

Interpolation Technique for Computational Aeroacoustics and Vibroacoustics

Stefan Schoder, Manfred Kaltenbacher

Institut für Mechanik und Mechatronik
Abteilung für Messtechnik und Aktorik
Technische Universität Wien, Österreich



15. März 2018, München, DAGA 2018

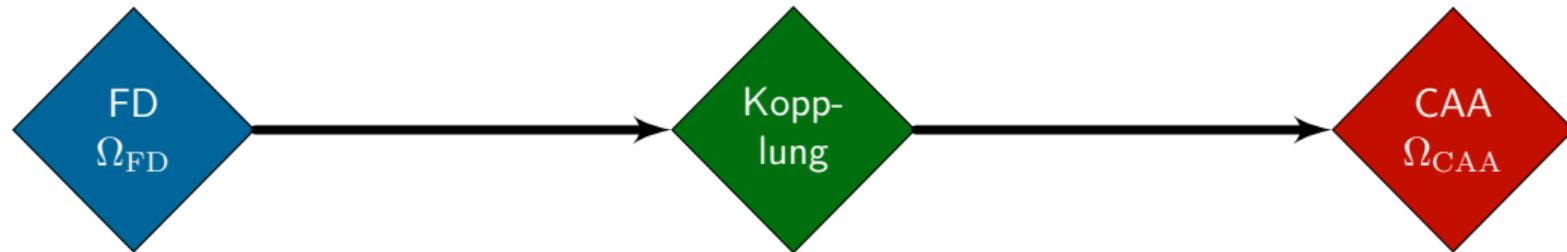
Inhalt

- 1 Hybride Simulationsstrategie
- 2 Radiale Basisfunktionen – Interpolation
- 3 Radiale Basisfunktionen – Ableitung
- 4 Zusammenfassung

Inhalt

- 1 Hybride Simulationsstrategie
- 2 Radiale Basisfunktionen – Interpolation
- 3 Radiale Basisfunktionen – Ableitung
- 4 Zusammenfassung

Ausgangssituation



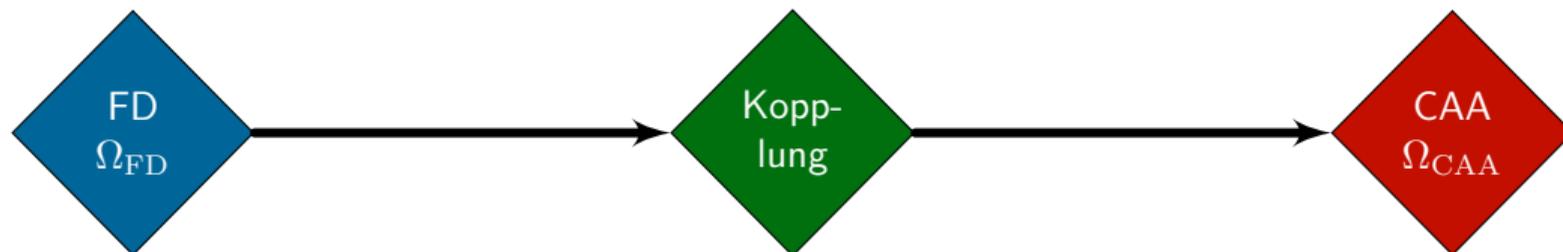
FD ... Fluiddynamik
 Ω_{FD} ... FD Gebiet

CAA ... Akustik
 Ω_{CAA} ... CAA Gebiet

Kopplung

Die Interpolation, bzw. Kopplung, stellt einen wesentlichen Baustein der hybriden Simulationskette dar.

Alternative Simulationskonzepte



Strömung

- **Numerische Fluidodynamik (CFD)**
- Messtechnik (PIV) [1]

Kopplung

- Direkt in CFD auf Ω_{CAA}
- **Direkt in CFD mit Projektion auf Ω_{CAA}**
- Teilweise Unabhängig
- **Unabhängig**

Akustik

- Fernfeld Extrapolation
- **Akustik separat (Analogie)**

Vergleich der Simulationskonzepte

Hybride Simulation	Interpolation	Flexibel	Ableitung	Konservativ	Akustik
Quellterm CFD	++	o	+	+	+
Quellterm RBF Nachbar	o	+	o	o	o
Quellterm RBF Gitter	?	?	?	?	?

RBF ... Radiale Basisfunktionen Nächste Nachbarn/Gittersuche(Zwiebelschale)

Ziel

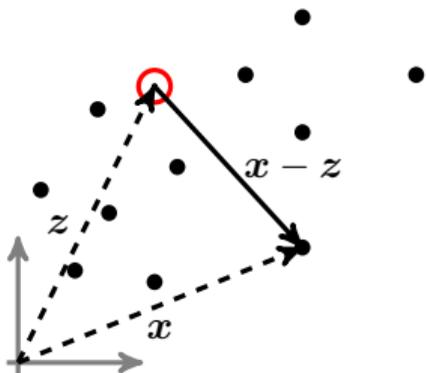
Flexible, exakte, lokale Methode zur Quelltermberechnung.

Inhalt

- 1 Hybride Simulationsstrategie
- 2 Radiale Basisfunktionen – Interpolation**
- 3 Radiale Basisfunktionen – Ableitung
- 4 Zusammenfassung

Radiale Basisfunktionen – Interpolation

- Datenpunkt (\mathbf{x}, \bullet)
- Zielpunkt (\mathbf{z}, \odot)



Idee der radialen Basisfunktionen

1. Nachbarsuche (Datenpunkte)
2. Wähle Interpolationsfunktion
3. Löse

$$s(\mathbf{x}_k) := \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|_2)$$

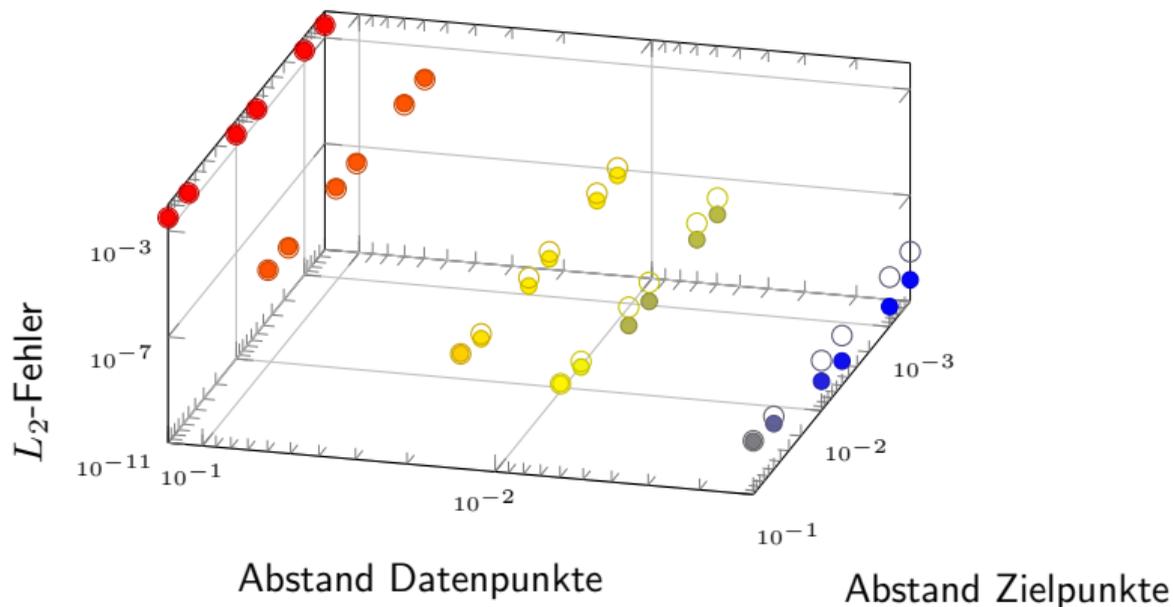
$$\text{mit } s(\mathbf{x}_k) = u_d(\mathbf{x}_k)$$

4. Auswerten im Zielpunkt

Verwenden lokalen Ansatz von Lazzaro[2]

Radiale Basisfunktionen Interpolation – Konvergenz

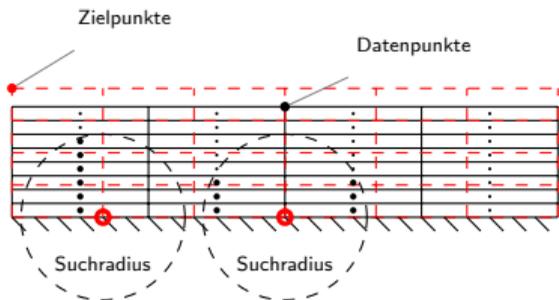
Dichtheit der Datenpunkte, Gittersuche (\bullet) und Nächste-Nachbar-Suche (o)



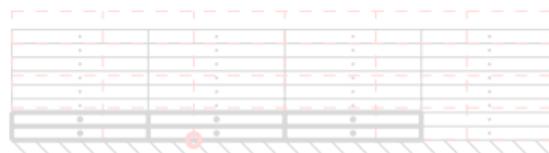
Auf ausgewogenen Gittern sind die Gittersuche und die Nächste-Nachbar-Suche gleich gut.

Suche nach 'guten' Nachbarn?

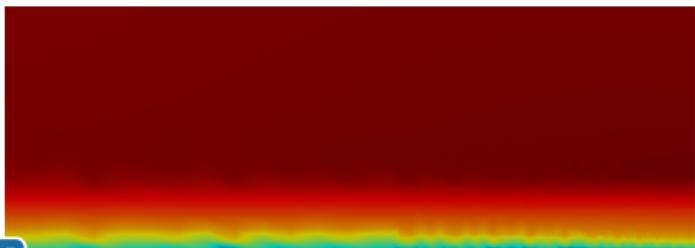
Nächste Nachbar (NN)



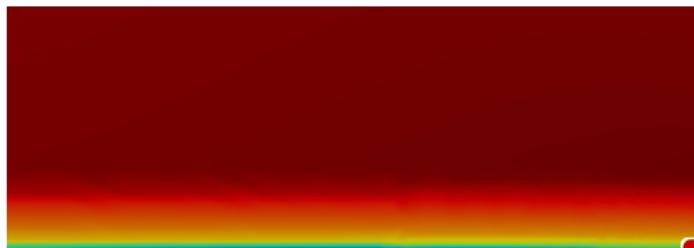
Gittersuche (#) – Zwiebelschale



Randschicht

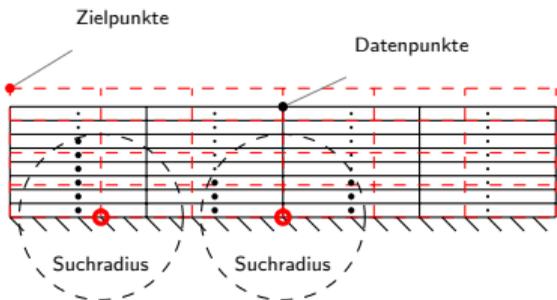


Randschicht

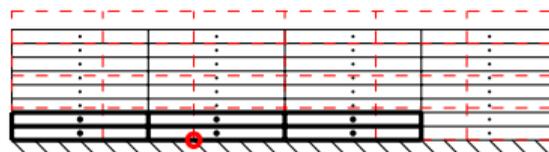


Suche nach 'guten' Nachbarn?

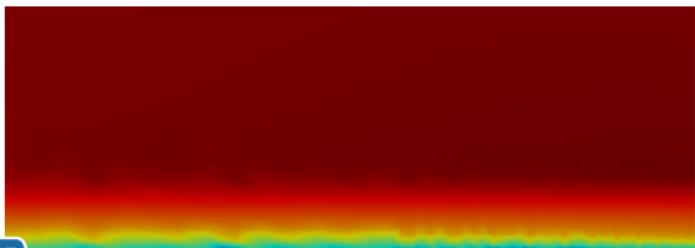
Nächste Nachbar (NN)



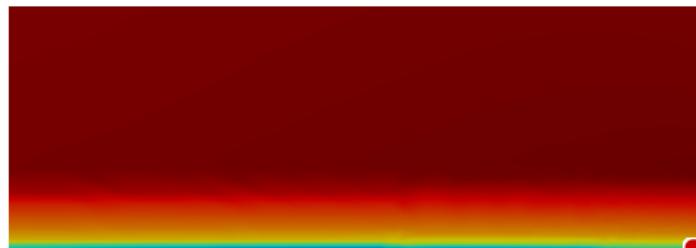
Gittersuche (#) – Zwiebelschale



Randschicht

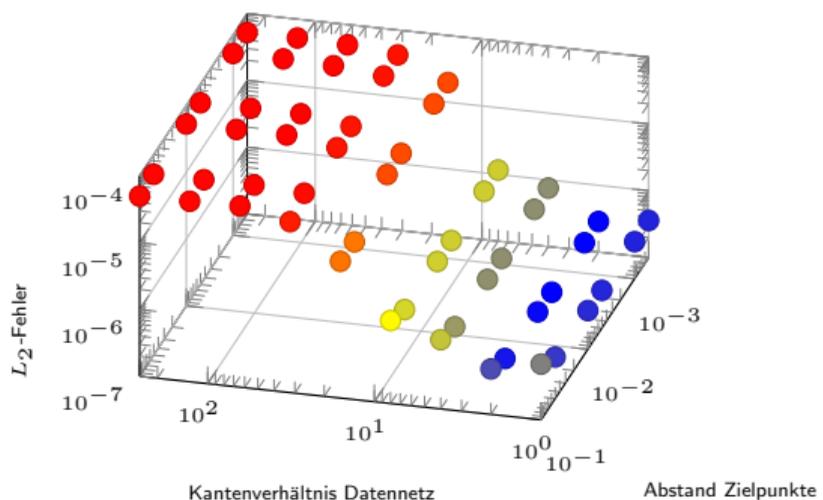


Randschicht

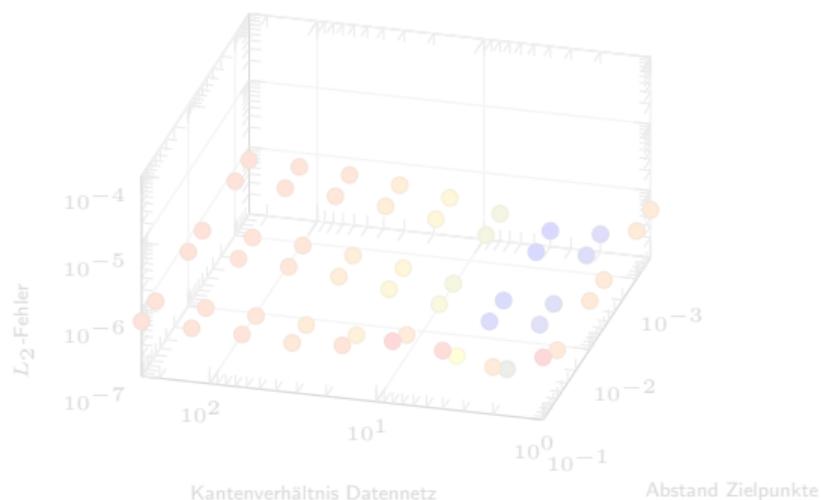


RBF Interpolation – Konvergenz, Auswirkung der Datenpunktverzerrung

NNachbar-Suche

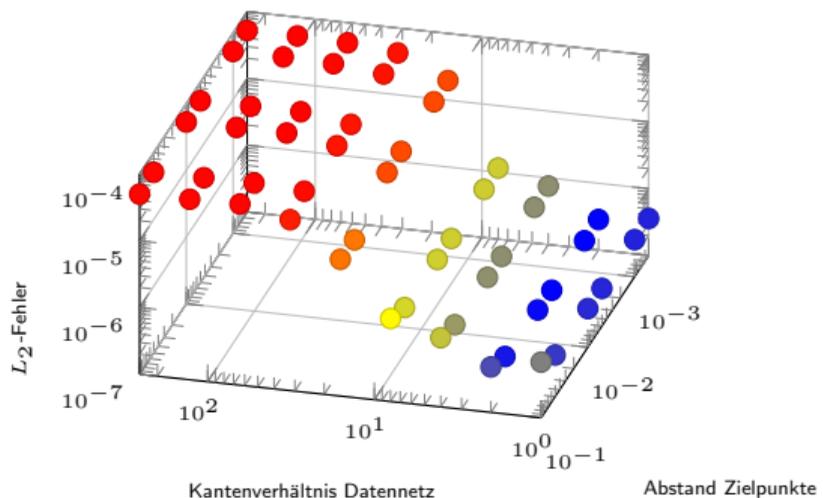


Gittersuche

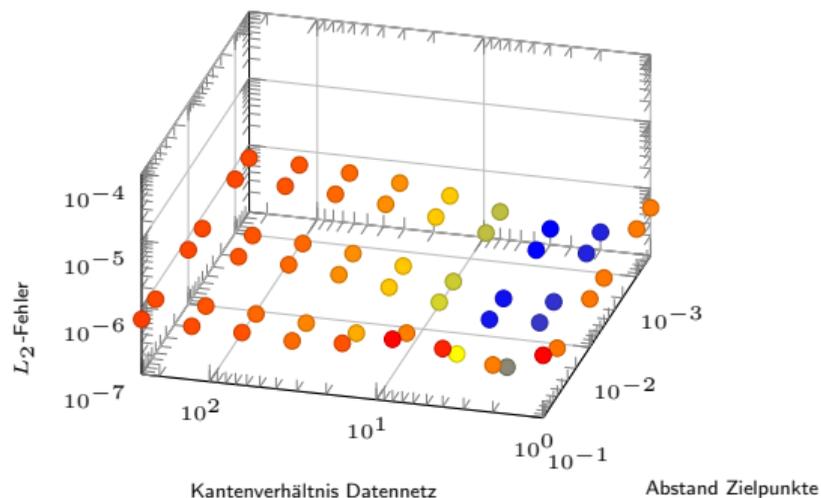


RBF Interpolation – Konvergenz, Auswirkung der Datenpunktverzerrung

NNachbar-Suche



Gittersuche



Vergleich der Simulationskonzepte

Hybride Simulation	Interpolation	Flexibel	Ableitung	Konservativ	Akustik
Quellterm CFD	++	o	+	+	+
Quellterm RBF Nachbar	o	+	o	o	o
Quellterm RBF Gitter	++	?	?	?	?

Ziel

Flexible, exakte, lokale Methode zur Quelltermberechnung.

- ✓ Lokale Methode; Wahl RBF
- ✓ Exakte Interpolation; Gittersuche

Inhalt

- 1 Hybride Simulationsstrategie
- 2 Radiale Basisfunktionen – Interpolation
- 3 Radiale Basisfunktionen – Ableitung**
- 4 Zusammenfassung

Flexibilität

Flexibilität in der Quelltermberechnung?

Typischer Quellterm

- Mittelwerte, Zeitfilter
- Transformationen (Zeitbereich — Frequenzbereich)
- Vektoranalysis von Primär- und abgeleiteten Variablen
- Lambvektor: $-\nabla \cdot (((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u})')$, Lighthilltensor, Laplace vom Druck, Zeitableitung vom Druck, Substantielle Zeitableitung $\frac{\partial p^{\text{ic}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p^{\text{ic}}$, Entropiequellen $\nabla \cdot (T' \nabla \bar{s})$

Radiale Basisfunktionen Ableitungen

Ableitungen mit RBF

Ableitungsoperatoren $\mathcal{L}[\phi]$ (Gradient, Divergenz, Rotation)

1. Wahl der Nachbarn N , $\mathcal{L}[c_{\text{const}}] = 0$
2. Löse für α_i

$$\mathcal{L}[\phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{z}\|_2)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|_2), \quad \forall k = 1, \dots, N$$

3. Auswertung $\mathcal{L}[s(\mathbf{x})]$

$$\mathcal{L}[s(\mathbf{z})] = \sum_{i=1}^N \alpha_i s(\mathbf{x}_i)$$

Vergleich der Simulationskonzepte

Hybride Simulation	Interpolation	Flexibel	Ableitung	Konservativ	Akustik
Quellterm CFD	++	o	+	+	+
Quellterm RBF Nachbar	o	+	o	o	o
Quellterm RBF Gitter	++	+	?	?	?

Ziel

Flexible, exakte, lokale Methode zur Quelltermberechnung.

- ✓ Lokale Methode; Wahl RBF
- ✓ Exakte Interpolation; Gittersuche
- ✓ Flexibel

Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Herausforderungen

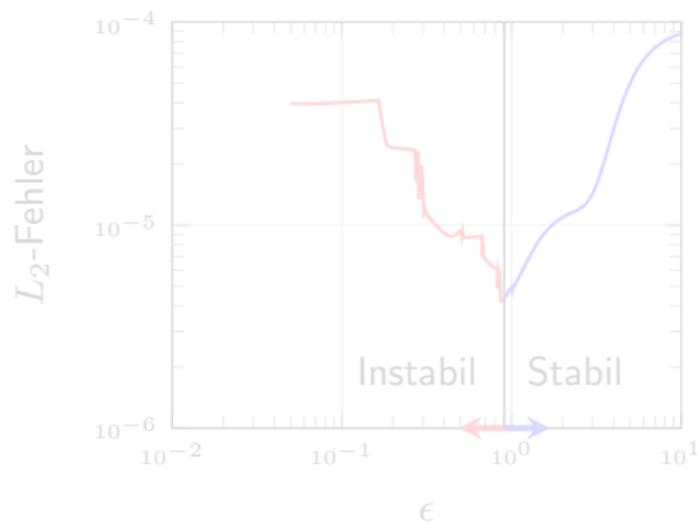
Konvergenz

- $\forall k = 1, \dots, N$

$$\mathcal{L}[\phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{z}\|_2)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|_2)$$

- Flachere Basisfunktionen konvergieren gegen die Ursprungsfunktion[3]
- Systemmatrix an die Grenze der Invertierbarkeit
- Optimierung der Flachheit

Numerische Konvergenz in ϵ



Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Herausforderungen

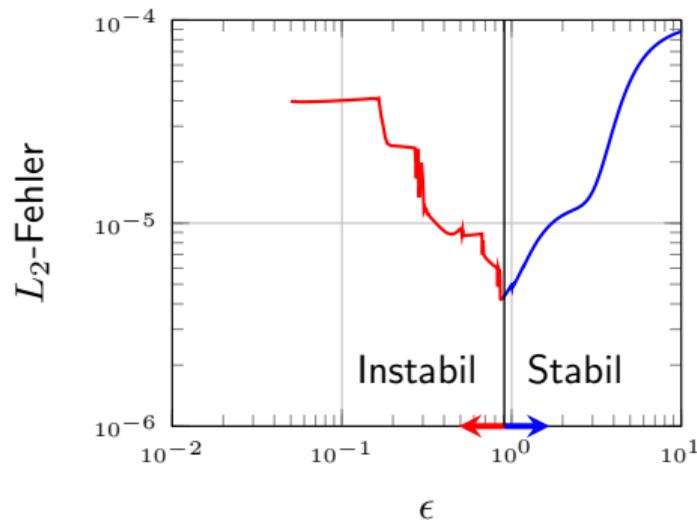
Konvergenz

- $\forall k = 1, \dots, N$

$$\mathcal{L}[\phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{z}\|_2)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|_2)$$

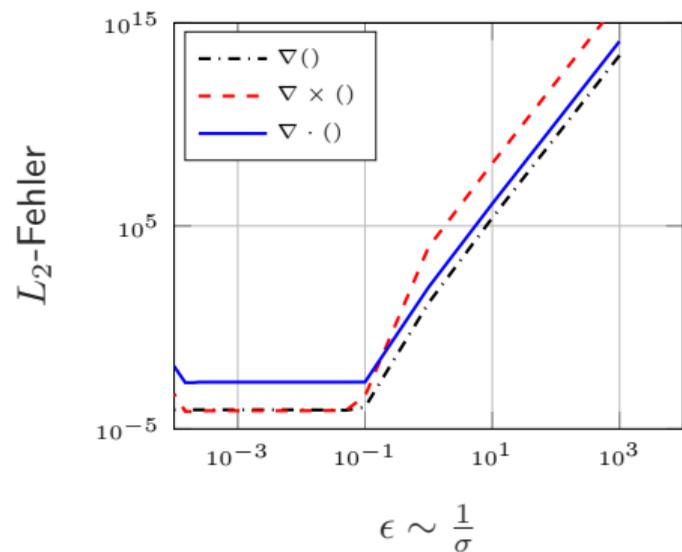
- Flachere Basisfunktionen konvergieren gegen die Ursprungsfunktion[3]
- Systemmatrix an die Grenze der Invertierbarkeit
- Optimierung der Flachheit

Numerische Konvergenz in ϵ

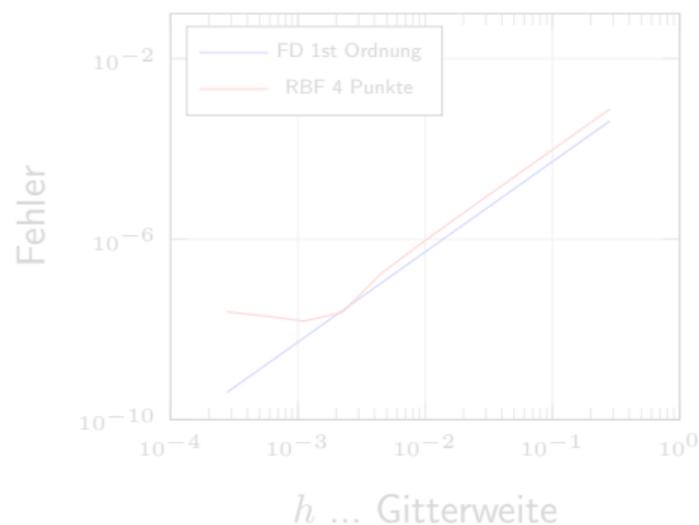


Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Konvergenz

Flachheit σ der Basis



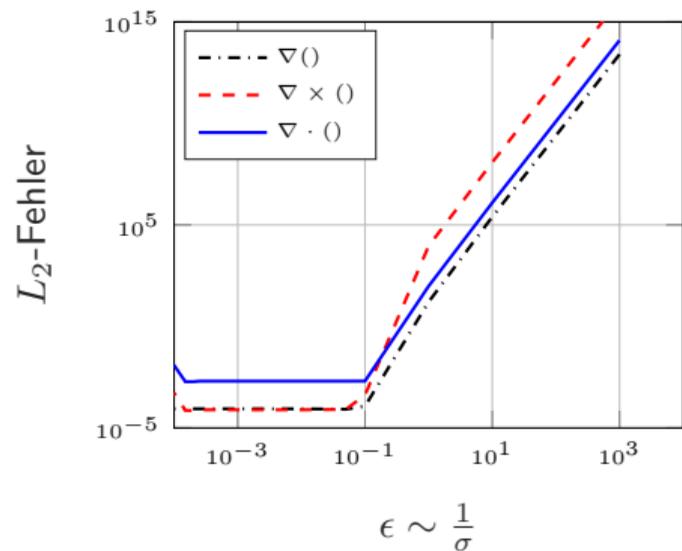
Vergleich RBF – Finite Differenzen



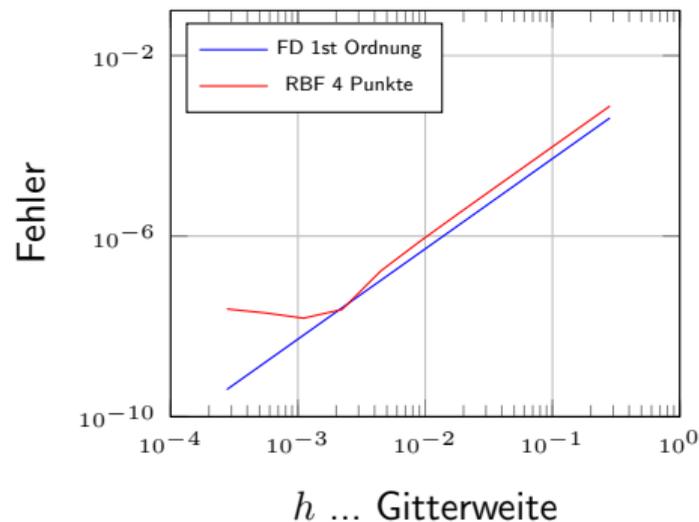
Mehr Punkte, höhere Konvergenzordnung?

Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Konvergenz

Flachheit σ der Basis



Vergleich RBF – Finite Differenzen



Mehr Punkte, höhere Konvergenzordnung?

Vergleich der Simulationskonzepte

Hybride Simulation	Interpolation	Flexibel	Ableitung	Konservativ	Akustik
Quellterm CFD	++	o	+	+	+
Quellterm RBF Nachbar	o	+	o	o	o
Quellterm RBF Gitter	++	+	+	?	?

Ziel

Flexible, exakte, lokale Methode zur Quelltermberechnung.

- ✓ Lokale Methode; Wahl RBF
- ✓ Exakte Interpolation und Ableitung; Gittersuche
- ✓ Flexibel

Konservative Eigenschaften

Konservativ oder nicht?

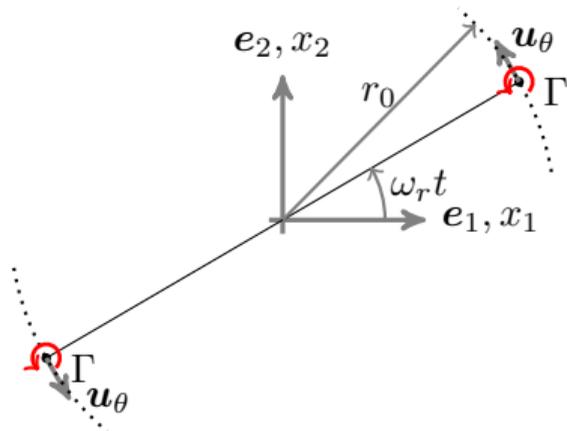
Konservativ

- Quelltermberechnung am CFD-Gitter in Kombination mit Gitterschnitt CAA-Gitter
- Herausforderung: Sind die Ableitungen konservativ?, ist zu klären.
- Anwendungsbeispiel: "Rotating vortex pair"

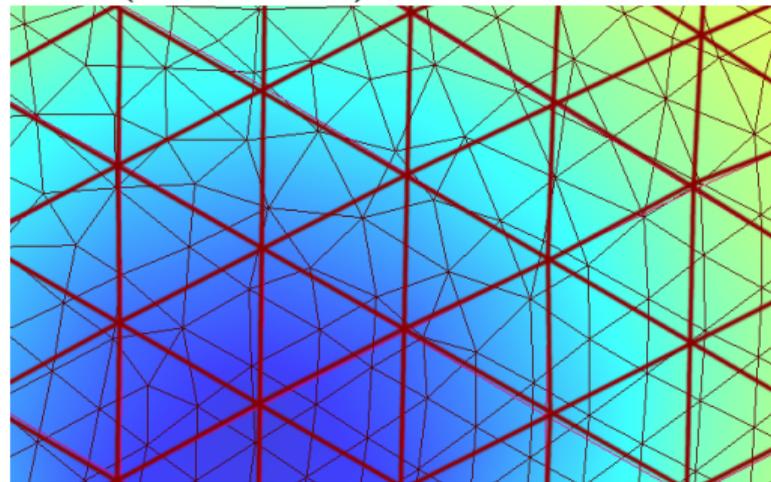
Akustisches Feld – Rotierendes Wirbelpaar

Wirbelschall

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p' - \nabla \cdot \nabla p' = \rho_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})$$

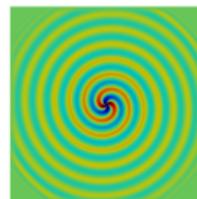


Gitter (Grob — Fein)

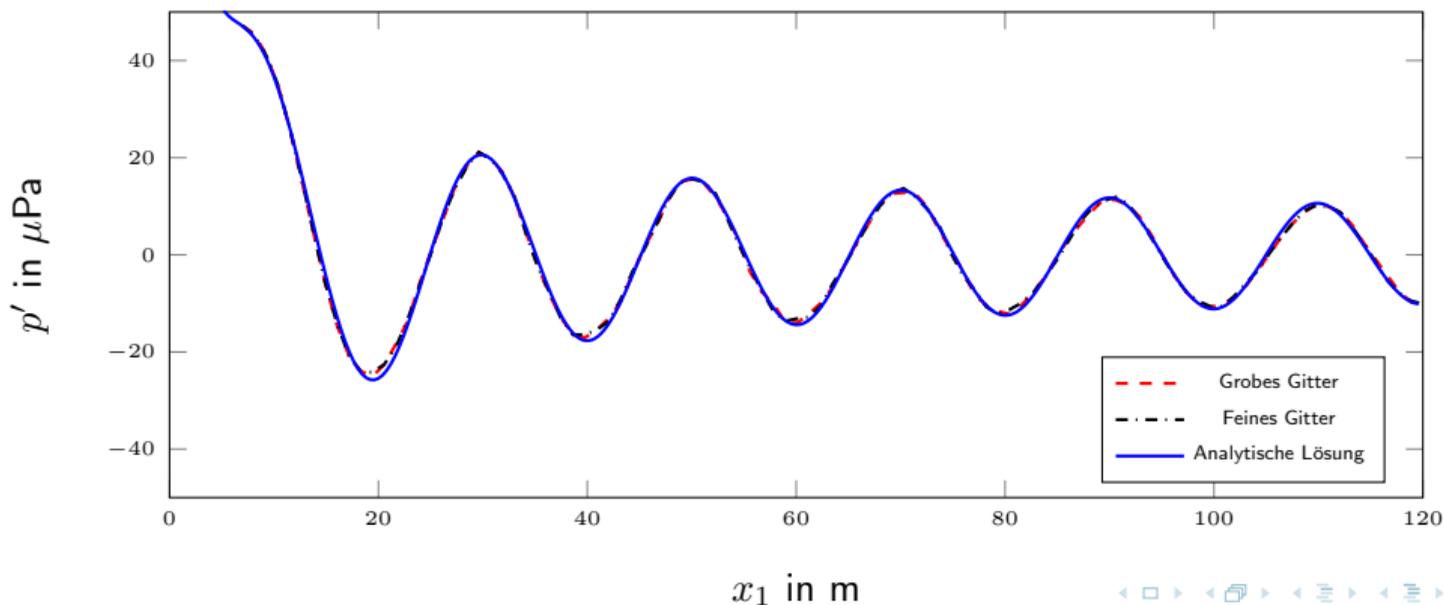


Wieviel gröber kann das Akustik-Gitter sein?
[4]

Akustisches Feld – Rotierendes Wirbelpaar



Wechseldruck im Vergleich zur analytischen Lösung



Inhalt

- 1 Hybride Simulationsstrategie
- 2 Radiale Basisfunktionen – Interpolation
- 3 Radiale Basisfunktionen – Ableitung
- 4 Zusammenfassung

Vergleich der Simulationskonzepte

Hybride Simulation	Interpolation	Flexibel	Ableitung	Konservativ	Akustik
Quellterm CFD	++	o	+	+	+
Quellterm RBF Nachbar	o	+	o	o	o
Quellterm RBF Gitter	++	+	+	+	+

Ziel

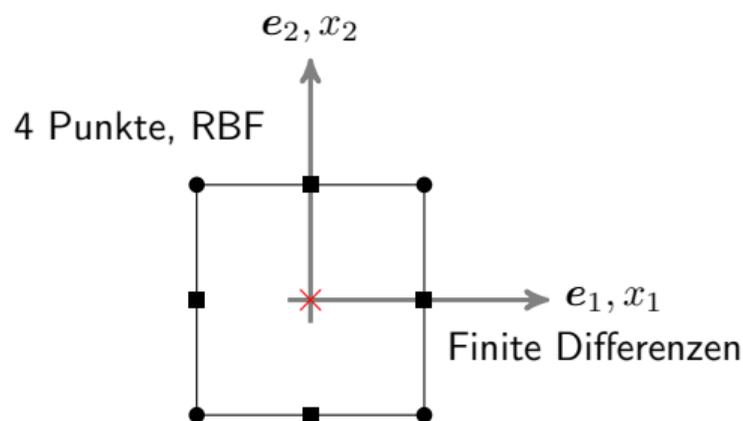
Flexible, exakte, lokale Methode zur Quelltermberechnung.

- ✓ Lokale Methode; Wahl RBF
- ✓ Exakte Interpolation und Ableitung; Gittersuche
- ✓ Flexibel; Ableitungen bilden können
- ✓ Konservativ; In Kombination mit Gitterschnitt, Quellterme auf CFD-Gitter

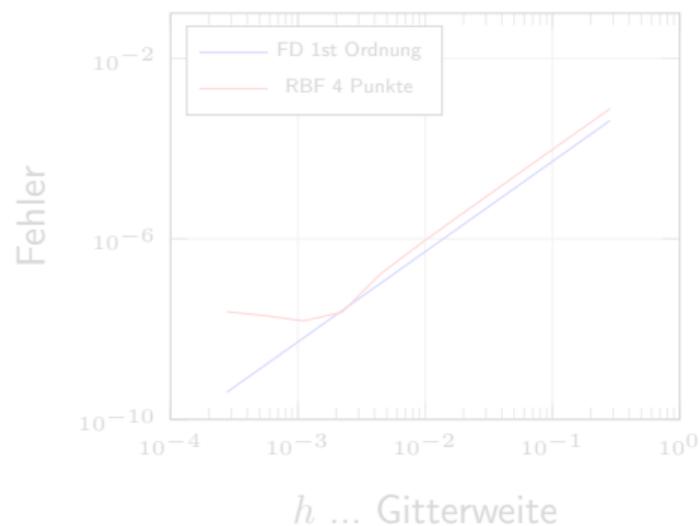
Literatur

-  A. LODERMEYER, M. TAUTZ, S. BECKER, M. DÖLLINGER, V. BIRK, AND S. KNIESBURGES: *Aeroacoustic analysis of the human phonation process based on a hybrid acoustic PIV approach*.
Experiments in Fluids, Springer,
Volume: 59 Issue: 1 2018, pages: 13
-  D. LAZZARO, AND L. MONTEFUSCO: *Radial basis functions for the multivariate interpolation of large scattered data sets*.
Journal of Computational and Applied Mathematics,
Volume: 140 Issue: 2002, pages: 521536
-  W. R. MADYCH: *Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolators*.
Computers & Mathematics with Applications, Elsevier,
Volume: 24 Issue: 1992 12, pages: 121–138
-  P. T. NAGY: *Aeroacoustic simulations of the cavity tone*.
Diplomarbeit, TU Wien,
Year: 2014

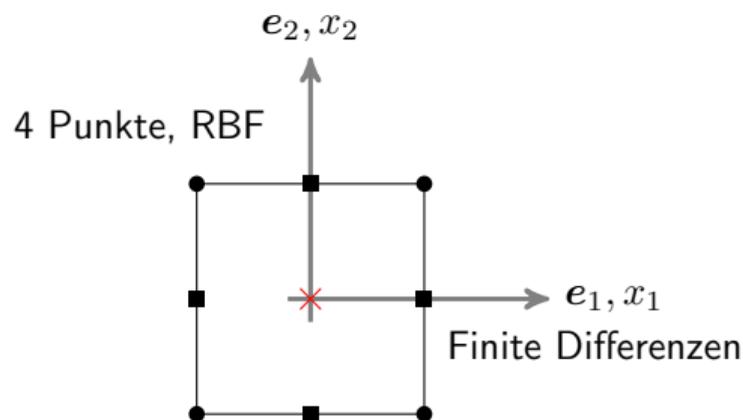
Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Konvergenz



Vergleich RBF – Finite Differenzen



Radiale Basisfunktionen Ableitungen – Konvergenz



Vergleich RBF – Finite Differenzen

