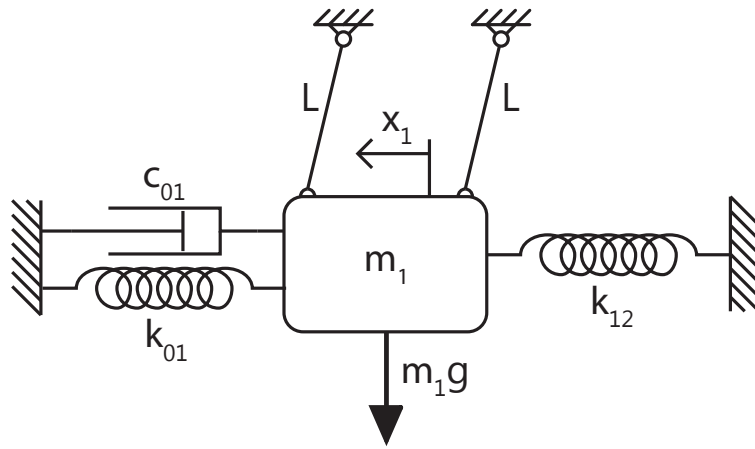


Abbildung 4.3: Lineares Modell der großen Masse mit lin. Pendelsteifigkeit

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_{01} \dot{x}_1 + \left(k_{01} + k_{12} + \frac{m_1 g}{L} \right) (x_1 - x_{vs0,1}) = 0 \quad (4.12)$$

4.4 Ideales, nichtlineares 1-FG-Modell der kleinen Masse

Analog zur großen Masse wird bei der Ermittlung der Bewegungsgleichung von Masse 2 der Freiheitsgrad x_1 festgehalten. Das daraus resultierende Modell, Abb. 4.4 und die dazugehörige Differentialgleichung (4.13) sind nun im allgemeinsten Fall parametererregt und nichtlinear:

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_{02} \dot{x}_2 + \left(k_{02} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + i(t) (k_{I0} + k_{I2} x_2^2) \right) (x_2 - x_{vs0,2}) = 0 \quad (4.13)$$

4.5 Berechnung der Schwingungsenergie

Ein wesentlicher Bestandteil der Analyse der parametererregten Schwingungen ist die Berechnung der Schwingungsenergie. Dabei ist sowohl die Energie des gesamten Systems von Interesse als auch die modalen Energien. Nachdem es sich bei dem vorhandenen System um ein nichtlineares System handelt gilt das Superpositionsprinzip nicht mehr und eine Modaltransformation wäre somit nicht mehr möglich. Ausgehend von der Massenmatrix und den konstanten Anteilen der

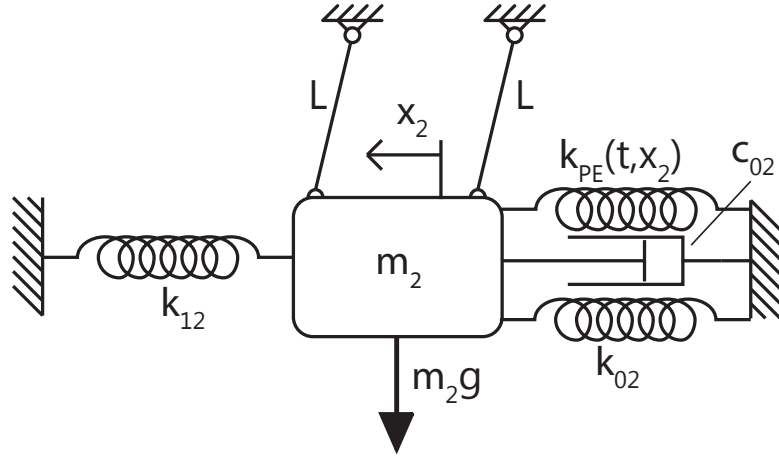


Abbildung 4.4: Modell der kleinen Masse mit nichtlinearer, parametererregten Steifigkeiten

Steifigkeitsmatrix (4.15) berechnet man sich die Schwingungsmoden des ungedämpften, linearen Systems aus der Matrix der Eigenvektoren Ψ_i welche folgende Gleichung (4.14) erfüllen.

$$(\mathbf{K}_{\text{konst}} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Psi_i = 0 \quad (4.14)$$

mit der konstanten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{konst}}$ und $k_{pe,av}$ dem Mittelwert der magnetischen Steifigkeit:

$$\mathbf{K}_{\text{konst}} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_{\text{Pendel}} + \mathbf{K}_{\text{mag},0} = = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} + \frac{m_1 g}{L} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{02} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + i_{av} k_{I0} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Die mittlere magnetische Steifigkeit wird für die gemessenen Schwingungen ermittelt, indem mit den Messdaten des Stroms $i_{PE}(t)$ und der Auslenkung $x_2(t)$ der Verlauf der Steifigkeit über die Zeit $k_{PE}(t)$ berechnet und dann zu $k_{PE,av}$ gemittelt wird.

Die aus den Eigenvektoren Ψ_i zusammengesetzte Modalmatrix Ψ erlaubt nun die Transformation (4.16) durchzuführen, welche jetzt als quasimodal bezeichnet wird. Die Koordinaten z werden somit auch als quasimodale Koordinaten bezeichnet.

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{z} = \Psi^{-1} \mathbf{x} \quad (4.16)$$

Der einfacheren Lesbarkeit wegen werden die Begriffe modal und quasimodal als equivalent betrachtet.

Zur Berechnung des Anteils der Auslenkung der Massen durch den einen einzelnen Quasi-Mode transformiert man zuerst die Lagekoordinaten in den modalen Raum. Bei der anschließenden Rücktransformation in das ursprüngliche System der Massenauslenkungen transformiert man jedoch nur die Koordinate eines einzelnen Modes und erhält somit dessen Anteil an den Auslenkungen. Für lineare Systeme würde die Summe der Auslenkungen aus den einzelnen Moden die Gesamtauslenkung der entsprechenden Masse ergeben. Gleiches gilt für die modalen Energien. Im hier

verwendeten nichtlinearen Modell ist dieser Zusammenhang streng genommen nicht mehr gültig, wird aber aufgrund der relativ kleinen Nichtlinearität trotzdem verwendet.

Die Gesamtenergie (4.17) des Systems zu einem Zeitpunkt setzt sich aus vier Anteilen zusammen:

- kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}$
- potentielle Energie der Federn: $E_{Feder} = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{K}_{Feder} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$
- magnetische Energie des Aktuators: $E_{mag} = \int k_{PE}(i, x_2) x_2 dx_2 = i(t) \left(k_{I0} \frac{x_2^2}{2} + k_{I2} \frac{x_2^4}{4} \right)$
- potentielle Energie der Gewichtskraft: $E_{gew} = L g \sum_{i=1}^2 m_i \left(1 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{x_i - x_{0,i}}{L} \right) \right) \right)$

wobei die Masse 2 so ausgerichtet wird, dass sie ihre Ruhelage im Nullpotential des magnetischen Feldes hat und somit der Differenzterm $(x_i - x_{0,i})$ entfällt.

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{Feder} + E_{mag} + E_{gew} \quad (4.17)$$

Auf gleiche Art und Weise berechnet man die Energien aus den einzelnen Moden $E_{mod,i}$ mit den Parametern $\mathbf{x}_{mod,i}$ bzw. $\dot{\mathbf{x}}_{mod,i}$, wobei die Summe dieser quasimodalen Energien $E_{mod,ges}$ aufgrund der Nichtlinearität nicht die gleiche ist wie (4.17).

Kapitel 5

Parameter und Parameteridentifikation

Um die gemessenen Ergebnisse mit Simulationen zu vergleichen, ist es notwendig möglichst genaue Informationen über die Parameter des Systems zu haben. Der Ermittlung dieser Parameter ist deshalb hier dieser ganze Abschnitt gewidmet. Die gesamte Identifikation umfasst direkte Messungen der Größen des Systems, analytische Berechnungen einzelner Parameter über Schwingungsgleichungen und numerische Parameteridentifikationsverfahren (Methode der kleinsten Quadrate) basierend auf den Bewegungsdifferentialgleichungen des Schwingers.

In Summe umfasst das vollständige, numerische Modell des 2-FG-Schwingers 11 Parameter, welche in Tabelle 4.1 beschrieben wurden.

5.1 Prozess und Methoden der Parameteridentifikation

Eine ausreichend genaue Bestimmung aller Parameter kann nicht ausschließlich mit einer Methode erfolgen. Einige Parameter wie die Massen lassen sich durch direkte Messung ermitteln oder wie im Falle der Federsteifigkeiten durch einfache Berechnung. Parameter wie die Steifigkeit des magnetischen Aktuators sind bereits in vorangegangenen Arbeiten ermittelt worden, und wurden hier nur im Zuge der Identifikation des Gesamtsystems angepasst. Andere Eigenschaften hingegen wie z.B. die Dämpfungen im System lassen sich nicht direkt am System messen oder eine exakte Modellierung dieser dämpfenden Kräfte ist mit vertretbarem Aufwand kaum möglich. Zu diesen Dämpfungseffekten zählen im Wesentlichen:

- Materialdämpfung in den Federn und Drähten
- Reibung in der Aufhängung der Massen
- Luftwiderstand und Verluste durch das Ausdrücken der Luft aus dem Zylinder des magnetischen Aktuators
- Dämpfung durch dynamische Effekte des PE-Magnetfeldes bzw. Restmagnetismus in den Wirbelstrombremsen

Alle diese Effekte werden gemeinsam über die zwei Dämpfungskonstanten c_{01} und c_{02} beschrieben und numerisch identifiziert. Für den 1-FG-Schwinger werden zur Generierung eines Startwertes für die numerische Parameteridentifikation Schätzwerte aus analytischen Lösungen der Schwingungsgleichung generiert.

Obwohl die Massen prinzipiell einfach abgewogen werden können wird die kleine Masse ebenfalls numerisch identifiziert. Dabei geht es darum, den Ausbau und die danach wieder erforderliche Ausrichtung im Prüfstand zu vermeiden.

Das Vorgehen bei der Parameteridentifikation ist in folgender Grafik 5.1 beschrieben.

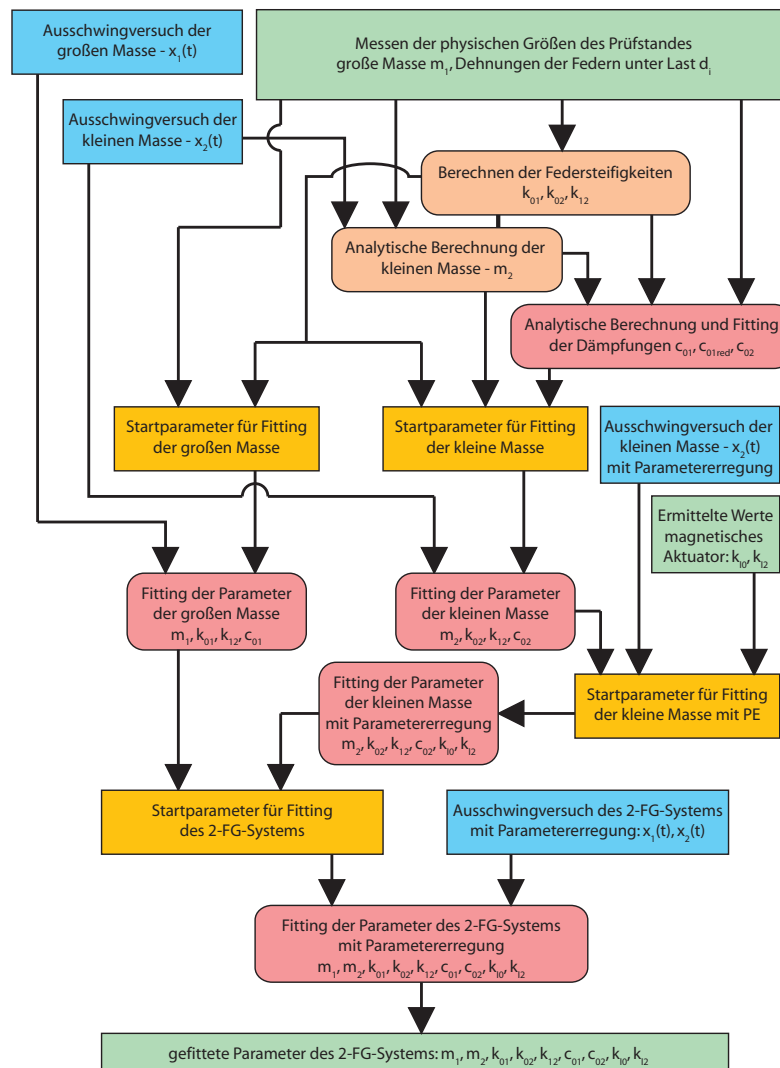


Abbildung 5.1: Prozess des Parameterfittings beim 2-FG-System

Die numerische Parameteridentifikation wird mit Hilfe eines Skriptes in MATLAB[®] durchgeführt. Neben grundlegenden Methoden zur analytischen Berechnung und Verarbeitung von Daten werden zur Bestimmung der Parameter vorwiegend die Methode `lsqcurvefit` und zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen `ode45` verwendet.

`lsqcurvefit` [13] ist eine in MATLAB[®] vorhandene Methode zum Parameterfitting nichtlinearer Funktionen nach der Methode der kleinsten Quadrate und wird hier kurz vorgestellt.

```
x = lsqcurvefit( fun , x0 , xdata , ydata , lb , ub , options )
```

- Im Parameter **fun** wird ein Function-Handle der Gleichung (Kurve) übergeben deren Parameter bestimmt werden sollen. Dieser muss in folgender Form definiert werden:

- als eigene Funktion in einer .m-Datei: `function fun = myfun(x,xdata)`
- als anonyme Funktion: `fun = @(x,xdata)(...);`

Dabei ist **x** der Vektor oder die Matrix der zu bestimmenden Parameter und **xdata** die Matrix oder der Vektor der Input-Daten der Funktion.

- **x0** ist der Vektor mit den Startwerten der Parameter, deren Wahl entscheidenden Einfluss auf die Dauer und das Ergebnis der Parameterbestimmung hat. Wie diese im Detail bestimmt werden ist in den folgenden Abschnitten 5.2 und 5.3.1 beschrieben.
- Die Vektoren oder Matrizen **xdata** und **ydata** beschreiben jeweils die Input- und Output Daten für welche die Funktionsparameter angepasst werden sollen.
- Mit **lb** und **ub**, welche die gleiche Dimension haben müssen wie **x0**, werden die unteren (**lb**) und oberen (**ub**) Grenzen der Parameter aus **x0** festgelegt. Wie in den folgenden Abschnitten 5.3.2 zu den numerischen Fitting-Schritten noch beschrieben, ist die Wahl dieser Grenzwerte entscheidend für die Qualität der identifizierten Parameter.
- **options** ermöglicht es noch weitere Details des Fitting-Prozesses festzulegen und wird über die Funktion `optimoptions` erzeugt.

5.2 Gemessene Parameter

Wie oben schon beschrieben sind die Steifigkeiten der Federn als auch die große Masse durch direkte Messungen bestimmt worden.

Die große Masse besteht aus einem Rahmen mit dem Blech der Wirbelstrombremse und 13 zylindrischen Zusatzgewichten. Diese Gewichte haben jeweils Massen von 0.1011 kg und der Rahmen hat eine Masse von 0.834 kg, welche durch Abwiegen ermittelt wurden. Die maximale Masse beträgt somit 2.1483 kg und 1.1383 kg im reduzierten Fall (für drei eingesetzte Zylinder). Wie sich später zeigen wird, ist die Durchführung der Untersuchung mit reduzierter Masse 1 notwendig um die Dämpfungseffekte der Parametererregung gut darstellen zu können. In Abschnitt 5.5 wird erklärt warum der zweite Wert der Masse 1 so gewählt wird.

Die Steifigkeiten der drei Spiralfedern k_{01} , k_{12} und k_{02} wurde durch Anbringen von Testgewichten und Messung der dadurch bewirkten Absenkungen berechnet (siehe Abb. 5.2). In Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 sind die gemessenen Werte und die daraus berechneten Steifigkeiten aufgelistet.

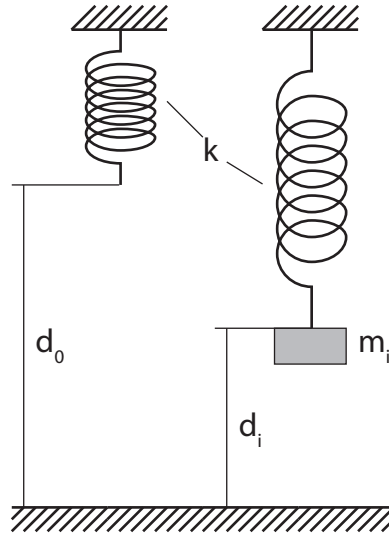


Abbildung 5.2: Messung der Federsteifigkeiten über die Längenänderung beim Anbringen von Testgewichten

Nr.	Masse	Kraft	Abstand	Steifigkeit bezgl. 0	Steif. relativ i, i-1
i	m	$F_i = m \cdot 9.81$	d_i	$k_{01,abs,i} = \frac{F}{d_0 - d_i}$	$k_{01,rel,i} = \frac{F_i - F_{i-1}}{d_{i-1} - d_i}$
	g	mN	mm	N/m	N/m
0	0	0	870		
1	15	147	860	14,715	
2	50	491	841	16,915	18,071
3	100	981	812	16,914	16,914
4	200	1962	753	16,769	16,627
5	300	2943	697	17,012	17,518
Mittelwert der abs./rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 k_{01,abs,i} = 16,465$	$\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 k_{01,rel,i} = 17,282$
Mittelwert der abs. und rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{6} \left(\sum_{i=3}^5 k_{01,abs,i} + \sum_{i=3}^5 k_{01,rel,i} \right) = 16,959$	

Tabelle 5.1: Feder 01 Ermittlung der Federsteifigkeiten - Gewichte und Absenkungen

Nr.	Masse	Kraft	Abstand	Steifigkeit bezgl. 0	Steif. relativ i, i-1
i	m	$F_i = m \cdot 9.81$	d_i	$k_{12,abs} = \frac{F}{d_0 - d_i}$	$k_{12,rel} = \frac{F_i - F_{i-1}}{d_{i-1} - d_i}$
	g	mN	mm	N/m	N/m
0	0	0	1088		
1	15	147,15	1073	9,81	
2	50	490,5	1038	9,81	9,81
3	200	1962	899	10,381	10,586
4	300	2943	806	10,436	10,548
5	400	3924	713	10,464	10,548
Mittelwert der abs./rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 k_{12,abs,i} = 10,181$	$\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 k_{12,rel,i} = 10,373$
Mittelwert der abs. und rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{6} \left(\sum_{i=3}^5 k_{12,abs,i} + \sum_{i=3}^5 k_{12,rel,i} \right) = 10,494$	

Tabelle 5.2: Feder 12 Ermittlung der Federsteifigkeiten - Gewichte und Absenkungen

Nr.	Masse	Kraft	Abstand	Steifigkeit bezgl. 0	Steif. relativ i, i-1
i	m	$F_i = m \cdot 9.81$	d_i	$k_{12,abs} = \frac{F}{d_0 - d_i}$	$k_{12,rel} = \frac{F_i - F_{i-1}}{d_{i-1} - d_i}$
	g	mN	mm	N/m	N/m
0	0	0	861		
1	15	147,15	850	13,377	
2	50	490,5	825	13,625	13,734
3	100	981	792	14,217	14,864
4	200	1962	725	14,426	14,642
5	300	2943	658	14,498	14,642
Mittelwert der abs./rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 k_{02,abs,i} = 14,029$	$\frac{1}{4} \sum_{i=2}^5 k_{02,rel,i} = 14,470$
Mittelwert der abs. und rel. Steifigkeiten				$\frac{1}{6} \left(\sum_{i=3}^5 k_{02,abs,i} + \sum_{i=3}^5 k_{12,rel,i} \right) = 14,548$	

Tabelle 5.3: Feder 02 Ermittlung der Federsteifigkeiten - Gewichte und Absenkungen

5.3 Parameteridentifikation an den 1-FG-Systemen

Bevor das Gesamtsystem mit allen Parametern betrachtet und identifiziert wird, werden die unmittelbar mit einer Masse verbundenen Parameter jeweils über 1-FG-Systeme identifiziert. Die zugrundeliegenden Modelle sind in Abb. 4.3 und 4.4 mit den zugehörigen Gleichungen (4.12) und (4.13) dargestellt. Um Versuchsdaten für ein 1-FG-System zu generieren, wird die jeweils andere Masse in ihrer Ruhelage fixiert. Mittels 1-FG-Ausschwingversuchen über jeweils 300 Sekunden pro Masse werden Testdaten für die Identifikation gewonnen. Für Masse 2 wird dabei jeweils ein Versuch mit und ohne Parametererregung durchgeführt.

5.3.1 Analytische Abschätzungen der Dämpfung und Masse

Für die große Masse sind durch die Messung bereits alle Parameter außer der Dämpfung und der Verschiebung der Nulllage bestimmt. Die gemessenen Werte des 1-FG-Ausschwingversuches der großen Masse bestehen lediglich aus deren Lage, jedoch nicht aus Geschwindigkeit und Beschleunigung. Nachdem sich jedoch für den (linearisierten) Ein-Massen-Schwinger¹ analytische Lösungen (5.1) für die Lage finden lassen, ist eine erste Abschätzung der Dämpfung nur aus der Lagekoordinate und den gemessenen Parametern (Masse, Steifigkeiten) möglich.

$$x_1(t) = A e^{-\delta_{0,1} t} \cos(\omega_{d,1} t + \beta) \quad (5.1)$$

Aus den Messdaten für x_1 werden die lokalen Maxima der Auslenkung bestimmt. Bildet man nun das Verhältnis aus zwei dieser Spitzenwerte, jeweils einen vom Beginn t_{p0} und Ende t_{pE} , so erhält man folgenden Zusammenhang:

$$\frac{x_1(t_{pE})}{x_1(t_{p0})} = \frac{A e^{-\delta_{0,1} t_{pE}} \cos(\omega_{d,1} t_{pE} + \beta)}{A e^{-\delta_{0,1} t_{p0}} \cos(\omega_{d,1} t_{p0} + \beta)} \quad (5.2)$$

Nachdem konstante Parameter und eine lineare Schwingung vorausgesetzt werden, kürzen sich die Cosinus-Terme zu zwei verschiedenen Zeitpunkten der Spitzenwerte und der konstante Amplitudenparameter A heraus. Die verbleibende Gleichung logarithmiert man, dividiert durch die Zeitdifferenz und kommt auf folgenden Zusammenhang:

$$\log\left(\frac{x_1(t_{pE})}{x_1(t_{p0})}\right) \frac{1}{t_{p0} - t_{pE}} = \delta_{0,1} = \omega_{0,1} D_1 = \frac{c_{01}}{2 m_1} \quad (5.3)$$

mit ω_0 der ungedämpften Eigenkreisfrequenz und D_1 dem Lehr'schen Dämpfungsmaß. Nach Umformung erhält man die Abschätzung für die Dämpfungskonstante c_{01} :

$$c_{01,approx} = 2 \delta_{0,1} m_1 \quad (5.4)$$

Ebenfalls aus Gleichung 5.1 erhält man einen Wert für den Parameter der Amplitude A indem man die Auslenkung $x_1(t_{p0})$ und den Zeitpunkt t_{p0} des ersten lokalen Maximums einsetzt.

$$A = x_1(t_{p0}) e^{\delta_{0,1} t_{p0}} \quad (5.5)$$

¹siehe Formel (2.2) mit konstanter Steifigkeit k

Die Eigenkreisfrequenz (5.6) lässt sich ebenfalls aus der mittleren Zeitdifferenz τ_{av} zwischen den Spitzenwerten der Auslenkung berechnen. Aus dem Quotienten (5.7) von δ_0 und der berechneten Eigenkreisfrequenz $\omega_{d,1}$ lässt sich das Dämpfungsmaß näherungsweise berechnen. Korrekterweise müsste hier die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_{0,1}$ stehen, jedoch erkennt man anhand des Verlaufs der Lagekoordinate der Masse sofort, dass es sich um eine sehr schwach gedämpfte Schwingung handelt, für welche der Unterschied zwischen gedämpfter und ungedämpfter Eigenkreisfrequenz sehr klein ist. Eine Abschätzung der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_0 ist zwar über die Masse und Gesamtsteifigkeit möglich, welche jedoch unabhängig voneinander, außerhalb des Prüfstandes gemessen wurden und somit keine Effekte wie Vorspannungen oder Masseverteilung der Verbindungs- und Aufhängungselemente enthalten. Die Abschätzung erfolgt somit nur über Gleichung (5.4).

$$\omega_d = \frac{2\pi}{\tau_{av,1}} \quad (5.6)$$

$$D = \frac{\delta_0}{\omega_{d,1}} \quad (5.7)$$

Mit dieser gewonnenen Abschätzung über die Größe der Dämpfungskonstante c_{01} durch zwei lokale Maxima des Lagekoordinatenverlaufs und über die Amplitude A hat man Startwerte für die numerische Parameteridentifikation, welche im nächsten Abschnitt erklärt wird.

Bei der Parameteridentifikation der kleinen Masse werden die Parameterwerte zuerst über einen Ausschwingversuch ohne jegliche Steifigkeit des magnetischen Aktuators, also für ein lineares System, ermittelt. Erst in den weiteren Identifikationsschritten werden Versuchsdaten mit bestromter Spule herangezogen.

Für die kleine Masse ist jedoch neben der unbekanntenen Dämpfung auch die Masse m_2 unbekannt. Eine Näherung zur Abschätzung dieser Masse kann über die Eigenkreisfrequenz $\omega_{d,2}$ getroffen werden. Diese wird über die mittlere Periodendauer $\tau_{av,2}$ ermittelt. Es gilt wie bereits erwähnt für schwach gedämpfte Systeme $\omega_{d,2} \approx \omega_{0,2}$. Somit kann über die gemessenen Steifigkeiten eine Näherung der kleinen Masse berechnet werden. Es ist zu beachten, dass sich die gesamte Steifigkeit des Systems (ohne magnetischen Aktuator) folgendermaßen zusammensetzt:

$$k_{2,ges,lin} = k_{02} + k_{01} + \frac{m_2 g}{L} = k_{Federn,ges} + \frac{m_2 g}{L} \quad (5.8)$$

Mit (5.8) und dem allgemeinen Zusammenhang für die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz (5.9) kommt man durch Umformung auf den Gleichung (5.10) für die Masse:

$$\omega_{0,2}^2 = \frac{k_{2,ges,lin}}{m_2} = \frac{k_{Federn,ges} + \frac{m_2 g}{L}}{m_2} = \frac{k_{Federn,ges}}{m_2} + \frac{g}{L} \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow m_{2,approx} = \frac{k_{Federn,ges}}{\omega_{0,2}^2 - \frac{g}{L}} \quad (5.10)$$

Mit dieser Näherung der kleinen Masse $m_{2,approx}$ wird wiederum in gleicher Weise wie bei der großen Masse die entsprechende Dämpfung c_{02} berechnet. Man hat nun Anfangswerte der Parameter der linearen 1-FG-Bewegungsgleichungen welche für die numerische Parameteridentifikation benötigt werden. In Tabelle 5.4 sind alle bisher ermittelten Parameter gesammelt aufgelistet.

²gemessen

³berechnet

	Masse 1			Masse 1 - reduziert			Masse 2		
Masse	m_1	2,1483 kg	gem. ²	$m_{1,red}$	1,1383 kg	gem.	m_2	0,60142 kg	ber. ³
Steifigkeit	k_{01}	16,959 N/m				gem.	k_{02}	14,548 N/m	gem.
	k_{12}	10,494 N/m							gem.
Dämpfung	c_{01}	7,125 $\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$	ber.	$c_{01,red}$	5,717 $\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$	ber.	c_{02}	11,827 $\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$	ber.

Tabelle 5.4: Gemessene und analytisch ermittelte Parameter

5.3.2 Numerische 1-FG-Parameteridentifikation

Lineare 1-FG-Modelle der Massen

Mit den gemessenen und den daraus analytisch ermittelten Parametern hat man ausreichend gute Anfangswerte für das numerische Parameterfitting mittels `lsqcurvefit`. Bevor die Anpassung aller Parameter der jeweiligen Masse erfolgt, wird noch einmal ausschließlich der Dämpfungsparameter über die analytische Lösung, jetzt jedoch mit allen lokalen Maxima des Signals, angepasst. Dazu bedient man sich wieder der Lösung der linearen Bewegungsgleichung des 1-FG-Schwingers (5.1) und setzt, da wir nur die Hüllkurven vergleichen, den Cosinus-Term zu 1:

$$x_{1,Peaks}(t) = A e^{-\delta_{0,1} t} \quad (5.11)$$

Aus den analytischen Berechnungen des vorigen Abschnittes sind Startwerte $A_{0,1}$ und $\delta_{0,1}$ bereits bekannt und man kann nun mit dem Vektor aller Zeitpunkte \mathbf{t}_p als Eingangsdaten und dem Vektor der Peaks \mathbf{x}_{Peaks} als Vergleichs-Ausgangsdaten die numerische Parameteridentifikation durchführen. In Abb. 5.3 für Masse 1, Abb. 5.4 für Masse 1 reduziert und Abb. 5.5 für Masse 2, werden die Hüllkurve des gemessenen Signals mit den Kurven der analytischen und gefitteten Parameter verglichen. In Tabelle 5.5 sind die identifizierten Parameter für die Amplitude und die Dämpfung aufgelistet.

Parameter	Masse 1		Masse 1, reduziert		Masse 2	
Amplitude	20,147	mm	20,413	mm	14,1337	mm
δ_0	0,001658	s^{-1}	0,002511	s^{-1}	0,00983262	s^{-1}
$c_{0i,approx}$	7.12478	$\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$	5.7167	$\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$	11,8271	$\frac{\text{mN}}{\text{ms}^{-1}}$

Tabelle 5.5: Parameter des linearen Parameterfittings

Im weiteren Schritt erfolgt die numerische Identifikation aller Parameter der linearen Gleichungen ohne Parametererregung. Dazu wird die Gleichung (5.1) um einen Term $x_{vs0,1}$ der Nullpunktverschiebung erweitert, in einer Optimierungsfunktion `FG1optimfunAnalyLin` implementiert und an `lsqcurvefit` übergeben. Neben den bekannten Parametern müssen zur Berechnung guter Ergebnisse noch die erwähnte Nullpunktverschiebung $x_{vs0,i}$, die Anfangsauslenkung $x_{0,i}$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_{0,i}$ als variable Parameter zugelassen werden.

Der Funktion `lsqcurvefit` werden ebenfalls noch obere und untere Grenzwerte übergeben um zu verhindern, dass nicht zulässige oder unrealistische Parameterkonstellationen gefunden werden. Dies ist deshalb wichtig, weil der gleiche Schwingungsverlauf für eine unendliche Anzahl an

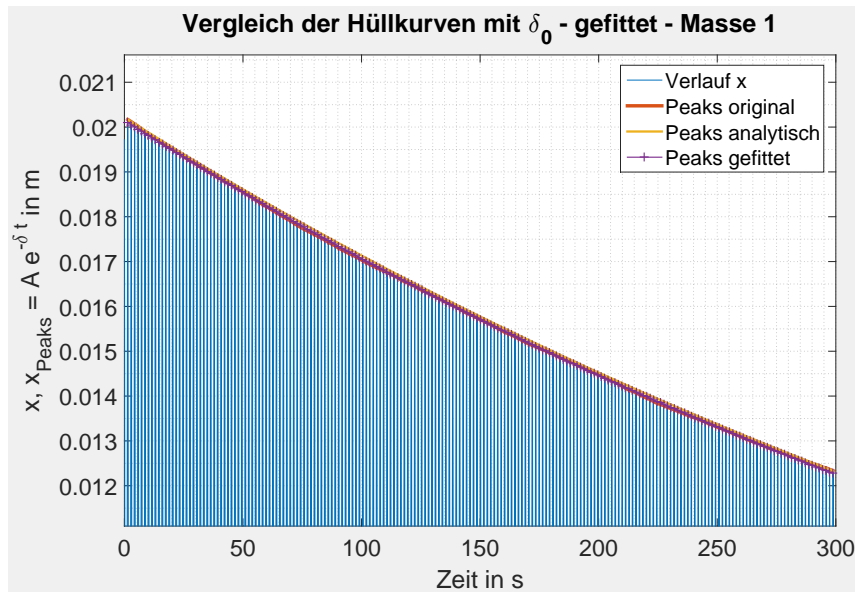


Abbildung 5.3: Vergleich des Verlaufs mit den Hüllkurven aus der analytischen und experimentellen Parameterermittlung der Masse 1

Parameterkombinationen, welche die gleichen Verhältnisse⁴ zueinander haben, möglich ist. In folgender Tabelle 5.6 sind die Ergebnisse der Parameteridentifikation inklusive der Grenzen für die Parameter aufgelistet. Die Abbildungen 5.6 bis 5.8 zeigen die gemessenen und die aus den gefundenen Parametern analytisch berechneten Verläufe der Lagekoordinaten der Massen. Man erkennt für alle eine überaus gute Übereinstimmung. Das gewählte Modell scheint hier somit ausreichend zu sein. Lediglich beim Schwingungsverlauf der Masse 2 ist durch eine deutliche Abweichung zu erkennen, dass die Dämpfung während der ersten 50 Sekunden zu gering identifiziert wird.

⁴gleiche Verläufe bei gleichen Verhältnissen: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_a}{m_a}} = \sqrt{\frac{k_b}{m_b}}$ und $2D\omega_0 = \frac{c_a}{m_a} = \frac{c_b}{m_b}$

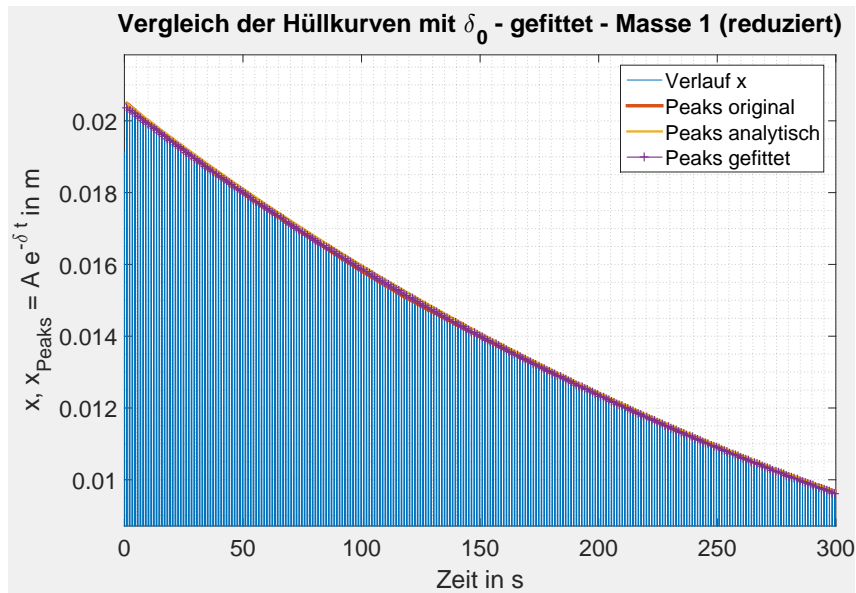


Abbildung 5.4: Vergleich des Verlaufs mit den Hüllkurven aus der analytischen und experimentellen Parameterermittlung der Masse 1 (reduziert)

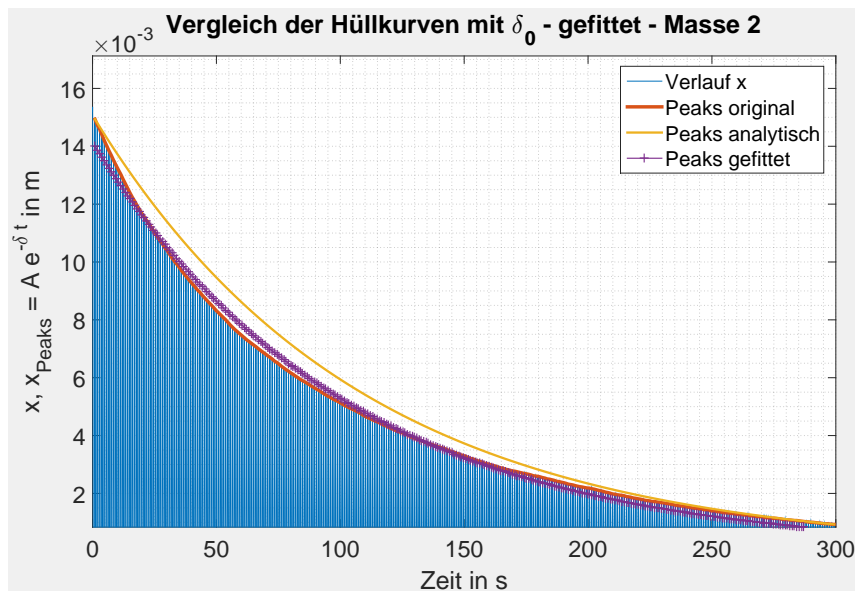


Abbildung 5.5: Vergleich des Verlaufs mit den Hüllkurven aus der analytischen und experimentellen Parameterermittlung der Masse 2

	m_i kg	$k_{i,ges}$ N/m	c_{0i} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,i}$ m	$x_{0,i}$ m	$v_{0,i}$ m/s
Startparameter	2,148300	27,453000	0,007125	0,000000	0,019930	-0,023063
untere Grenze	2,040885	23,335050	0,356	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Masse 1	2,149647	29,322743	7,135	0,000424	0,019706	-0,018000
obere Grenze	2,255715	31,570950	356,239	∞	∞	∞
Startparameter	1,138300	27,453000	0,005717	0,000000	0,019057	-0,045928
untere Grenze	0,910640	26,080350	1,143	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Masse 1 red.	1,105683	28,431212	5,542	0,000315	0,019149	-0,39048
obere Grenze	2,219685	28,825650	285,836	∞	∞	∞
Startparameter	0,601421	25,042000	0,011827	0,000000	0,016306	0,000920
untere Grenze	0,481137	23,789900	2,365	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Masse 2	0,638962	25,326758	12,631	0,000943	0,013656	0,024943
obere Grenze	1,172770	26,294100	591,354	∞	∞	∞

Tabelle 5.6: Parameter der linearen 1-FG-Modelle ermittelt mit `lsqcurvefit` (Methode der kleinsten Quadrate)

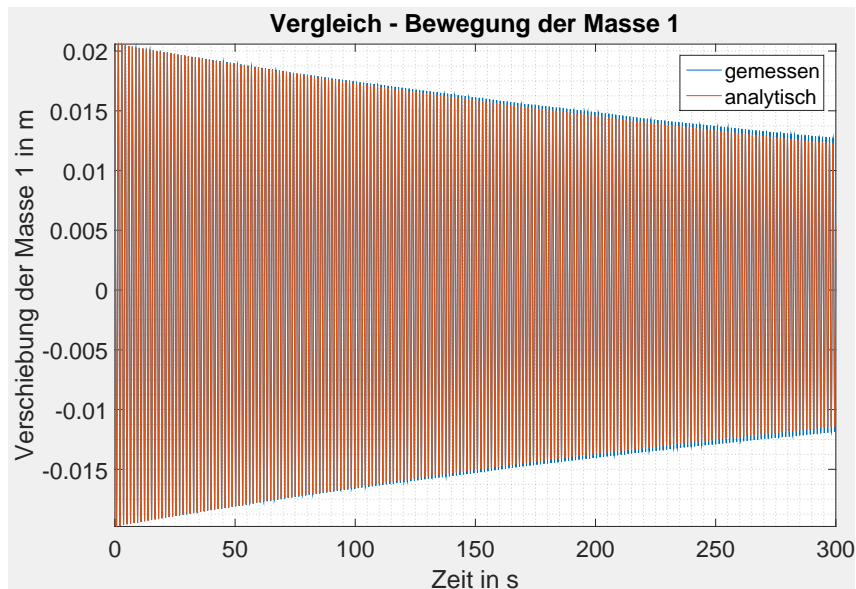


Abbildung 5.6: Vergleich des gemessenen und des simulierten Verlaufs der Masse 1 über 300 s

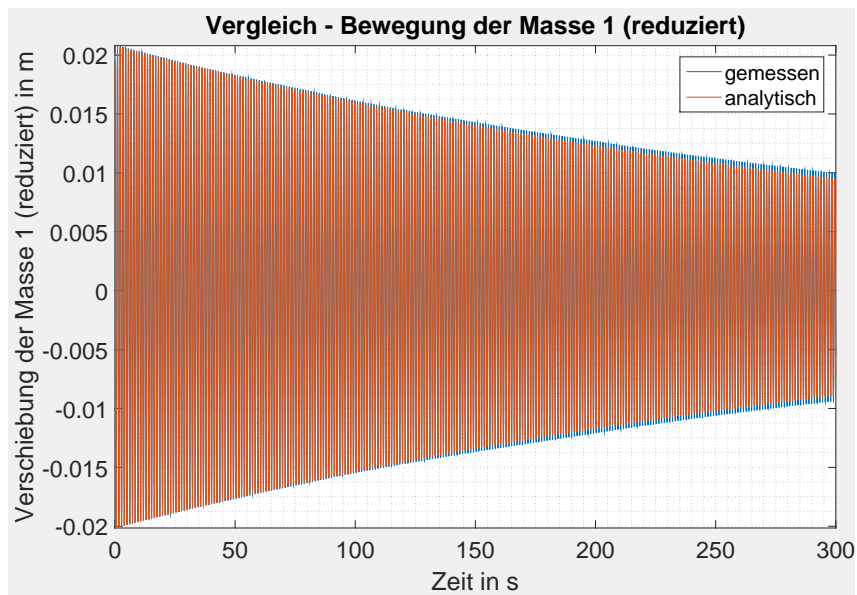


Abbildung 5.7: Vergleich des gemessenen und des simulierten Verlaufs der Masse 1 (reduziert) über 300 s

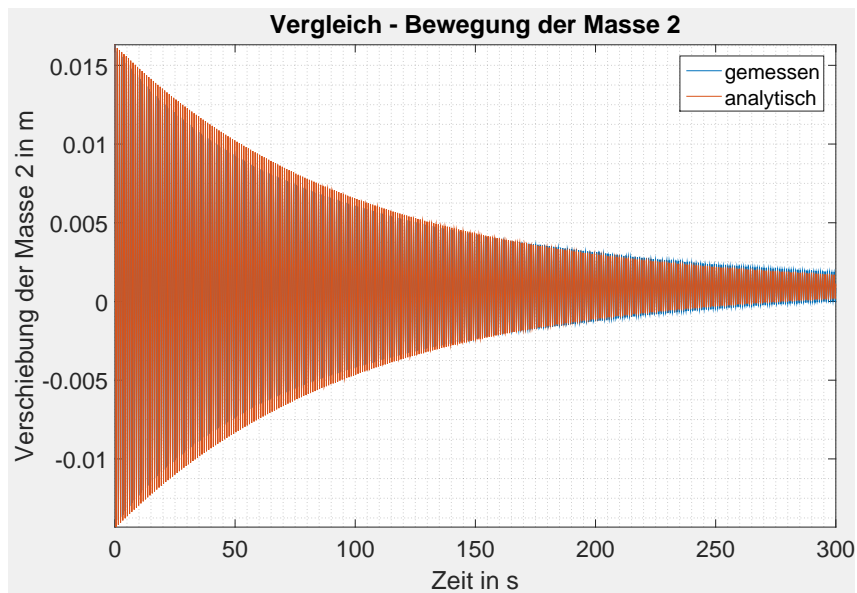


Abbildung 5.8: Vergleich des gemessenen und des simulierten Verlaufs der Masse 2 ohne Parametererregung über 300 s

Verhalten von lsqcurvefit bei Schwingungsgleichungen

Es ist zu beobachten, dass die Methode der kleinsten Quadrate bei Schwingungsgleichungen die Tendenz hat, in erster Linie die Periodendauer des Signals möglichst genau abzubilden. Es soll hier anhand der Bewegung der großen Masse (gleicher Ausschwingversuch wie oben) gezeigt werden, zu welchen falschen Parameteridentifikationen es dabei kommen kann, wenn das Modell, die Grenzen oder die Startwerte nicht richtig gewählt werden.

Wird z.B. in der Bewegungsgleichung die Pendelsteifigkeit vernachlässigt, wird durch Anpassung der verbleibenden Parameter versucht das Signal möglichst gut abzubilden. Abhängig von den Parametergrenzen kommt es dabei zu verschiedenen Ergebnissen. Im ersten Fall sind die Grenzen der Masse und (Feder-)Steifigkeiten eng (Startwerte: m_1 und $k_{1,ges} \pm 5\%$ und $c_{01} \pm 20\%$) um die analytisch/messtechnisch ermittelten Werte gesetzt. Global betrachtet (Abb. 5.9a) sieht es nach einer relativ guten Übereinstimmung aus, jedoch stimmen die gemessenen und simulierten Frequenzen überhaupt nicht überein. Ebenfalls gibt es große Abweichungen bei der Schwingungsenergie, Abb. 5.9b.

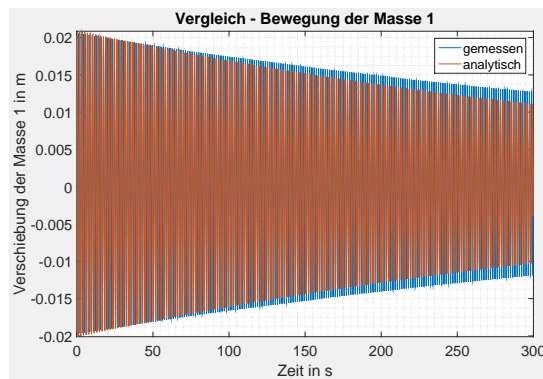
Im zweiten Fall sind die zulässigen Werte der Massen- und Steifigkeitsparameter extrem weit gewählt (Startwerte: m_1 und $k_{1,ges} \pm 50\%$ und $c_{01} -50\%$ und $+100\%$). Der Algorithmus versucht in diesem Falle durch Steigerung der Dämpfung und gleichzeitigem Absenken der Masse und Steifigkeit die Parameter anzupassen. Dabei werden die Masse und Steifigkeit extrem stark abgesenkt und die Dämpfung wiederum bis an die Grenze angehoben.

In Tabelle (5.7) sind die ermittelten Parameter für beide Fälle nochmals gezeigt.

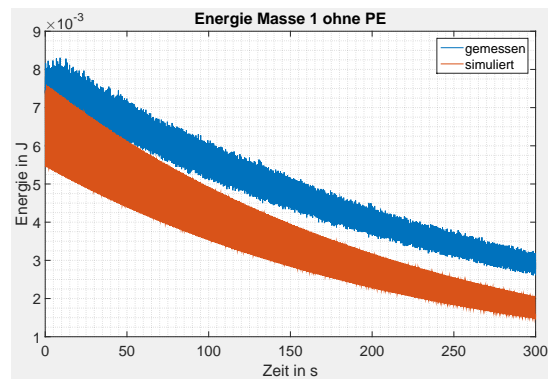
	m_i kg	$k_{i,ges}$ N/m	c_{0i} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,i}$ m	$x_{0,i}$ m	$v_{0,i}$ m/s
ohne Pendelsteifigkeit, enge Grenzen						
Startparameter	2,148300	27,453000	7,125	0,000000	0,019930	-0,023063
untere Grenze	2,040885	26,080350	5,700	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
gefittete Parameter	2,051333	26,080350	8,550	0,000412	-0,000049	-0,000694
obere Grenze	2,255715	28,825650	8,550	∞	∞	∞
ohne Pendelsteifigkeit, weite Grenzen						
Startparameter	2,148300	27,453000	7,125	0,000000	0,019930	-0,023063
untere Grenze	1,074150	13,726500	3,562	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
gefittete Parameter	1,079555	13,726500	14,250	0,000412	-0,000087	-0,001270
obere Grenze	3,222450	41,179500	14,250	∞	∞	∞

Tabelle 5.7: Parameter bei unvollständigem Modell - keine Pendelsteifigkeit

Ein weiterer Fall soll hier betrachtet werden bei dem das Modell zwar vollständig (inklusive Pendelsteifigkeit) ist, jedoch die Grenzen viel zu groß gewählt (0% bis 1000%) werden. Es kommt wiederum zu falsch abgeschätzten Parametern, insbesondere der Steifigkeit und Dämpfung, wie aus Tabelle 5.8 erkennbar ist. Die Abbildungen 5.11a und 5.11b zeigen wieder den Vergleich des Verlaufs der Koordinate und der Energie.

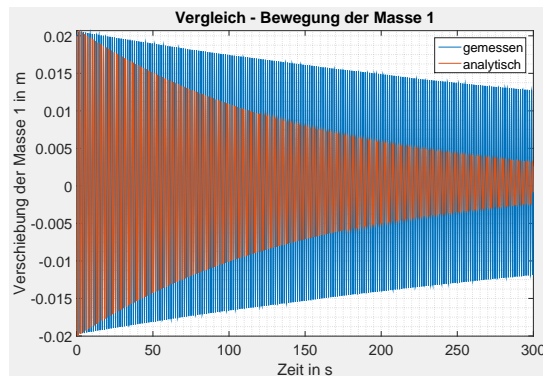


(a) Vergleich der Lagekoordinaten

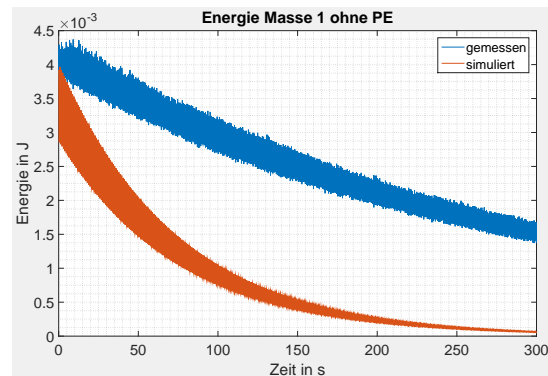


(b) Energievergleich

Abbildung 5.9: Parameterfitting mit engen Parametergrenzen - Vergleich von Messung und Simulation an der Masse 1 ohne Pendelsteifigkeit im Modell

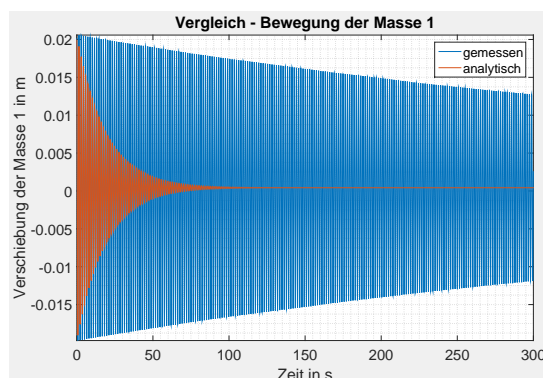


(a) Vergleich der Lagekoordinaten

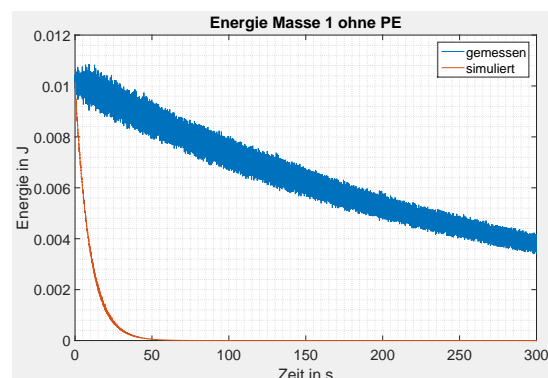


(b) Energievergleich

Abbildung 5.10: Parameterfitting mit weiten Parametergrenzen - Vergleich von Messung und Simulation an der Masse 1 ohne Pendelsteifigkeit im Modell



(a) Vergleich der Lagekoordinaten



(b) Energievergleich

Abbildung 5.11: Parameterfitting ohne Parametergrenzen - Vergleich von Messung und Simulation an der Masse 1 bei vollständigem Modell

	m_i kg	$k_{i,ges}$ N/m	c_{0i} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,i}$ m	$x_{0,i}$ m	$v_{0,i}$ m/s
mit Pendelsteifigkeit, keine Grenzen						
Startparameter	2,148300	27,453000	7,125	0,000000	0,019930	-0,023063
untere Grenze	0,000000	0,000000	0,000	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
gefittete Parameter	2,680235	36,397150	280,908	0,000425	0,033796	-0,078195
obere Grenze	2148,300000	27453,000000	7124,789	∞	∞	∞

Tabelle 5.8: Parameter bei vollständigem Modell - ohne Parametergrenzen

Vergleich der Schwingungsenergie aus Messung und Simulation für 1-FG-Modelle

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Nullpunktverschiebung bzw. der Ruhelage der Masse. Während diese global für das gesamte System statisch oder einfach durch Mittelwertbildung des Lageverlaufs bestimmt werden kann, ist es für die einzelnen Anteile der Steifigkeiten kaum möglich diese zu bestimmen. Es kann z.B. nicht ermittelt werden wieviel in dieser Ruhelage die Federsteifigkeiten gegenüber den Pendelsteifigkeiten vorgespannt sind. Für eine qualitativ gute Beschreibung des Verschiebungsverlaufs x_1 ist die Annahme einer einzigen globalen Nullpunktverschiebung ausreichend. Jedoch kommt es bei der Berechnung der Schwingungsenergie zu physikalisch nicht vorhandenen Schwankungen. Dieses Problem ist insbesondere in der Abb. 5.12 gut zu erkennen in welcher die Schwingungsenergie aus dem gemessenen Signal und aus einer Simulation der großen Masse verglichen wird. Es ist gut zu erkennen, dass die Energie des gemessenen Signals als sehr breiter, verrauscht wirkender Verlauf dargestellt wird. Hauptgrund für das Auftreten dieser Anteile des Energieverlaufs sind in erster Linie Abweichungen der identifizierten von den realen Parametern und numerische Ungenauigkeiten. In Abb. 5.13 für die reduzierte große Masse und Abb. 5.14 für die kleine Masse erkennt man, dass die Energieverläufe der gemessenen Signale deutlich schmaler sind. Für die kleine Masse zeigt sich jedoch eine deutliche Abweichung zwischen Messung und Simulation, welche auf eine nicht rein viskose Dämpfung an der kleinen Masse zurückzuführen ist.

Bei allen Energieverläufen der Simulation ist ebenfalls ein deutliches „Rauschen“ zu erkennen. Nachdem die Simulation jedoch mit den gleichen Parametern durchgeführt wurde wie die Energieberechnung müsste hier ein glatter Verlauf auftreten. Die trotzdem vorhandenen Abweichungen sind somit nur auf numerische Ungenauigkeiten zurückzuführen, welche natürlich auch bei den gemessenen Signalen einen entscheidenden Einfluss haben werden.

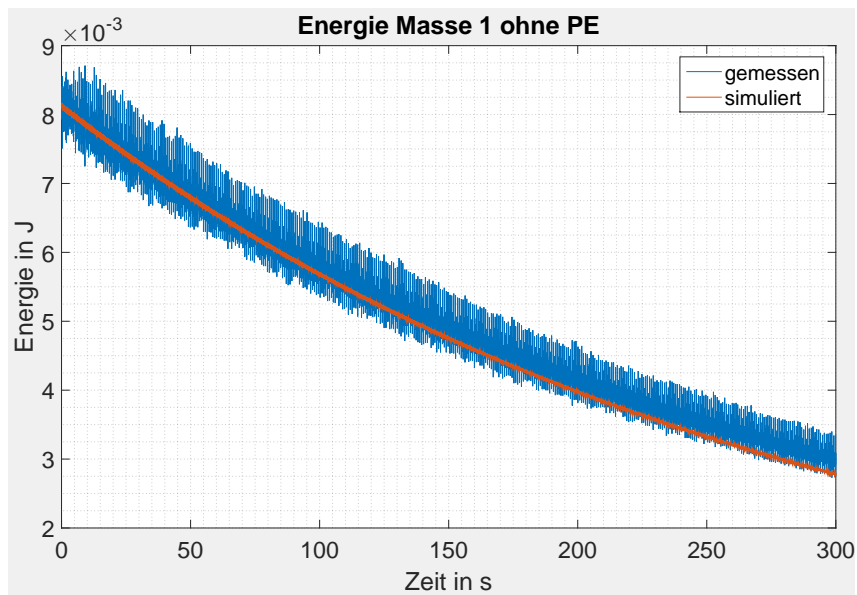


Abbildung 5.12: Vergleich der gesamten Schwingungsenergie des simulierten und gemessenen Verlaufs der Masse 1

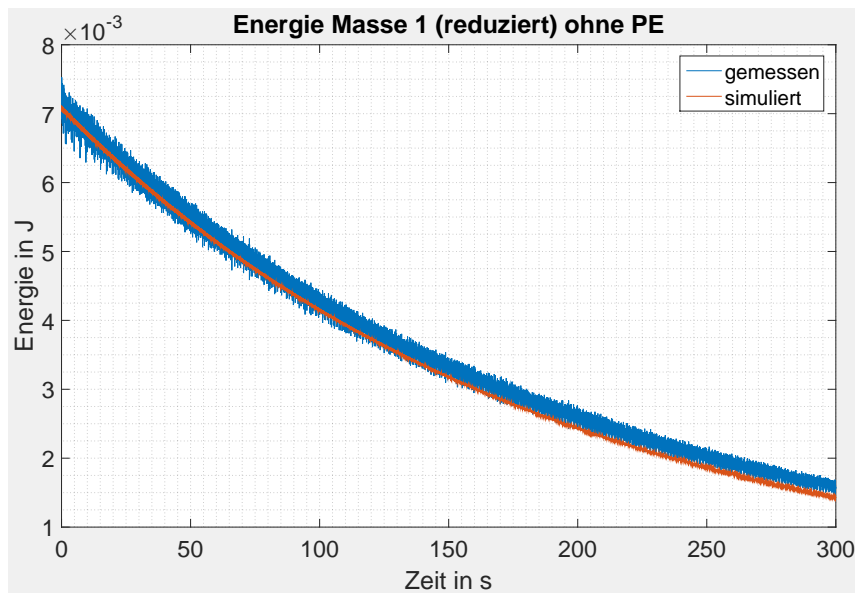


Abbildung 5.13: Vergleich der gesamten Schwingungsenergie des simulierten und gemessenen Verlaufs der Masse 1 (reduziert)

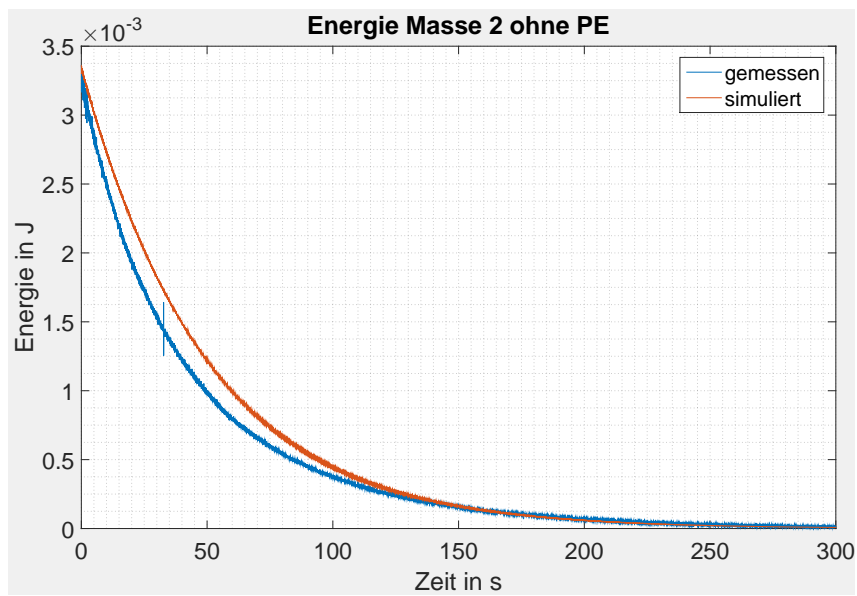


Abbildung 5.14: Vergleich der gesamten Schwingungsenergie des simulierten und gemessenen Verlaufs der Masse 2 - ohne Parametererregung

Nichtlineares 1-FG-Modell der kleinen Masse

Nachdem durch die Parametererregung die Bewegungsgleichung (4.13) der kleinen Masse nichtlinear ist, kann man die analytische Lösung (5.1), bei aktiver Parametererregung, nicht mehr zur Identifikation heranziehen. Um nun die Parameter bestimmen zu können wird eine andere Herangehensweise bei der Definition der Optimierungsfunktion für `lsqcurvefit` angewendet. Anstatt die Parameter in eine analytische Lösung einzusetzen und mit dem gemessenen Verlauf zu vergleichen, wird die Differentialgleichung (4.13) um einen Residuumsterm R auf der rechten Seite erweitert und direkt in der Optimierungsfunktion implementiert.

$$m_2 \ddot{x}_{2,t} + c_{02} \dot{x}_{2,t} + \left(k_{02} + k_{12} + \frac{m_2 g}{L} + i_{PE,t} (k_{I0} + k_{I2} x_{2,t}^2) \right) (x_{2,t} - x_{vs0,2}) = R \quad (5.12)$$

Als Eingangsdaten reicht jetzt nicht mehr nur ein Vektor der Zeit aus, sondern es werden weiters Lage $x_{2,t}$, Geschwindigkeit $v_{2,t}$, Beschleunigung $a_{2,t}$ und der Spulenstrom $i_{PE,t}$ zu allen Zeitpunkten benötigt. Als Ausgangsdaten zum Vergleich wird nicht mehr der Verlauf x_2 verwendet, dieser ist bereits Teil der Eingangsdaten, sondern ein Nullvektor, welcher fordert, dass die homogene Bewegungsgleichung erfüllt ist ($R = 0$).

Das Problem bei dieser Vorgehensweise liegt darin, dass man aus der Messung nur den Verlauf der Auslenkung $x_{2,t}$ der Masse und des Strom $i_{PE,t}$ kennt, jedoch nicht die Geschwindigkeit $v_{2,t}$ und Beschleunigung $a_{2,t}$. Diese müssen durch ein- bzw. zweimalige numerische Differentiation ermittelt werden, was jedes mal zu einer Vergrößerung der Störsignale führt. Zur Generierung der benötigten Signale wurden zentrale Differenzquotienten verwendet, welche die Störungen auf einem akzeptablen Niveau halten.

Als Testdaten für diesen Fittingschritt wurde ein Ausschwingversuch mit harmonischer Parametererregung durchgeführt. Für den Spulenstrom der Parametererregung wird ein Signal mit einem Mittelwert von 1,1753 A, einer Amplitude von 0,6599 A (56.14% Prozent des Mittelwerts) und einer Kreisfrequenz von 2.00 rad/s gewählt. Aus vorhergehenden Simulationen ist bekannt, dass es sich hierbei um eine „unkritische“ Frequenz handelt, bei der es zu keiner Resonanz oder anderen parametererregungsspezifischen Effekten kommt.

Für die Anfangswerte der Parameterfittingfunktion verwendet man die ermittelten Werte aus der linearen Parametersuche (Tabelle 5.6). Zusätzlich benötigt man noch Startparameter für die Konstanten des magnetischen PE-Aktuators, welche hier direkt aus [8] gewählt werden. Die Grenzwerte werden für die Masse und die Steifigkeit sehr eng ($\pm 5\%$) um den Startwert gewählt. Für die Dämpfung ist der erlaubte Bereich sehr weit ($-50\%+100\%$) gewählt, ebenso wie für die Parameter des magnetischen Aktuators ($\pm 50\%$).

In Tabelle (5.9) sind die ermittelten Parameter aufgelistet und in Abbildungen 5.15 bis 5.17 werden die Verläufe, Spektren und Energien des Versuchs und der Simulation für den gefundenen Parametersatz verglichen.

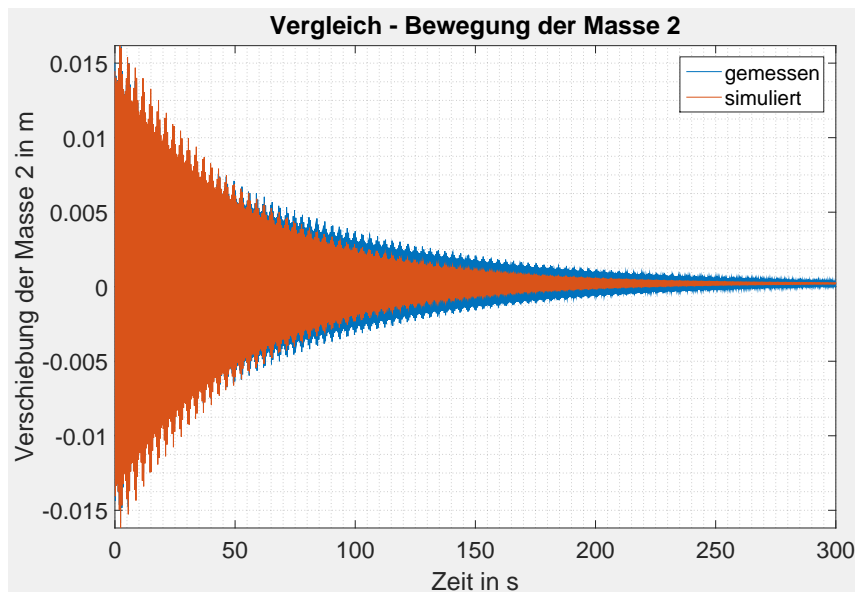


Abbildung 5.15: Parameteridentifikation der Masse 2 - Vergleich des gemessenen und simulierten Verlaufs der Masse 2 mit Parametererregung

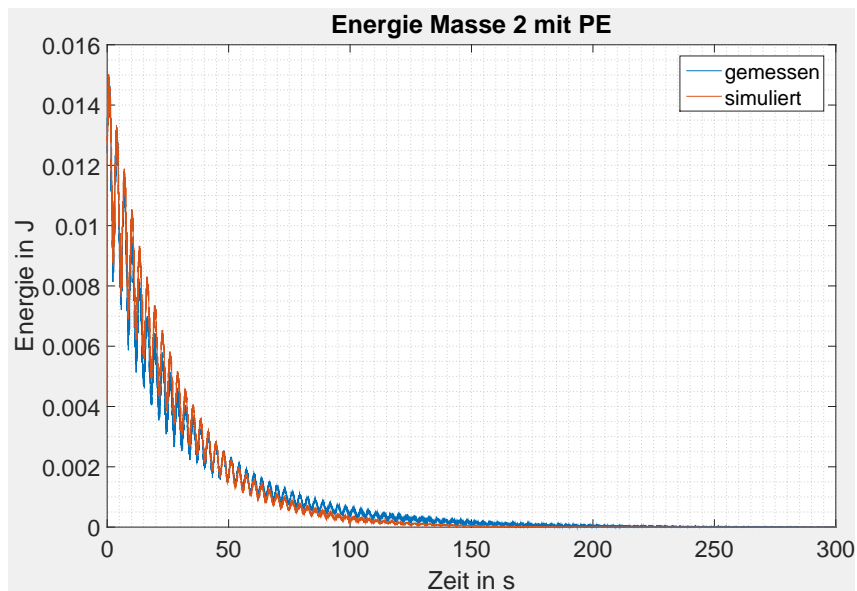


Abbildung 5.16: Parameteridentifikation der Masse 2 - Vergleich der gesamten Schwingungsenergie des simulierten und gemessenen Verlaufs der Masse 2 - mit Parametererregung

	m_i kg	$k_{i,ges}$ N/m	c_{0i} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,i}$ m	$x_{0,i}$ m	$v_{0,i}$ m/s
untere Grenze	0,607014	24,060420	6,316	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
gefittet	0,607014	24,060420	22,873	0,000221	0,014431	-0,064982
obere Grenze	0,670910	26,593096	25,262	∞	∞	∞
	k_{I0} N/Am	k_{I2} N/Am ³				
untere Grenze	37,208340	31972,151718				
gefittet	71,725344	47080,647766				
obere Grenze	111,625020	95916,455155				

Tabelle 5.9: Parameter des parametererregten 1-FG-Modells der kleinen Masse, ermittelt mit lsqcurvefit (Methode der kleinsten Quadrate)

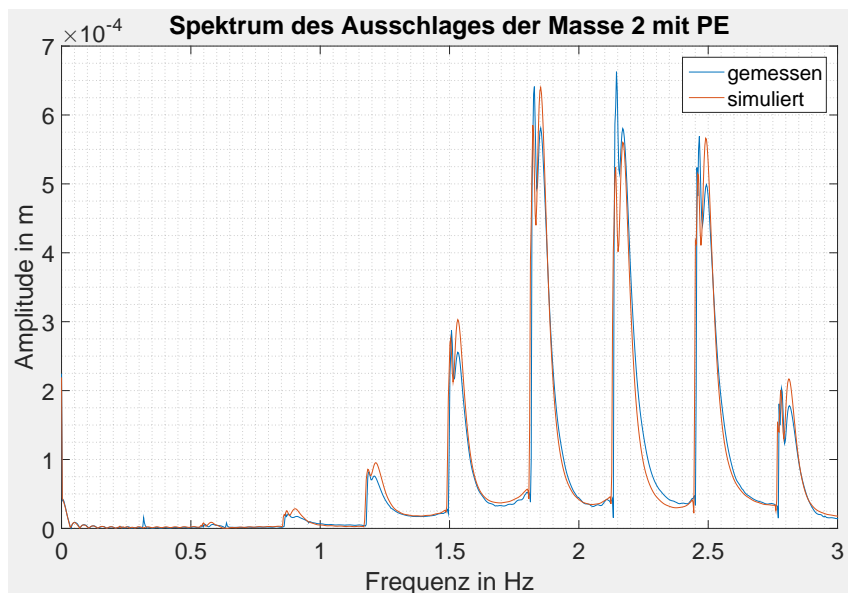


Abbildung 5.17: Parameteridentifikation der Masse 2 - Vergleich der Amplitudenspektren des Ausschlags von Masse 2 mit Parametererregung

5.4 Parameteridentifikation am 2-FG-System

5.4.1 Numerische 2-FG-Parameteridentifikation

Nachdem für ein nichtlineares, gedämpftes, parametererregtes System mit zwei Freiheitsgraden eine analytische Lösung für die Bewegung der Massen nicht mehr gefunden werden kann, wird die Parameteridentifikation ähnlich wie beim parametererregten 1-FG-System durchgeführt. Dazu wird das System mit Gleichung (4.11) umgeformt und in der Optimierungsfunktion für jeden Zeitpunkt der Testdaten folgende Gleichung berechnet:

$$\ddot{\mathbf{x}}_v = -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{K}(t, x_{2,t}) (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{vs0})) \quad (5.13)$$

Als Eingangsdaten für die Fittingfunktion werden hier die Lage \mathbf{x}_t und die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_t$ aus dem Versuch verwendet, während für die Vergleichsdaten die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}_v$ herangezogen wird. Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe werden wieder aus den Lagekoordinatenverlauf mittels zentraler Differenzenquotienten gebildet. Im Wesentlichen ist dieses Vorgehen gleich wie im Falle für das nichtlineare 1-FG-System und wird hier aus Gründen der Demonstration verwendet.

Zur Ermittlung dieser Testdaten wurde wieder ein Versuch mit möglichst allgemeinen Verhalten, abseits von Eigenfrequenzen und instabilen Bereichen, verwendet. Es wurde eine Parametererregungsfrequenz von 2 rad/s, ein Mittelwert des Spulenstroms von 1,1721 A und eine Amplitude des harmonischen Verlaufs des Stroms von 0,6610 A (56,39% des Mittelwerts) gewählt.

Aus den vorangegangenen Identifikationsschritten für die 1-FG-Systeme der beiden Massen erhält man nun alle 11 Startwerte für die Parameter. Die Grenzen dieser Parameter sind in Tabelle 5.10 gemeinsam mit den identifizierten Parametern aufgelistet und sind bewusst eng gewählt. Deutlich zu erkennen ist die Tendenz der Fittingfunktion, einzelne Parameter bis an ihre Grenzwerte zu setzen. In Abbildungen (5.18) bis (5.20) werden wiederum die Verläufe, Spektren und Energien miteinander verglichen.

5.4.2 Identifizierte Parameter und Verifikation

Betrachtet man die Spektren (5.19) so erkennt man für beide Lagekoordinaten eine äußerst gute Übereinstimmung im Bereich der ersten Eigenfrequenz des Systems. Auch die Lage der zweiten Eigenfrequenz und der höheren Ordnungen stimmen gut überein, wenn auch die Höhe der Amplitudenausschläge und die Form stärker voneinander abweichen.

In der Grafik der Energieverläufe (5.20) erkennt man ebenfalls einen qualitativ guten Zusammenhang. Die hier wieder vorhandenen Unschärfen der Energien des Versuchs (als auch der Simulation) sind wieder auf die Tatsache zurückzuführen, dass die einzelnen Steifigkeitselemente bei verschiedenen Auslenkungen ihre Ruhelage haben und natürlich auch auf numerische Ungenauigkeiten.

5.5 Alternatives System mit reduzierter Masse

Zur erweiterten Untersuchung der Parametererregung am 2-FG-System wird die große Masse verkleinert. Dazu wurden 10 der Zylinder vom Rahmen der Masse 1 abgenommen. Beim Parameter-

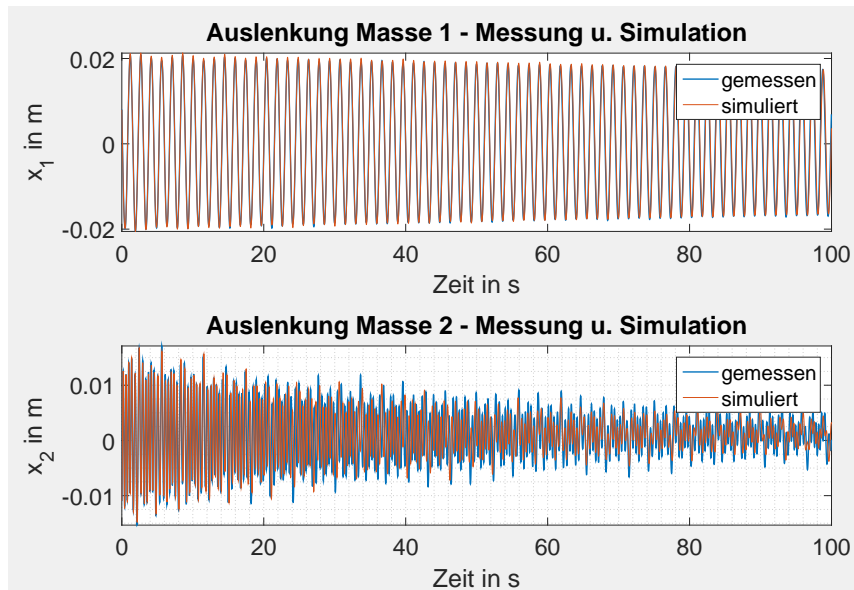


Abbildung 5.18: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der simulierten und gemessenen Lagekoordinaten der beiden Massen

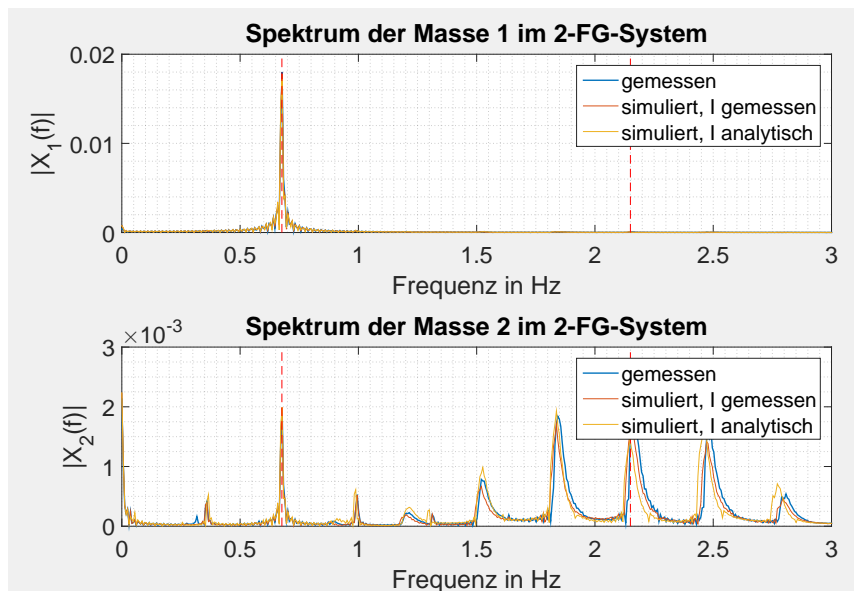


Abbildung 5.19: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der simulierten und gemessenen Spektren der Lagekoordinaten der beiden Massen

	m_1 kg	k_{01} N/m	c_{01} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,1}$ m
Startparameter	2,149647	17,060900	7,135	0,000424
untere Grenze	2,042165	16,207855	0,713	$-\infty$
gefittet	2,046130	17,659793	7,848	0,000472
obere Grenze	2,257129	17,913945	7,848	∞
	m_2 kg	k_{02} N/m	c_{02} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,2}$ m
Startparameter	0,637365	14,641800	22,873	0,000221
untere Grenze	0,576663	13,909710	2,287	$-\infty$
gefittet	0,609870	13,909710	25,160	0,001142
obere Grenze	0,637365	15,373890	25,160	∞
	k_{12} N/m	k_{I0} N/Am	k_{I2} N/Am ³	
Startparameter	10,840232	71,725344	47080,647766	
untere Grenze	10,298220	68,139077	44726,615377	
gefittet	10,298502	71,317354	47047,668068	
obere Grenze	11,382243	75,311611	49434,680154	

Tabelle 5.10: Parameter des parametererregten 2-FG-Modells, ermittelt mit `lsqcurvefit` (Methode der kleinsten Quadrate)

identifikationsprozess für das 1-FG-Modell der großen Masse sind bereits die Startparameter der reduzierten Masse 1 ermittelt worden (siehe Abschnitte 5.3.1 und 5.3.2).

Für das 2-FG-System wird die Parameteridentifikation ebenfalls wie oben durchgeführt, wobei die Startparameter der kleinen Masse unverändert bleiben. In Tabelle 5.11 sind die ermittelten Parameter des Systems mit reduzierter Masse 1 aufgeführt und die Abbildungen 5.21, 5.22 und 5.23 zeigen wiederum den Vergleich der Verläufe, Spektren und Gesamtenergien der Simulation und der Messung.

In folgender Grafik 5.24 sind die analytisch ermittelten Systemfrequenzen beider Systeme über die Masse 1 aufgetragen. Blau markiert sind jeweils die Frequenzspektren mit den in den Experimenten verwendeten Massen. Man erkennt hier gut, dass beim ersten Satz von Parametern (Masse 1: 2,0461 kg) rund um die erste Kombinationsfrequenz vom Differenztyp zwei weitere Frequenzen zu finden sind. Um das Verhalten der Kombinationsfrequenz vom Differenztyp zu untersuchen werden die Untersuchungen mit der reduzierten Masse 1 (1,1100 kg) durchgeführt, bei denen ausreichend Abstand zwischen den Frequenzen besteht.

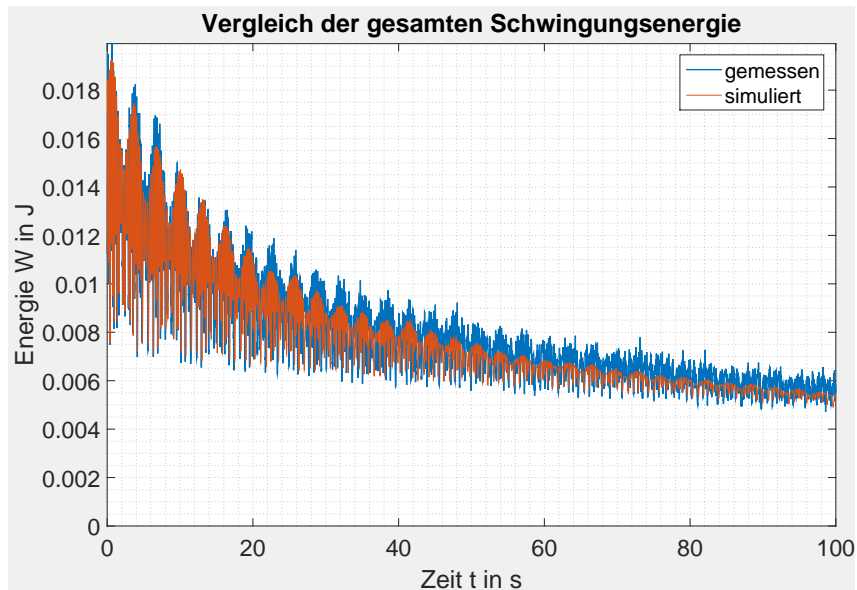


Abbildung 5.20: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der Energie der simulierten und gemessenen Schwingung des 2-FG-Systems

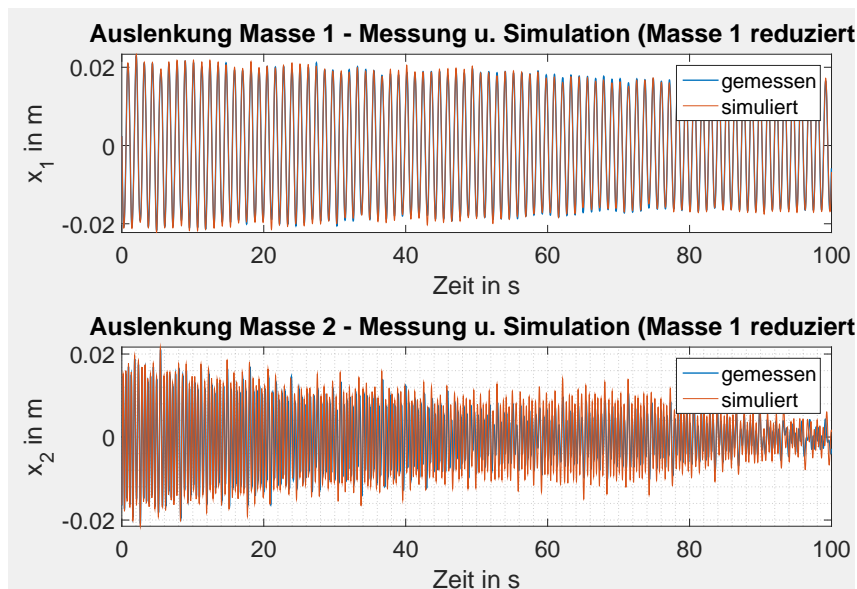


Abbildung 5.21: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der simulierten und gemessenen Lagekoordinaten der beiden Massen (Masse 1 reduziert)

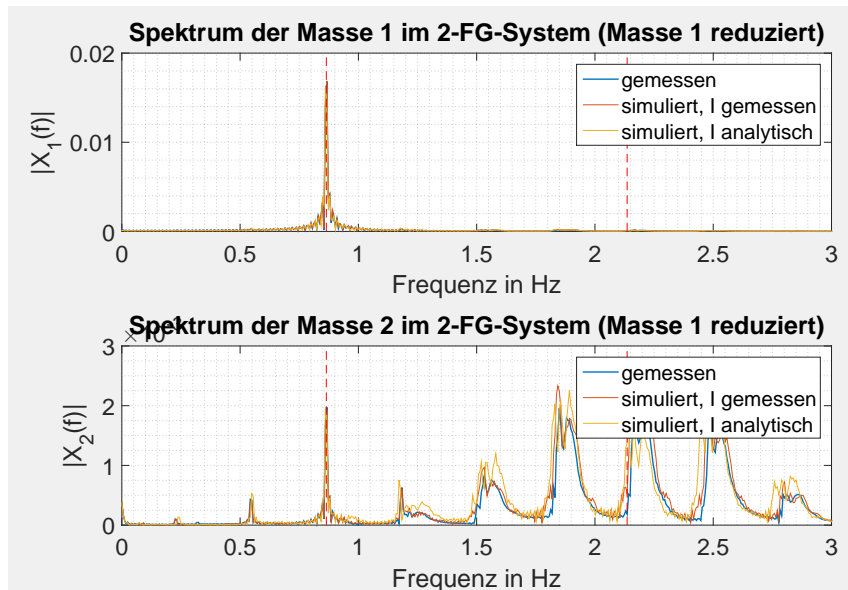


Abbildung 5.22: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der simulierten und gemessenen Spektren der Lagekoordinaten der beiden Massen (Masse 1 reduziert)

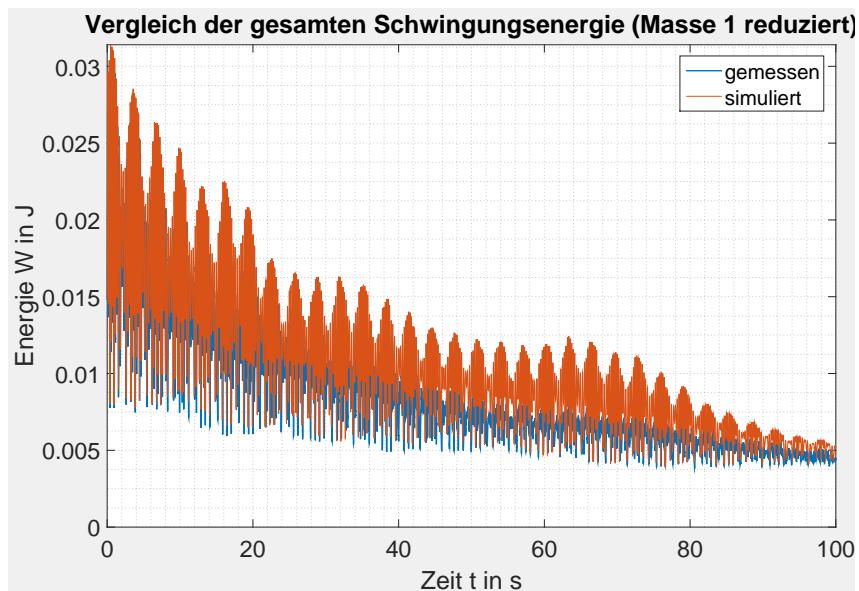


Abbildung 5.23: Parameterfitting des 2-FG-Modells - Vergleich der Energie der simulierten und gemessenen Schwingung des 2-FG-Systems (Masse 1 reduziert)

	m_1 kg	k_{01} N/m	c_{01} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,1}$ m
Startparameter	1,105683	17,060900	5,542	0,000315
untere Grenze	1,050399	16,207855	0,554	−∞
gefittet	1,110011	17,512570	6,089	0,000086
obere Grenze	1,160967	17,913945	6,096	∞
	m_2 kg	k_{02} N/m	c_{02} mN/ms ⁻¹	$x_{vs0,2}$ m
Startparameter	0,653419	14,641800	16,818	0,000215
untere Grenze	0,591188	13,909710	1,682	−∞
gefittet	0,653418	14,009671	18,500	-0,000199
obere Grenze	0,653419	15,373890	18,500	∞
	k_{12} N/m	k_{I0} N/Am	k_{I2} N/Am ³	
Startparameter	10,697502	73,365875	63945,298030	
untere Grenze	10,162627	69,697581	60748,033128	
gefittet	11,004229	75,560170	63906,973890	
obere Grenze	11,232377	77,034168	67142,562931	

Tabelle 5.11: Parameter des parametererregten 2-FG-Modells (reduzierte Masse 1), ermittelt mit lsqcurvefit (Methode der kleinsten Quadrate)

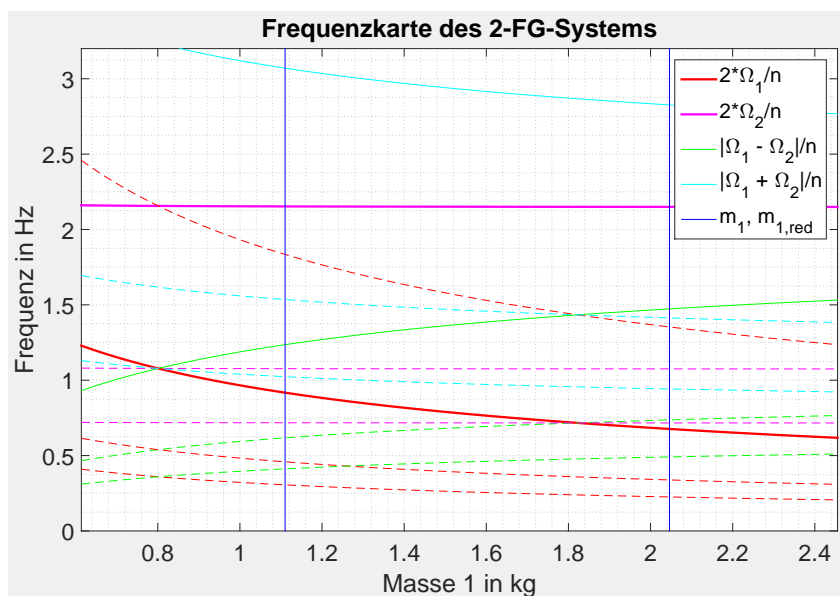


Abbildung 5.24: Frequenzkarte des 2-FG-Systems in Abhängigkeit des Massenparameters von „Masse 1“

Kapitel 6

Auswertung der simulierten und gemessenen PE-Schwingungen

6.1 Vergleich der Simulationen und Messungen über Spektralkarten des Ausschlags

Anhand von zwei Versuchsreihen soll die Übereinstimmung des Modells und der Simulation in den Frequenzspektren der Auslenkungen für verschiedene Parametererregungsfrequenzen geprüft werden. Dazu wird jeweils im Versuch und der Simulation ein Frequenzbereich der Parametererregung von $0,05 \text{ rad/s}$ ($0,007958 \text{ Hz}$) bis $15,5 \text{ rad/s}$ ($2,4669 \text{ Hz}$) in $0,05 \text{ rad/s}$ Schritten durchlaufen. Bei jeder Frequenz wird ein Ausschwingvorgang von 300 Sekunden gemessen bzw. simuliert. Innerhalb einer Messreihe sind alle Anfangsauslenkungen gleich gewählt.

In der ersten hier verglichenen Messreihe werden die Versuche mit einer Amplitude von $0,690 \text{ A}$ ($58,82\%$ des Strommittelwertes) durchgeführt und Masse 1 ist mit der maximalen Anzahl von Gewichten besetzt ($m_1 = 2,046130 \text{ kg}$). Die Anfangsauslenkungen beider Massen $x_{0,1}$ und $x_{0,2}$ betragen jeweils 20 mm .

In den Spektralkarten der Messung (links) sind waagrecht die Versuche in rot markiert bei welchen die Parametererregung aufgrund unzulässig hoher Auslenkungen einer Masse (z.B.: Resonanz) abgebrochen wurde. Die Spektralkarten der Simulation zeigen sowohl waagrecht als auch senkrecht die analytisch ermittelten Frequenzen des 2-FG-Schwingers: Eigenfrequenzen rot bzw. magenta, strichliert und die Kombinationseigenfrequenz vom Differenztyp grün strichliert. Zusätzlich dazu sind die analytisch ermittelten „ersten Ordnungen“ der Eigenfrequenzen durch durchgezogene Linien (magenta, strichliert) eingezeichnet.

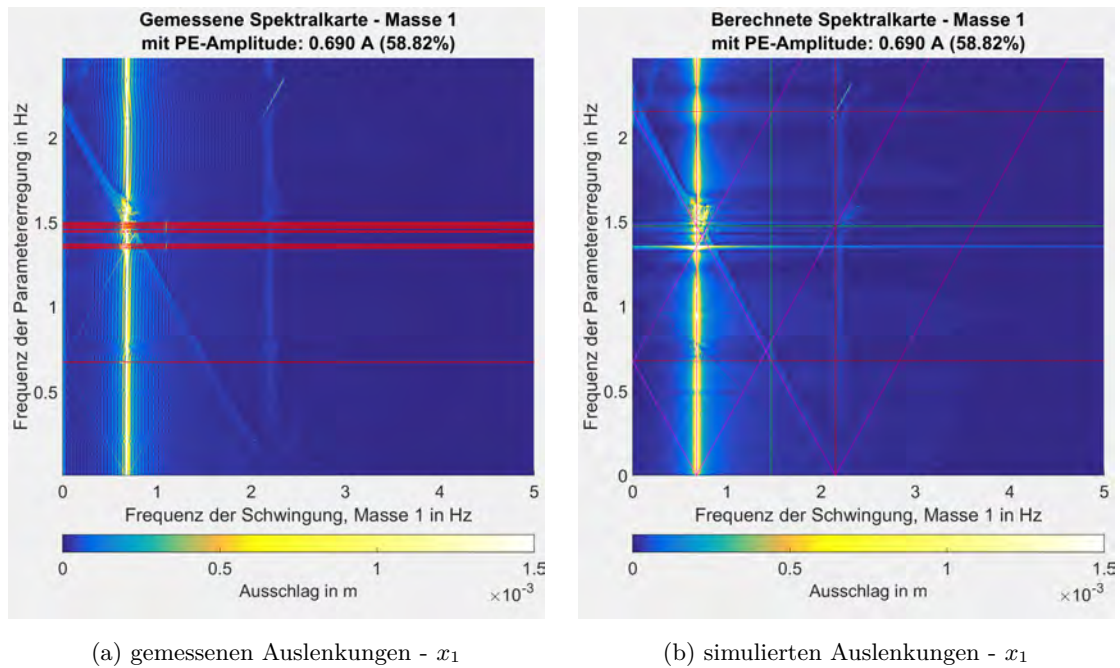


Abbildung 6.1: Spektrogramme der freien Schwingung mit PE-Amplitude 0,690 A (58,82%) und Anfangsbedingungen $x_1 = 20\text{mm}$ und $x_2 = 20\text{mm}$ - Ausschlag der Masse 1 - x_1

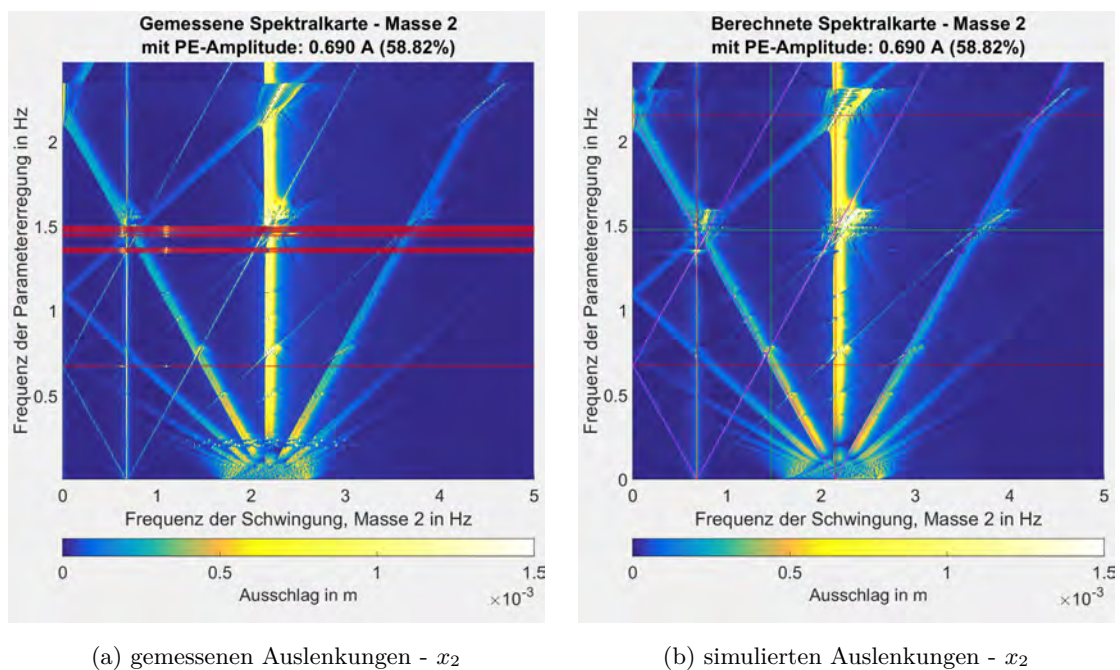
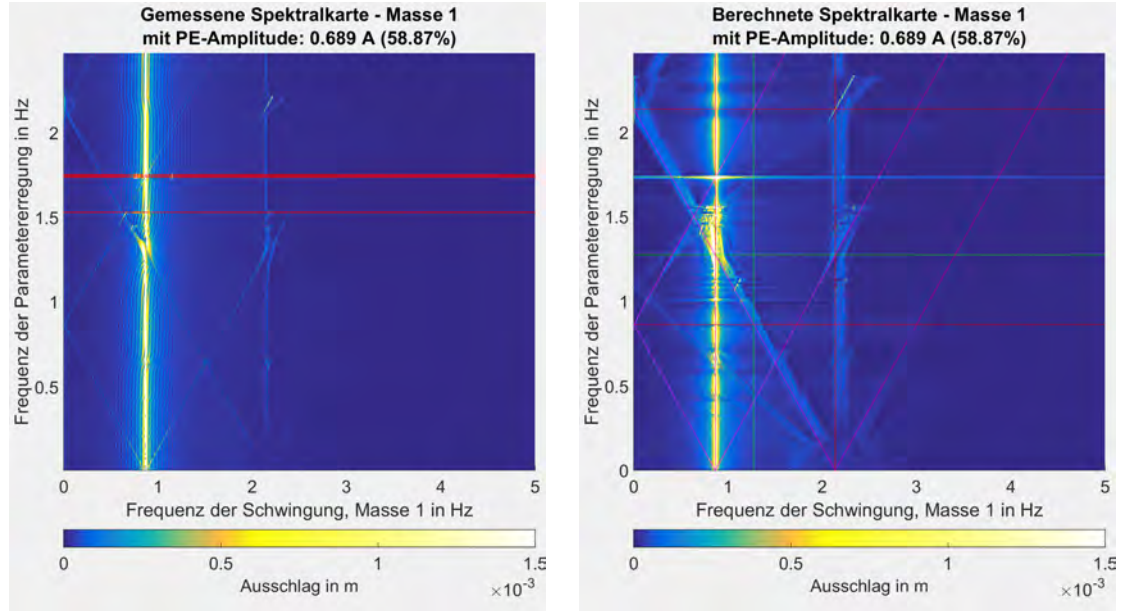


Abbildung 6.2: Spektrogramme der freien Schwingung mit PE-Amplitude 0,690 A (58,82%) und Anfangsbedingungen $x_1 = 20\text{mm}$ und $x_2 = 20\text{mm}$ - Ausschlag der Masse 2 - x_2

In der zweiten verglichenen Versuchsreihe ist die Masse 1 auf 1,1101 kg reduziert. Die Parametererregung erfolgt wieder mit einer Amplitude von 0,689 A (58,83% des Strommittelwerts) und die Anfangsauslenkungen wurden gewählt mit $x_1 = 20,0$ mm und $x_2 = 8,0$ mm.



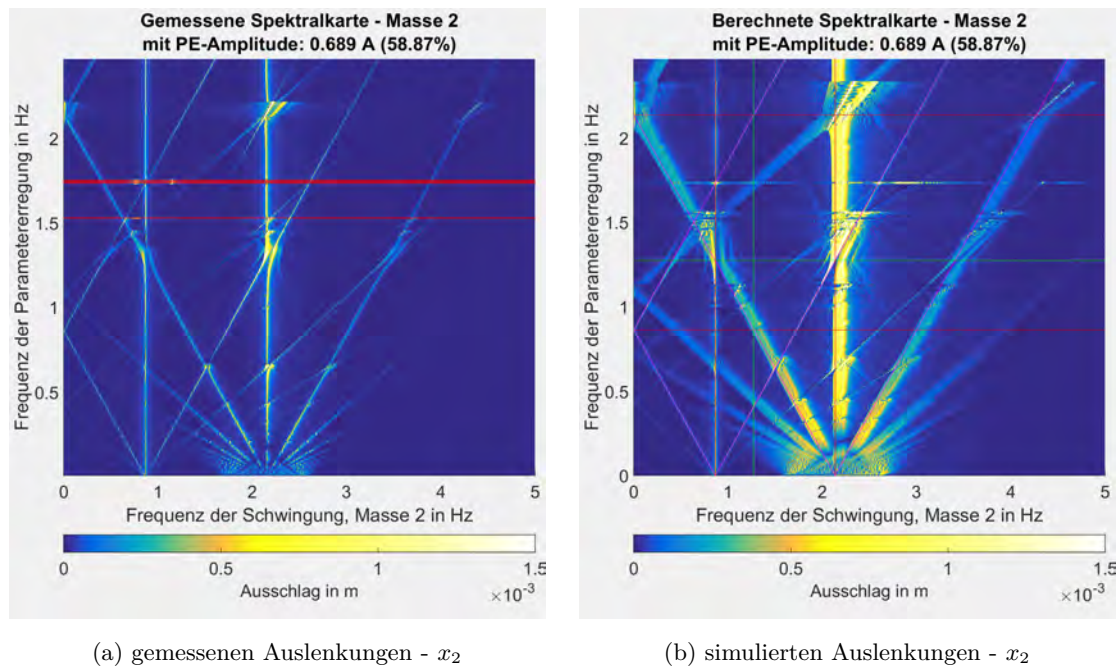
(a) gemessenen Auslenkungen - x_1

(b) simulierten Auslenkungen - x_1

Abbildung 6.3: Spektalkarten der freien Schwingung mit reduzierter Masse 1, PE-Amplitude 0,689 A (58,87%) und Anfangsbedingungen $x_1 = 20,0$ mm und $x_2 = 8,0$ mm - Ausschlag der Masse 1 - x_1

Man erkennt, dass die simulierten Schwingungen die Messungen qualitativ gut abbilden. Es sind jeweils die beiden bestimmenden Eigenfrequenzen und die „höheren Ordnungen“ der Schwingung aufgrund der Parametererregung erkennbar. Weitere, besondere Effekte der Parametererregung sind ebenso gut erkennbar. Bei der Parametererregung mit der Kombinationsfrequenz vom Differenztyp erfolgt die Schwingung der Massen nicht mehr mit den Eigenfrequenzen des Systems, sondern mit zwei Frequenzen nahe der Eigenfrequenz. Dieser Effekt kann sowohl bei der Simulation als auch bei der Messung beobachtet werden und wurde schon in [14] beschrieben und ist hier besonders gut in Abb. 6.3 und 6.4 zu erkennen. Weiters erkennt man auch, dass dieser Effekt bei den niedrigeren (halben, dritteln, etc.) Kombinationseigenfrequenzen des Differenztyps vorkommt.

Ein weiterer deutlich erkennbarer Effekt ist im Bereich der zweiten Eigenfrequenz des Systems zu sehen, wo die zweite Eigenfrequenz mit ihrer zweiten Ordnung auf eine Frequenz zusammenfällt. Würde man die Linie dieser neuen Frequenz verlängern würde sie genau durch den Koordinatenursprung gehen was wiederum bedeutet, dass es sich um die Parametererregungsfrequenz handelt. Diese Erkenntnis kommt ein wenig überraschend da im allgemeinen angenommen werden kann, dass ein 2-FG-System mit seinen beiden Eigenfrequenzen und diversen höheren Ordnungen durch die Parametererregung schwingt. Der gleiche Effekt ist ebenfalls in der Umgebung des Schnittpunktes der ersten Ordnung mit der Vierten zu erkennen. Zusätzlich ist in diesem Bereich deutlich zu erkennen, dass es einen konstanten Anteil im Spektrum bei 0 Hz gibt. In Abschnitt 6.4.3 wird



(a) gemessenen Auslenkungen - x_2

(b) simulierten Auslenkungen - x_2

Abbildung 6.4: Spektralkarten der freien Schwingung mit reduzierter Masse 1, PE-Amplitude 0,689 A (58,87%) und Anfangsbedingungen $x_1 = 20,0\text{mm}$ und $x_2 = 8,0\text{mm}$ - Ausschlag der Masse 1 - x_2

etwas detaillierter auf diese beiden Effekte eingegangen.

Ebenfalls sehr unerwartet kommt es bei niedrigen Frequenzen (ca. 0,2 Hz) der Parametererregung zum Verschwinden des Frequenzanteils der zweiten Eigenfrequenz. Etwas weniger deutlich erkennbar ist auch das einzelne Verschwinden der höheren Ordnungen bei noch niedrigeren Frequenzen. In Abschnitt 6.4.2 wird darauf noch einmal genauer eingegangen. In Summe liefert der Vergleich dieser Diagramme jedoch eine Bestätigung für die richtige Wahl des Modells und eine ausreichend gute Identifikation der Parameter.

6.2 Vergleich der Abklingdauer

In diesem Abschnitt wird gezeigt wie lange es, abhängig von der PE-Frequenz dauert, bis eine Schwingung auf ein bestimmtes, auf die Anfangsenergie bezogenes, Energieniveau abklingt. In den folgenden Diagrammen sind jeweils wieder links die aus den Messungen und rechts aus den Simulationen berechneten Abklingzeiten dargestellt. Zusätzlich sind in allen Diagrammen wieder die charakteristischen Frequenzen des parametererregten Zwei-Massen-Schwingers eingezeichnet (rot: 1. Eigenfrequenz, magenta: 2. Eigenfrequenz, grün: Kombinationsfrequenz vom Differenztyp, hellblau: Kombinationsfrequenz vom Summentyp, gestrichelte Linien stellen jeweils die niederen Ordnungen wie z.B. halbe, drittel, usw. dar).

Für den ersten Vergleich der Abklingzeiten wird hier wieder wie in den Abbildungen 6.1 und 6.2 die Versuchsreihe mit folgenden Parametern verwendet: PE-Amplitude: 0,690 A (58,82% des Strommittelwertes), $m_1 = 2,046130$ kg, Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm. In den Abbildungen 6.5 werden dabei die Zeitpunkte verglichen wann es zum ersten Unterschreiten und in den Abbildungen 6.6 zum letzten Unterschreiten der 20%-Energie kommt.

Die Simulation zeigt hier qualitativ eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten. Es ist jedoch erkennbar, dass in der Messung bei mehreren Frequenzen Instabilitäten bzw. Abklingdauern über 300 Sekunden auftreten welche in der Simulation nicht aufgetreten sind. Deutlich erkennbar ist bei der hier verwendeten Masse m_1 , dass die doppelte erste Eigenfrequenz $\Omega_{1,2}$, die halbe Kombinationseigenfrequenz vom Summentyp $\Omega_{12,2+}$ und die Kombinationsfrequenz vom Differenztyp $\Omega_{12,1-}$ nahe beieinander liegen. Die positiven Dämpfungseffekte werden in diesem Gebiet größtenteils zunichte gemacht und treten nur oberhalb von $\Omega_{12,1-}$ deutlich auf. Gleiches gilt für $\Omega_{12,2-}$. Tendenziell ist jedoch bei allen Minima der Abklingzeiten zu erkennen, dass diese etwas über den analytisch ermittelten Werten $\Omega_{12,n-}$ liegen. Um die Veränderung der Abklingzeiten weiter zu untersuchen werden die folgenden Untersuchungen mit reduzierter Masse 1 durchgeführt.

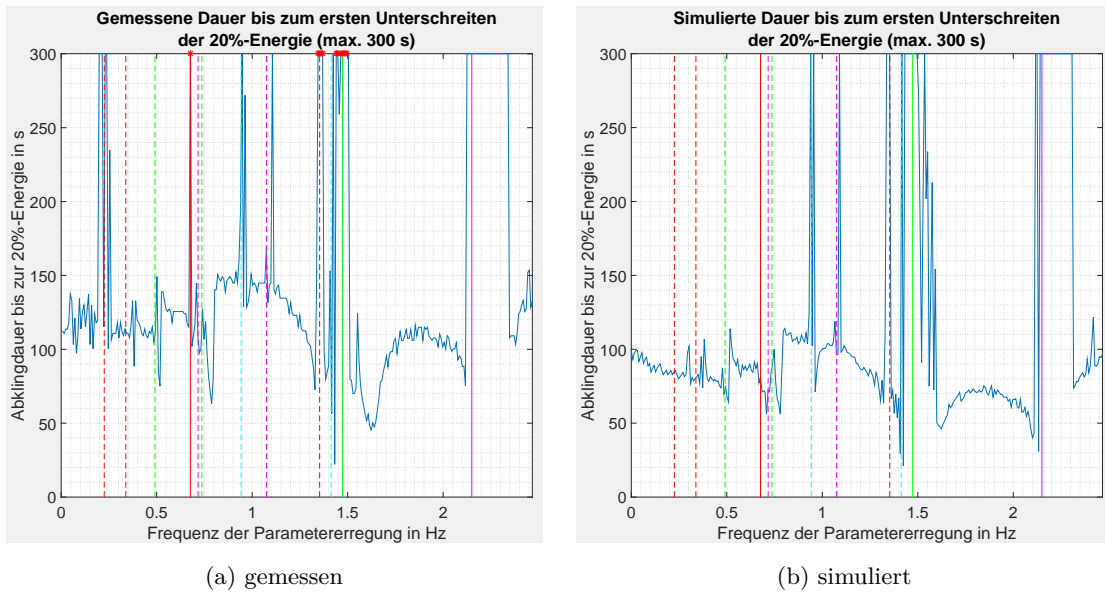


Abbildung 6.5: Abklingzeiten zum ersten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 2,046130$ kg, PE-Amplitude 0,690 A (58,82%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm

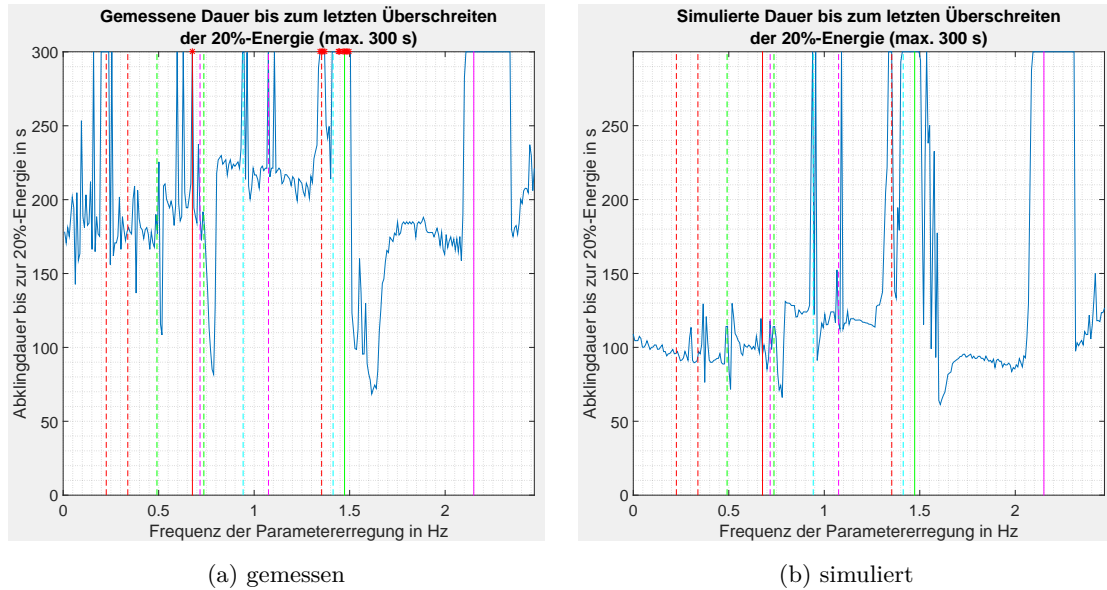


Abbildung 6.6: Abklingzeiten bis zum letzten Überschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 2,046130$ kg, PE-Amplitude 0,690 A (58,82%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm

Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen den gleichen Versuch wie zuvor, jedoch wird hier die große Masse auf 1,1101 kg reduziert (PE-Amplitude 0,690 A (58,89%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm). Die analytisch ermittelte Frequenz $\Omega_{12,1-}$ hat jetzt verhältnismäßig große Abstände zu allen umliegenden Frequenzen. Es treten in ihrer unmittelbaren Umgebung keine Instabilitäten auf. Das Minimum der Abklingzeiten liegt jedoch wieder etwas darüber und nun unmittelbar in der Umgebung von $\Omega_{12,2+}$. Es ist zu erkennen, dass unweit des Minimums Frequenzen existieren bei denen es plötzlich zu instabilem Systemverhalten kommt. Interessanterweise wird die 20%-Energie bei der zweiten Eigenfrequenz sehr bald zum ersten Mal unterschritten, obwohl es sich um eine instabile Frequenz handelt. Dieser Effekt ist in der Messung und besonders deutlich auch in der Simulation zu erkennen.

Eine Änderung der Anfangsauslenkungen hat entscheidenden Einfluss auf die Abklingzeiten mit parametererregter Steifigkeit. Die Diagramme 6.9 und 6.10 zeigen wieder die Ergebnisse aus der Messung und Simulation mit reduzierter Masse 1, jedoch mit anderen Anfangsauslenkungen: $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm. Dieser Anfangszustand liegt nahe am ersten Mode des Schwingers, wodurch zu erwarten ist, dass der Energietransfer von Mode 1 zu Mode 2 erfolgt.

In den Abb. 6.9 und 6.10 ist nun ganz deutlich der positive Einfluss auf die Dämpfung des Systems erkennbar. Sowohl bei der ersten Kombinationsfrequenz vom Summentyp $\Omega_{12,1-}$, als auch bei den niedrigeren $\Omega_{12,n-}$, $n = 2, 3, 4$ kann man deutlich erkennen, dass die Abklingzeiten viel geringer sind.

In der Messung zeigt sich bei der doppelten ersten Eigenfrequenz $\Omega_{2,1}$ eine äußerst kurze Abklingdauer welche bei einer Resonanzfrequenz nicht zu erwarten wäre. Dieser plötzliche Einbruch ist durch die begrenzte Messdauer in Kombination mit einer extrem niedrigen Modulationsfrequenz zu erklären. Es tritt dabei im betrachteten Zeitraum nur ein Maximum und ein Minimum der Hüllkurve auf. Zweiteres liegt weit gegen Ende der Messdauer und obwohl die Hüllkurve danach wieder ansteigt überschreitet sie nicht mehr die 20%-Energiegrenze. Es wird somit fälschlicherweise

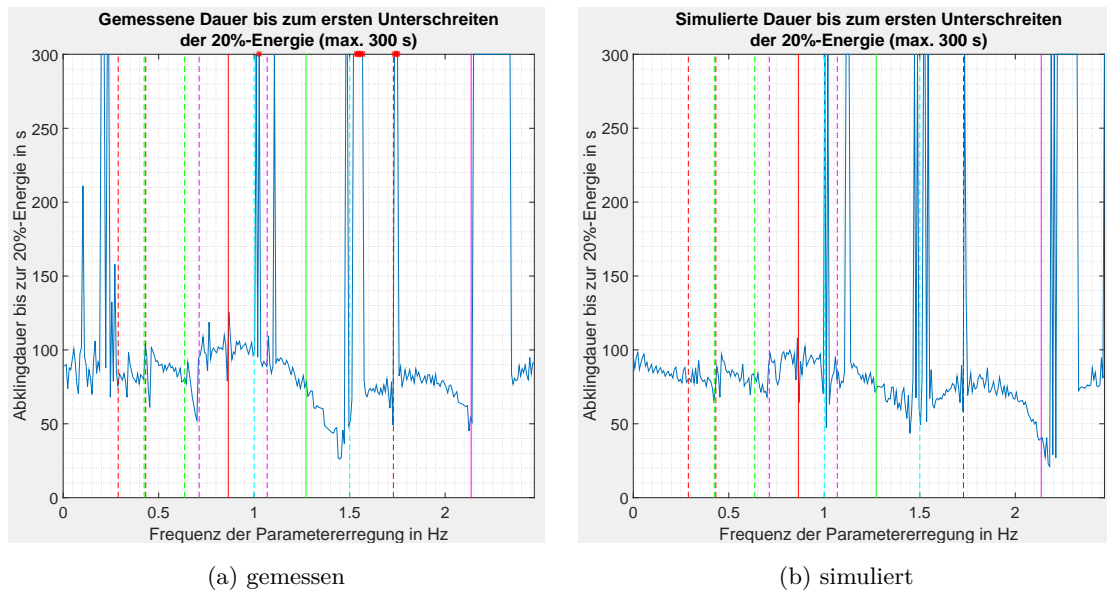


Abbildung 6.7: Abklingzeiten zum ersten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,690 A (58,89%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm

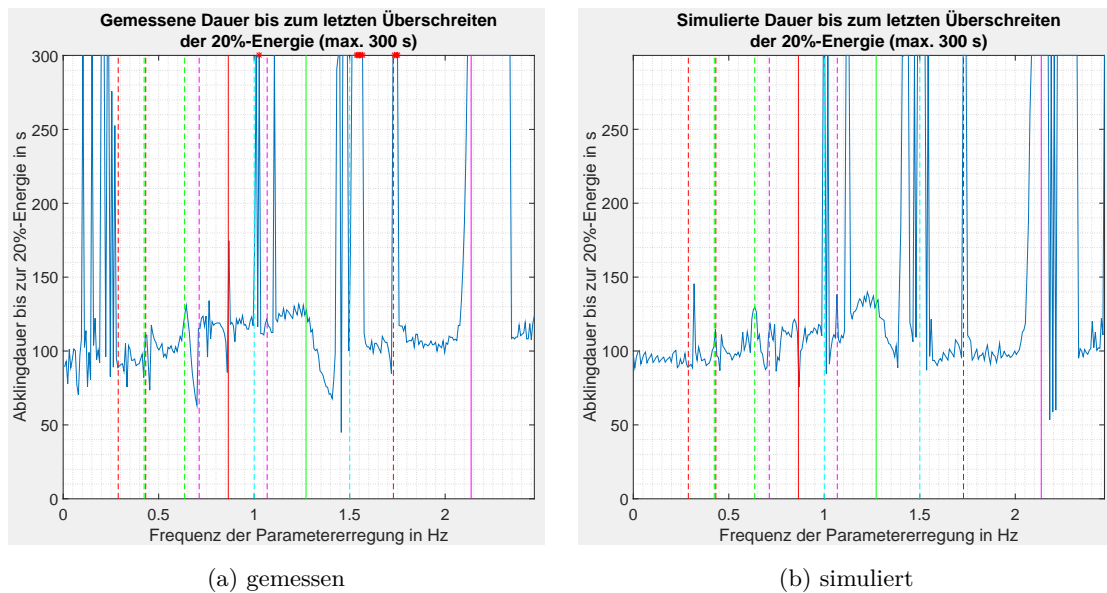


Abbildung 6.8: Abklingzeiten bis zum letzten Überschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,690 A (58,89%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = x_{0,2} = 20$ mm

se nur der letzte Zeitpunkt im betrachteten Messbereich ausgewertet was sich im Diagramm der Abklingzeiten als einzelner Ausreißer zeigt.

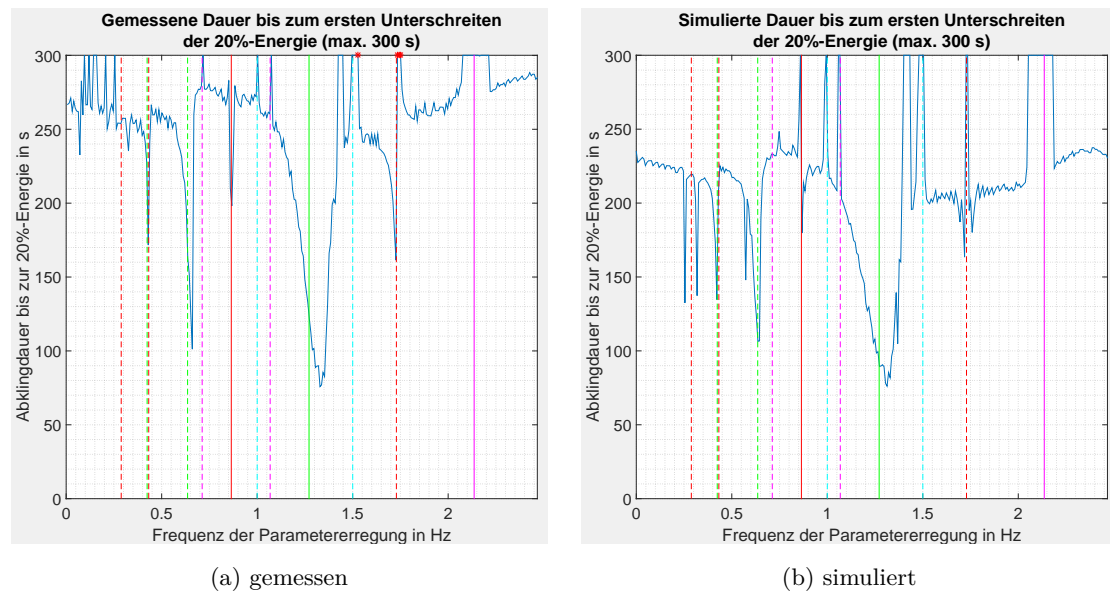
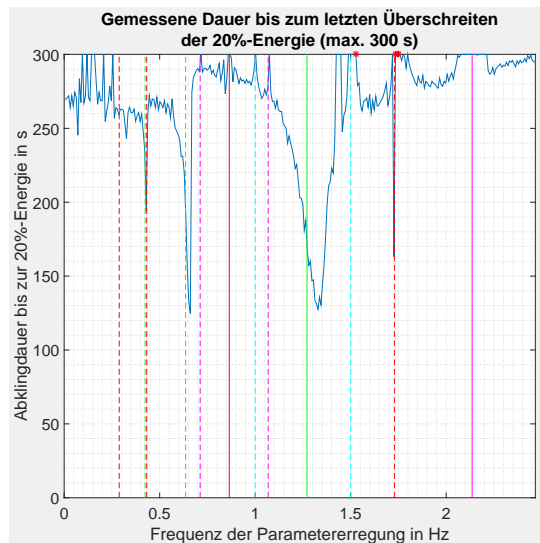


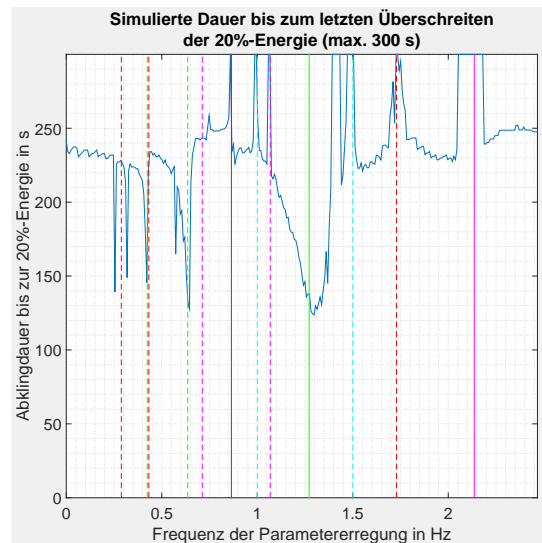
Abbildung 6.9: Abklingzeiten zum ersten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,689 A (58,70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

Um den Einfluss der Anfangsbedingungen noch deutlicher zu zeigen, wird in den folgenden Grafiken 6.11 und 6.12 die Abklingzeit dargestellt, nachdem vorwiegend die Masse 2 ausgelenkt ($x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm) und somit eher der 2. Mode angeregt wird. Die Masse 1 hat dabei wieder den reduzierten Wert von 1.1101 kg und die Parametererregung die Amplitude von 0,695 A (59,20%).

Es zeigt sich, dass die Kombinationsfrequenz $\Omega_{12,n-}$ keinen positiven Einfluss mehr auf die Zeit bis zum erstmaligen Unterschreiten der 20%-Energie hat. Lediglich bei der zweiten Eigenfrequenz kommt es zu einem früheren Unterschreiten dieses Energieniveaus. In den Diagrammen zum letzten Überschreiten der 20%-Energie zeigt sich jedoch ein unerwartetes Bild. Neben den Spitzen bei den Resonanzfrequenzen, an denen das System instabil ist bzw. nur langsam abklingt, ist rund um die Kombinationsfrequenz vom Differenztyp $\Omega_{12,1-}$ ebenfalls ein lokales Maximum zu finden. Die Parametererregung hat bei den hier gegebenen Anfangsbedingungen einen gegenteiligen, negativen Effekt auf die Dämpfung.

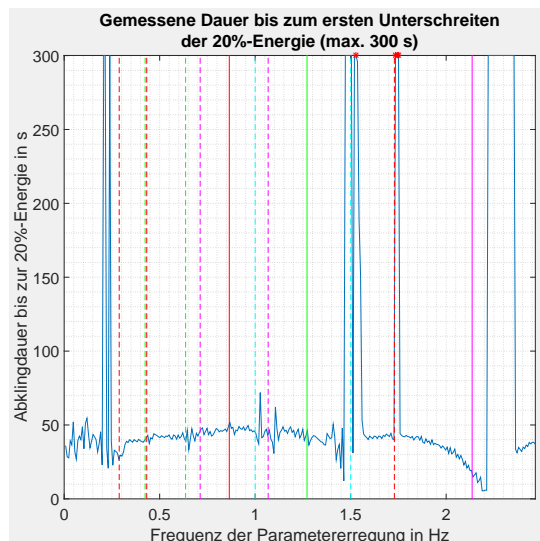


(a) gemessen

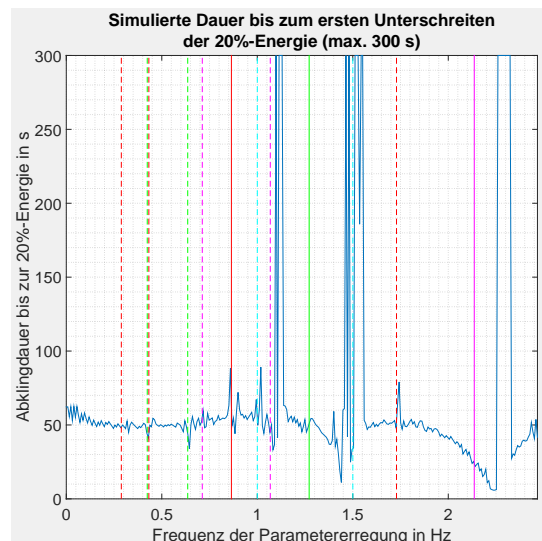


(b) simuliert

Abbildung 6.10: Abklingzeiten bis zum letzten Überschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,689 A (58, 70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

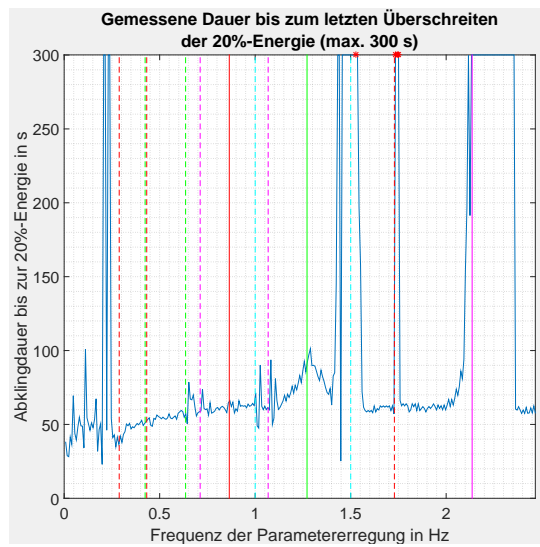


(a) gemessen

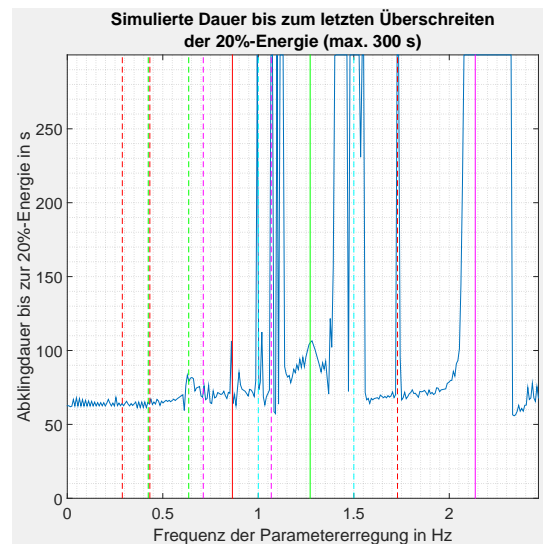


(b) simuliert

Abbildung 6.11: Abklingzeiten bis zum ersten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,689 A (58, 70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm



(a) gemessen



(b) simuliert

Abbildung 6.12: Abklingzeiten bis zum letzten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,689 A (58,70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm

6.3 Gesamtenergie und modale Energien bei ausgewählten Parametererregungsfrequenzen

Zur genaueren Untersuchung der Energien der parametererregten Schwingungen werden die zeitlichen Verläufe bei einigen speziellen PE-Frequenzen untersucht. Dabei werden, wenn nicht explizit anders erwähnt, Fälle mit Masse 1 $m_1 = 1,1101$ kg, Anfangsauslenkungen: $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm untersucht. Dabei handelt es sich um die Anfangsbedingungen bei denen hauptsächlich der erste Schwingungsmodus angeregt wird und somit die Parametererregung positiven Einfluss auf die Dämpfung hat. In folgenden Abbildungen 6.13 sind nochmals die Abklingzeiten über die PE-Frequenz aufgetragen und zusätzlich noch die Frequenzen eingezeichnet an denen detailliertere Betrachtungen der Energien durchgeführt werden. In Tabelle 6.1 sind die genauen Werte und kurze Informationen zu den Frequenzen angeben.

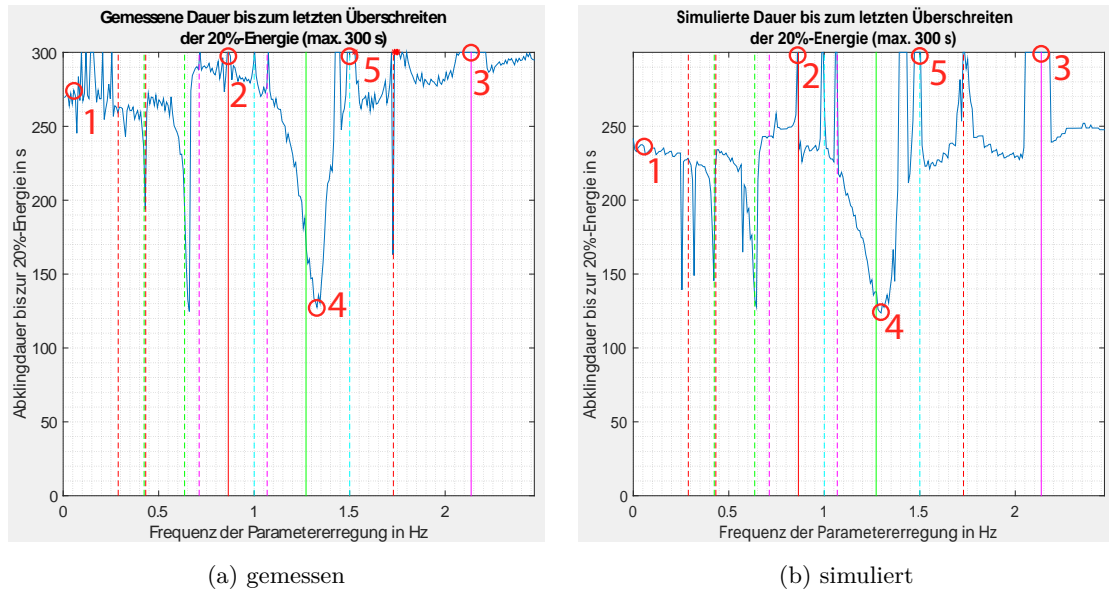


Abbildung 6.13: Abklingzeiten zum letzten Unterschreiten der 20%-Anfangsenergie, $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Amplitude 0,690 A (58, 70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm mit eingezeichneten Frequenzen an denen die Energien untersucht werden

Nr.	PE-Frequenz	Beschreibung
1	0,0557 Hz	allgemeine, niedrige PE-Frequenz als Demonstration
2	0,8674 Hz	erste Eigenfrequenz Ω_1
3	2,1327 Hz	zweite Eigenfrequenz Ω_2
4	1,3289 Hz	minimale Abklingzeit nahe von $\Omega_{12,1-}$
5	1,5040 Hz	halbe Kombinationsfrequenz vom Summentyp $\Omega_{12,2+}$

Tabelle 6.1: Frequenzen der untersuchten Energien

6.3.1 Allgemeine PE-Frequenz ohne spezielle Effekte der Parametererregung

Anhand des Beispiels mit einer allgemeinen PE-Frequenz sollen die Methoden der Auswertung kurz erklärt werden. Weiters wird beschrieben wie sich das 2-FG-System bei einer allgemeinen PE-Frequenz verhält, ohne dass besondere Effekte wie Resonanzen auftreten. Es wurde dazu eine PE-Frequenz mit 0,0557 Hz gewählt.

Die Grafiken in Abbildung 6.14 zeigen die Verläufe der Lagekoordinaten, modalen Koordinaten und zusätzlich noch der Gesamtenergie, jeweils im Vergleich zwischen Messung (blau) und Simulation (rot). Zusätzlich ist noch das Spektrum der Lagekoordinaten abgebildet. Wie bereits im Kapitel über die Parameteridentifikation zeigt sich bei allgemeinen PE-Frequenzen eine relativ gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation.

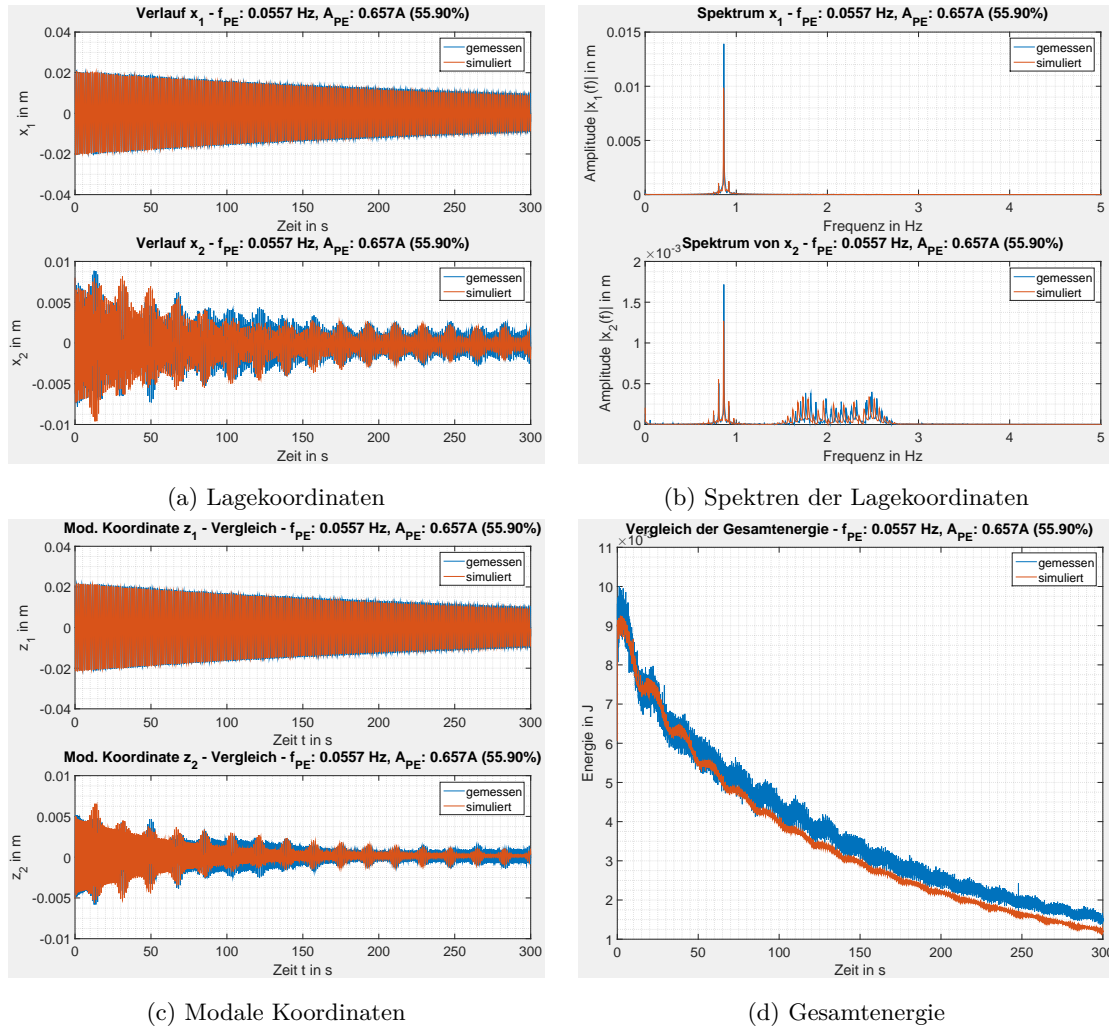


Abbildung 6.14: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Lagekoordinaten x_i (inkl. Spektren), modale Koordinaten und Gesamtenergie mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,0557 Hz, PE-Amplitude 0,657 A (55,90%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

In Abbildung 6.15 werden die modalen Energien jeweils getrennt über die Zeit oder gemeinsam

in der modalen Ebene aufgetragen. Auf der linken Seite sind jeweils die Verläufe aus der gemessenen Schwingung während auf der rechten Seite die Ergebnisse der Simulation gezeigt werden. Die Kurven im Hintergrund zeigen die exakten ungefilterten Verläufe der modalen Energien. Nachdem, wie im Kapitel 5 über die Parameteridentifikation beschrieben, die Systemparameter nicht exakt bestimmbar sind (bzw. das Modell das reale System nicht vollständig abbilden kann) und deswegen die Energien ein „Rauschen“ zeigen, werden die Energieverläufe mit einem Tiefpassfilter bearbeitet. Die gefilterten Signale sind in den Diagrammen jeweils mit den dicken, durchgezogenen Linien dargestellt. Die Farben geben die Zeitbereiche an. Es zeigt sich hier wieder deutlich, dass der zweite Schwingungsmodus stärker gedämpft ist als der erste und durch die niederfrequente Parametererregung bereits eine Schwankung der Energie (in den Zeitverläufen der Auslenkung auch als leichte Modulation der Amplitude erkennbar) stattfindet. Diese Tatsache ist auch deutlich in der modalen Ebene erkennbar in der man sieht, dass die Kurven sich bei der Bewegung zum Koordinatenursprung¹ der x-Achse nähern, was durch das schnellere Abklingen des zweiten Modus bedingt ist.

Abbildungen 6.16 und 6.17 zeigen die gefilterten Verläufe der modalen Energien noch einmal in direktem Vergleich zwischen Messung und Simulation.

¹der globale Trend der Kurve nähert sich asymptotisch

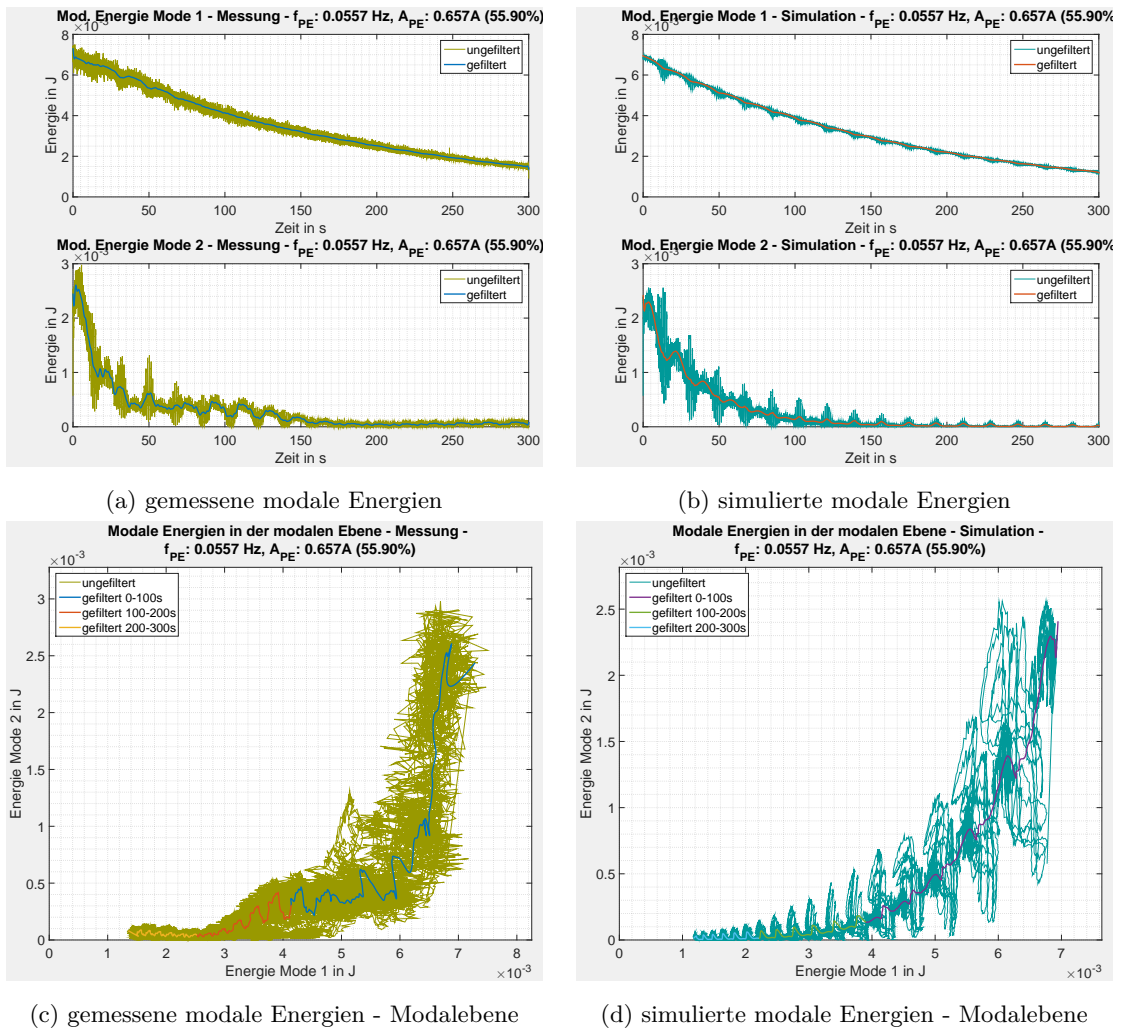


Abbildung 6.15: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Modale Energien über die Zeit und in der modalen Ebene, Vergleich zwischen exakten und gefilterten Verläufen, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,0557 Hz, PE-Amplitude 0,657 A (55,90%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

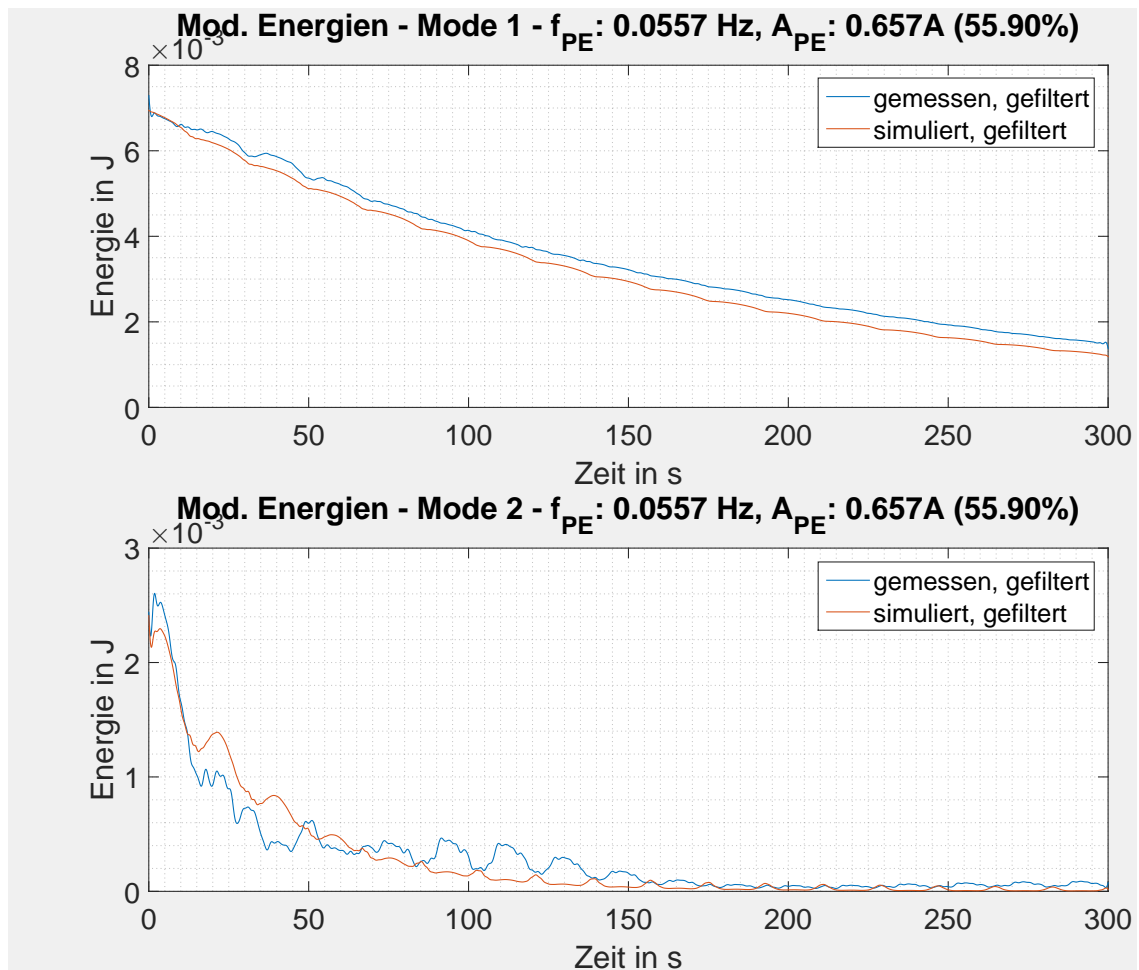


Abbildung 6.16: Vergleich der gefilterten Modalen Energien über die Zeit, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,0557 Hz, PE-Amplitude 0,657 A (55,90%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

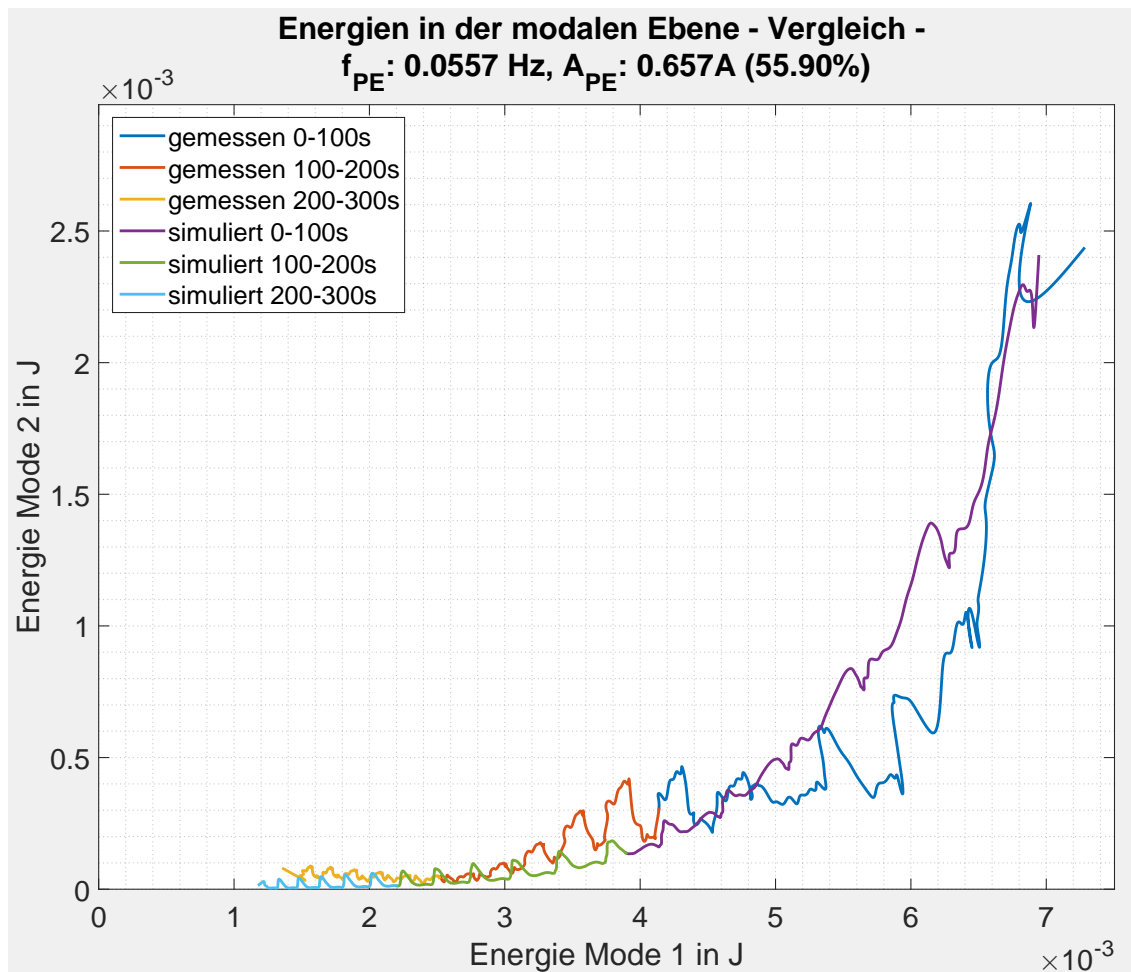


Abbildung 6.17: Vergleich der gefilterten modalen Energien in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,0557 Hz, PE-Amplitude 0,657 A (55,90%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.3.2 Erste Eigenfrequenz

Folgende Abbildungen 6.18 bis 6.21 zeigen die Verhältnisse bei der Parametererregung mit der ersten Eigenfrequenz (0,8674 Hz). Man sieht hier sowohl in den Lage- als auch in den Modalkoordinatenverläufen eine ausgeprägte Amplitudenmodulation welche sich in den Energieverläufen als periodische Schwankung widerspiegelt. In Abb. 6.18d erkennt man, dass durch die Parametererregung abschnittsweise die Gesamtenergie des Systems zunimmt. Die Zunahme der Gesamtenergie erfolgt dabei überwiegend durch den ersten Mode, während der zweite Mode wie bei einer allgemeinen PE-Frequenz relativ schnell abklingt (Abbildung 6.19).

In Abbildung 6.20 erkennt man anhand der Schwankung der gemittelten modalen Energien deutlich den Unterschied zwischen der Amplitudenmodulationsfrequenz der Messung und der Simulation. Betrachtet man die modale Energiekarte könnte man meinen, die Energien des 2. Modes liegen in der Simulation höher als in der Messung. Jedoch zeigt Abbildung 6.20 dass das definitiv nicht der Fall ist. Dieser täuschende Eindruck entsteht durch das schnellere Abklingen der Energie des ersten Modes wodurch der Pfad der modalen Energien bei gleichen Energiewerten des zweiten Modes schon viel weiter links, bei niedrigeren Energien des ersten Modes, liegt.

Deutlich zu erkennen ist jedoch das Abnehmen beider modalen Energien zu Null, obwohl die Parametererregung mit der ersten Eigenfrequenz des Systems stattfindet.

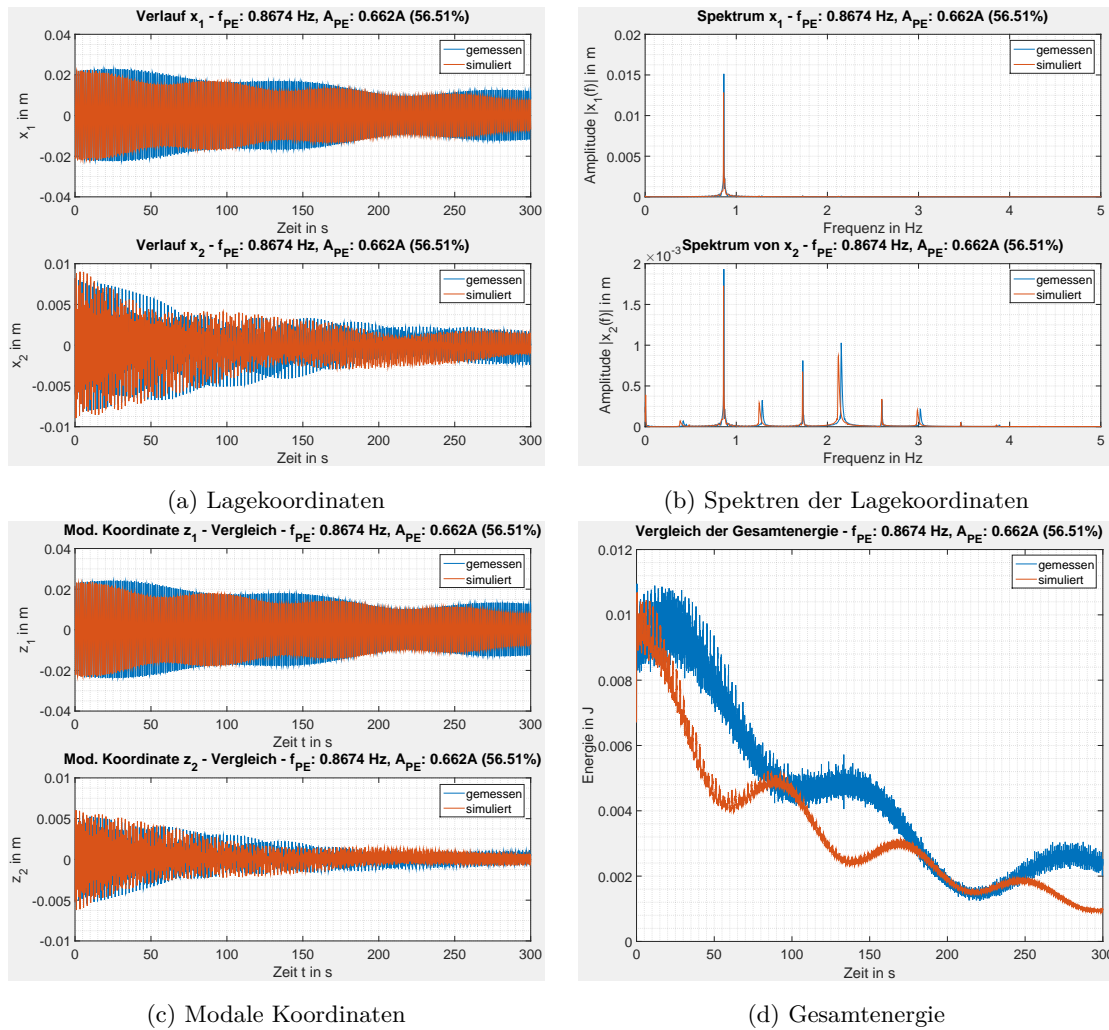
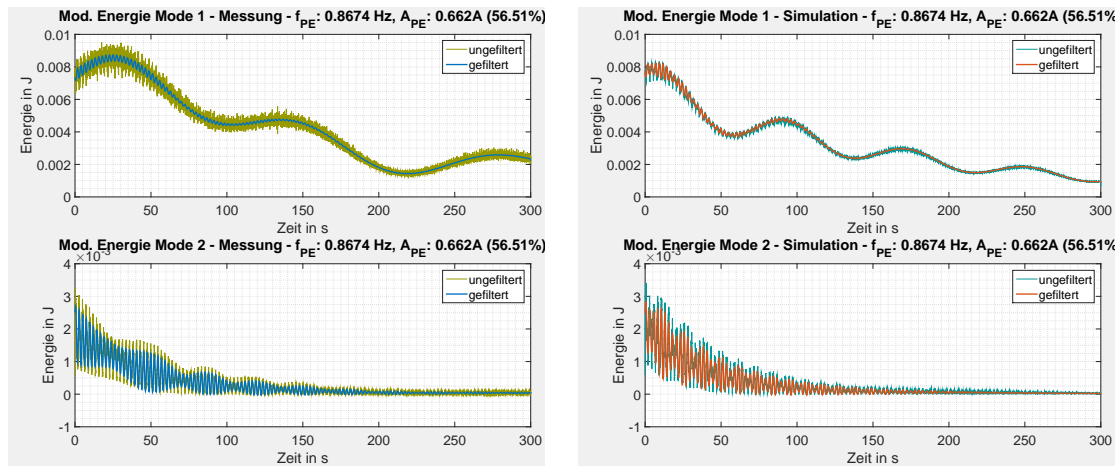
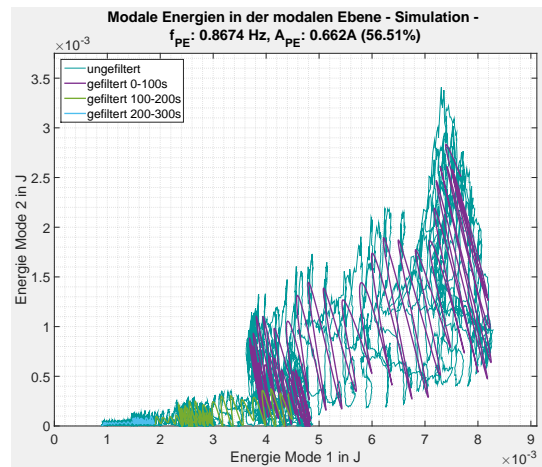
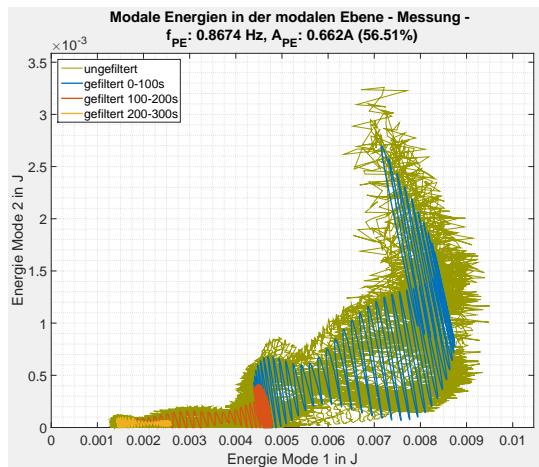


Abbildung 6.18: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Lagekoordinaten x_i (inkl. Spektren), modale Koordinaten und Gesamtenergie mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz $0,8674$ Hz, PE-Amplitude $0,662$ A ($56,51\%$) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm



(a) gemessene modale Energien

(b) simulierte modale Energien



(c) gemessene modale Energien - Modalebene

(d) simulierte modale Energien - Modalebene

Abbildung 6.19: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Modale Energien über die Zeit und in der modalen Ebene, Vergleich zwischen exakten und gefilterten Verläufen, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,8674 Hz, PE-Amplitude 0,662 A (56,51%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

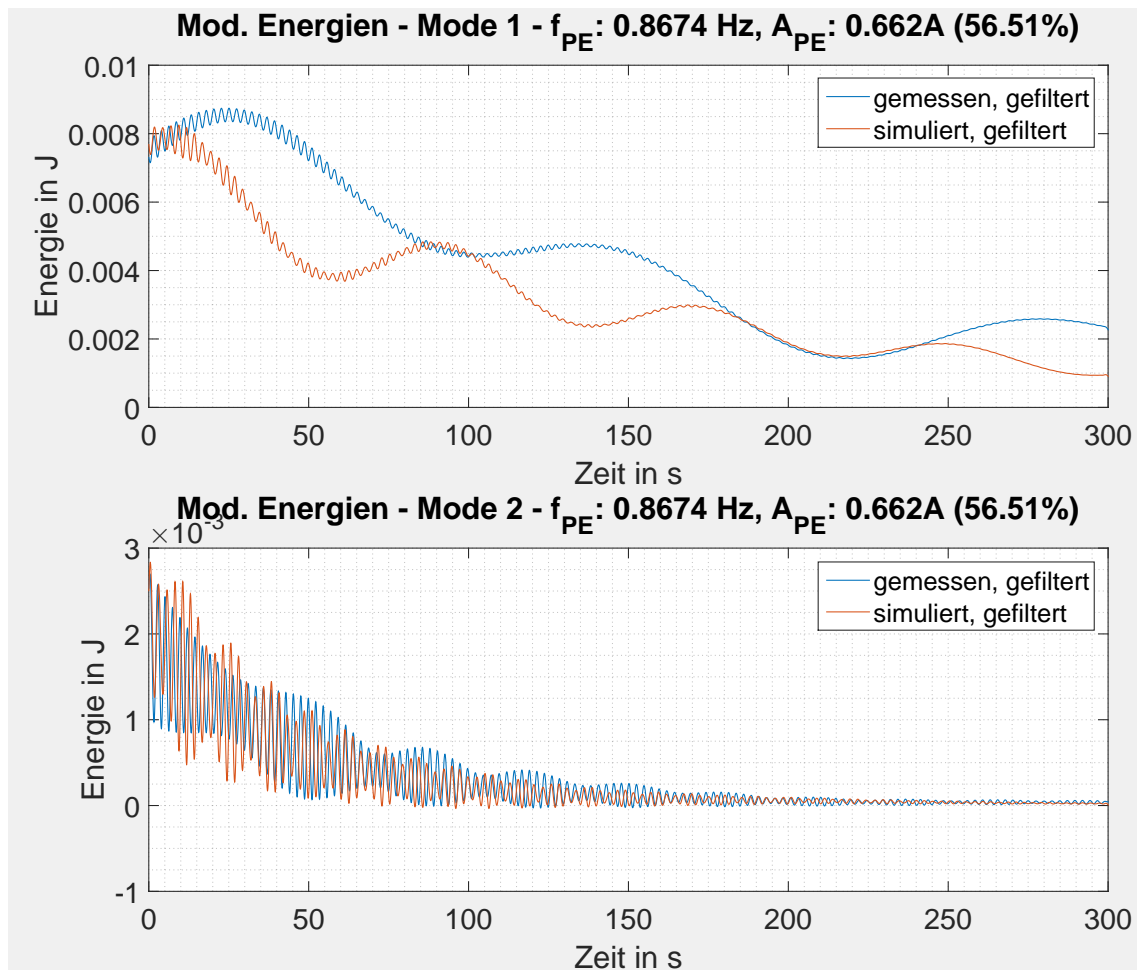


Abbildung 6.20: Vergleich der gefilterten Modalen Energien über die Zeit, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,8674 Hz, PE-Amplitude 0,662 A (56,51%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

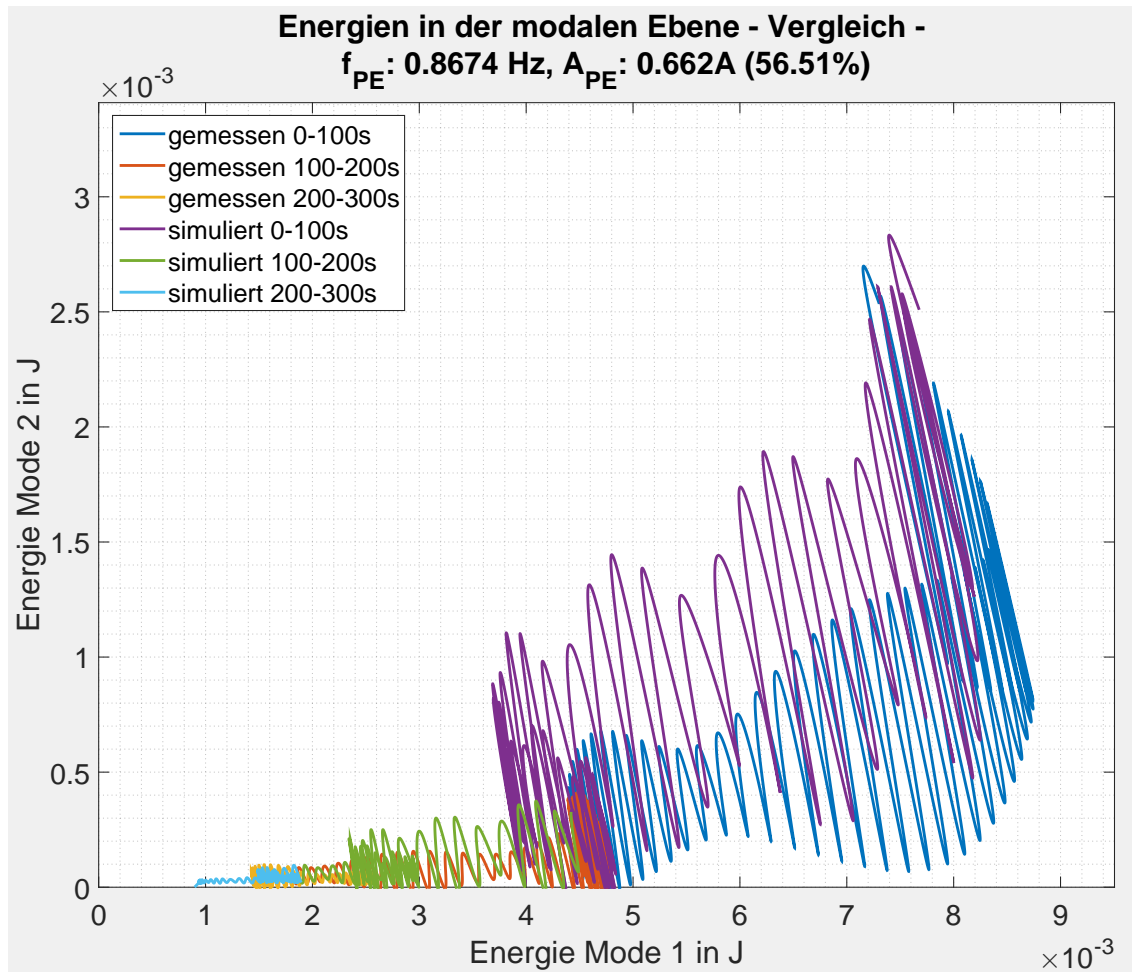


Abbildung 6.21: Vergleich der gefilterten modalen Energien in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0,8674 Hz, PE-Amplitude 0,662 A (56,51%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.3.3 Zweite Eigenfrequenz

Die Schwingungen des System bei Parametererregung mit der zweiten Eigenfrequenz Ω_2 unterscheiden sich deutlich von den oben beschriebenen bei erster Eigenfrequenz Ω_1 . Während zuvor die (Gesamt-)Energie während der Messdauer bereits sehr weit abgeklungen ist, scheint sie im hier betrachteten Zeitraum auf ein definiertes Niveau zuzustreben. Die Verläufe der modalen Energien in Abbildung 6.23 zeigen tatsächlich das Einpendeln des zweiten Modes auf ein konstantes Niveau, während jedoch die Energie in Mode 1 weiterhin stetig abfällt. Gleiches erkennt man auch in der modalen Ebene bei der sich keine Annäherung an die x-Achse ergibt, so wie bei den zuvor beschriebenen Frequenzen. Sowohl die zeitlichen Verläufe, als auch der Pfad in der modalen Ebene zeigen, dass sich die Parametererregung bei dieser Frequenz überwiegend auf den zweiten Mode auswirkt, während der erste Mode exponentiell abklingt.

Im direkten Vergleich der Messung und Simulation (Abb. 6.24 und 6.25) zeigen beide qualitativ das selbe Verhalten. Es wird jedoch das konstante Energieniveau des zweiten Modes durch die Simulation stark überschätzt. Wie zuvor bei Mode 1 erkennt man hier für den zweiten Mode die abweichenden Amplitudenmodulationsfrequenzen bzw. Schwankungsfrequenz der modalen Energien.

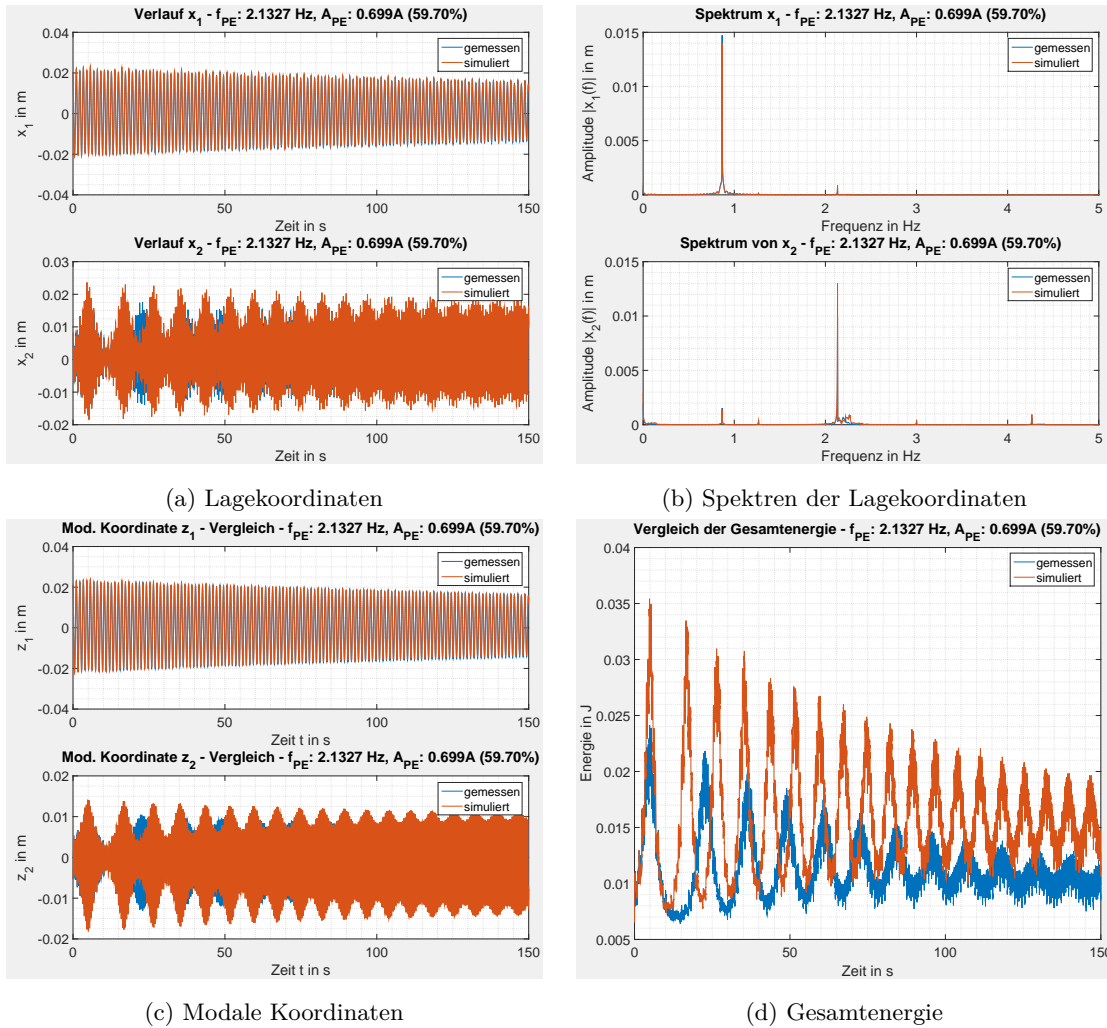
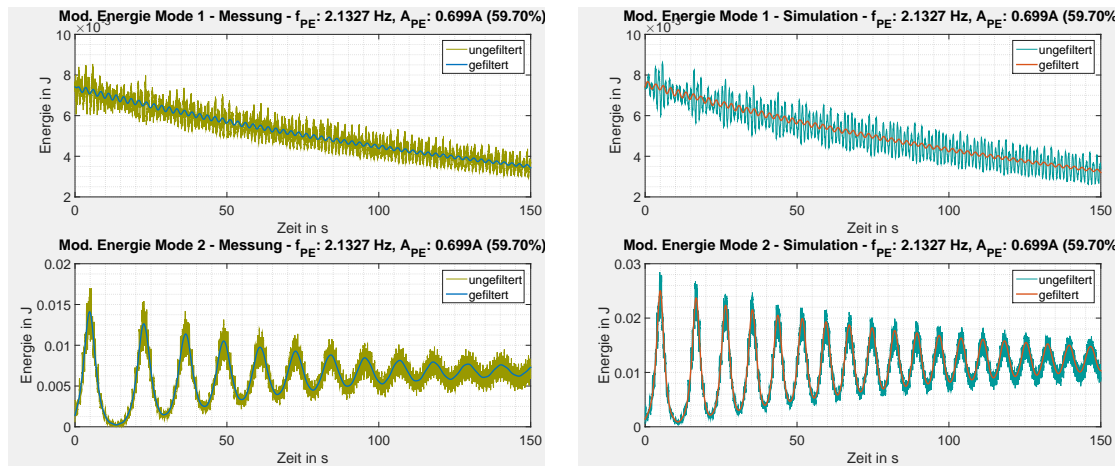
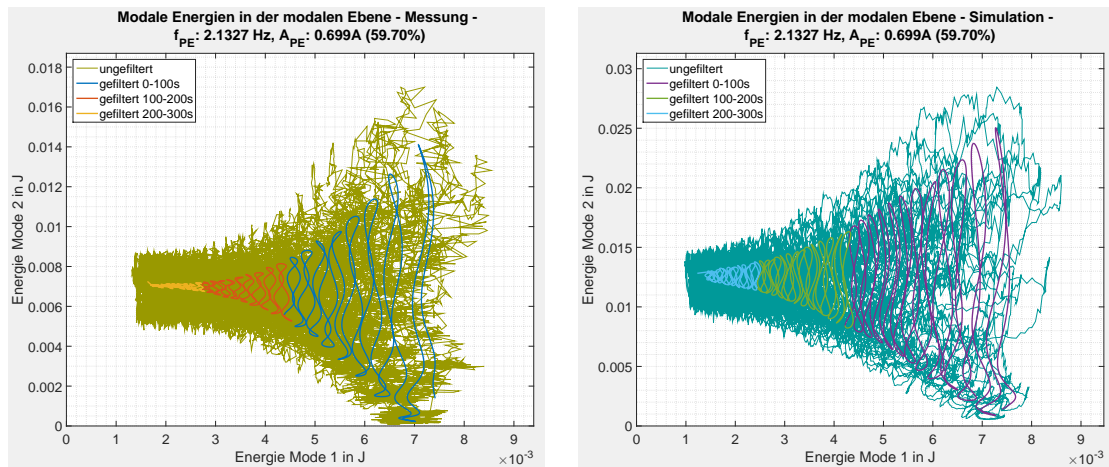


Abbildung 6.22: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Lagekoordinaten x_i (inkl. Spektren), modale Koordinaten und Gesamtenergie mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2,1327 Hz, PE-Amplitude 0,699 A (59,70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm



(a) gemessene modale Energien

(b) simulierte modale Energien



(c) gemessene modale Energien - Modalebene

(d) simulierte modale Energien - Modalebene

Abbildung 6.23: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Modale Energien über die Zeit und in der modalen Ebene, Vergleich zwischen exakten und gefilterten Verläufen, mit $m_1 = 1, 1101 \text{ kg}$, PE-Frequenz $2,1327 \text{ Hz}$, PE-Amplitude $0,699 \text{ A}$ ($59,70\%$) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20 \text{ mm}$ und $x_{0,2} = 8 \text{ mm}$

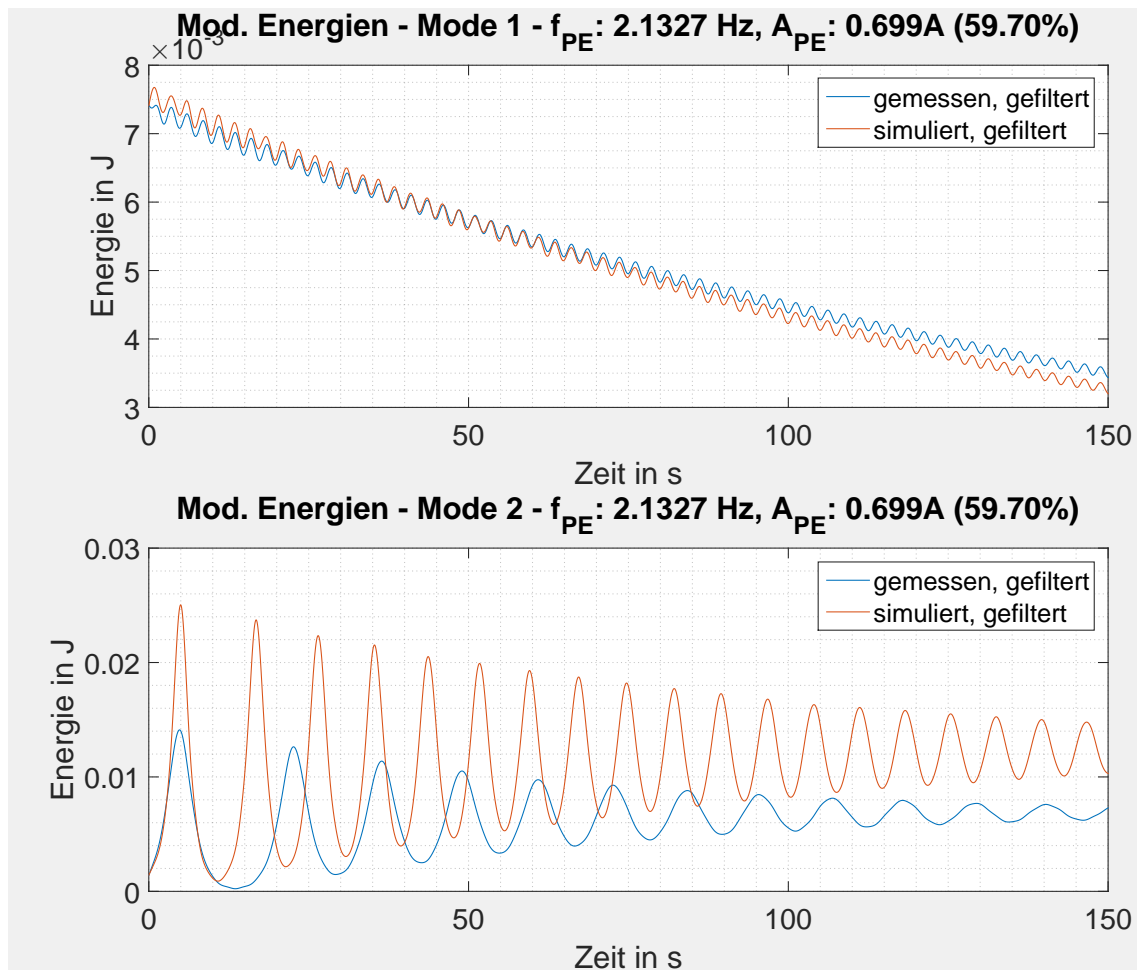


Abbildung 6.24: Vergleich der gefilterten Modalen Energien über die Zeit, mit $m_1 = 1,1101 \text{ kg}$, PE-Frequenz $2,1327 \text{ Hz}$, PE-Amplitude $0,699 \text{ A}$ (59,70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20 \text{ mm}$ und $x_{0,2} = 8 \text{ mm}$

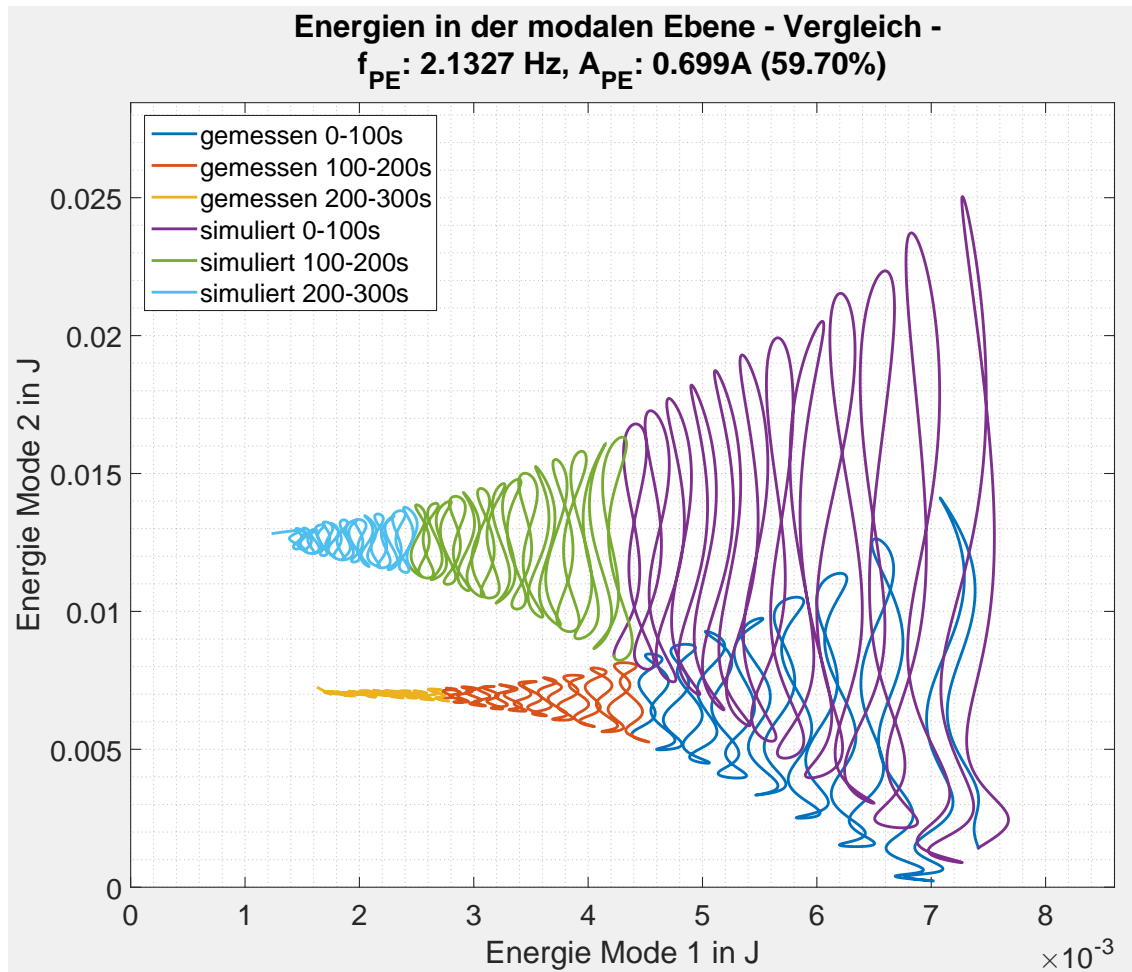


Abbildung 6.25: Vergleich der gefilterten modalen Energien in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2,1327 Hz, PE-Amplitude 0,699 A (59,70%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.3.4 Erste Kombinationsfrequenz vom Differenztyp - verstärkte Dämpfung

Von besonderem Interesse ist der Fall der ersten Kombinationsfrequenz vom Differenztyp $\Omega_{12,1-}$ mit einer PE-Frequenz von 1,3289 Hz. Man erkennt hier schon an den Verläufen der Lagekoordinaten bzw. modalen Koordinaten die starke Modulation der Amplituden (siehe Abb. 6.26). Auch im Verlauf der Gesamtenergie spiegelt sich dieses Verhalten wider indem diese während des Abklingens stark schwankt.

Betrachtet man nun die modalen Energieverläufe über die Zeit (Abbildungen 6.27a, 6.27b) wird deutlicher erkennbar was dabei passiert. Man erkennt in den Verläufen beider Mode eine Schwankung mit der gleichen Frequenz jedoch mit einer Phasenverschiebung von 180° . Während also ein Mode ein lokales Maximum der Energie hat, hat der andere Mode ein lokales Minimum seiner Energie.

Deutlich erkennbar ist dieser Zusammenhang in der modalen Ebene, Abb. 6.27c und 6.27d. Die Pfade sind jetzt nicht mehr vorwiegend senkrecht sondern schräg in der modalen Ebene angeordnet. Diese nähern sich dabei jedesmal sehr nahe an die Koordinatenachsen an, was somit zeigt, dass zu diesen Zeitpunkt nur noch sehr wenig Energie in einem der beiden Moden steckt. Über den gesamten Zeitraum betrachtet findet die Annäherung an den Ursprung jetzt schräg von oben statt und nicht mehr entlang der Achse von Mode 1. An den Farben der Pfade erkennt man, dass die Schwingung außerordentlich schnell abklingt, weil nach den ersten 100 Sekunden (Ende der roten/violetten Pfade) beide Energien bereits weitgehend abgeklungen sind.

In den direkten Vergleichen zwischen Simulation und Messung, Abbildungen 6.28 und 6.29, zeigt sich zwar wieder eine Abweichung in der Frequenz der Energieverläufe, qualitativ geben jedoch beide das gleiche Verhalten des Systems wieder. Lediglich im direkten Vergleich der Pfade zeigt sich, dass die Simulation den Energietransfer weg vom ersten Mode nicht so gut darstellt. Während die Minima des ersten Modes in der Messung nahe Null liegen, zeigt die Simulation noch einen verhältnismäßig großen Anteil an Restenergie des Modes 1.

Dieser schräge Verlauf der Pfade in der modalen Ebene verdeutlicht den Energietransfer zwischen den Moden. Während bei den anderen Frequenzen die Änderungen der modalen Energien (z.B. in Mode 2, senkrecht verlaufende Pfade in der modalen Ebene, Abb. 6.25) hauptsächlich durch die Parametererregung selbst bewirkt werden, kommt es bei der Kombinationsfrequenz zu einem zusätzlichen Energieaustausch der Moden untereinander.

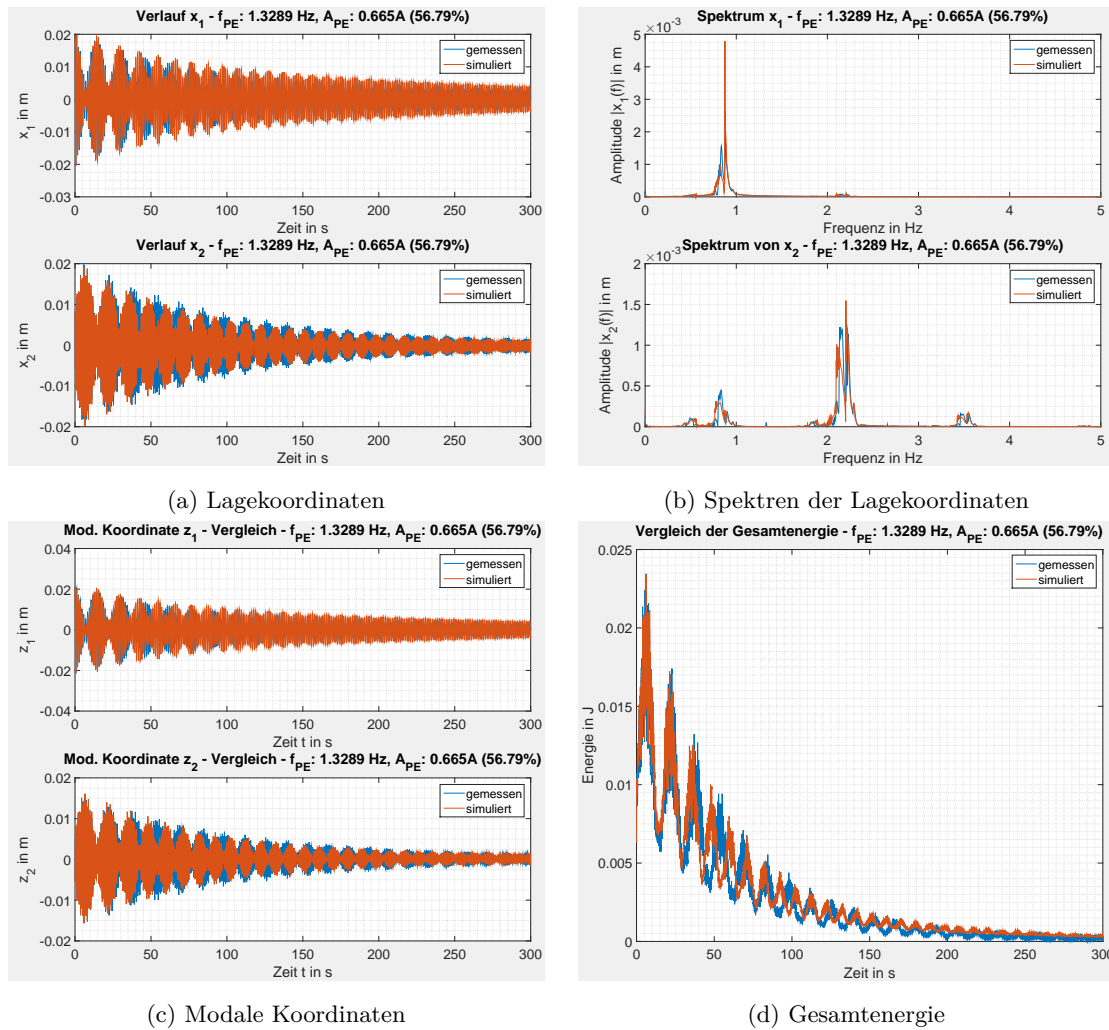
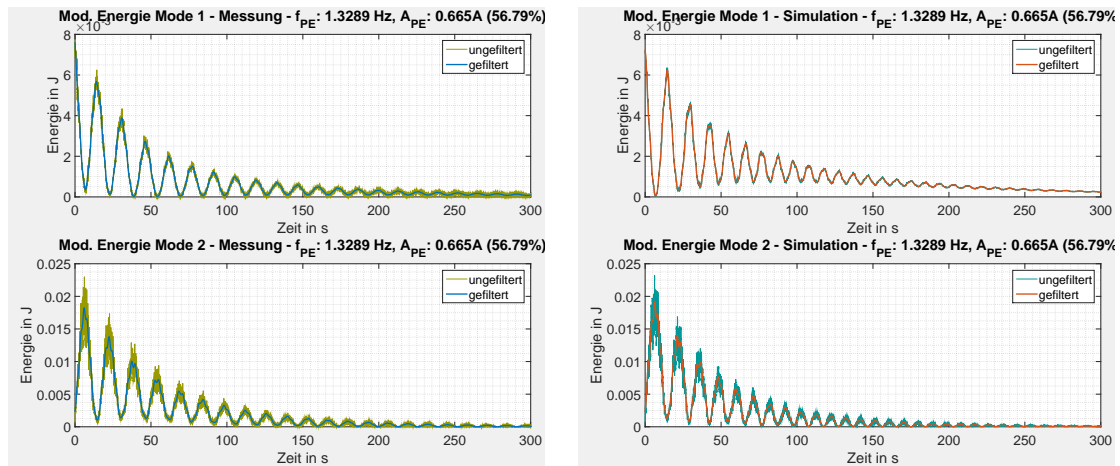
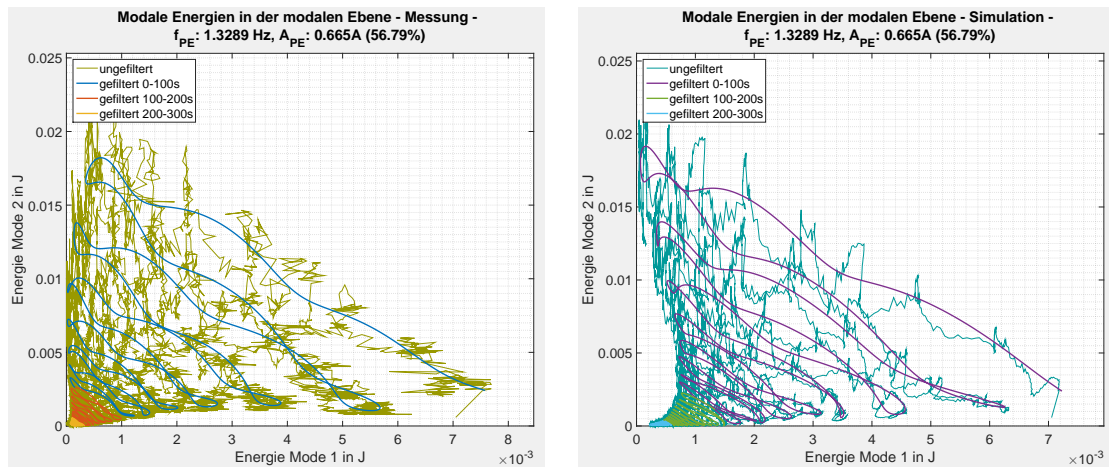


Abbildung 6.26: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Lagekoordinaten x_i (inkl. Spektren), modale Koordinaten und Gesamtenergie mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,3289 Hz, PE-Amplitude 0,665 A (56,79%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm



(a) gemessene modale Energien

(b) simulierte modale Energien



(c) gemessene modale Energien - Modalebene

(d) simulierte modale Energien - Modalebene

Abbildung 6.27: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Modale Energien über die Zeit und in der modalen Ebene, Vergleich zwischen exakten und gefilterten Verläufen, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,3289 Hz, PE-Amplitude 0,665 A (56,79%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

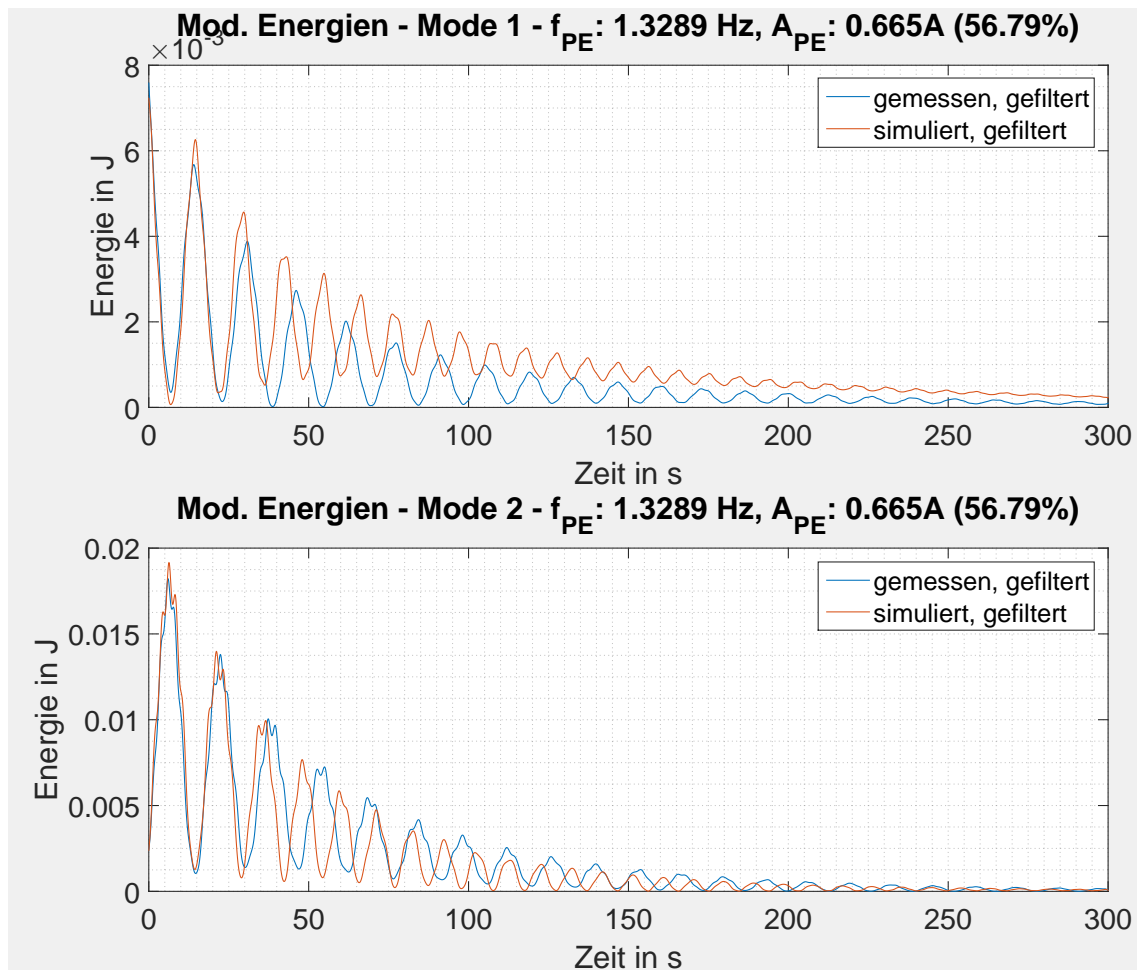


Abbildung 6.28: Vergleich der gefilterten Modalen Energien über die Zeit, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,3289 Hz, PE-Amplitude 0,665 A (56,79%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

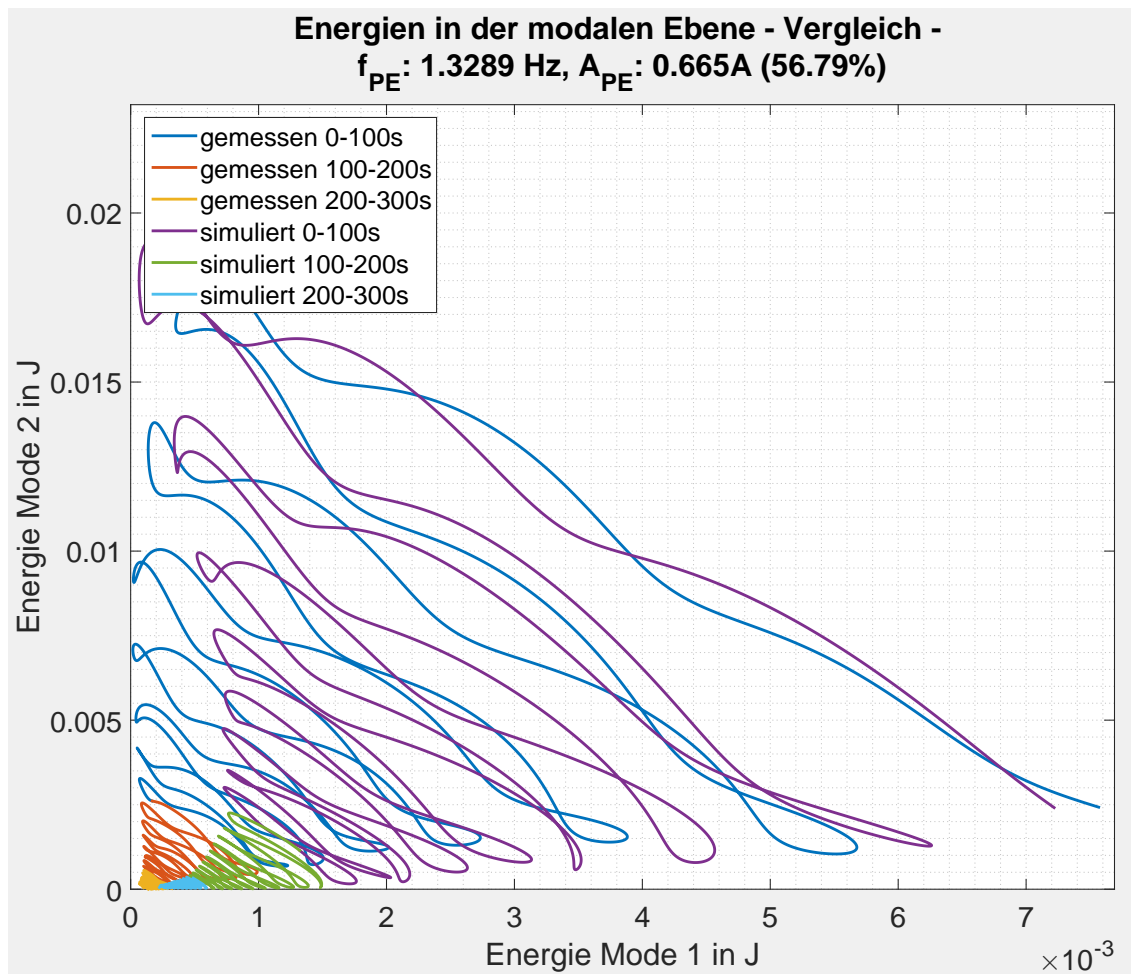


Abbildung 6.29: Vergleich der gefilterten modalen Energien in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,3289 Hz, PE-Amplitude 0,665 A (56,79%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.3.5 Halbe Kombinationsfrequenz vom Summentyp - Resonanz

Die hier untersuchten Energieverläufe zeigen das Verhalten des Systems bei einer Variation des Steifigkeitsparameters mit halber Kombinationsfrequenz vom Summentyp $\Omega_{12,2+}$ welche im verwendeten System 1,504 Hz beträgt.

Bereits aus den Verläufen der Lagekoordinaten bzw. der modalen Koordinaten, Abb. 6.30 erkennt man das Resonanzverhalten dieser Parametererregungsfrequenz. Für die kleine Masse bzw. den 2. Mode ist anfangs auch eine starke Modulation der Schwingungsamplitude erkennbar. Die Verläufe der Gesamtenergie zeigen, entsprechend der Modulation, sowohl in der Simulation als auch bei der Messung eine ausgeprägte Schwankung. Gegen Ende der Messung ist erkennbar wie sich die Gesamtenergie wieder auf ein definiertes Niveau einzupendeln scheint.

Die modalen Energieverläufe verdeutlichen das noch einmal. Es kommt hier zu sehr hochfrequenten Schwankungen der modalen Energien, welche zwischen den Moden wieder um 180° phasenverdrehen sind auf der einen Seite und zu einer überlagerten niederfrequenten Schwankung beider Mode welche phasengleich ist. In der modalen Ebene ist die niederfrequente, gleichphasige Schwankung daran zu erkennen, dass die verschiedenfarbigen Energiepfade teilweise übereinander liegen, somit also in allen drei Zeitspannen die Energien sowohl auf niedrigem als auch auf hohem Niveau sind. Besonders gut erkennt man das in der modalen Energieebene der Simulation, Abb. 6.31d, wo der blaue Energiepfad (200-300 Sekunden) bei höheren Energieniveaus als Teile des violetten und grünen Pfades liegt.

Die hochfrequenten Schwankungen der modalen Energien mit 180° Phasenverschiebung sieht man an der schrägen Orientierung der Energiepfade. Wie schon zuvor für die Kombinationsfrequenz vom Differenztyp $\Omega_{12,1-}$ deutet das auf einen permanenten Energieaustausch zwischen den beiden Moden hin. Dabei klingen die Schwingungsenergien jedoch nicht schneller ab sondern pendeln sich auf ein definiertes Niveau ein.

Im direkten Vergleich zwischen Simulation und Messung, Abb. 6.32 und 6.33 erkennt man jedoch eine starke Abweichung dieses Endenergieniveaus, vor allem für den ersten Schwingungs-mode.

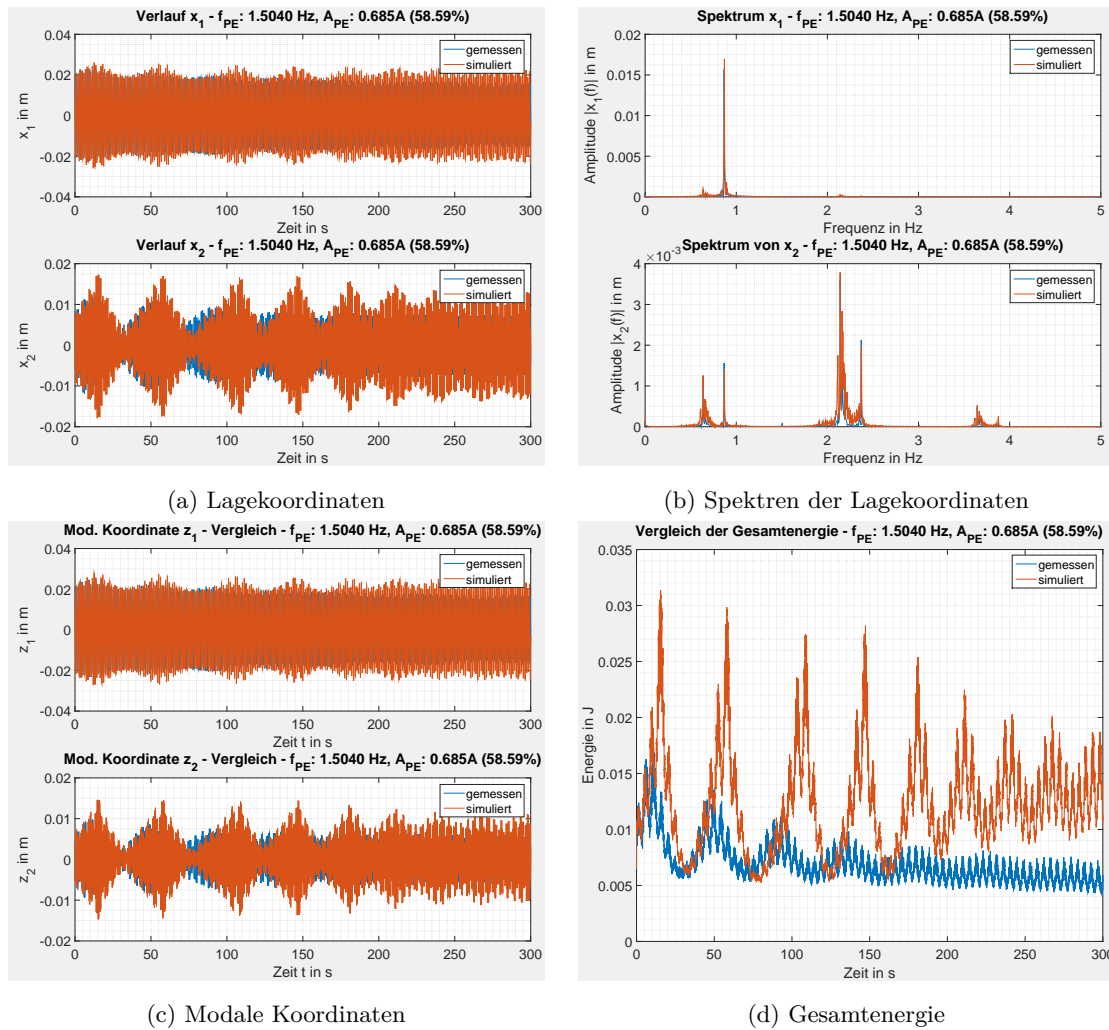


Abbildung 6.30: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Lagekoordinaten x_i (inkl. Spektren), modale Koordinaten und Gesamtenergie mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,504 Hz, PE-Amplitude 0,685 A (58,59%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

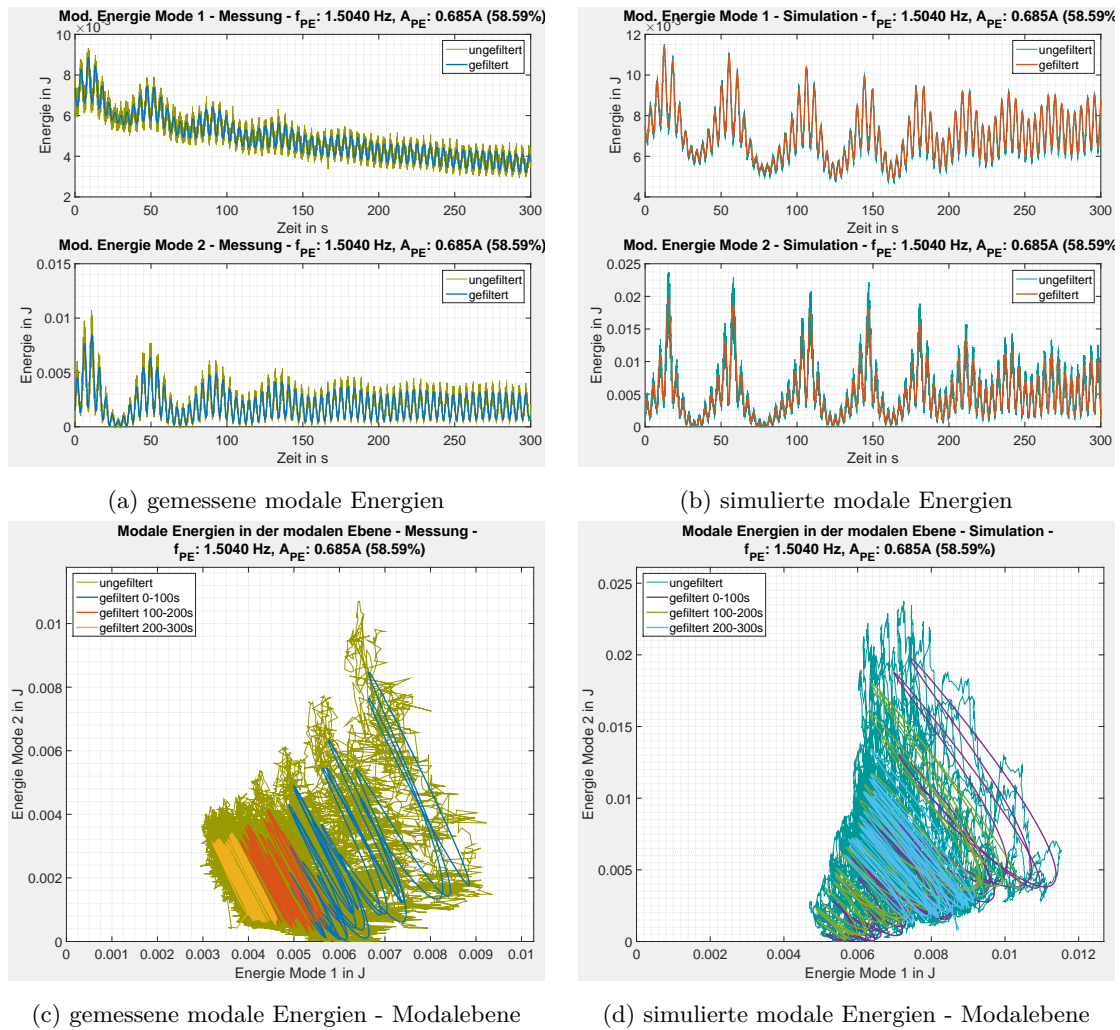


Abbildung 6.31: Vergleich zwischen Messung und Simulation: Modale Energien über die Zeit und in der modalen Ebene, Vergleich zwischen exakten und gefilterten Verläufen, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,504 Hz, PE-Amplitude 0,685 A (58,59%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

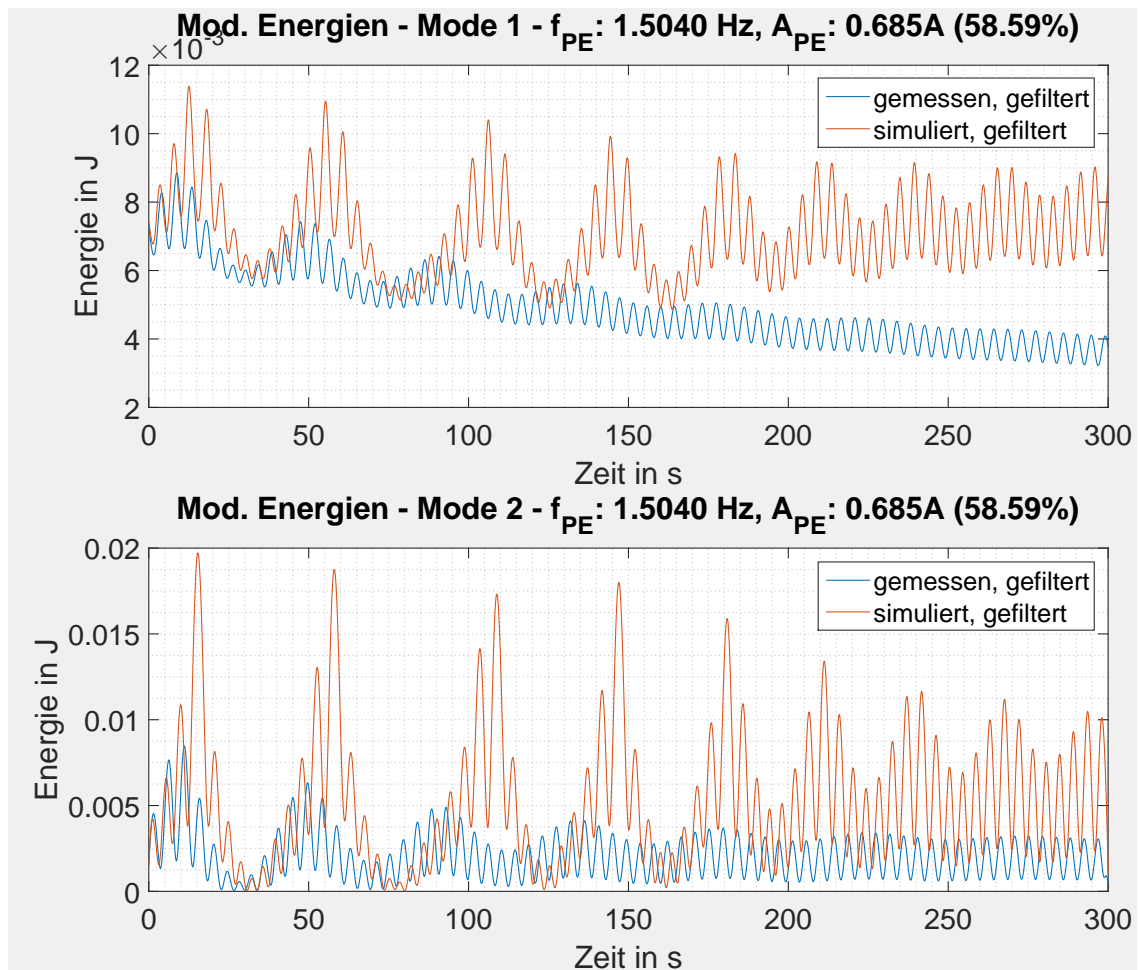


Abbildung 6.32: Vergleich der gefilterten Modalen Energien über die Zeit, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,504 Hz, PE-Amplitude 0,685 A (58,59%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

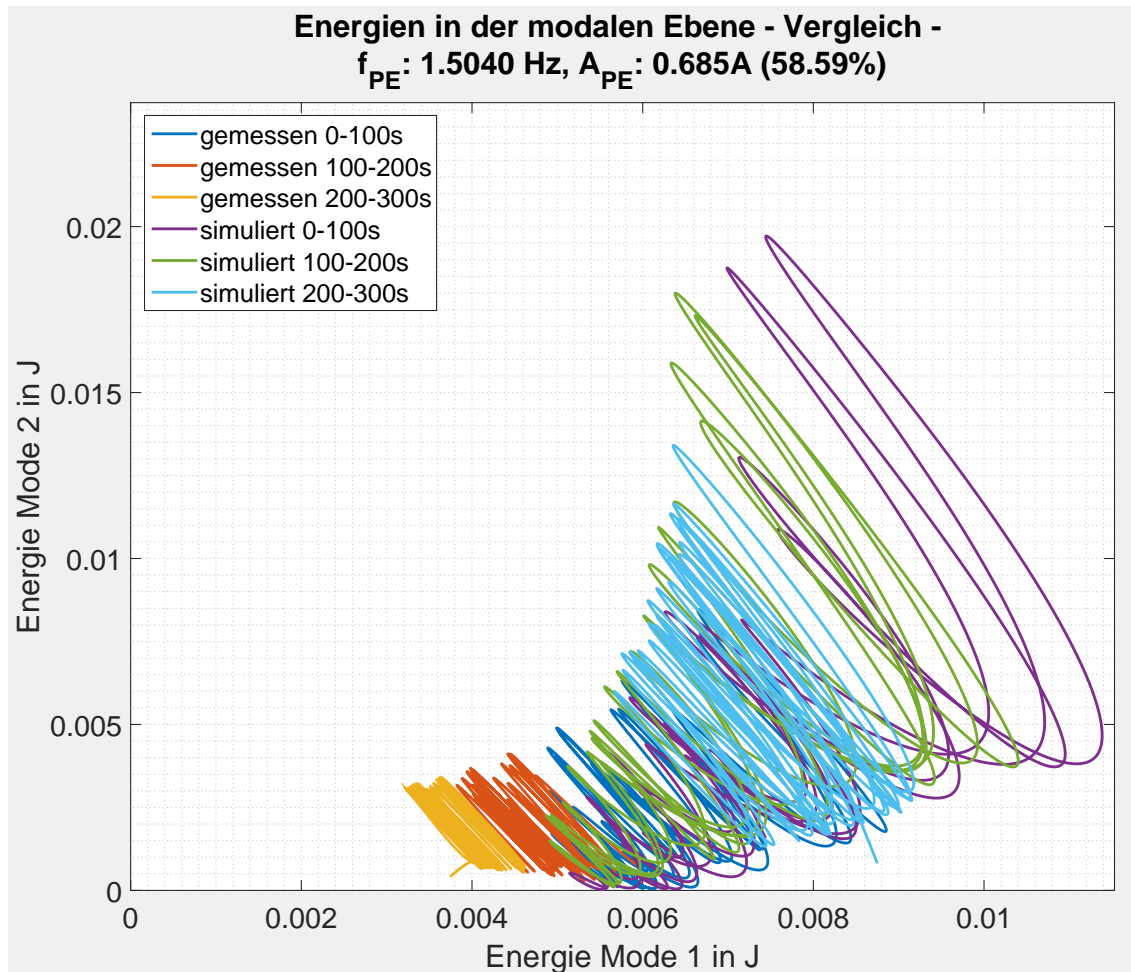


Abbildung 6.33: Vergleich der gefilterten modalen Energien in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 1,504 Hz, PE-Amplitude 0,685 A (58,59%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.4 Weitere Effekte durch die Parametererregung

6.4.1 Temporäre Auslöschung des zweiten Quasimodes

In Abschnitt 6.2 wird die Abklingdauer abhängig von der PE-Frequenz für verschiedene Fälle der Anfangsbedingungen verglichen. Dabei zeigt sich, dass für die Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm kein positiver Einfluss der Parametererregung auf die Dämpfungseigenschaften des Systems erfolgt. Für diese Anfangsbedingung, bei denen das System überwiegend im zweiten Mode schwingt, ist bereits in den Abbildungen zur Abklingzeit zum ersten Unterschreiten der Anfangsenergie 6.11 ein interessanter Effekt zu erkennen. Es zeigt sich, dass die Gesamtenergie trotz Parametererregung nahe der zweiten Eigenfrequenz des Systems nach sehr kurzer Dauer bereits die 20%-Energiegrenze unterschreitet, wenn die Messung bzw. Simulation über den ganzen Zeitraum sehr wohl die Resonanz bestätigt. Weitere Untersuchungen rund um die zweite Eigenfrequenz zeigen jedoch, dass bei gewissen Frequenzen die Energie nicht nur kurz, sondern über eine längere Dauer hinweg auf äußerst niedrigem Niveau bleibt.

Besonders deutlich ist das in den gemessenen Signalen erkennbar, z.B. bei einer PE-Frequenz von 2,1168 Hz wie in den folgenden Abbildungen 6.34 und 6.35 gezeigt. Die Energie des zweiten Modes und aufgrund der Anfangsbedingungen auch die Gesamtenergie bleiben im Bereich um Sekunde 75 für ca. 25 Sekunden auf einem sehr niedrigen Niveau. Danach kommt es wieder zu einer gleichmäßigen periodischen Schwankung der Energie. Die Simulation zeigt bei dieser Frequenz diesen Effekt nur ansatzweise, zu erkennen an einer leicht verlängerten Periode zwischen den Gesamtenergiemaxima zu einem früheren Zeitpunkt, Abb. 6.35a.

Dieser Effekt tritt noch bei weiteren Frequenzen rund um die 2. Eigenfrequenz deutlich erkennbar auf, kann aber bei der Simulation nicht so deutlich wiedergegeben werden. Als weitere Beispiele sind die modalen Koordinaten und Energien für drei andere Frequenzen in Abbildungen 6.36 dargestellt. Man erkennt, dass abhängig von der PE-Frequenz die temporäre Auslöschung des zweiten Modes zu verschiedenen Zeitpunkten in unterschiedlicher Stärke und Dauer auftritt.

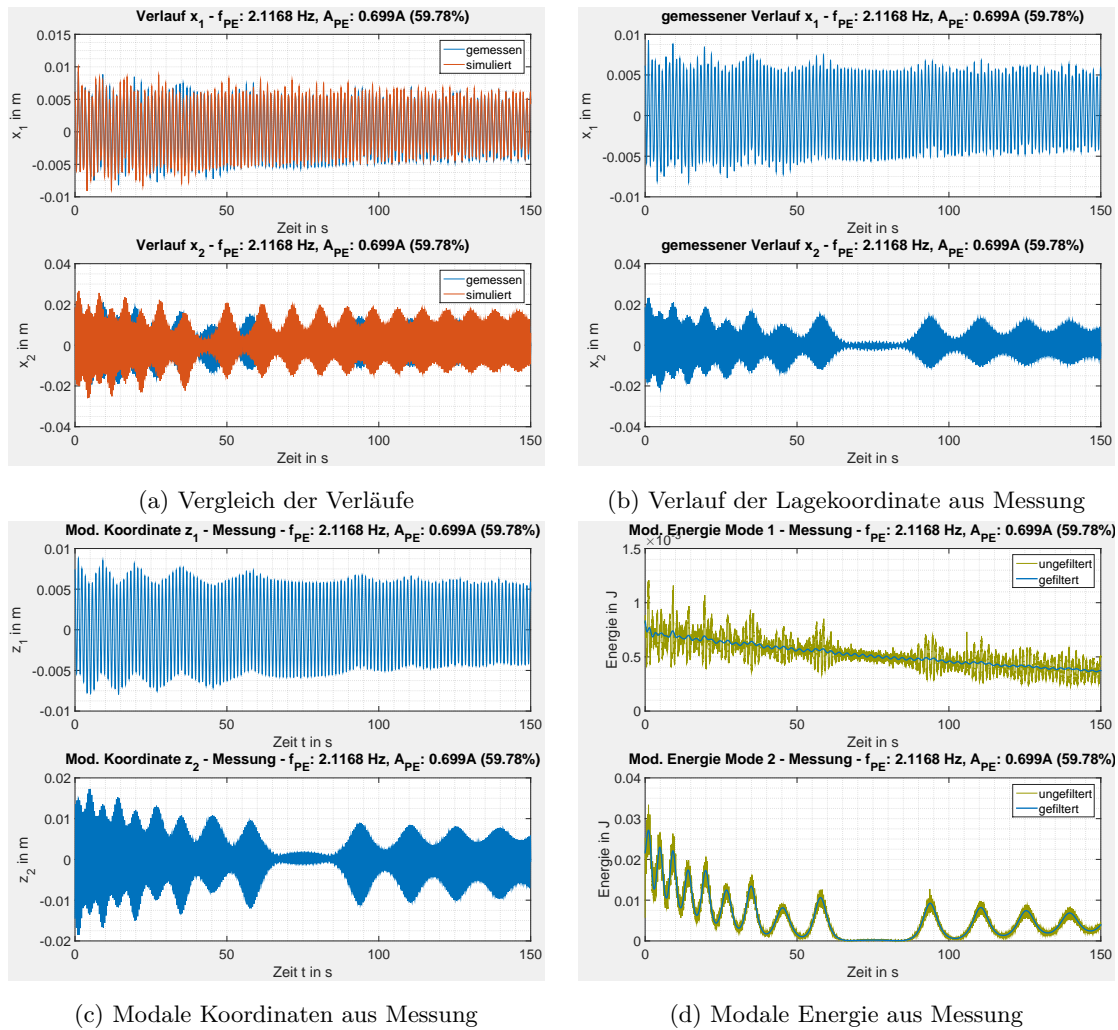
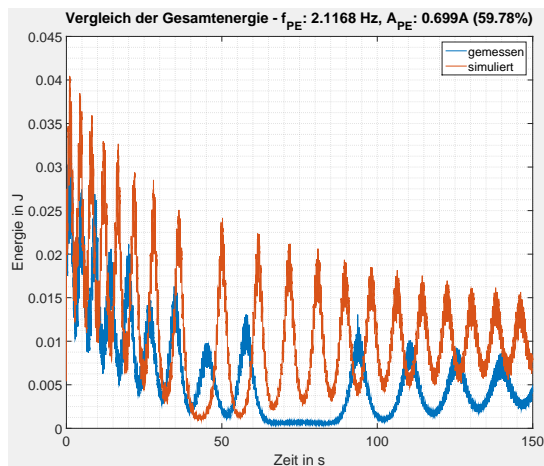
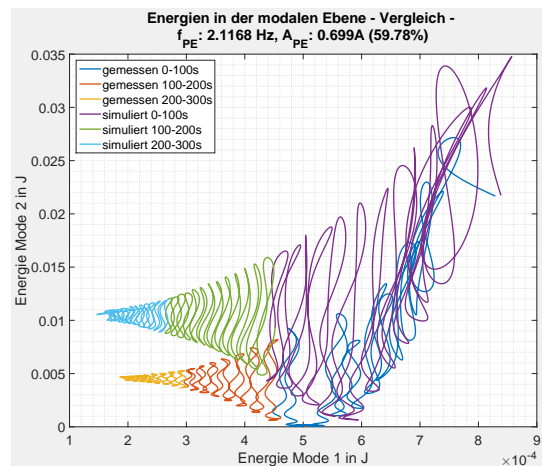


Abbildung 6.34: Temporäre Auslöschung des zweiten Modes bei Parametererregung, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2,1168 Hz, PE-Amplitude 0,699 A (59,78%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm



(a) Vergleich der Gesamtenergie



(b) Vergleich der Energiepfade in der modalen Ebene

Abbildung 6.35: Temporäre Auslöschung des zweiten Modes bei Parametererregung - Energiepfade in der modalen Ebene, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2,1168 Hz, PE-Amplitude 0,699 A (59,78%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm

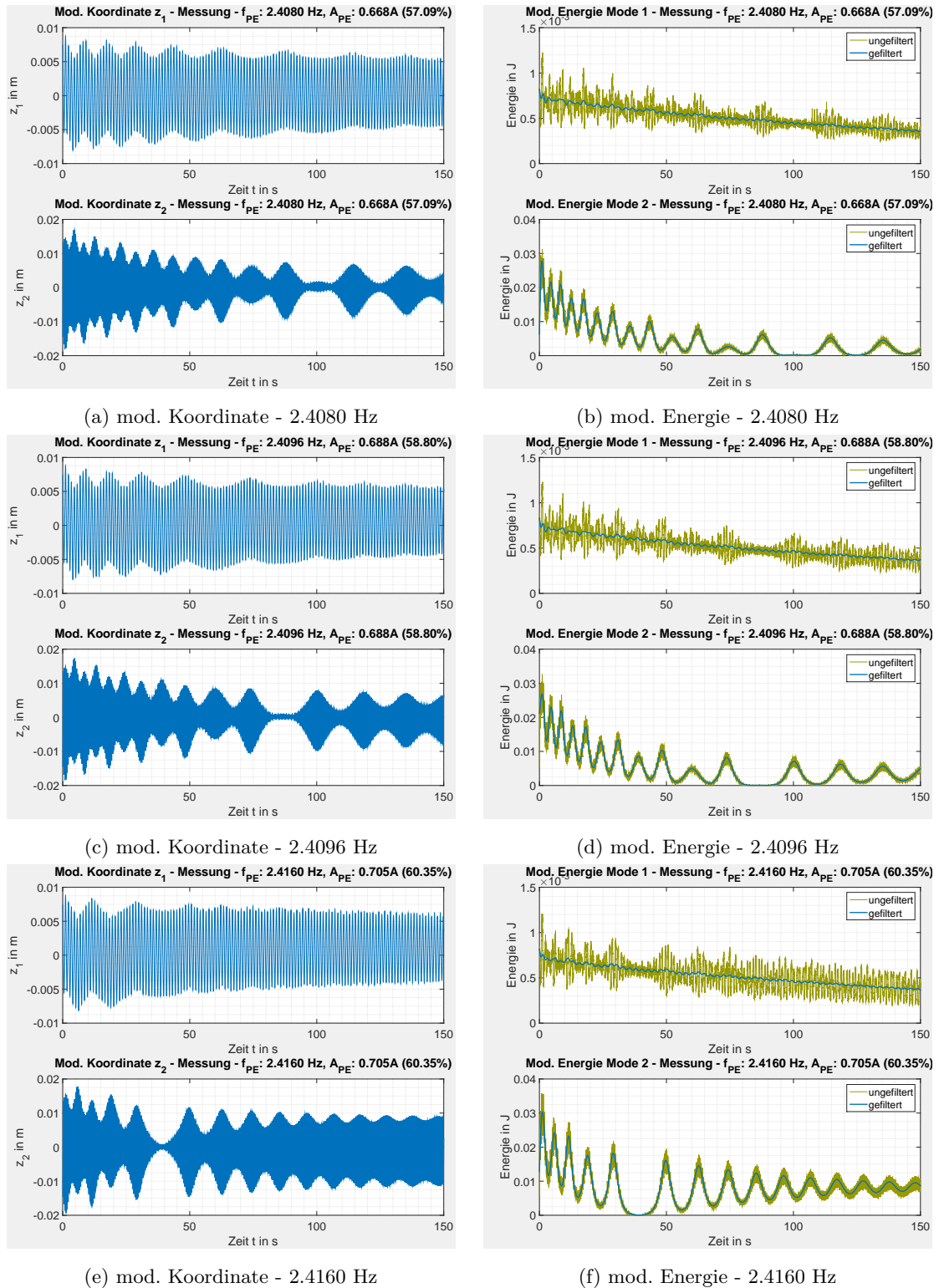


Abbildung 6.36: Auslöschung des 2. Modes bei verschiedenen Frequenzen, mit $m_1 = 1,1101$ kg und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 6$ mm und $x_{0,2} = 18,4$ mm

6.4.2 Verschwinden des Signalanteils der 2. Eigenfrequenz und höherer Ordnungen im Amplitudenspektrum

Wie schon zu Beginn des Kapitels in Abschnitt 6.1 erklärt kommt es bei sehr niedrigen Parametererregungsfrequenzen zum Verschwinden des Signalanteils der zweiten Eigenfrequenz bzw. zu deren höheren Ordnungen. In folgender Abbildung 6.37 ist der Bereich von 0 bis 0,5 Hz des Amplitudenspektrums im Detail gezeigt. In dieser Detailaufnahme des Spektrums zeigt sich der Effekt sowohl in der Messung als auch in der Simulation deutlich für die zweite Eigenfrequenz aber auch für die höheren Ordnungen. Es ist sogar zu erkennen, dass das Verschwinden nicht nur einmal auftaucht sondern mit sinkender Frequenz immer öfter. Zusätzlich ist noch bei der Frequenz 0,1830 Hz (Verschwinden des Signalanteils der zweiten Eigenfrequenz) und 0,1146 Hz (Verschwinden des Signalanteils der ersten Ordnung der zweiten Eigenfrequenz) das Spektrum aus Messung und Simulation in Abbildungen 6.37a und 6.37b verglichen.

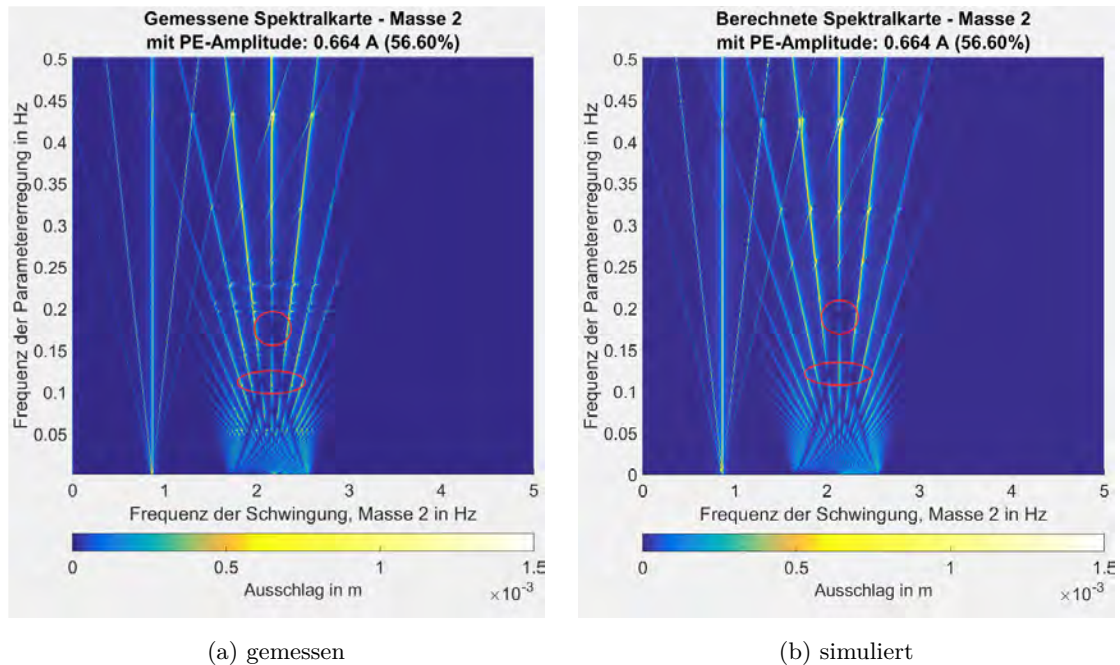
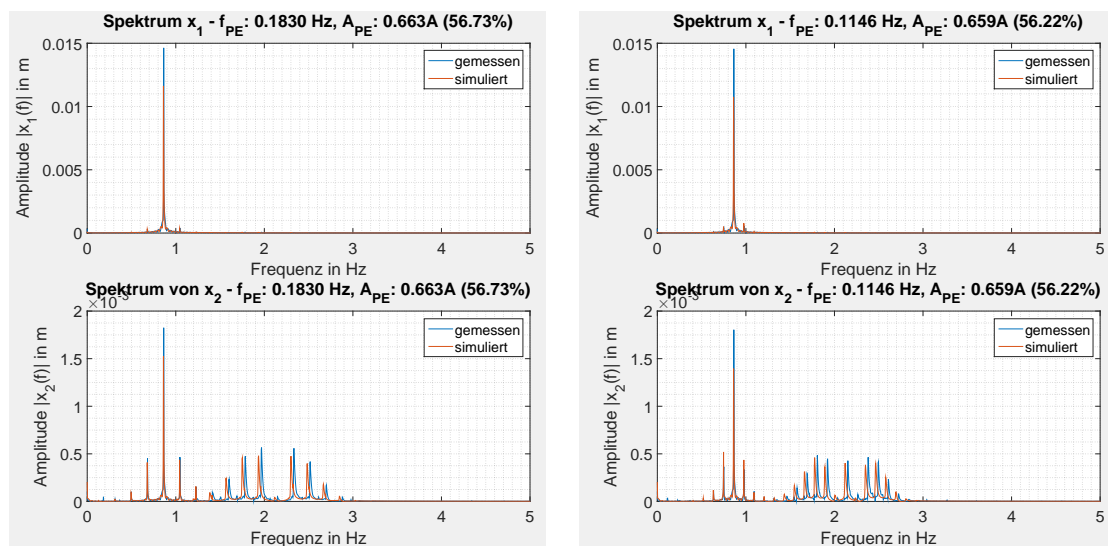


Abbildung 6.37: Spektralkarten des Ausschlages der Masse 2 - Verschwinden des Signalanteils der 2. Eigenfrequenz und höherer Ordnungen des 2-FG-Schwingers bei Parametererregung, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 0 Hz bis 0,5 Hz, PE-Amplitude 0,664 A (56,60%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm



(a) Frequenz: 0,1830 Hz - Verschwinden des Signal- (b) Frequenz: 0,1146 Hz - Verschwinden des Signal-
anteils der 2. Eigenfrequenz anteils der 1. Ordnung der 2. Eigenfrequenz

Abbildung 6.38: Spektren des Ausschlages der Massen - Verschwinden des Signalanteils der 2. Eigenfrequenz bzw. derer 1. Ordnungen des 2-FG-Schwingers bei Parametererregung, mit $m_1 = 1,1101$ kg und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

6.4.3 Zusammenfallen der zweiten Eigenfrequenz mit der Parametererregungsfrequenz

Wie schon zuvor bei der Präsentation der Spektralkarten des untersuchten PE-Frequenzbereichs erwähnt, kommt es bei Frequenzen der Parametererregung die nahe der zweiten Eigenfrequenz des Systems liegen zu unerwartetem Verhalten. Das Spektrum der Bewegung der kleinen Masse enthält dabei nicht wie zu erwarten einen dominanten Anteil der zweiten Eigenfrequenz, sondern enthält stattdessen in einem begrenzten Bereich genau die Parametererregungsfrequenz. Dieser Bereich beginnt bei ca. 2,047 Hz und endet abrupt bei einer PE-Frequenz von 2.214 Hz. In den folgenden beiden Abbildungen 6.39 und 6.40 sind die Spektralkarten im Bereich dieser PE-Frequenz im Detail für die Messung und die Simulation gezeigt.

Ein weiterer Unterschied bei diesen Frequenzen ist bei 0 Hz auf der Achse der Schwingungsfrequenzen erkennbar. Während für die übrigen Frequenzen der Betrag der statischen Verschiebungen konstant ist, steigt dieser innerhalb dieses Bereichs auf ein Vielfaches an. Besonders deutlich zu erkennen ist diese statische Verschiebung wenn man sich die Spektralkarte dreidimensional betrachtet wie in Abbildungen 6.41 für die Lagekoordinate der Masse 2 gezeigt ist. Zur besseren Erkennbarkeit sind dabei die Spitzenwerte nicht mehr weiß sondern rot eingefärbt. In Abb. 6.42 sind die Verläufe der Lagekoordinaten bei einer Frequenz von 2,1486 Hz dargestellt. Dabei ist zusätzlich noch der (arithmetische) Mittelwert und die gefittete Nullpunktverschiebung eingezeichnet.

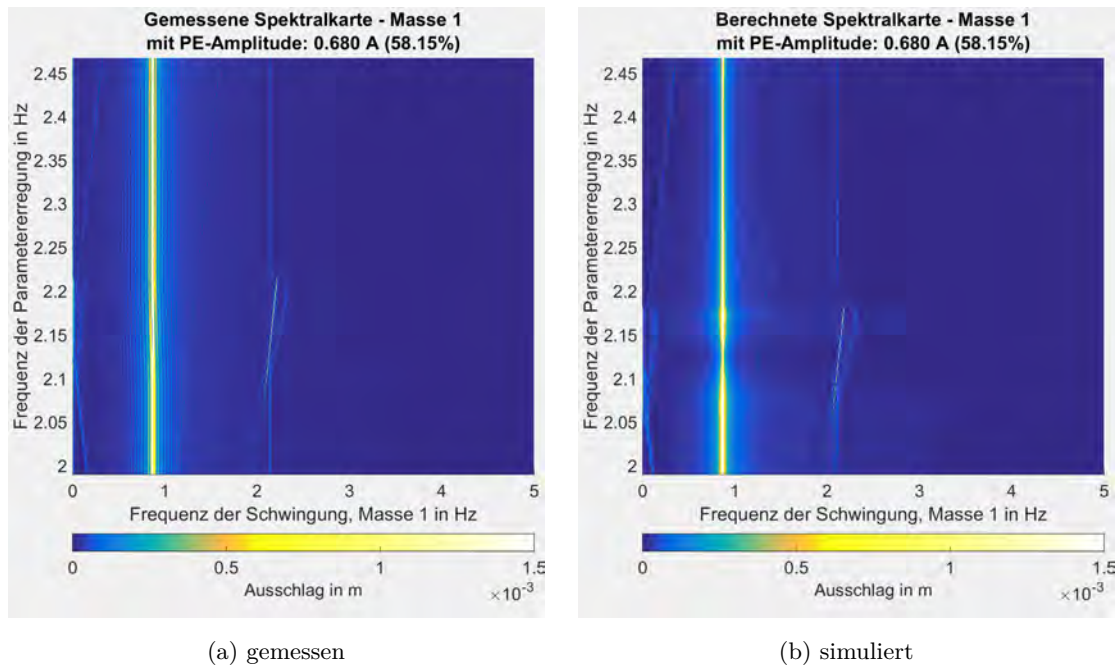


Abbildung 6.39: Spektralkarten des Ausschlages der Masse 1 - Schwingungsanteile mit Parametererregungsfrequenz statt zweiter Eigenfrequenz und Erhöhung des Gleichanteils der Auslenkung, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2 Hz bis 2,47 Hz, PE-Amplitude 0,680 A (58, 15%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

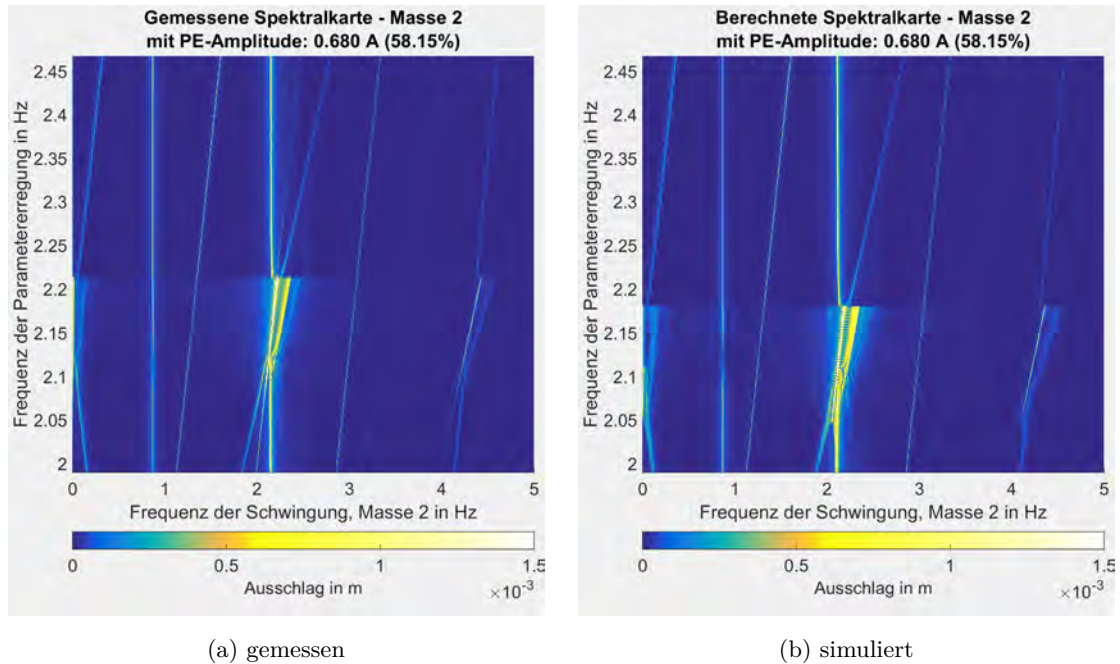


Abbildung 6.40: Spektralkarten des Ausschlages der Masse 2 - Schwingungsanteile mit Parametererregungsfrequenz statt zweiter Eigenfrequenz und Erhöhung des Gleichanteils der Auslenkung, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2 Hz bis 2,47 Hz, PE-Amplitude 0,680 A (58,15%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

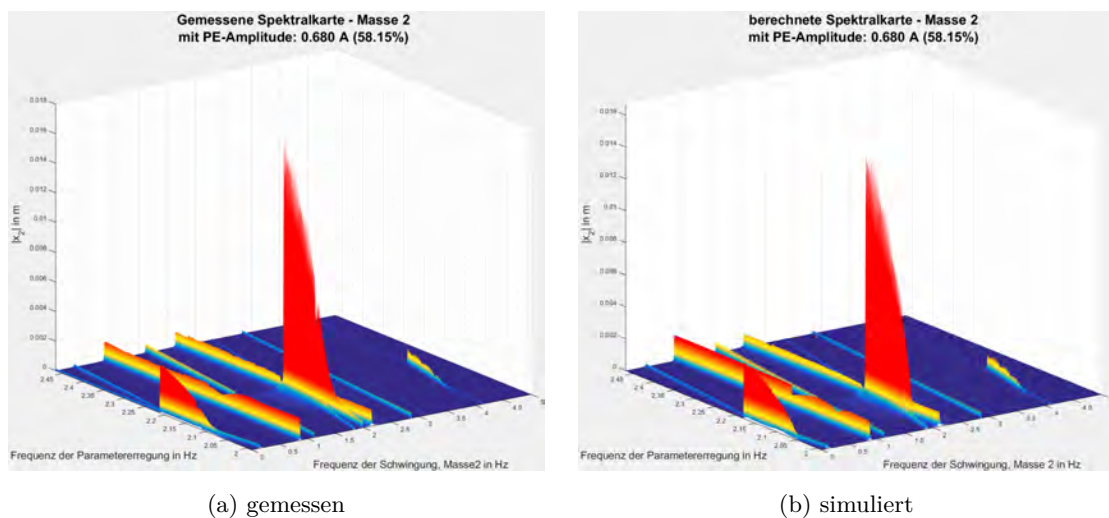


Abbildung 6.41: dreidimensionale Spektralkarten des Ausschlages der Masse 2 - Schwingungsanteile mit Parametererregungsfrequenz statt zweiter Eigenfrequenz und Erhöhung des Gleichanteils der Auslenkung, mit $m_1 = 1,1101$ kg, PE-Frequenz 2 Hz bis 2,47 Hz, PE-Amplitude 0,680 A (58,15%) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20$ mm und $x_{0,2} = 8$ mm

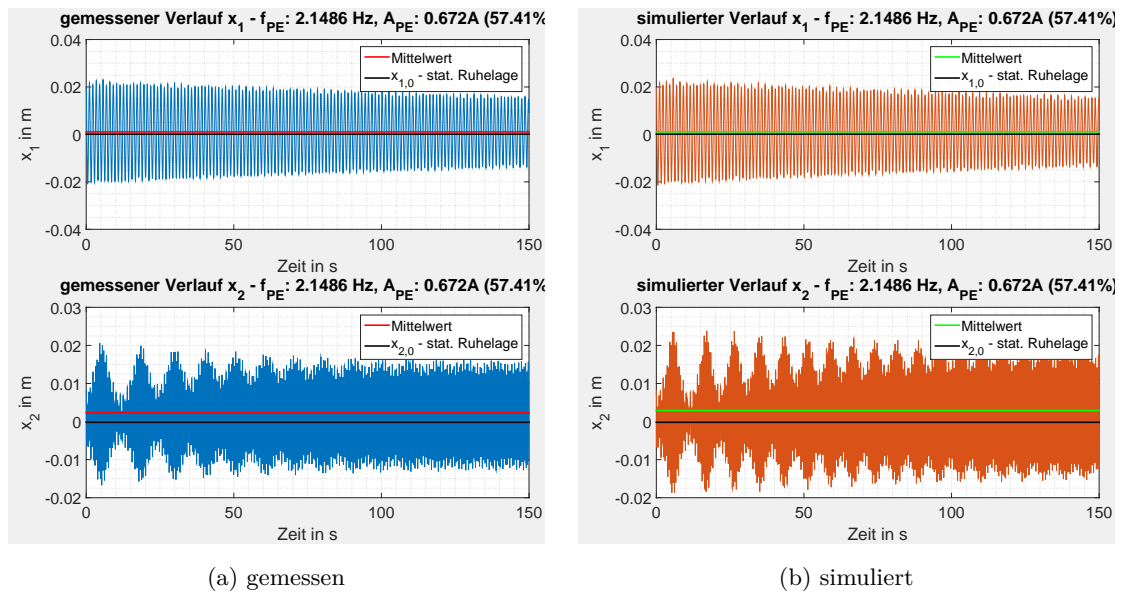


Abbildung 6.42: Verläufe der Lagekoordinaten über die Zeit mit deutlich erkennbarer Abweichung des Mittelwerts von der statischen Ruhelage, mit $m_1 = 1,1101 \text{ kg}$, PE-Frequenz $2,1486 \text{ Hz}$, PE-Amplitude $0,672 \text{ A}$ ($57,41\%$) und Anfangsauslenkungen $x_{0,1} = 20 \text{ mm}$ und $x_{0,2} = 8 \text{ mm}$

Kapitel 7

Zusammenfassung

Es wurde ein Simulationsmodell zu einem bestehenden 2-Massen-Prüfstand mit einem variablen Steifigkeitsparameter erstellt. Die Variation der Steifigkeit erfolgte über einen magnetischen Aktuator, welche linear vom Spulenstrom und nichtlinear von der Auslenkung abhängig ist. Aus dem nichtlinearen 2-FG-Modell des Prüfstandes wurden zur Parameteridentifikation 1-FG-Modelle abgeleitet. Die Parameter für das Rechenmodell wurden in mehreren Schritten, zuerst durch Messung und dann durch Parameteridentifikation, ermittelt. Es hat sich dabei auch herausgestellt, dass die numerische Identifikation stark von der richtigen Wahl der Anfangs- und Grenzwerte der Parameter beeinflusst wird.

Der untersuchten Frequenzen der Parametererregung umfassten einen Bereich indem beide Eigenfrequenzen und alle dazwischen- und darunterliegenden Kombinationsfrequenzen vorhanden waren. Es wurden dabei immer die Ergebnisse des Versuchs den entsprechenden Ergebnissen der Simulation gegenübergestellt und verglichen. Frequenzkarten der Schwingungen für verschiedene Massenkonfigurationen und Anfangsbedingungen zeigten dabei qualitativ und quantitativ sehr gute Übereinstimmungen zwischen Messung und Simulation.

Beim Vergleich der Abklingzeiten zeigte sich, dass die Wahl der Anfangsbedingungen und der somit dominierenden Schwingungsmoden einen wesentlichen Einfluss darauf hat ob die Parametererregung positiven Einfluss auf die Dämpfungseigenschaften hat. Die qualitative Übereinstimmung zwischen Versuch und Simulation war hier ebenfalls gegeben, wenn auch die Berechnung der Abklingzeiten in der Simulation andere Werte ergeben hat als im Versuch und bei vereinzelt Frequenzen größere Unterschiede auftraten. Weiters zeigt sich, dass die positiven Dämpfungseffekte nicht auftreten, wenn die dazugehörigen Frequenzen zu nahe an anderen, instabilen Frequenzen des Systems liegen. Aus diesem Grund wurden zwei verschiedene Massenparameter der Masse 1 gewählt.

Zur genaueren Untersuchung der Energien wurden weitere Vergleiche bei einzelnen Parametererregungsfrequenzen gewählt. Darunter waren die beiden Eigenfrequenzen des Systems, eine Parameterresonanzfrequenz und eine Frequenz bei welcher maximale, verstärkte Dämpfung auftritt. Der Vergleich erfolgte mittels der Koordinatenverläufe, der Frequenzspektren und der modalen und gesamten Energieverläufe. Zusätzlich wurden noch die Modalen Energien übereinander aufgetragen um somit als den Energieverlauf in der „modalen Ebene“ darzustellen. Simulation und Versuch zeigten auch hier wieder gute Übereinstimmungen, wenn auch deutliche Abweichungen

in den Modulationsfrequenzen und den Energieniveaus festzustellen waren. Bei der ersten Eigenfrequenz wurde im betrachteten Zeitraum ein kontinuierliches Abklingen beider Mode festgestellt, während sich bei Parametererregung mit der zweiten Eigenfrequenz die Energie des zweiten Modes auf ein konstantes Energieniveau einpendelte. Die Untersuchung der Schwingungen bei der Parametererregungsfrequenz mit maximalen Dämpfungseigenschaften zeigte, besonders in der modalen Ebene, wie Energie zwischen den Schwingungsmoden ausgetauscht wurde. Während dieses abwechselnden Energieaustausches verschwanden die modalen Energien eines Modes abwechselnd nahezu vollständig. Bei der Kombinationsfrequenz mit Resonanz konnte ebenfalls laufender Energieaustausch zwischen den Moden beobachtet werden. Dieser war jedoch bedeutend schwächer und die Energien beider Moden pendelt gegen Ende des betrachteten Zeitraums um endliche Werte.

Weiters konnten noch einige besondere Effekte festgestellt werden. Für gewissen Kombinationen der Anfangsbedingungen und Parametererregungsfrequenzen konnte eine nahezu vollständige, temporäre Auslöschung des zweiten Schwingungsmodes festgestellt werden. Dieser Effekt zeigte sich vorwiegend im Versuch für einige, wenige Frequenzen und konnte in der Simulation auch ansatzweise gezeigt werden. Für bestimmte niedrige Parametererregungsfrequenzen wurde festgestellt, dass der Signalanteil der zweiten Eigenfrequenz oder höherer Ordnungen dieser verschwinden können. Bei Variation der Steifigkeit mit einer Frequenz nahe der zweiten Eigenfrequenz des Systems konnten ebenfalls besondere Effekte festgestellt werden. Zum einen enthält das Signal der Schwingung nicht mehr genau die zweite Eigenfrequenz, sondern die Parametererregungsfrequenz und zum anderen kommt es zu einer Verschiebung des Gleichanteils des Signals weg von der Ruhelage.

Kapitel 8

Ausblick

Das bisherige Modell bildet den Prüfstand bereits sehr gut ab. Es zeigen sich jedoch bei den Energien und den Abklingzeiten relativ große quantitative Unterschiede. Zur Verbesserung der Ergebnisse muss das Simulationsmodell noch weiter verbessert werden, insbesondere was die magnetische Steifigkeit und die Dämpfung anbelangt.

Das bisherige Modell der magnetischen Steifigkeit basiert auf statischen Messungen und einer einfachen quadratischen Funktion als Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung. Die Einbeziehung dynamischer Effekte könnte hier deutliche Verbesserungen bringen. Damit verbunden wird auch die tatsächliche Einbringung der Energie durch den Aktuator nicht umfassend berücksichtigt.

Bei der Dämpfung werden nur lineare Terme verwendet. Es zeigt sich jedoch bereits bei der Parameteridentifikation der 1-FG-Systeme, dass dieses viskose Dämpfungsmodell die tatsächlichen Verhältnisse nicht vollständig abbilden kann.

Am Prüfstand selbst wird die Leistung des Aktuators aktuell ebenfalls nicht gemessen. Eine derartige Messung und das erweiterte Aktuatormodell würden es ermöglichen umfangreichere Studien zu Energieflüssen des Systems durchzuführen.

Weitere Untersuchungen, auch analytischer Natur, erfordern die oben genannten besonderen Effekte welche festgestellt wurden.

Literaturverzeichnis

- [1] ECKER, Horst: *Suppression of self-excited vibrations in mechanical systems by parametric stiffness excitation*. Wien : ARGESIM, 2005
- [2] DOHNAL, Fadi: *Damping of mechanical vibrations by Parametric Excitation: Parametric Resonance and Anti-resonance*. Suedwestdeutscher Verlag für Hochschulschriften, 2009. – 244 S.
- [3] ECKER, Horst ; PUMHÖSSEL, Thomas: Vibration suppression and energy transfer by parametric excitation in drive systems. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C - Journal of Mechanical Engineering Science* 226 (2012), S. 8
- [4] DOHNAL, Fadi ; PARADEISER, Wolfgang ; ECKER, Horst: Experimental study on cancelling self-excited vibrations by parametric excitation. In: *Proceedings of IMECE 2006*, 2006, S. 10
- [5] ECKER, Horst ; PUMHÖSSEL, Thomas: Energy Transfer in Parametrically Excited Hamiltonian-Multi-DOF Systems. In: M.A. SAVI (EDITOR), ABCM (Hrsg.): *Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, Rio de Janeiro, Brazil*, 2013, S. 9
- [6] TONDL, Aleš ; ECKER, Horst: Self-excited vibration quenching using parametric excitation: the effect of an additional external excitation. In: *6. International Conference on Vibration Problems, Liberec, 2003* Technischen Universität Wien, Institut für Maschinendynamik und Messtechnik, 2003, S. 6
- [7] KNIFFKA, Till J.: *Studien zur Anti-Resonanz bei parametererregten Mehrfreiheitsgrad-Drehschwingern*, Technischen Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, Diplomarbeit, September 2012
- [8] SCHMIDT, Erich ; ECKER, Horst: Prototype design and experimental verification of an electromagnetic actuator for parametric stiffness excitation. In: *Proceedings of the IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*, 2010, S. 5
- [9] PARADEISER, Wolfgang: *Experimenteller Nachweis einer Parameter-Antiresonanz*, Technischen Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, Diplomarbeit, Mai 2006
- [10] KLOTTER, Karl: *Technische Schwingungslehre*. Bd. Teil A: Lineare Schwingungen. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978

- [11] PLANK, Anton: *Aktive Schwingungsdämpfung eines Zweimassenschwingers mittels parametererregten Steifigkeiten*, Technischen Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, Projektarbeit, November 2007
- [12] HOLZINGER, Norbert: *Erweiterung des Funktionsumfanges eines schwingungstechnischen Prüfstandes*, Technischen Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, Bachelorarbeit, Juli 2012
- [13] THE MATHWORKS, INC. (Hrsg.): *MATLAB Documentation, Online Help - lsqcurvefit*. R2014b. : The MathWorks, Inc., 2014
- [14] DOHNAL, Fadi: Fourier analysis of vibration signals obtained from a parametrically and self-excited system. In: BELLIZZI, S. (Hrsg.) ; COCHELIN, B. (Hrsg.) ; LAMARQUE, C.-H. (Hrsg.): *457. Euromech Colloquium, Fréjus, 2004* Euromech 457. - Lyon-Vaulx-en-Velin, 2004, S. 4
- [15] MAYRDORFER, Alexander: *Systemidentifikation eines schwingungstechnischen Prüfstandes*, Technischen Universität Wien, Institut für Mechanik und Mechatronik, Seminar-/Projektarbeit, 2013